

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)  
КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА

## **КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ**

по дисциплине «МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА;  
ГЕОМЕТРИЯ»

для специальностей среднего профессионального образования  
технического и социально-экономического профилей

1 курс

1-2 семестр

Часть 1

Составитель - старший преподаватель КИТП И. С. Яппарова

Владимир 2016 г.

## Пояснительная записка

Курс лекций по дисциплине «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия» рассчитан на 118 часов.

Цель конспекта лекций – освоение студентами теоретических основ учебной дисциплины.

Задачи :

- раскрытие содержания учебной дисциплины;
- обеспечение студентов необходимым объемом теоретического материала для решения прикладных задач;
- управление познавательной деятельностью студентов.

Конспект лекций построен в виде системы аудиторных занятий, учебный материал чётко дозирован по каждому занятию. Кратко и доступно изложены теоретические основы разделов курса, приведены примеры решения типовых задач, содержатся задачи для самостоятельного решения.

1 семестр

*Алгебра и начала математического анализа*

### **ЛЕКЦИЯ 1. Введение.**

- Математика в науке, технике, экономике, информационных технологиях и практической деятельности.
- Цели и задачи изучения математики при освоении специальности.

#### **Раздел 1. Развитие понятия о числе.**

#### **Тема 1.1. Числа. Приближенные вычисления**

#### ЛЕКЦИЯ 1. Действительные числа. Приближенные вычисления.

План лекции:

- Множество натуральных чисел.
- Множество целых чисел.
- Множество рациональных чисел.
- Перевод бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную и обратно.
- Иррациональные числа.
- Множество действительных чисел.
- Определение приближенного значения числа.
- Приближение с избытком и с недостатком.
- Абсолютная погрешность приближения.
- Относительная погрешность приближения.
- Значащие цифры и верные знаки.
- Округление чисел.
- Действия с приближенными числами.

Множество натуральных чисел:  $N=\{1,2,3,4, \dots\}$  – числа, с помощью которых мы считаем.  
Множество целых чисел:  $Z=\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots\}$

Множество рациональных чисел:  $Q=\{\text{числа вида } \frac{m}{n}, \text{ где } m \in Z, n \in N\}$ . К

рациональным числам относятся все числа, которые можно представить в виде обыкновенной

дроби: натуральные, например,  $2 = \frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \dots$ ; целые:  $0 = \frac{0}{1}$ ,  $-4 = \frac{-4}{1}$ ,  $\dots$ ; обыкновенные

дроби:  $\frac{2}{3}$ ;  $-2\frac{3}{7}$ ;  $\frac{7}{5}$ ;  $\dots$ ; десятичные конечные дроби:  $0,5 = \frac{1}{2}$ ;  $-2,7 = \frac{-27}{10}$ ;  $\dots$  и десятичные

бесконечные периодические дроби:  $0,33333\dots = 0,(3)$ ;  $1,225252525\dots = 0,2(25)$ .

ЗАДАЧА. Доказать, что число  $0,2(18)$  является рациональным.

РЕШЕНИЕ. Обратим это число в обыкновенную дробь.

$0,2(18) = 0,2181818\dots$ ; 18 – период дроби. Пусть  $x = 0,2181818\dots$

Умножим обе части этого равенства на  $10^1 = 10$ , т.к. между запятой и первым периодом одна цифра - 2:

$$10x = 2,181818\dots \quad (1)$$

Умножим обе части равенства (1) на  $10^2 = 100$ , т.к. в периоде две цифры - 1 и 8:

$$1000x = 218,181818\dots \quad (2).$$

Вычтем левые и правые части равенств (2) – (1):

$$1000x - 10x = 218,181818\dots - 2,181818\dots$$

$$990x = 216$$

$$x = \frac{216}{990} = \frac{12}{55} \Rightarrow 0,2(18) = \frac{12}{55} - \text{рациональное число.}$$

Десятичные бесконечные непериодические дроби называются иррациональными числами (множество  $I$ ): например,  $\sqrt{2} = 1,4142135\dots$ ;  $\sqrt{3} = 1,7320508\dots$ ;  $\pi \approx 3,14$  - иррациональные числа.

Множество действительных чисел ( $R$ ) объединяет множества рациональных и иррациональных чисел:  $Q \cup I = R$ .

Таким образом  $N \subset Z \subset Q \subset R$ .

Пусть  $A$  - точное значение величины,  $a$  – ее приближенное значение.  $A \approx a$ .

Число  $a$  называется приближенным значением  $A$  с ошибкой  $\Delta$ , если  $A - a = \Delta$ .

Если  $\Delta > 0$ , то  $A \approx a$  с недостатком.

Если  $\Delta < 0$ , то  $A \approx a$  с избытком.

Например,  $A = 3,756$  – точное число,  $a_1 = 3,75$ ,  $a_2 = 3,76$  – его приближения.

$$\Delta_1 = 3,756 - 3,75 = 0,006 \Rightarrow 3,756 \approx 3,75 \text{ с недостатком.}$$

$$\Delta_2 = 3,756 - 3,76 = -0,004 \Rightarrow 3,756 \approx 3,76 \text{ с избытком.}$$

$$3,75 < 3,756 < 3,76$$

Абсолютной погрешностью приближенного числа  $a$  называется модуль разности между

точным числом и его приближением:  $\Delta = |A - a|$ .

Чем меньше  $\Delta$ , тем лучше приближение.

Если точное число неизвестно, но известна граница, за которую наверняка не выходит

абсолютная погрешность, то есть  $\Delta < \delta$  то  $\delta$  называется границей абсолютной погрешности приближенного числа  $a$ .

$$|A - a| \leq \delta, \text{ то } -\delta \leq A - a \leq \delta, \text{ значит } a - \delta \leq A \leq a \text{ и } A = a \pm \delta.$$

ЗАДАЧА. Даны приближения числа  $\frac{2}{3}$ :  $a_1=0,66$  и  $a_2=0,67$ . Какое приближение лучше?  
РЕШЕНИЕ. Найдем абсолютные погрешности приближений:

$$\Delta_1 = \left| \frac{2}{3} - 0,66 \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{66}{100} \right| = \frac{1}{150}$$

$$\Delta_2 = \left| \frac{2}{3} - 0,67 \right| = \left| \frac{2}{3} - \frac{67}{100} \right| = \frac{1}{300}$$

$\frac{1}{150} > \frac{1}{300}$ , значит 0,67 лучшее приближение.

Ответ: 0,67.

ЗАДАЧА. Длина отрезка равна  $21,5 \pm 0,3$ (см). Найти границы измерения отрезка.

РЕШЕНИЕ.  $l = 21,5 \pm 0,3 \Rightarrow 21,5 - 0,3 \leq l \leq 21,5 + 0,3 \Rightarrow 21,2 \leq l \leq 21,8$

Ответ:  $21,2 \leq l \leq 21,8$ .

Относительной погрешностью  $\varepsilon$  называется отношение абсолютной погрешности к приближенному значению величины.

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{a} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{a} \cdot 100\%$$

ЗАДАЧА. Найти относительную погрешность приближения  $\frac{2}{3} \approx 0,6$ .

РЕШЕНИЕ.  $A = \frac{2}{3}; a = 0,6$

$$\Delta = \left| \frac{2}{3} - 0,6 \right| = \frac{1}{15}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{15} : 0,6 = \frac{1 \cdot 6}{15 \cdot 10} = 0,04 \quad \text{или} \quad \varepsilon = 4\%$$

Ответ: 4%.

Значащие цифры приближенного числа-это все его цифры, кроме нулей, стоящих впереди. Например, в числе 3,275 четыре значащих цифры, а в числе 0,0035 две (3 и 5).

Цифра  $m$  приближенного числа называется верной, если граница абсолютной погрешности не превышает единицы того разряда, в котором записана цифра  $m$ .

Например, в числе  $3,73 \pm 0,056$  две верные цифры 3 и 7, т. к.  $\Delta = 0,056 < 0,1$ .

При сложении и вычитании приближенных чисел надо оставить столько десятичных знаков, сколько их дано в числе с наименьшим количеством знаков (округлить). Примеры:

$$233,78 + 52,308 + 3,9313 \approx 233,78 + 52,31 + 3,93 = 290,02$$

$$29,37 - 2,1462 \approx 29,37 - 2,15 = 27,22$$

При умножении и делении в результате надо оставить столько значащих цифр, сколько их имеет то число, у которого их меньше. Пример:

$$2,143 \cdot 0,45 = 0,96435 \approx 0,96$$

## ЛЕКЦИЯ 2. Комплексные числа.

План:

- Число  $i$  - мнимая единица.

- Определение комплексного числа (алгебраическая форма).
- Действительная и мнимая части комплексного числа.
- Комплексно-сопряженные и противоположные числа.
- Действия над комплексными числами в алгебраической форме: сложение, вычитание, умножение и деление.

Комплексные числа имеют вид  $a + b \cdot i$ , где  $a$  и  $b$  - действительные числа, а число  $i$ , определяемое равенством  $i^2 = -1$ , называется мнимой единицей.

$a$  называется действительной частью комплексного числа, а  $b$  - мнимой частью комплексного числа.

$z = a + bi$  - алгебраическая форма комплексного числа.

Например:  $z = 2 + i$ ;  $z = -1 + 4i$ ;  $z = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}i$ ;  $z = \sqrt{2} - \sqrt{3}i$ .

Любое действительное число можно представить как комплексное, например:  $5 = 5 + 0 \cdot i$ ;  $0 = 0 + 0 \cdot i$

$R \subset C$ ;  $C$  - множество комплексных чисел.

С введением комплексных чисел стало возможно извлекать квадратные корни из отрицательных чисел:  $\sqrt{-2} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{2} \cdot i$ , они являются комплексными числами.

Комплексные числа  $z_1 = a_1 + b_1i$  и  $z_2 = a_2 + b_2i$  называются равными, если  $a_1 = a_2$  и  $b_1 = b_2$

Комплексные числа  $z_1 = a + bi$  и  $z_2 = a - bi$  называются комплексно-сопряженными.

Комплексные числа  $z_1 = a + bi$  и  $z_2 = -a - bi$  называются противоположными.

Действия с комплексными числами (на примерах)

При сложении и вычитании комплексных чисел надо раскрыть скобки и привести подобные слагаемые:

$$(-2 - i) + (-1 + 3i) = -2 - i - 1 + 3i = -3 + 2i$$

$$(-2 - i) - (-1 + 3i) = -2 - i + 1 - 3i = -1 - 4i$$

При умножении комплексных чисел надо раскрыть скобки, учесть  $i^2 = -1$ .

$$(2 - 3i)(-4 + 2i) = -8 + 12i + 4i - 6i^2 = -8 + 16i + 6 = -2 + 16i$$

При делении надо домножить числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю, раскрыть скобки, привести подобные слагаемые, каждое слагаемое числителя разделить на знаменатель.

Пример:

$$\frac{-1 + 2i}{3 - 2i} = \frac{(-1 + 2i)(3 + 2i)}{(3 - 2i)(3 + 2i)} = \frac{-3 + 6i - 2i + 4i^2}{3^2 - (2i)^2} = \frac{-3 + 4i - 4}{9 + 4} = \frac{-7 + 4i}{15} = \frac{-7}{15} + \frac{4}{15}i$$

## Раздел 2. Основы тригонометрии

### Тема 2.1. Тригонометрические функции числового аргумента.

#### ЛЕКЦИЯ 1. Радианная мера угла. Определения тригонометрических функций.

План:

- Радианная мера угла.
- Перевод градусной меры угла в радианную и обратно.
- Единичная окружность.
- Повороты точки  $P(1;0)$  на угол  $\alpha$  радиан.

- Нахождение координат точек, соответствующих заданному углу.
- Определение синуса числа  $\alpha$ .
- Определение косинуса числа  $\alpha$ .
- Определение тангенса числа  $\alpha$ .
- Определение котангенса числа  $\alpha$ .

Центральный угол окружности, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.

Основная формула для перехода градусной меры в радианную и обратно:

$$\pi = 180^\circ \Rightarrow 1 \text{ рад} = \frac{180^\circ}{\pi} \quad \text{и} \quad 1^\circ = \frac{\pi}{180^\circ} \text{ рад}$$

$$\alpha \text{ рад} = \left( \frac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi} \right)^\circ \quad \text{и} \quad \alpha^\circ = \left( \frac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ} \right) \text{ рад}$$

Значит

Обычно «рад» опускают.

ПРИМЕРЫ:

Найти градусную меру угла:

$$\frac{\pi}{2}; \quad \frac{3\pi}{4}$$

РЕШЕНИЕ:  $\frac{\pi}{2} = \frac{180^\circ}{2} = 90^\circ$ ;  $\frac{3\pi}{4} = \frac{3 \cdot 180^\circ}{4} = 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$ , т.к.  $\pi = 180^\circ$

Найти радианную меру угла:

1)  $45^\circ$ ; 2)  $15^\circ$

РЕШЕНИЕ: 1)  $45^\circ = \frac{\pi \cdot 45^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$ ; 2)  $15^\circ = \frac{\pi \cdot 15^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{12}$

Единичная окружность – это окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1.

Поворот точки  $P(1;0)$  единичной окружности на угол  $\alpha$  против часовой стрелки означает поворот на угол  $\alpha > 0$ .

Поворот  $P(1;0)$  по часовой стрелке на угол  $\alpha$  означает поворот на угол  $\alpha < 0$ .

Каждому действительному числу  $\alpha$  соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки  $P(1;0)$  на угол  $\alpha$  радиан.

Но одной и той же точке единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел  $\alpha + 2\pi n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ .

Синусом угла  $\alpha$  называется ордината точки, полученной поворотом точки  $(1;0)$  на угол  $\alpha$ .

Косинусом угла  $\alpha$  называется абсцисса точки, полученной поворотом точки  $(1;0)$  на угол  $\alpha$ .

$$\sin \alpha = Y_\alpha; \quad \sin \alpha \in [-1;1]$$

$$\cos \alpha = X_\alpha; \quad \cos \alpha \in [-1;1]$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cos \alpha \neq 0; \quad \operatorname{tg} \alpha \in \mathbb{R}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}, \quad \sin \alpha \neq 0; \quad \operatorname{ctg} \alpha \in \mathbb{R}$$

## ЛЕКЦИЯ 2. Свойства тригонометрических функций.

- Таблица некоторых значений тригонометрических функций.
- Примеры вычислений.
- Границы четвертей.

- Знаки значений тригонометрических функций по четвертям.
- Четная и нечетные тригонометрические функции.
- Периоды тригонометрических функций.

$\alpha$	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	$\pi$ (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	$2\pi$ (360°)
$\sin \alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos \alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\operatorname{tg} \alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
$\operatorname{ctg} \alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не существует	0	Не существует

- Примеры упрощения тригонометрических выражений.

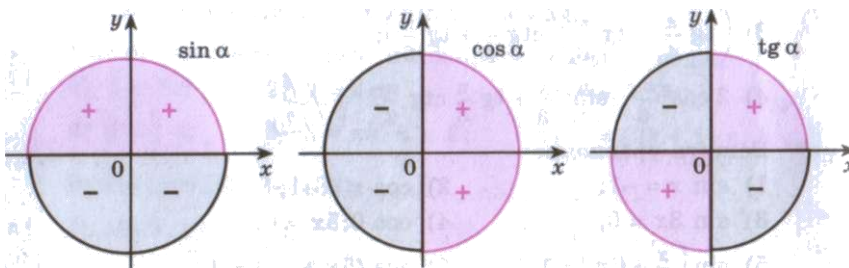


Таблица некоторых значений тригонометрических функций:

Знаки тригонометрических функций по четвертям

ПРИМЕР. Определите знак выражения

$$\frac{\cos 75^\circ \operatorname{tg}^2 305^\circ \sin 95^\circ}{\operatorname{ctg} 293^\circ \cos 269^\circ}$$

Свойства тригонометрических функций

$$\cos(-\alpha) = \cos \alpha \text{ - четная функция}$$

$$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha \text{ - нечетная функция}$$

$$\operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg} \alpha \text{ - нечетная функция}$$

$$\operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg} \alpha \text{ - нечетная функция, } n \in \mathbb{Z}$$

ПРИМЕР. Вычислите

$$1) \sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos(-\pi) + \operatorname{tg}(-2\pi)$$

РЕШЕНИЕ:

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos(-\pi) + \operatorname{tg}(-2\pi) = -\sin\frac{3\pi}{2} + \cos\pi - \operatorname{tg}2\pi = -(-1) + (-1) - 0 = 1 - 1 = 0$$

$\sin(\alpha + 2\pi n) = \sin\alpha$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  - периодическая функция с наименьшим положительным периодом  $2\pi = 360^\circ$

$\cos(\alpha + 2\pi n) = \cos\alpha$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  - периодическая функция с наименьшим положительным периодом  $2\pi = 360^\circ$

$\operatorname{tg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{tg}\alpha$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  - периодическая функция с наименьшим положительным периодом  $\pi = 180^\circ$

$\operatorname{ctg}(\alpha + \pi n) = \operatorname{ctg}\alpha$ ,  $n \in \mathbb{Z}$  - периодическая функция с наименьшим положительным периодом  $\pi = 180^\circ$

ПРИМЕР. Вычислите

$$1) \cos 3660^\circ = \cos(3660^\circ - 360^\circ \cdot 10) = \cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$

ЗАДАЧИ.

Упростите тригонометрические выражения:

$$1) 4\sin\frac{\pi}{6} + \sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$$

$$2) \left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right) : \cos\frac{\pi}{6}$$

$$3) 2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3} - \operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6} - \sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}$$

$$4) 2\cos^2\frac{\pi}{6} - \sin^2\frac{\pi}{3} + \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$$

$$5) \cos^3\left(-\frac{\pi}{3}\right) - \operatorname{ctg}^3\left(-\frac{\pi}{6}\right) + \sin^3\left(-\frac{\pi}{6}\right)$$

$$6) \sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) - 2\operatorname{ctg}^3\left(-\frac{\pi}{4}\right) + 4\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$$

$$7) \cos 7230^\circ$$

$$8) \operatorname{ctg} 4,5\pi$$

### ЛЕКЦИЯ 3. Основные тригонометрические тождества

- Основные тригонометрические тождества. Формулы одного и того же аргумента.
- Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов.
- Примеры решения задач и упрощения тригонометрических выражений с помощью этих формул.



## ФОРМУЛЫ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ АРГУМЕНТА

$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  – основное тригонометрическое тождество.

$$\begin{aligned} \sin^2 \alpha &= 1 - \cos^2 \alpha & \cos^2 \alpha &= 1 - \sin^2 \alpha \\ \sin \alpha &= \pm \sqrt{1 - \cos^2 \alpha} & \cos \alpha &= \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha} \end{aligned}$$

Знак + или – совпадает со знаком синуса или косинуса в той четверти, в которой лежит угол  $\alpha$ .

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{ctg} \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg} \alpha} \quad \operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

ПРИМЕР. Вычислить  $\cos \alpha$ ;  $\sin \alpha$ ;  $\operatorname{tg} \alpha$ , если  $\sin \alpha = \frac{-5}{13}$ ;  $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

РЕШЕНИЕ:  $\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}$ ;  $\alpha \in \text{IV}$  четверти, то  $\cos \alpha = + \sqrt{1 - \left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\frac{5}{13} : \frac{12}{13} = -\frac{5}{12}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} = -\frac{12}{5}$$

ПРИМЕР. Упростить  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha$ .

РЕШЕНИЕ.  $\sin^4 \alpha - \cos^4 \alpha + \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha)^2 - (\cos^2 \alpha)^2 + \cos^2 \alpha =$   
 $= (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) + \cos^2 \alpha = (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha) \cdot 1 + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha$

### ЗАДАЧИ.

Доказать тождество

$$1) \quad (\sin^2 \alpha - \cos^2 \alpha)^2 + 2\cos^2 \alpha \sin^2 \alpha = \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha$$

$$2) \quad \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} + \frac{1 + \cos \alpha}{\sin \alpha} = \frac{2}{\sin \alpha}$$

$$3) \quad \operatorname{tg}^2 \alpha - \sin^2 \alpha = \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha$$

$$4) \quad (1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) \cos^2 \alpha - 1 = 0$$

$$5) \quad (1 + \cos \alpha) \operatorname{ctg}^2 \alpha (1 - \cos \alpha) = \cos^2 \alpha$$

Упростить выражение:

$$1) \quad \sin^4 \alpha + \cos^4 \alpha + 2\sin^2 \alpha \cos^2 \alpha$$

- 2)  $\frac{\cos^2 \alpha - \cos^4 \alpha + \sin^4 \alpha}{1 - 2\cos^2 \alpha}$
- 3)  $\cos \alpha + \sin \alpha$
- 4)  $(\sin^2 \alpha + \operatorname{tg}^2 \alpha \sin^2 \alpha) \operatorname{ctg} \alpha$

### ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta$$

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha - \beta) = \sin \alpha \cos \beta - \cos \alpha \sin \beta$$

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

$$\operatorname{tg}(\alpha - \beta) = \frac{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta}{1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta}$$

ПРИМЕРЫ:

$$1) \sin 105^\circ = \sin(60^\circ + 45^\circ) = \sin 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 45^\circ \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$2) \text{Найти } \cos(60^\circ + \alpha), \text{ если } \sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ и } 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\text{РЕШЕНИЕ: } \cos(60^\circ + \alpha) = \cos 60^\circ \cos \alpha - \sin 60^\circ \sin \alpha = \frac{1}{2} \cos \alpha - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}},$$

$$\cos \alpha = \pm \sqrt{1 - \sin^2 \alpha}, \text{ угол } \alpha \in 1 \text{ четверти, значит } \cos \alpha = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \sqrt{\frac{2}{3}},$$

$$\cos(60^\circ + \alpha) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{3}}{2\sqrt{3}}.$$

### ЗАДАЧИ

1. Вычислить:

$$1) \cos 75^\circ$$

$$2) \sin 210^\circ$$

$$3) \frac{\operatorname{tg} 29^\circ + \operatorname{tg} 31^\circ}{1 - \operatorname{tg} 29^\circ \operatorname{tg} 31^\circ}$$

$$4) \cos\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right), \text{ если } \cos \alpha = -\frac{1}{3} \text{ и } \frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$$

$$5) \sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right), \text{ если } \cos \alpha = -\frac{3}{5} \text{ и } \pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$$

$$6) \sin 73^\circ \cos 13^\circ - \sin 13^\circ \cos 73^\circ$$

2. Упростить:

$$1) \sin(\alpha + \beta) + \sin(-\alpha)\cos(-\beta)$$

$$2) \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$$

$$3) \cos\left(\frac{\pi}{4} + \alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4} - \alpha\right) + \frac{1}{2}\sin^2 \alpha$$

#### ЛЕКЦИЯ 4. Тригонометрические формулы.

- Формулы приведения.
- Синус, косинус и тангенс двойного угла.
- Формулы половинного аргумента.
- Примеры решения задач с помощью этих формул.

#### ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Эти формулы позволяют преобразовать тригонометрические функции аргумента  $\left(\frac{\pi}{2} \cdot n \pm \alpha\right)$

к тригонометрическим функциям аргумента  $\alpha$ .

Например,  $\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$ .

Здесь в левой части равенства записана приводимая функция ( $\pi$  - граница четверти,  $\alpha$  считается углом 1 четверти), а в правой части – приведенная функция.

**ПРАВИЛО ПРИВЕДЕНИЯ.**

Знак приведенной функции совпадает со знаком приводимой функции в той четверти, в которой лежит угол  $\alpha$ .

Если угол  $\alpha$  откладывается от оси ОХ, то название функции не меняется.

Если угол  $\alpha$  откладывается от оси ОУ, то название функции меняется: синус – на косинус, тангенс – на котангенс и наоборот).

**ПРИМЕР.** Упростить  $tg\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)$

**РЕШЕНИЕ.** Определим знак приводимой функции: дуга  $\frac{3\pi}{2} + \alpha$  оканчивается в четвертой

четверти, где тангенс отрицательный, значит, ставим знак минус.

Определим название приведенной функции: угол  $\alpha$  откладывается от оси ОУ, значит, название меняется на котангенс.

$$tg\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = -ctg \alpha$$

**ПРИМЕРЫ.**

$$\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = +\cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 240^\circ = \cos(180^\circ + 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\cos 120^\circ = \cos(180^\circ - 60^\circ) = -\cos 60^\circ = -\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\alpha - \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(-\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) = +\cos\alpha$$

### ЗАДАЧИ

Вычислить

$$1) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right) \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) - \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + \operatorname{ctg}\left(\frac{3\pi}{2} - \alpha\right) - \operatorname{ctg}\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$2) \frac{\sin^2(\pi - \alpha)}{1 + \sin\left(\frac{3\pi}{2} + \alpha\right)} - \cos(2\pi - \alpha)$$

$$3) 10 \operatorname{ctg} \frac{3\pi}{4} \cdot \sin \frac{5\pi}{4} \cdot \cos \frac{7\pi}{4}$$

$$4) \operatorname{ctg} 240^\circ$$

$$5) \sin \frac{5\pi}{3}$$

### ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha}$$

ПРИМЕР. Найти  $\sin 2\alpha$  и  $\cos 2\alpha$ , если  $\sin\alpha = 0,8$  и  $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$ .

РЕШЕНИЕ.  $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha = 1 - 2 \cdot 0,8^2 = -0,28$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha \cos\alpha$ ;  $\cos\alpha$  - ?

$$\cos\alpha = \pm\sqrt{1 - \sin^2\alpha}$$

$$\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}; 1 \text{ четверть, } \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin^2\alpha} = \sqrt{1 - 0,8^2} = 0,6$$

$$\sin 2\alpha = 2 \cdot 0,8 \cdot 0,6 = 0,96$$

ПРИМЕР. Упростить  $1 - 8\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha$

РЕШЕНИЕ.  $1 - 8\sin^2\alpha \cdot \cos^2\alpha = 1 - 2 \cdot (2\sin\alpha \cos\alpha)^2 = 1 - 2\sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha$

ПРИМЕР. Вычислить  $\sin 120^\circ$

РЕШЕНИЕ.  $\sin 120^\circ = \sin(60^\circ \cdot 2) = 2\sin 60^\circ \cos 60^\circ = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

### ЗАДАЧИ

1. Дано:  $\sin\alpha = 0,6$ ;  $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ . Найти  $\sin 2\alpha$ ;  $\cos 2\alpha$ ;  $\operatorname{tg} 2\alpha$ .

2. Упростить или вычислить:

$$1) \sin 15^\circ \cdot \cos 15^\circ$$

$$2) 1 - 4\sin^2\alpha \cos^2\alpha$$

- 3)  $\frac{2\operatorname{tg}15^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 15^\circ}$
- 4)  $1-2\sin^2 \alpha + \cos 2\alpha$
- 5)  $\cos 4\alpha + 2\sin^2 2\alpha$

ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА (Формулы понижения степени)

$$\sin^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{2}$$

$$\cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

$$\operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos \alpha}{1 + \cos \alpha}$$

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{\sin \alpha}{1 + \cos \alpha} = \frac{1 - \cos \alpha}{\sin \alpha}$$

ПРИМЕР. Упростить  $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right)$

РЕШЕНИЕ.  $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)}{2} = 1 - \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = 1 - \sin \alpha$

#### ЗАДАЧИ

Упростить

- 1)  $\frac{1 - 2\sin^2 \frac{\alpha}{2}}{2\cos^2 \frac{\alpha}{2} - 1}$

- 2)  $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4} + \frac{3\alpha}{2}\right) - 1$

- 3)  $\cos^4 \alpha - \sin^4 \alpha - \cos 2\alpha$

- 4)  $\frac{1 + \cos 42^\circ}{1 - \sin 48^\circ}$

#### ЛЕКЦИЯ 5. Тригонометрические формулы (продолжение).

- Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.
- Преобразование произведения в сумму.
- Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента – универсальная подстановка.
- Преобразования тригонометрических выражений с помощью различных формул.

## ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

$$\sin \alpha + \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\sin \alpha - \sin \beta = 2 \sin \frac{\alpha - \beta}{2} \cos \frac{\alpha + \beta}{2}$$

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\cos \alpha - \cos \beta = -2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

$$\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta = \frac{\sin(\alpha - \beta)}{\cos \alpha \cos \beta}$$

## ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В СУММУ

$$\sin \alpha \sin \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha + \beta))$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta))$$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ  $\sin \alpha$ ,  $\cos \alpha$  и  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}$

(УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПОДСТАНОВКА)

$$\sin \alpha = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos \alpha = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

## ЗАДАЧИ

1. Упростить или вычислить:

1)  $\frac{\cos 76^\circ - \cos 16^\circ}{1 - 2 \sin^2 22^\circ}$

2)  $\left( \frac{1}{\sin \alpha} - \frac{1}{\sin 3\alpha} \right) \cdot \frac{1}{\cos \alpha + \cos 5\alpha}$

- 3)  $\frac{\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha - \sin \alpha} \cdot \frac{\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$
- 4)  $\frac{(\sin 3\alpha - \sin \alpha)(\cos 3\alpha + \cos \alpha)}{1 + \cos 4\alpha}$
- 5)  $\frac{\sin \alpha + \sin 3\alpha}{\cos \alpha + \cos 3\alpha}$
- 6)  $\frac{\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta}{\operatorname{tg} \alpha - \operatorname{tg} \beta} \cdot \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\sin(\alpha - \beta)}$
- 7)  $\sin^2 \alpha + \cos(60^\circ + \alpha) \cdot \cos(60^\circ - \alpha)$
- 8)  $2 \cos(45^\circ + \alpha) \cdot \cos(45^\circ - \alpha)$
- 9)  $\sin 75^\circ + \sin 15^\circ$
- 10)  $\cos \frac{5\pi}{12} - \cos \frac{\pi}{12}$
- 11)  $\sin 15^\circ \cdot \cos 75^\circ$
- 12)  $\sin 45^\circ \cdot \sin 15^\circ$
- 13) Найти  $\sin \alpha + 2 \cos \alpha$ , если  $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = -2$ .
- 14) Найти  $\sin 2\alpha - \cos 2\alpha$ , если  $\operatorname{tg} \alpha = 3$ .
- 15) Найти  $\frac{\sin \alpha + \cos \alpha}{\sin \alpha - \cos \alpha}$ , если  $\operatorname{ctg} \frac{\alpha}{2} = 2$ .

## Тема 2.2. Функции, их свойства и графики.

### ЛЕКЦИЯ 1. Свойства и графики тригонометрических функций.

- Числовая функция. Область определения и множество значений; график функции.
- Числовая функция  $y = \sin x$ , ее свойства и график.
- Числовая функция  $y = \cos x$ , ее свойства и график.
- Числовая функция  $y = \operatorname{tg} x$ , ее свойства и график.
- Числовая функция  $y = \operatorname{ctg} x$ , ее свойства и график.

Числовые функции, заданные формулами  $y = \sin x$ ,  $y = \cos x$ ,  $y = \operatorname{tg} x$ ,  $y = \operatorname{ctg} x$  называются соответственно синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом.

Область определения (все значения независимой переменной):

$$D(\sin) = D(\cos) = \mathbb{R}$$

$$D(\operatorname{tg}) = \left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; \frac{\pi}{2} + \pi n\right); \quad D(\operatorname{ctg}) = (\pi n; \pi + \pi n), \quad n \in \mathbb{Z}$$

Множество значений (все значения зависимой переменной):

$$E(\sin) = E(\cos) = [-1; 1]$$

$$E(\operatorname{tg}) = E(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R}.$$

Четность:  $\cos(-x) = \cos x$  (четная)

$\sin(-x) = -\sin x$  (нечетная)

$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$  (нечетная)

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x \text{ (нечетная)}$$

Периодичность:

$$\sin(x + 2\pi n) = \sin x$$

$$\cos(x + 2\pi n) = \cos x$$

$$\operatorname{tg}(x + \pi n) = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{ctg}(x + \pi n) = \operatorname{ctg} x, \quad n \in \mathbb{Z}$$

Построим графики тригонометрических функций.

## ЛЕКЦИЯ 2. Преобразования графиков.

- Параллельный перенос вдоль оси  $OY$ .
- Параллельный перенос вдоль оси  $OX$ .
- Растяжение вдоль оси  $OY$ .
- Сжатие вдоль оси  $OY$ .
- Сжатие вдоль оси  $OX$ .
- Растяжение вдоль оси  $OX$ .
- Симметрия относительно осей координат.
- Симметрия относительно начала координат.
- Построение графиков функций с модулем.

1. График функции  $y = f(x) + b$  получается параллельным переносом графика  $y = f(x)$  вдоль оси  $OY$  на  $|b|$  единиц:  
если  $b > 0$ , то вверх; если  $b < 0$ , то вниз.

ПРИМЕР. Построить график функции  $y = x^2 - 2$  двумя способами – параллельным переносом графика  $y = x^2$  на 2 единицы вниз и параллельным переносом системы координат в противоположную сторону.

2. График функции  $y = f(x + a)$  получается параллельным переносом графика  $y = f(x)$  вдоль оси  $OX$  на  $|a|$  единиц:  
если  $a > 0$ , то влево; если  $a < 0$ , то вправо.

ПРИМЕР. Построить график функции  $y = (x - 2)^2$  двумя способами – параллельным переносом графика  $y = x^2$  на 2 единицы вправо и параллельным переносом системы координат в противоположную сторону.

3. График функции  $y = kf(x)$ , получается из графика  $y = f(x)$ :  
при  $k > 1$  растяжением вдоль оси  $OY$  в  $k$  раз,  
при  $0 < k < 1$  сжатием вдоль оси  $OY$  в  $\frac{1}{k}$  раз.

ПРИМЕР. Построить график функции  $y = 2 \sin x$  растяжением графика функции  $y = \sin x$  вдоль оси  $OY$  в 2 раза и  
график функции  $y = \frac{1}{2} \sin x$  сжатием графика функции  $y = \sin x$  вдоль оси  $OY$  в 2 раза.



4. График функции  $y = f(kx)$ , получается из графика  $y = f(x)$ :

при  $k > 1$  сжатием вдоль оси ОХ в  $k$  раз,

при  $0 < k < 1$  растяжением вдоль оси ОУ в  $\frac{1}{k}$  раз.

ПРИМЕР. Построить график функции  $y = \sin 2x$  сжатием графика функции  $y = \sin x$  вдоль оси ОУ в 2 раза и

график функции  $y = \frac{1}{2} \sin x$  растяжением графика функции  $y = \sin x$  вдоль оси ОУ в 2 раза.

5. График функции  $y = -f(x)$ , симметричен графику  $y = f(x)$  относительно оси ОХ.

ПРИМЕР. Построить график функции  $y = -x^2$

6. График функции  $y = f(-x)$ , симметричен графику  $y = f(x)$  относительно оси ОУ.

ПРИМЕР. Построить график функции  $y = \sqrt{-x}$

7. График функции  $y = |f(x)|$  строят так: построить график функции  $y = f(x)$ , оставить часть графика над осью ОХ, а часть графика ниже оси ОХ заменить ее симметрией в верхнюю полуплоскость.

ПРИМЕР. Построить график функции  $y = |x^2 - 2|$ .

8. График функции  $y = f(|x|)$  строят так: построить график функции  $y = f(x)$ , оставить часть графика для  $x \geq 0$  (справа от оси ОУ), а часть графика слева от оси ОУ заменить симметрией правой части в левую полуплоскость.

ПРИМЕР. Построить график функции  $y = \sqrt{|x|}$

### ЛЕКЦИЯ 3. Основные свойства функций.

- Числовая функция. Область определения и множество значений; график функции (повторение).
- Способы задания функций.
- Нахождение области определения и множества значений функции, примеры.
- Четные и нечетные функции.
- Периодические функции. Наименьший положительный период функции.
- Возрастание и убывание функции. Промежутки возрастания и убывания.
- Точки экстремума функции.
- Экстремумы функции.
- Наибольшее и наименьшее значения функции.
- Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях.
- Сложная функция.
- Обратные функции. Область определения и область значений обратной функции.
- График обратной функции.
- Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.

Понятие функции является центральным понятием математики и не только математического анализа. Вспомним школьное определение функции.

Если каждому элементу  $x$  множества  $D$  ставится в соответствие единственный элемент  $y$  множества  $E$ , то говорят, что на множестве  $D$  задана функция  $y = f(x)$ .

$x$  – аргумент – независимая переменная;  $y$  – зависимая; она находится по закону:  $f$ . Множество  $D$  называется областью определения функции, множество  $E$  называется множеством значений функции.

Множество значений аргумента – Ваши личности, множество значений функции – Ваши фамилии. Вот так мы продемонстрировали понятие функции: каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции, человек не может иметь две фамилии. Но математика рассматривает числовые функции, т.е. множества  $D$  и  $E$  – числовые множества. При этом можно дать и такое определение числовой функции: числовая функция – это множество пар  $(x, y)$ , среди которых нет пар с одинаковым первым элементом. Вдумайтесь. Как определяется, задается функция? Прежде всего формулой, по которой по заданному  $x$  находится  $y$ . Например:  $f(x) = x^2 + x + 3$ . Подставим  $x = 2$  получим  $y = 9$ . Функция может задаваться не одним аналитическим выражением, а несколькими, например:

$$y = \begin{cases} x^2, & \text{если } x < 0; \\ x, & \text{если } x \geq 0 \end{cases}$$

Очень часто зависимость одной переменной величины от другой невозможно выразить аналитически, но такая зависимость существует и определяется она в виде таблицы.

x	-3	-1	0	3	5	6	8	11	13
y	45	22	12	2	-4	3	13	25	34

В таком случае говорят о таблично заданной функции.

И, наконец, когда не удастся найти аналитического выражения для  $y = f(x)$ , найти множество пар  $(x, y)$ , то функцию можно задать графически, т.е. ее графиком. Вспомните свою кардиограмму, перо самописцев в самых различных приборах.

Рассмотрим практические задачи на отыскание области определения некоторых функций. Заметим, что многочлен определен на всем множестве действительных чисел:  $D: x \in R$ . Так для функции  $y = x^2 + 6x - 7$   $D: x \in R$ .

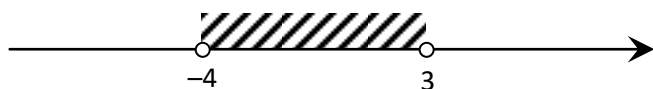
Дробно – рациональная функция определена для всех  $x$ , при которых ее знаменатель отличен от нуля. Например:

$y = \frac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1}$  областью определения будет все множество действительных чисел, отличных от

$-1$  и  $1$ . На языке интервалов  $D: x \in (-\infty; -1) \cup (-1; 1) \cup (1; \infty)$ .

Рассмотрим другие примеры. Найти область определения функций 1)  $y = \frac{1}{\sqrt{12 - x - x^2}}$

Очевидно, что функция существует только для тех значений  $x$ , которые удовлетворяют неравенству:  $12 - x - x^2 > 0 \Rightarrow x^2 + x - 12 < 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 4) < 0$



Ответ:  $x \in (-4; 3)$ . Воспользовались методом интервалов.

2)  $y = \frac{\sqrt{x+5}}{x-1}$  Очевидно, что функция

существует только для тех значений  $x$ , которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases} \quad \text{Откуда } x \geq -5 \text{ и } x \neq 1 \text{ Объединяя эти}$$

неравенства, имеем ответ:  $x \in [-5; 1) \cup (1; \infty)$ .

Рассмотрим понятия, выражающие *основные (общие) свойства функций*.

*Монотонность.* Если для  $x_1, x_2$ , принадлежащих интервалу  $(a;b)$  и удовлетворяющих условию  $x_1 < x_2$  следует  $f(x_1) < f(x_2)$ , то, говорят, что на  $(a;b)$  эта функция возрастает. Или, как говорили в школе, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то функция возрастает. Самостоятельно сформулируйте определение убывающей функции. Если функция только возрастает или только убывает в области определения, то о такой функции говорят, что она *монотонна*. Так линейная функция, степенная с нечетным показателем являются монотонными, а  $y = x^2$  монотонной не является, т.к. при  $x < 0$  она убывает, а при  $x > 0$  она возрастает.

*Ограниченность.* Пусть на  $D$  задана функция  $y = f(x)$ . Если существуют такие числа  $m$  и  $M$ , что для всех  $x \in D$ , что  $m \leq f(x) \leq M$ , то говорят, что функция ограничена в области определения. Различают и такие понятия, как ограниченность снизу и ограниченность сверху. Так,  $y = x^3$  – неограниченная функция,  $y = x^2$  – ограничена снизу, т.к. она неотрицательна в области определения.  $y = \text{Sin}x$  и  $y = \text{Cos}x$  – ограниченные функции, т.к. они принимают значения только из отрезка  $[-1; 1]$  – это их множество значений.

*Наибольшее и наименьшее значения функции* – это самое большое и самое маленькое из всех значений функции. Так для синуса и косинуса  $y_{\text{наиб}} = 1, y_{\text{наим}} = -1$

*Четность и нечетность.* Функция называется четной, если ее область определения симметрична относительно  $x = 0$  и  $f(-x) = f(x)$ ;

Функция называется нечетной, если ее область определения симметрична относительно  $x = 0$  и  $f(-x) = -f(x)$ .

График четной функции симметричен относительно оси ординат, а нечетной – относительно начала координат.

Яркие «представители» четных функций:  $y = x^2, y = \text{Cos}x, y = \frac{1}{x^2}$ , нечетных  $y = x^3, y = \text{Sin}x, y = \frac{1}{x}, y = \sqrt[3]{x}$ . Для многих функций нет смысла говорить об их четности –

нечетности. Так функция  $y = \sqrt{x}$  не относится ни к четным, ни к нечетным, потому как ее область определения несимметрична относительно нуля. Такие функции называют функциями общего вида.

Какова методика определения четности – нечетности функции? Рассмотрим примеры.

$f(x) = \frac{x^3}{x^2 + 1}$ ; Подставим в функцию вместо  $x$   $-x$ , будем иметь:

$$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2 + 1} = \frac{-x^3}{x^2 + 1} = -\frac{x^3}{x^2 + 1} = -f(x) \text{ Получили определение нечетной функции, вывод:}$$

функция нечетная.

$f(x) = \frac{\text{Cos}x}{x^4 + 1}$ ; Подставим в функцию вместо  $x$   $-x$ , будем иметь:

$$f(-x) = \frac{\text{Cos}(-x)}{(-x)^4 + 1} = \frac{\text{Cos}x}{x^4 + 1} = \frac{\text{Cos}x}{x^4 + 1} = f(x) \text{ Получили определение четной функции, вывод:}$$

функция четная.

*Периодичность.* Функция  $y = f(x)$  называется периодической, если существует такое число  $T$ , что для всех  $x$  из области определения выполняется равенство:  $f(x+T) = f(x)$ , где  $T \neq 0$

Очевидно, что если существует такое число  $T$ , называемое периодом, то число  $nT$ , где  $n$  – целое число, также является периодом этой функции. Важнейшие представители периодических функций – тригонометрические функции.

*Промежутки знакопостоянства функции* – значения аргумента, при которых функция сохраняет постоянный знак:  $f(x) > 0$  или  $f(x) < 0$ .

*Нули функции* – значения аргумента, при которых  $f(x) = 0$ . Это абсциссы точек пересечения графика с осью  $OX$ .

Точки, в которых возрастание функции меняется на убывание называются *точками максимума* –  $x_{\max}$

Точки, в которых убывание функции меняется на возрастание называются *точками минимума* –  $x_{\min}$

Значение функции в точке максимума называется *максимумом функции*, значение функции в точке минимума называется *минимумом функции*:  $f_{\max} = f(x_{\max})$ ,  $f_{\min} = f(x_{\min})$

$x_{\max}$ ,  $x_{\min}$  – называются *точки экстремума функции*,

$f_{\max} = f(x_{\max})$ ,  $f_{\min} = f(x_{\min})$  – называются *экстремумы функции*.

Функция называется *сложной*, если ее аргумент тоже функция, например,  $y = \sqrt{3x+1}$ .

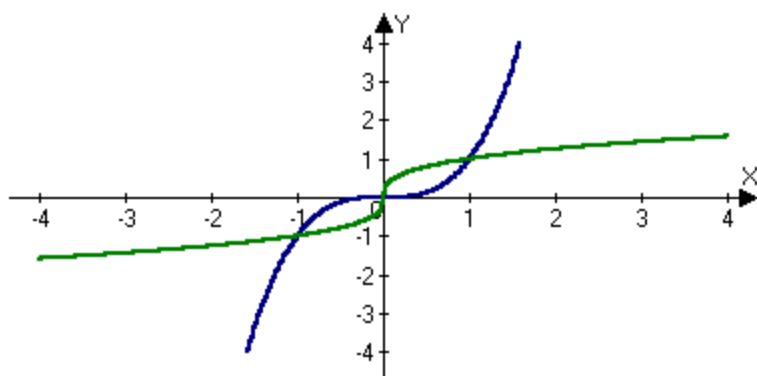
$y = \sqrt{t}$  – внешняя функция,  $y = 3x+1$  – внутренняя.

*Понятие об обратной функции.*

Пусть дана функция  $y = x^3$ . Вспомним, что она монотонная: каждому значению аргумента соответствует единственное значение аргумента и наоборот: *каждому значению функции соответствует единственное значение аргумента* (только для монотонных функций!). Будем далее считать независимой переменной  $y$ , а  $x$  – его функцией, выразим  $x$  через  $y$ .

$x = \sqrt[3]{y}$  и заменим, как то принято обозначать аргумент и функцию,  $x$  на  $y$  и  $y$  на  $x$ , получим

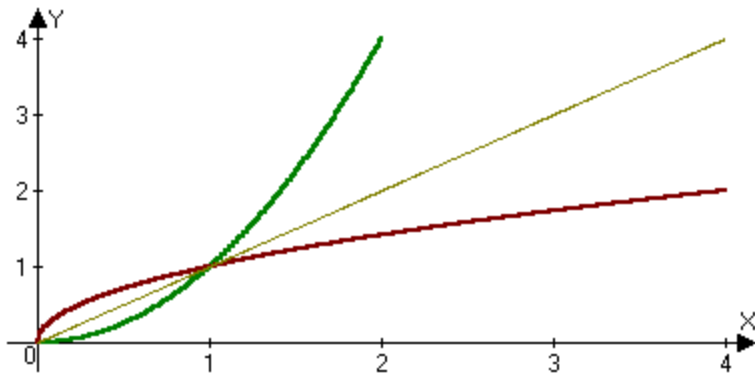
$y = \sqrt[3]{x}$ . Вот эти две функции  $y = x^3$ ,  $y = \sqrt[3]{x}$  и называются *взаимно обратными*.



Построим графики этих функций и убедимся, что они симметричны относительно биссектрисы 1-3 координатных углов. Запомните это свойство графиков всех взаимно обратных функций. В дальнейшем Вы будете строить обратные функции по мере их изучения.

Но как быть, если функция, для которой надо построить обратную не является монотонной?

Например, необходимо построить обратную для  $y = x^2$ , которая немонотонна. Для этого необходимо так задать область определения исходной функции, на которой она стала бы монотонной. Если для функции  $y = x^2$  положить  $x \in [0; \infty)$ , то на этом луче она монотонно возрастает, а значит имеет обратную. Очевидно, это  $y = \sqrt{x}$ . Построим их графики и убедимся, что они симметричны относительно биссектрисы 1-3 координатных углов.



### ЗАДАЧИ

1) Постройте обратную функцию для монотонной линейной функции  $y = 3x$ , постройте их графики.

2) Определив функцию  $y = \frac{1}{x^2}$  на  $x \in [0; \infty)$ , постройте для нее обратную функцию.

## Тема 2.3. Тригонометрические уравнения и неравенства

### ЛЕКЦИЯ 1. Обратные тригонометрические функции.

- Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики:
- Определение и свойства арксинуса числа.
- Определение и свойства арккосинуса числа.
- Определение и свойства арктангенса числа.
- Определение и свойства арккотангенса числа.

#### 1) $y = \arcsin x$

Функция  $y = \sin x$ , где  $x \in (-\infty; +\infty)$  не является монотонной на этом промежутке. Поэтому, чтобы говорить об обратной функции, надо выделить участок монотонности. Для функции  $y = \arcsin x$  является отрезок  $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ .

Итак:  $y = \sin x$        $x = \arcsin y$        $y = \arcsin x$

Свойства функции  $y = \arcsin x$

- 1) Область определения  $x \in [-1; 1]$
- 2) Множество значений  $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$
- 3)  $\arcsin(-x) = -\arcsin x$
- 4) Функция монотонно возрастает  $[-1; 1]$

Например:

$$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 30^\circ = \arcsin \frac{1}{2}$$

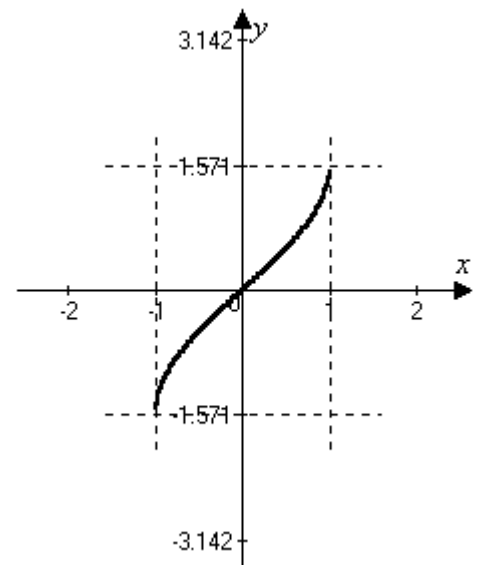
$$\sin 90^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad 90^\circ = \arcsin 1$$

$$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ \text{ или } \frac{\pi}{4}$$

$$\arcsin 0 = 0$$

$$\arcsin 0,72 = 46^\circ 03'$$

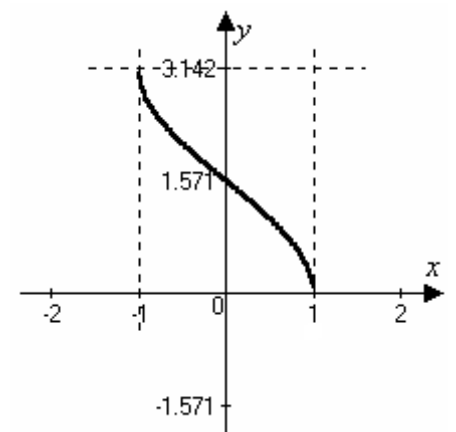
$$\arcsin 0,236 = 13^\circ 39'$$



#### 2) $y = \arccos x$ $y = \cos x$

$x = \arccos y$  Промежуток монотонности  $0 \leq x \leq \pi$

$y = \arccos x$



Свойства функции  $y = \arccos x$

- 1) Область определения  $x \in [-1; 1]$
- 2) Множество значений  $y \in [0; \pi]$
- 3)  $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$
- 4) Функция монотонно убывает  $[-1; 1]$

Например:

$$\arccos \frac{1}{2} = 60^\circ \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{3}$$

$$\arccos(-1) = 180^\circ \quad \text{или} \quad \pi$$

$$\arccos 0 = 90^\circ \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{2}$$

$$\arccos 0,708 = 44^\circ 55'$$

$$\arccos 0,112 = 83^\circ 34'$$

3)  $y = \operatorname{arctg} x$

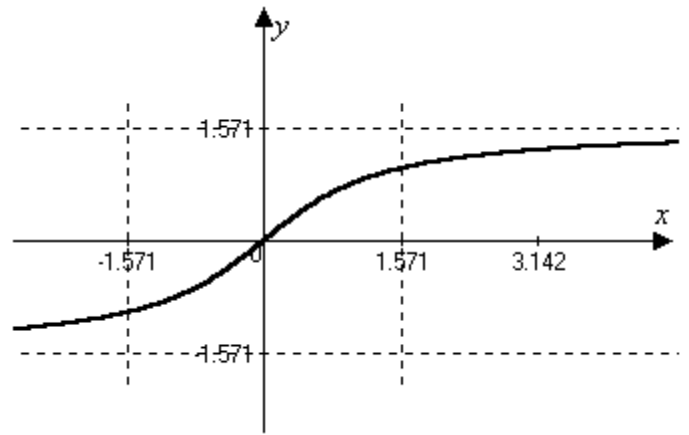
Промежуток монотонности  $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$$y = \operatorname{tg} x$$

$$x = \operatorname{arctg} y \quad \underline{y = \operatorname{arctg} x}$$

Свойства функции  $y = \operatorname{arctg} x$

- 1) Область определения  $x \in (-\infty; +\infty)$
- 2) Множество значений  $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$
- 3)  $\operatorname{arctg}(-x) = -\operatorname{arctg} x$
- 4) Функция монотонно возрастает  $(-\infty; +\infty)$



Например:

$$\operatorname{arctg} 1 = 45^\circ \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{4} \quad \operatorname{arctg} 2 = 63^\circ 26'$$

$$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = 60^\circ \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{3} \quad \operatorname{arctg} 14,7 = 86^\circ 11'$$

4)  $y = \operatorname{arcctg} x$

Промежуток монотонности  $0 < x < \pi$

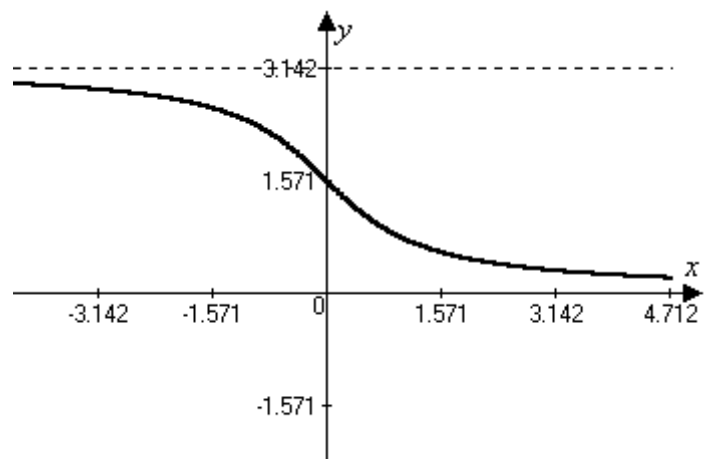
$$y = \operatorname{ctg} x$$

$$x = \operatorname{arcctg} y \quad \underline{y = \operatorname{arcctg} x}$$

Свойства функции  $y = \operatorname{arcctg} x$

- 1) Область определения  $x \in (-\infty; +\infty)$
- 2) Множество значений  $y \in (0; \pi)$
- 3)  $\operatorname{arcctg}(-x) = \pi - \operatorname{arcctg} x$
- 4) Функция монотонно убывает  $(-\infty; +\infty)$

Например:



$$\operatorname{arctg} 1 = 45^\circ \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{4} \quad \operatorname{arctg} 4,7 = 12^\circ$$

$$\operatorname{arctg} \sqrt{3} = 30^\circ \quad \text{или} \quad \frac{\pi}{6} \quad \operatorname{arctg} 10,8 = 5^\circ 17'$$

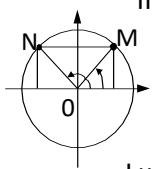
## ЛЕКЦИЯ 2. Простейшие тригонометрические уравнения.

- Решение простейшего тригонометрического уравнения  $\cos x = a$ . Условия существования корней уравнения. Формулы корней.
- Решение простейшего тригонометрического уравнения  $\sin x = a$ . Условия существования корней уравнения. Формулы корней.
- Решение простейшего тригонометрического уравнения  $\operatorname{tg} x = a$ . Условия существования корней уравнения. Формулы корней.
- Решение простейшего тригонометрического уравнения  $\operatorname{ctg} x = a$ . Условия существования корней уравнения. Формулы корней.
- Частные случаи.
- Примеры решения уравнений.

Уравнения вида  $\sin x = a$ ;  $\cos x = a$ ;  $\operatorname{tg} x = a$ ;  $\operatorname{ctg} x = a$  называются простейшими тригонометрическими уравнениями.

1)  $\sin x = a \quad |a| \leq 1$

II ч.  $180^\circ - x = \arcsin a + 360^\circ \cdot n$



отсюда  
 $x = 180^\circ - \arcsin a + 360^\circ \cdot n$

I ч.  $x = \arcsin a + 360^\circ \cdot n$

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

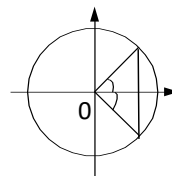
Например:

$$\sin x = 0,437$$

$$x = (-1)^n \arcsin 0,437 + \pi n; n \in \mathbb{Z}$$

$$x = (-1)^n 25^\circ 54' + 180^\circ \cdot n; n \in \mathbb{Z}$$

2)  $\cos x = a \quad |a| \leq 1$



$$x = \arccos a + 2\pi n \Rightarrow$$

$$-x = \arccos a + 2\pi n$$

$$x = \pm \arccos a + 2\pi n; n \in \mathbb{Z}$$

Например:

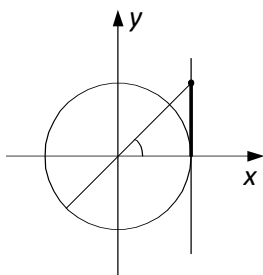
$$\cos 4x = -0,712$$

$$4x = \pm \arccos(-0,72) + 2\pi \cdot n, n \in \mathbb{Z}$$

$$4x = \pm 135^\circ 24' + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pm 33^\circ 51' + 90^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}$$

3)  $\operatorname{tg} x = a$ ;  $a$  – любое значение



Например:

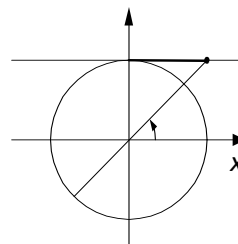
$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 4$$

$$\frac{x}{2} = \operatorname{arctg} 4 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\frac{x}{2} = 75^\circ 57' + 180^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

4)  $\operatorname{ctg} x = a$ ;  $a$  – любое



Например:

$$\operatorname{ctg} 3x = 4,72$$

$$3x = \operatorname{arctg} 4,72 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$3x = 11^\circ 57' + 180^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 3^\circ 59' + 60^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$\underline{x = 151^{\circ}54' + 360^{\circ} \cdot n, n \in Z}$$

Решить уравнения:

$$1) \sin 2x = -0,72$$

$$2) \operatorname{ctg} \left( \frac{x}{2} + 20^{\circ} \right) = 0,34$$

$$3) \cos \frac{x}{4} = -0,318$$

$$4) \operatorname{tg} \left( \frac{\pi}{6} - 5x \right) = 1$$

$$5) \cos(2x - 3,4) = 0,112$$

Решения уравнений:

$$1) 2x = (-1)^n \arcsin(-0,72) + \pi n, n \in Z$$

$$2x = (-1)^n \arcsin(-46^{\circ}03') + 180^{\circ} \cdot n, n \in Z$$

$$2x = (-1)^{n+1} \cdot 46^{\circ}03' + 180^{\circ} \cdot n, n \in Z$$

$$x = (-1)^{n+1} \cdot 23^{\circ}02' + 90^{\circ} \cdot n, n \in Z$$

$$2) \frac{x}{2} + 20^{\circ} = \operatorname{arccotg} 0,34 + 180^{\circ} \cdot n, n \in Z$$

$$\frac{x}{2} + 20^{\circ} = 71^{\circ}13' + 180^{\circ} \cdot n, n \in Z$$

$$\frac{x}{2} = 51^{\circ}13' + 180^{\circ} \cdot n, n \in Z$$

$$x = 102^{\circ}26' + 360^{\circ} \cdot n, n \in Z$$



$$3) \frac{x}{4} = \pm \arccos(-0,318) + 2\pi n, n \in Z$$

$$\frac{x}{4} = \pm 108^{\circ}32' + 360^{\circ} \cdot n, n \in Z$$

$$x = \pm 434^{\circ}8' + 1440^{\circ} \cdot n, n \in Z$$

$$4) \frac{\pi}{6} - 5x = \arctg 1 + \pi n, n \in Z$$

$$\frac{\pi}{6} - 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$$

$$-5x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

$$-5x = \frac{\pi}{12} + \pi n, n \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{60} - \frac{\pi}{5}n, n \in Z$$

5) Решаем в радианной мере измерения

$$2x - 3,4 = \pm \arccos 0,112 + \pi n, n \in Z$$

$$2x - 3,4 = \pm 1,459 + \pi n, n \in Z$$

$$2x = \pm 1,459 + 3,4 + \pi n, n \in Z$$

распишем два случая:

$$2x_1 = 1,459 + 3,4 + \pi n, n \in Z$$

$$2x_1 = 4,859 + \pi n, n \in Z$$

$$x_1 = 2,4295 + \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in Z$$

$$x_1 = 2,43 + \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in Z$$

или

$$2x_2 = -1,459 + 3,4 + \pi n, n \in Z$$

$$2x_2 = 1,941 + \pi n, n \in Z$$

$$x_2 = 0,97 + \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in Z$$

Ответ:  $x_1 = 2,43 + \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in Z$        $x_2 = 0,97 + \frac{\pi}{2} \cdot n, n \in Z$ .

### Частные случаи простейших тригонометрических уравнений

Вспоминаем свойства функций, табличные значения функций и отмечаем углы, в которых функции равны нулю, -1, 1.

$$\sin x = 0$$

$$x = \pi n, n \in Z$$

$$\sin x = 1$$

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\sin x = -1$$

$$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in Z$$

$$\cos x = 1$$

$$x = 2\pi n, n \in Z$$

$$\operatorname{tg} x = 0$$

$$x = \pi n, n \in Z$$

$$\operatorname{ctg} x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

Решение уравнений:

1)  $\sin 2x = 0$

3)  $\sin(4x + 20^\circ) = -1$

5)  $\cos 5x = 0$

2)  $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

4)  $\cos \frac{x}{2} = -1$

6)  $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

7)  $\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

8)  $\operatorname{ctg} \frac{2}{3}x = 1$

9)  $\operatorname{tg} 4x = 1$

10)  $\sin 4x \cdot \cos 3x + \cos 4x \cdot \sin 3x = 0$

11)  $\cos^2 4x - \sin^2 4x = 0$

12)  $2 \sin 6x \cdot \cos 6x = 1$

13)  $\sin 4x \cdot \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$

14)  $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} \cdot (1 + \cos x) = 0$

15)  $\cos 7x \cdot \cos 3x + \sin 7x \cdot \sin 3x = 0$

16)  $\sin(2x - 3) = -1$

Решения: В уравнениях 1–9 применяются формулы решения соответствующих уравнений.

1)  $\sin 2x = 0$

$2x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{2}n, n \in \mathbb{Z}$$

4)  $\frac{x}{2} = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$x = 2\pi + 4\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

7)  $x - \frac{\pi}{6} = \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

2)  $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$3x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$

$3x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

5)  $5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n, n \in \mathbb{Z}$$

8)  $\frac{2}{3}x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{3}{8}\pi + \frac{3}{2}\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

3)  $4x + 20^\circ = -90^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}$

$4x = -110^\circ + 360^\circ$

$$x = -27^\circ 30' + 90^\circ \cdot n, n \in \mathbb{Z}$$

6)  $2x - \frac{\pi}{3} = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$

$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

$$x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

9)  $4x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$

$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}n, n \in \mathbb{Z}$$

При решении остальных уравнений следует использовать и формулы суммы двух углов, и формулы двойных углов.

$$10) \sin 7x = 0$$

$$7x = \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{7} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$11) \cos 8x = 0$$

$$8x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{8} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$12) \sin 12x = 1$$

$$12x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{6} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$13) \sin 4x = 0; \quad \operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0$$

$$4x = \pi n, n \in \mathbb{Z}; \quad \frac{x}{2} = \pi n$$

$$x = \frac{\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$14) \operatorname{ctg} \frac{x}{2} = 0;$$

$$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$1 + \cos x = 0$$

$$\cos x = -1$$

$$x = \pi + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$15) \cos 4x = 0$$

$$4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n, n \in \mathbb{Z}$$

$$16) 2x - 3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \left(3 - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{6 - \pi}{4} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$x = 0,71 + \pi n, n \in \mathbb{Z}$$

### ЛЕКЦИЯ 3. Решение тригонометрических уравнений и неравенств

- Уравнения, приводимые к квадратным.
- Уравнения, решаемые разложением на множители
- Однородные тригонометрические уравнения.
- Уравнения, приводимые к однородным.
- Введение вспомогательного аргумента.
- Решение простейших тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности.

Решение тригонометрических уравнений:

$$1) 2\sin^2 x + 5\cos x = 4$$

уравнение содержит функции одинакового угла, можно привести к квадратному уравнению, если заменить  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ :

$$2(1 - \cos^2 x) + 5\cos x = 4$$

$$2 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 4 = 0$$

$$-2\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0$$

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$$

Пусть  $\cos x = t$ , тогда

$$2t^2 - 5t + 2 = 0 \quad D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$$

$$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}; \quad t_1 = 2 \quad t_2 = \frac{1}{2} \text{ и тогда имеем два простейших уравнения } \sin x = \frac{1}{2} \text{ и } \sin x = 2$$

решаем их, применяя формулу решения уравнения  $\sin x = a$

$\sin x \neq 2$  уравнение не имеет решения, т.к.

$$|\sin x| \leq 1$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

И тогда, ответ:  $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

$$2) 2 \sin^2 x + 5 \sin \left( \frac{3}{2} \pi - x \right) - 2 = 0$$

функции имеют разные углы, приведем к одному углу, используя формулы приведения:

$$2 \sin^2 x - 5 \cos x - 2 = 0, \text{ т.к. } \sin \left( \frac{3}{2} \pi - x \right) = -\cos x$$

учитывая, что  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ , имеем:

$$2(1 - \cos^2 x) - 5 \cos x - 2 = 0$$

$$2 \cos^2 x + 5 \cos x = 0$$

$$2 - 2 \cos^2 x - 5 \cos x - 2 = 0$$

$$\cos x (2 \cos x + 5) = 0$$

произведение равно 0, если хотя бы один из сомножителей равен 0, имеем

$$\cos x = 0$$

$$2 \cos x + 5 = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

и

$$\cos x \neq -\frac{5}{2}$$

– уравнение не имеет решения, т.к.  $|\cos x| \leq 1$

Ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ .

$$3) \operatorname{tg}^3 x = \operatorname{tg} x$$

$$\operatorname{tg}^3 x - \operatorname{tg} x = 0$$

$$\operatorname{tg} x (\operatorname{tg}^2 x - 1) = 0 \Rightarrow$$

$$\operatorname{tg} x = 0$$

$$x = \pi n, n \in Z$$

и

$$\operatorname{tg}^2 x - 1 = 0; \operatorname{tg}^2 x = 1 \text{ и тогда } \operatorname{tg} x = \pm 1$$

$$x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}, k \in Z$$

Ответ:  $x = \pi n, n \in Z; x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}, k \in Z$ .

$$4) \sin 7x + \sin 2x = 0$$

левую часть уравнения можно преобразовать в произведение, используя формулу  $\sin \alpha + \sin \beta =$

$$= 2 \sin \frac{\alpha + \beta}{2} \cdot \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

$$2 \sin \frac{7x + 2x}{2} \cdot \cos \frac{7x - 2x}{2} = 0$$

$$2 \sin \frac{9}{2} x \cdot \cos \frac{5}{2} x = 0 \text{ и тогда}$$

$$\sin \frac{9}{2} x = 0$$

или

$$\cos \frac{5}{2} x = 0$$

$$\frac{9}{2} x = \pi n, n \in Z$$

$$\frac{5}{2} x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$$

$$x = \frac{2}{9} \pi n, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5} \pi k, k \in Z$$

$$\text{Ответ: } \underline{x = \frac{2}{9}\pi n, n \in Z} \quad \underline{x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi k, k \in Z}.$$

$$5) 4\cos^3 x + 4\cos^2 x - 3\cos x - 3 = 0$$

левую часть можно преобразовать в произведение, используя способ группировки:

$$(4\cos^3 x + 4\cos^2 x) - (3\cos x + 3) = 0$$

$$4\cos^2 x(\cos x + 1) - 3(\cos x + 1) = 0$$

$$(\cos x + 1)(4\cos^2 x - 3) = 0$$

и тогда

$$\cos x + 1 = 0 \quad \text{или} \quad 4\cos^2 x - 3 = 0$$

$$\cos x = -1 \quad \text{или} \quad \cos^2 x = \frac{3}{4}$$

$$\underline{x = \pi + 2\pi n, n \in Z} \quad \cos x = \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\underline{x = \pi k \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z}$$

$$\text{Ответ: } x = \pi k \pm \frac{\pi}{3}, k \in Z \quad x = \pi + 2\pi n, n \in Z.$$

$$6) \text{ Рассмотрим уравнение } \sin^2 x - 10\sin x \cdot \cos x + 21\cos^2 x = 0$$

Замечаем, что левая часть уравнения есть однородный многочлен относительно функций  $\sin x$  и  $\cos x$ , а правая часть равна нулю.

Такие уравнения называются однородными тригонометрическими уравнениями. Для их решения надо каждый член уравнения разделить на  $\cos x$  или  $\sin x$  в той степени, какова степень уравнения:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} - \frac{10\sin x \cdot \cos x}{\cos^2 x} + \frac{21\cos^2 x}{\cos^2 x} = 0$$

$$tg^2 x - 10tgx + 21 = 0,$$

решаем квадратное уравнение относительно функции  $tgx$ .

Пусть  $tgx = t$ , тогда

$$t^2 - 10t + 21 = 0$$

$$D = 100 - 84 = 16$$

$$t_{1,2} = \frac{10 \pm 4}{2}; \quad t_1 = 7; \quad t_2 = 3$$

тогда  $tgx = 7$

$$x = \text{arctg}7 + \pi n, n \in Z$$

$$\underline{x = 81^\circ 52' + 180^\circ n, n \in Z}$$

$tgx = 3$

$$x = \text{arctg}3 + \pi n, n \in Z$$

$$x = 71^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z$$

$$\text{Ответ: } \underline{x = 81^\circ 52' + 180^\circ n, n \in Z} \quad \underline{x = 71^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z}.$$

$$7) 3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2$$

Данное уравнение приводится к однородному тригонометрическому уравнению; для этого представим  $2 = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$ .

Имеем:

$$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x = 2(\sin^2 x + \cos^2 x)$$

$$3\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 5\cos^2 x - 2\sin^2 x - 2\cos^2 x = 0$$

$$\sin^2 x - 4\sin x \cdot \cos x + 3\cos^2 x = 0$$

разделим на  $\cos^2 x$

$$tg^2 x - 4tgx + 3 = 0$$

$$tgx = t; \quad t^2 - 4t + 3 = 0$$

$$D = 16 - 12 = 4$$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm 2}{2}; \quad t_1 = 3; t_2 = 1$$

$$tgx = 3$$

$$x = \arctg 3 + \pi n, n \in Z$$

$$x = 71^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z$$

$$tgx = 1$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z$$

$$\text{Ответ: } x = 71^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z \quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k, k \in Z.$$

Итак, мы рассмотрели уравнения, приводимые к одному аргументу, квадратному уравнению; левая часть которых разлагается на множители, а правая равна нулю – однородные тригонометрические уравнения.

А сейчас рассмотрим уравнение линейное относительно  $\sin x$  и  $\cos x$ , которое имеет вид  $a \sin x + b \cos x = c$ . Надо помнить, что уравнение имеет решение, если  $c^2 \leq a^2 + b^2$ . Это уравнение можно решать: 1) выразив  $\sin x$  и  $\cos x$  через  $tg \frac{x}{2}$ , приводим уравнение к квадратному относительно  $tg \frac{x}{2}$ ; 2) введением вспомогательного угла.

Рассмотрим на конкретном примере:

$$1) \quad 8 \sin x + 3 \cos x = 5$$

проверим условие  $c^2 \leq a^2 + b^2$ ; действительно  $25 < 64 + 9 \Rightarrow$  уравнение имеет решение.

Первый способ.

$$8 \cdot \frac{2tg \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} + 3 \frac{1-tg^2 \frac{x}{2}}{1+tg^2 \frac{x}{2}} = 5$$

$$16tg \frac{x}{2} + 3 - 3tg^2 \frac{x}{2} = 5 + 5tg^2 \frac{x}{2}$$

$$8tg^2 \frac{x}{2} - 16tg \frac{x}{2} + 2 = 0$$

$$4tg^2 \frac{x}{2} - 8tg \frac{x}{2} + 1 = 0$$

$$tg \frac{x}{2} = t \quad 4t^2 - 8t + 1 = 0$$

$$D = 64 - 16 = 48$$

$$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{48}}{8} = \frac{8 \pm 4\sqrt{3}}{8} = 1 \pm \frac{1}{2}\sqrt{3}$$

$$t_1 = 1,87$$

$$t_2 = 0,134$$

имеем:

$$tg \frac{x}{2} = 1,87$$

$$\text{и} \quad tg \frac{x}{2} = 0,134$$

$$\frac{x}{2} = \arctg 1,87 + \pi n, n \in Z$$

$$\frac{x}{2} = \arctg 0,134 + 180^\circ k, k \in Z$$

$$\frac{x}{2} = 61^\circ 52' + 180^\circ n, n \in Z$$

$$\frac{x}{2} = 7^\circ 38' + 180^\circ k, k \in Z$$

$$x = 123^\circ 44' + 360^\circ n, n \in Z$$

$$x = 15^\circ 16' + 360^\circ k, k \in Z$$

Ответ:  $x = 123^\circ 44' + 360^\circ n, n \in Z$ ;  $x = 15^\circ 16' + 360^\circ k, k \in Z$ .

Второй способ.

$$8\sin x + 3\cos x = 5$$

$25 < 64 + 9$  – уравнение имеет решения

$$\text{Найдем } \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{8^2 + 3^2} = \sqrt{73}$$

Разделим каждый член уравнения на  $\sqrt{73}$

$$\frac{8}{\sqrt{73}} \cdot \sin x + \frac{3}{\sqrt{73}} \cos x = \frac{5}{\sqrt{73}}$$

Заметим, что  $\frac{8}{\sqrt{73}} < 1$  и  $\frac{3}{\sqrt{73}} < 1$ , а вот  $\left(\frac{8}{\sqrt{73}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{73}}\right)^2 = \frac{64}{73} + \frac{9}{73} = 1$ .

Из этого следует, что  $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi$ ,  $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi$ , где  $\varphi$  – вспомогательный угол. Для нашего уравнения  $\cos \varphi = \frac{8}{\sqrt{73}}$ ;  $\sin \varphi = \frac{3}{\sqrt{73}}$ ; отсюда  $\varphi = \arcsin \frac{3}{\sqrt{73}}$ .

Наше уравнение принимает вид:

$$\cos \varphi \cdot \sin x + \sin \varphi \cdot \cos x = \frac{5}{\sqrt{73}}$$

левая часть уравнения – это  $\sin(x + \varphi)$  и значит получаем

$$\sin(x + \varphi) = \frac{5}{\sqrt{73}}$$

$$x + \varphi = (-1)^n \arcsin \frac{5}{\sqrt{73}} + \pi n, n \in Z$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{5}{\sqrt{73}} - \varphi + \pi n, n \in Z$$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{5}{\sqrt{73}} - \arcsin \frac{3}{\sqrt{73}} + \pi n, n \in Z$$

---

Найдем углы

$$x = (-1)^n 35^\circ 49' - 20^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z$$

---

Если дать значения  $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ , то получим те же углы, что и в первом случае.

Ваше желание, какому способу отдать предпочтение.

Решим ещё: 2)  $\sqrt{3} \sin x - \cos x = 1$  проверим условие:  $1 < 3 + 1$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{3 + 1} = 2; \quad \cos \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \sin x - \frac{1}{2} \cos x = 1$$

$$\cos 30^\circ \cdot \sin x - \sin 30^\circ \cdot \cos x = 1$$

$$\sin(x + 30^\circ) = 1 \text{ – частный случай } \Rightarrow$$

$$x + 30^\circ = 90^\circ + 360^\circ n, n \in Z$$

$$x = 60^\circ + 360^\circ n, n \in Z$$

---

Итак, что можно сказать о решении тригонометрических уравнений?

Наиболее применимы два метода:

- 1) привести тригонометрическое уравнение к алгебраическому различными методами, в зависимости от условия.
- 2) Метод разложения на множители, это общий метод решения многих уравнений. Суть его в том, что перенеся все члены в одну часть, надо постараться разложить её на

множители. Таким образом решение уравнения сводится к решению совокупности простейших уравнений.

Продолжим решение тригонометрических уравнений различных видов.

$$3) \cos 15x = \sin 5x$$

$$\cos 15x - \sin 5x = 0$$

$$\cos 15x - \cos(90^\circ - 5x) = 0$$

применяем формулу  $\cos \alpha - \cos \beta$

$$-2 \sin \frac{15x + 90^\circ - 5x}{2} \cdot \sin \frac{15x - 90^\circ + 5x}{2} = 0$$

$$-2 \sin \frac{10x + 90^\circ}{2} \cdot \sin \frac{20x - 90^\circ}{2} = 0$$

$$-2 \sin(5x + 45^\circ) \cdot \sin(10x - 45^\circ) = 0$$

и тогда:

$$\sin(5x + 45^\circ) = 0 \qquad \sin(10x - 45^\circ) = 0$$

$$5x + 45^\circ = 180^\circ \cdot n, n \in Z \qquad 10x - 45^\circ = 180^\circ \cdot k, k \in Z$$

$$5x = -45^\circ + 180^\circ \cdot n, n \in Z \qquad 10x = 45^\circ + 180^\circ \cdot k, k \in Z$$

$$\underline{x = -9^\circ + 36^\circ n, n \in Z} \qquad \underline{x = 4^\circ 30' + 18^\circ \cdot k, k \in Z}$$

Ответ:  $\underline{x = -9^\circ + 36^\circ n, n \in Z}$ ;  $\underline{x = 4^\circ 30' + 18^\circ \cdot k, k \in Z}$ .

$$4) 1 - \cos x = 2 \sin \frac{x}{2} \text{ левая часть уравнения это формула}$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} = 2 \sin \frac{x}{2}$$

$$2 \sin^2 \frac{x}{2} - 2 \sin \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow 2 \sin \frac{x}{2} \left( \sin \frac{x}{2} - 1 \right) = 0$$

$$\sin \frac{x}{2} = 0 \qquad \sin \frac{x}{2} - 1 = 0$$

$$\frac{x}{2} = \pi n, n \in Z \qquad \sin \frac{x}{2} = 1$$

$$\frac{x}{2} = \pi n, n \in Z \qquad \frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$\underline{x = 2\pi n, n \in Z} \qquad \underline{x = \pi + 4\pi k, k \in Z}$$

Ответ:  $\underline{x = 2\pi n, n \in Z}$   $\underline{x = \pi + 4\pi k, k \in Z}$ .

$$5) \sin(30^\circ + x) + \sin(30^\circ - x) = \frac{1}{2}$$

применим формулу  $\sin \alpha + \sin \beta$  к левой части уравнения:



$$2 \sin \frac{30^\circ + x + 30^\circ - x}{2} \cdot \cos \frac{30^\circ + x - 30^\circ + x}{2} = \frac{1}{2}$$

$$2 \sin 30^\circ \cdot \cos x = \frac{1}{2}$$

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \cos x = \frac{1}{2}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}; \quad x = \pm \arccos \frac{1}{2} + 2\pi k, k \in Z$$

$$x = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$$

Ответ:  $\pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, k \in Z$ .

б)  $\cos(x - 70^\circ) = \sin(x + 70^\circ)$

$$\cos(x - 70^\circ) - \sin(x + 70^\circ) = 0$$

Учитывая, что  $\cos \alpha = \sin(90^\circ - \alpha)$  заменим  $\sin(x + 70^\circ)$  на  $\cos(90^\circ - x - 70^\circ) = \cos(20^\circ - x)$ , тогда  $\cos(x - 70^\circ) - \cos(20^\circ - x) = 0$ .

Применяем формулу  $\cos \alpha - \cos \beta$  и получим

$$-2 \sin \frac{x - 70^\circ + 20^\circ - x}{2} \cdot \sin \frac{x - 70^\circ - 20^\circ + x}{2} = 0 \qquad -2 \sin \frac{-70^\circ}{2} \cdot \sin \frac{2x - 90^\circ}{2} = 0$$

$$2 \sin 35^\circ \cdot \sin(x - 45^\circ) = 0$$

$$2 \sin 35^\circ \neq 0, \text{ то } \sin(x - 45^\circ) = 0$$

$$x - 45^\circ = 180^\circ n, n \in Z$$

$$x = 45^\circ + 180^\circ n, n \in Z$$

7)  $\cos 3x + \sin 2x \cdot \sin x = 0$

$$\cos 3x - \frac{1}{2}(\cos 3x - \cos x) = 0$$

$$\frac{1}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x = 0$$

$$\cos 3x - \frac{1}{2} \cos 3x + \frac{1}{2} \cos x = 0$$

$$\frac{1}{2}(\cos 3x + \cos x) = 0$$

$$\cos 3x + \cos x = 0$$

$$2 \cos 2x \cdot \cos x = 0$$

$$\cos 2x \cdot \cos x = 0$$

$$\cos 2x = 0$$

$$2x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} n, n \in Z$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$$

8)  $2 \cos^2 \left( \frac{3\pi}{2} - x \right) + 3 \cos(\pi - x) - 2 = 0$

ещё раз вспомним, как решать такие уравнения. Применим формулы приведения

$$2 \sin^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$$

приведем к одинаковой функции  $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$  из значит

$$2(1 - \cos^2 x) - 3 \cos x - 2 = 0$$

$$2 \cos^2 x + 3 \cos x = 0$$

$$2 - 2 \cos^2 x - 3 \cos x - 2 = 0$$

$$\cos x(2 \cos x + 3) = 0$$

отсюда

$$\cos x = 0$$

и  $2 \cos x + 3 = 0$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z} \quad \cos x = -\frac{3}{2}, \text{ как видим это уравнение не имеет решения, т.к. } \left| -\frac{3}{2} \right| > 1,$$

а  $|\cos x| \leq 1$  поэтому ответ:  $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$ .

Мы рассмотрели решения различных уравнений и видим, что в каждом случае надо творчески подходить к нахождению метода решения, что возможно при хорошем знании формул тригонометрии, алгебраических преобразованиях.

### 1. Решение тригонометрических неравенств

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида

$$\sin x < m \quad \cos x < m \quad \operatorname{tg} x < m \quad \operatorname{ctg} x < m$$

$$\sin x > m \quad \cos x > m \quad \operatorname{tg} x > m \quad \operatorname{ctg} x > m$$

где  $m$  – данное число

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.

Рассмотрим на примерах

1)  $\sin x < \frac{1}{2}$ , т.к.  $|\sin x| \leq 1$ , то данное неравенство можно записать

$$-1 \leq \sin x \leq \frac{1}{2}$$

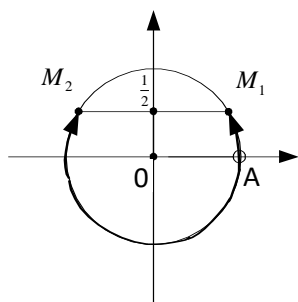
$$\cup AM_1 = \frac{\pi}{6}$$

$$\cup AM_2 = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7}{6}\pi$$

и значит неравенству  $\sin x < \frac{1}{2}$  удовлетворяют дуги из промежутка

$-\frac{7}{6}\pi < x < \frac{\pi}{6}$ . Т.к. функция  $\sin \alpha$  имеет период  $2\pi$ , то решение этого

неравенства будет промежуток  $-\frac{7}{6}\pi + 2\pi k \leq x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ .



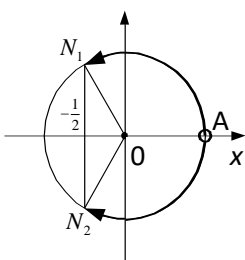
2)  $\cos x > -\frac{1}{2}$

Перепишем неравенство в силу того, что  $|\cos x| \leq 1$

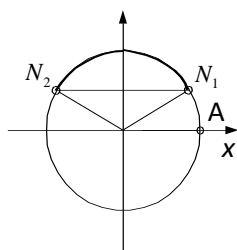
$$-\frac{1}{2} < \cos x \leq 1$$

неравенству  $\cos x > -\frac{1}{2}$  удовлетворяют дуги из промежутка  $-\frac{2}{3}\pi < x \leq \frac{2}{3}\pi$ .

Общим решением служит множество дуг вида  $-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k < x < \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$ .



3)  $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ , аналогично для  $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$  удовлетворяет



$$\frac{\pi}{4} < x < \pi - \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$$

$$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$$

4)  $tgx > \sqrt{3}$ , т.е. можно записать  $\sqrt{3} < tgx < \infty$ , т.к. функция  $tg$  неограниченная. Это неравенство выполняется при  $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$ ; период функции тангенса равен  $\pi$ , значит  $\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$

Самостоятельно:

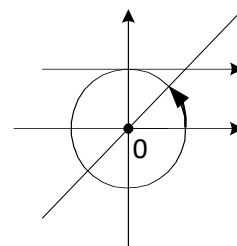
5)  $ctgx > 1$

$1 < ctgx < \infty$  этому неравенству удовлетворяют значения  $x$  из промежутка

$$0 < x < \frac{\pi}{4}$$

$$0 + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$$

Общее решение:  $\pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$



### Раздел 3. Начала математического анализа

#### Тема 3.1. Последовательности

##### ЛЕКЦИЯ 1. Последовательности .

- Определение последовательности. Способы задания и свойства числовых последовательностей.
- Понятие о пределе последовательности
- Существование предела монотонной ограниченной последовательности.
- Теоремы о пределах последовательностей.
- Нахождение пределов последовательностей.
- Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.

Числовая последовательность – это числовое множество, поставленное в соответствие множеству натуральных чисел. Каждый член последовательности имеет свой порядковый номер. Или, красиво и коротко: числовая последовательность – это функция натурального аргумента. Числовые последовательности задаются формулой общего члена, например:

$$(1) \quad a_n = \frac{1}{n}: \quad 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \dots$$

$$(2) \quad a_n = \frac{n}{n+1}: \quad \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$$

$$(3) \quad a_n = 2n - 1: \quad 1; 3; 5; 7; 9; 11; \dots$$

$$(4) \quad a_n = \frac{1}{2^n}; \quad \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \dots$$

$$(5) \quad a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}; \quad 1; \frac{-1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{-1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{-1}{64}; \dots$$

$$(6) \quad a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2 + 1}; \quad \frac{-1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{-3}{10}; \frac{4}{17}; \frac{-5}{26}; \dots$$

$$(7) \quad a_n = \frac{1}{n!}; \quad 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{24}; \frac{1}{120}; \frac{1}{720}; \dots$$

Как видите, после каждой формулы общего члена числовой последовательности вычислено несколько первых членов соответствующих последовательностей, проверьте правильность.

Числовые последовательности можно определять заданием нескольких первых членов, например:

$$(8) \quad a_n: \quad 1; -1; 1; -1; 1; -1; \dots$$

(9)  $a_n: \quad 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; \dots$  – эта последовательность носит название «Числа Фибоначчи», члены этой последовательности получают по рекуррентной формуле  $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$ , при условии, что  $a_1 = a_2 = 1$

**МОНОТОННОСТЬ.** Числовая последовательность  $a_n$  называется *возрастающей*, если для всех  $n$   $a_n < a_{n+1}$ . Различайте понятия «возрастающая последовательность» и «неубывающая последовательность». Так последовательность (2) возрастающая, а последовательность (10)  $a_n: 1; 1; 2; 2; 3; 3; \dots$  неубывающая.

Аналогично, числовая последовательность  $a_n$  называется *убывающей*, если для всех  $n$   $a_n > a_{n+1}$ . Различайте понятия «убывающая последовательность» и «невозрастающая последовательность». Так последовательность (1) убывающая, а последовательность (11)  $a_n: 1; 1; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1; \dots$  невозрастающая.

Итак, убывающие, возрастающие, неубывающие, невозрастающие последовательности называются **МОНОТОННЫМИ**.

Так, последовательности (1); (2); (3); (4); (7); (9); (10); (11) являются монотонными, а последовательности (5); (6); (8) монотонными не являются, они называются *колеблющимися*.

**ОГРАНИЧЕННОСТЬ.** Если существуют такие числа  $m$  и  $M$ , что для всех  $n$   $m \leq a_n \leq M$ , то говорят, что последовательность  $a_n$  ограниченная. Причем  $m$  – нижняя граница,  $M$  – верхняя граница. Только последовательности, ограниченные и сверху и снизу называются *собственно ограниченными*.

Так, последовательность (1) ограничена: снизу числом 0, сверху – числом 1. В самом деле, все ее члены принадлежат промежутку:

$(0; 1]$ . Последовательность (2) также ограничена, все члены этой последовательности

удовлетворяют неравенству  $\frac{1}{2} \leq a_n < 1$ . А вот последовательность (3) хотя и ограничена снизу

числом 1, но она неограничена сверху, поэтому она является неограниченной.

Убедитесь самостоятельно, что последовательности (4) – (7) являются ограниченными и найдите нижнюю и верхнюю границы. Так, для последовательности (6) все ее члены принадлежат отрезку  $[-\frac{1}{2}; \frac{2}{5}]$ .

**СХОДИМОСТЬ.** Для усвоения этого понятия необходимо ввести понятие *предела числовой последовательности*. Оно, это понятие, - важнейшее в курсе математического анализа! Рассмотрим последовательность

$$(2) \quad a_n = \frac{n}{n+1} : \frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \dots$$

Как уже отмечалось, эта последовательность ограничена и монотонна. Она ограничена сверху числом 1, т.к. все ее члены меньше 1, в то же время она возрастает. Таким образом, на интуитивном уровне, можно сделать вывод, что члены этой последовательности *стремятся* к 1. Как понимается последний глагол? Если  $a \rightarrow b$ , то это означает, что расстояние на числовой прямой между этими числами будет меньше любого сколь угодно малого положительного числа  $\varepsilon$ , т.е.  $|a-b| < \varepsilon$ .

В этом случае можно сказать, что пределом этой последовательности при  $n \rightarrow \infty$  является число 1. И записывают это так:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = 1, \text{ и читают: предел числовой последовательности } a_n = \frac{n}{n+1} \text{ равен } 1 \text{ при } n$$

стремящимся к бесконечности.

Дадим определение предела числовой последовательности в общем виде, его сформулировал французский математик О. Коши.

Число  $b$  называется пределом числовой последовательности  $a_n$ , если по любому наперед заданному сколь угодно малому положительному числу  $\varepsilon$  найдется такой номер члена последовательности  $N$ , что для всех  $n > N$ , будет выполняться неравенство  $|a_n - b| < \varepsilon$ .

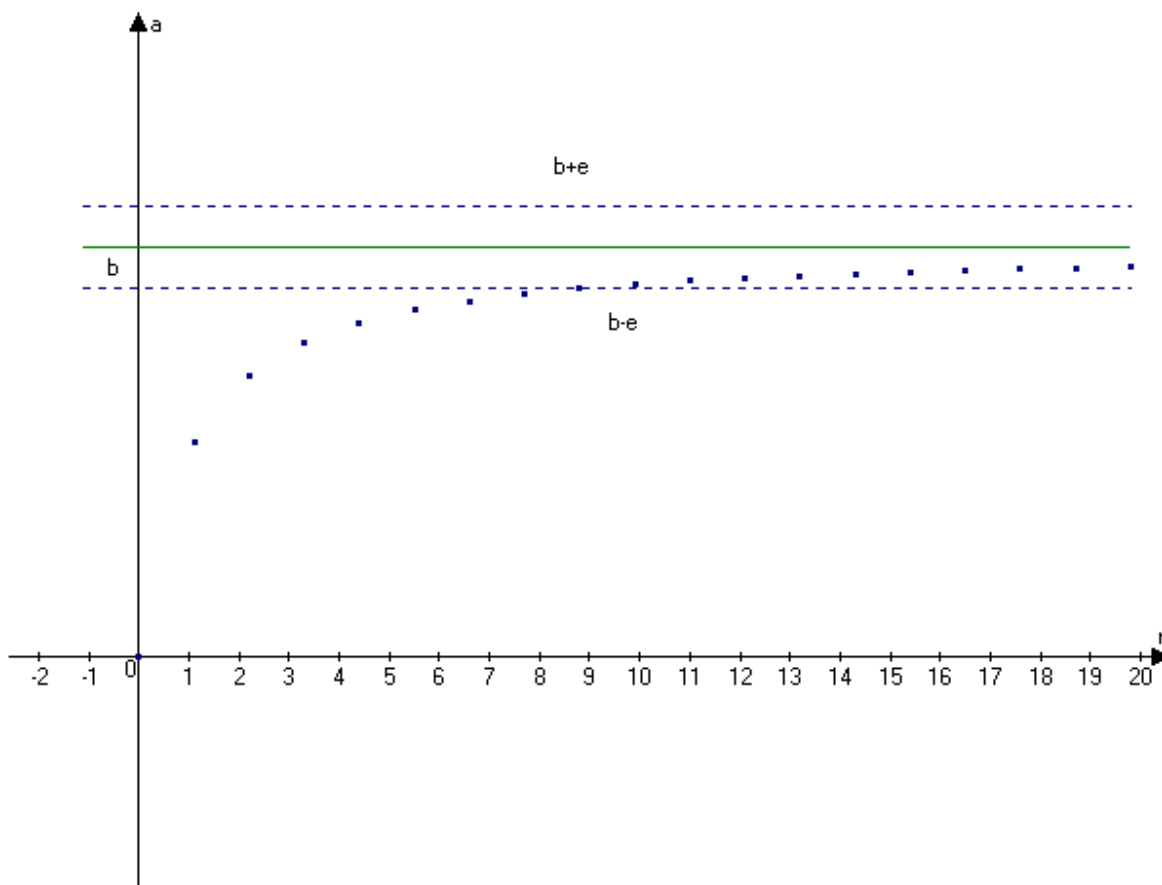


Рис . 1

Или (на языке интервалов) ... для всех  $n > N$  все члены последовательности будут принадлежать интервалу  $(b - \varepsilon; b + \varepsilon)$ .

На рисунке видно, что все члены последовательности с номером больше 9 отличаются от  $b$  меньше, чем на  $\varepsilon$ .

Обратим особое внимание на то, что в интервале  $(b - \varepsilon; b + \varepsilon)$  содержится бесконечное число членов последовательности, а вне его – конечное.

Последовательности, которые имеют предел, называются *сходящимися*.

Перечислим без доказательства некоторые свойства пределов последовательностей, записав их на символическом языке математики. Постарайтесь сформулировать их словесно, внести в конспект.

$$1) \lim_{n \rightarrow \infty} k a_n = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$$

$$2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$3) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

$$4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}, \text{ если } \lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$$

5) Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Возвратимся к понятиям «МОНОТОННОСТЬ, ОГРАНИЧЕННОСТЬ, СХОДИМОСТЬ».

Задумайтесь: из чего, что следует, ответьте на вопросы, такие как.

Если последовательность сходится, она ограничена?

Если последовательность монотонна, она ограничена?

Если последовательность ограничена, она монотонна?

Если последовательность ограничена, она сходится? И т.д.

Центральным же вопросом является следующий:

При каких условиях последовательность сходится? Ответ прост и очевиден: *монотонная ограниченная последовательность сходится*. Это теорема К.Вейерштрасса.

Рассмотрим некоторые примеры применения теории пределов.

Известно, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} |q^n| = 0$  (\*), если  $|q| < 1$ . Воспользуемся этим ключом для вывода формулы

**суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Вы знаете эту формулу, но как ее получить?**

Под суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии будем понимать предел последовательности частичных сумм геометрической прогрессии при неограниченном увеличении числа слагаемых:  $S_{\text{бугп}} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$  (\*\*)

Формула для суммы членов геометрической прогрессии:  $S_n = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}$ , подставим ее в (\*\*),

будем

иметь:

$$S_{\text{бугп}} = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = (\text{но } b_1 \text{ и } q \text{ константы, потому и дробь } \frac{b_1}{1-q} \text{ так же является константой}$$

$$\text{и ее можно вынести за знак предела}) = \frac{b_1}{1-q} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q^n) = (\text{но в силу (*) } \lim_{n \rightarrow \infty} (1-q^n) = 1, \text{ поэтому}) = \frac{b_1}{1-q}$$

Итак,  $S_{\text{бугп}} = \frac{b_1}{1-q}$ . Используем полученную формулу для перевода бесконечных периодических

дробей в обыкновенные. Сначала рассмотрим т.н. чистые периодические дроби, например,  $a = 0,27272727\dots$ . Запишем это число в виде суммы разрядных единиц:

$$a = \frac{27}{100} + \frac{27}{10000} + \frac{27}{1000000} + \frac{27}{100000000} + \dots = \frac{27}{100} + \frac{27}{100^2} + \frac{27}{100^3} + \frac{27}{100^4} + \dots$$

Как видите, получили бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с  $b_1 = \frac{27}{100}$  и

$$q = \frac{1}{100}. \text{ Подставим в полученную формулу: } a = 0,272727 = \frac{\frac{27}{100}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{\frac{27}{100}}{\frac{99}{100}} = \frac{27}{99} = \frac{3}{11}.$$

Легко видеть, что формулой можно и не пользоваться, а формально подставить в числитель дроби цифры периода, а в знаменатель записать столько девяток, сколько цифр в периоде. Так,

$$0,333333\dots = \frac{3}{9} = \frac{1}{3}, \quad 0,504504504504\dots = \frac{504}{999} = \frac{56}{111}$$

Самостоятельно:  $0,(72)$ ;  $0,(2934)$ ;  $0,(36)$  и т.д. И проверяйте на МК.

Аналогично, но несколько сложнее решается такая задача для *смешанной* периодической дроби. Это такая дробь, у которой до периода существуют другие цифры, например:  $0,34545454545\dots$ ,  $0,5036363636\dots$ ,  $0,8106666666$  и т.д.

Снова запишем дробь в виде суммы разрядных единиц:

$$0,3454545\dots = \frac{3}{10} + \frac{45}{1000} + \frac{45}{100000} + \dots = \frac{3}{10} + \frac{45}{1000} + \frac{45}{1000} \cdot \frac{1}{100} + \frac{45}{1000} \cdot \frac{1}{100^2} \dots = w$$

Как видите бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с  $b_1 = \frac{45}{1000}$  и  $q = \frac{1}{100}$

начинается со второго слагаемого, применяем выведенную формулу.

$$w = \frac{3}{10} + \frac{\frac{45}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{3}{10} + \frac{\frac{45}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{3}{10} + \frac{45}{990} = \frac{3}{10} + \frac{1}{22} = \frac{3 \cdot 11 + 5}{110} = \frac{38}{110} = \frac{19}{55}. \text{ Проверим на МК.}$$

Действительно  $\frac{19}{55} = 0,345454545\dots$ . Все верно.

Для закрепления рассмотрим еще один пример:

$$r = 0,8106666666 = \frac{810}{1000} + \frac{6}{10000} + \frac{6}{100000} + \dots = \frac{810}{1000} + \frac{6}{10000} + \frac{6}{10000} \cdot \frac{1}{10} + \frac{6}{10000} \cdot \frac{1}{10^2} + \dots$$

Здесь  $b_1 = \frac{6}{10000}$  и  $q = \frac{1}{10}$ . Применяя формулу, будем иметь:

$$r = \frac{810}{1000} + \frac{\frac{6}{10000}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{810}{1000} + \frac{\frac{6}{10000}}{\frac{9}{10}} = \frac{810}{1000} + \frac{6}{9000} = \frac{810}{1000} + \frac{1}{1500} = \frac{3 \cdot 810 + 2}{3000} = \frac{2432}{3000} = \frac{304}{375}.$$

Убедитесь с помощью МК, что расчеты проведены верно.

**ПРИМЕРЫ.** Вычислите:

1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n + 2}{3n - 1}$

2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^2 + 2n - 3}{3n^2 - n + 4}$

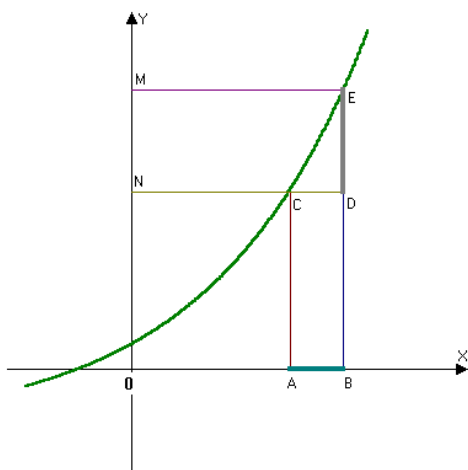
## Тема 3.2. Производная и ее применение

### ЛЕКЦИЯ 1. Производная функции.

- Приращение аргумента и приращение функции.
- Задача на движение, приводящая к понятию производной.
- Средняя скорость движения.
- Мгновенная скорость.
- Понятие производной.
- Дифференцирование. Дифференцируемая функция.
- Вывод нескольких формул дифференцирования по определению производной. Производная степенной функции.
- Производная и непрерывность.

*Приращение аргумента и приращение функции.*

Пусть задана функция  $y = f(x)$ . При  $x = x_0$  она принимает значение  $y_0 = f(x_0)$ .



$x_0$  - на оси OX в точке A,  $y_0$  - на оси OY в точке N. Дадим  $x$  приращение  $\Delta x = AB$ , получим новое приращенное значение аргумента (в точке B)  $x = x_0 + \Delta x$

Вычислим приращенное значение функции  $y = f(x_0 + \Delta x)$  на оси OY - точка M, т.е. длина отрезка BE.

Естественно, что отрезок DE и будет являться приращением функции в точке  $x_0$ , если приращение аргумента равно  $\Delta x$ .

Т.е.  $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Итак, приращение функции есть разность между приращенным значением функции и первоначальным (отрезок DE).

Обратите внимание, что для возрастающей функции  $DE > 0$ , а для убывающей функции AC будет больше DE, поэтому разность  $DE - AC < 0$  и  $\Delta f(x_0) < 0$ .

Сделайте самостоятельно схематический чертеж убывающей функции и укажите  $\Delta f(x_0)$ .

Вычислим приращение функции  $f(x) = x^2 + 2x + 5$  при  $x_0 = 2$  и  $\Delta x = 0,1$   $x_0 + \Delta x = 2,1$

По формуле  $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) =$  (будем иметь)  $= f(2,1) - f(2) =$

$2,1^2 + 2 \cdot 2,1 + 5 - (2^2 + 2 \cdot 2 + 5) =$  (применяем микрокалькулятор)  $= 0,61$

Поставим задачу отыскать приращение функции не в конкретной точке  $x_0$ , а в произвольной  $x$ , т.е. выведем формулу приращения в общем виде:

$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) + 5 - x^2 - 2x - 5 = x^2 + 2x \Delta x + (\Delta x)^2 + 2x \Delta x + 5 - x^2 - 2x - 5 = 2x \Delta x + (\Delta x)^2 + 2 \Delta x = 2x \Delta x + 2 \Delta x + (\Delta x)^2 = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$  - это и есть приращение функции в общем виде:  $\Delta f(x) = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$ . Подставим  $x = 2$ ,  $\Delta x = 0,1$  получим  $\Delta f(x) = 0,61$  - все верно.

Изучение различных процессов (механического движения, химических реакций, расширение жидкости при нагревании, течения электрического тока) требует вычисления скорости изменения различных величин.

*Задача на движение. Средняя скорость прямолинейного движения материальной точки.*

Пусть материальная точка  $M$  движется по прямой. В начале движения при  $t = 0$  она занимала положение  $O$ . В момент времени  $t_1$  она заняла положение  $M_1$ , в момент времени  $t_2$  она заняла положение  $M_2$ . Каждому моменту времени  $t$  соответствует определенная координата  $s$  точки



$M$ . Поэтому положение точки есть функция времени  $s = f(t)$ . Эту функцию называют законом движения точки  $M$ .

Для характеристики изменения пути служит понятие скорости. Средняя скорость движения точки равна отношению пройденного пути ко времени его прохождения. Если  $s_1 = f(t_1)$ ,  $s_2 = f(t_2)$  то

$$\text{На участке } OM_1: v_{cp} = \frac{s_1}{t_1} = \frac{f(t_1)}{t_1};$$

$$\text{На участке } OM_2: v_{cp} = \frac{s_2}{t_2} = \frac{f(t_2)}{t_2};$$

$$\text{На участке } M_1M_2: v_{cp} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}.$$

Пусть  $\Delta t$  - приращение времени, а  $\Delta s$  - приращение пути. то На участке  $M_1M_2$ :

$$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1} \quad \text{При равномерном движении } v_{cp} \text{ постоянно на любом участке пути.}$$

На практике поезда, самолеты, корабли движутся неравномерно. Средняя скорость не дает точного представления о быстроте движения на отдельных участках пути. В связи с этим возникает необходимость понятия скорости в данный момент времени, т.е. мгновенной скорости.

Пусть материальная точка  $M$  движется прямолинейно по закону  $s = f(t)$ . В момент времени  $t_0$  она заняла положение  $M_0$  и прошла путь  $s_0 = f(t_0)$ . Найдем скорость точки в момент времени  $t_0$ .

Пусть за промежуток времени  $\Delta t$ , начиная с момента  $t_0$ , она продвинулась на расстояние  $\Delta s$  и заняла положение  $M_1$ . Тогда  $t_1 = t_0 + \Delta t$ ,  $s_1 = f(t_1) = s_0 + \Delta s$ .  
 $\Delta s = f(t_1) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$ .

Средняя скорость движения на участке  $M_0M_1$  равна  $v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$ . При  $\Delta t$ , стремящемся к нулю, средняя скорость будет приближаться к скорости в момент времени  $t_0$ .

Мгновенной скоростью прямолинейно движущейся точки в момент времени  $t_0$  называется предел средней скорости при  $\Delta t$ , стремящемся к нулю:

$$v_{мгн} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

**Определение.** Пусть функция  $y = f(x)$  определена в некотором интервале, содержащем внутри себя точку  $x_0$ . Дадим аргументу приращение  $\Delta x$  такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдем соответствующее приращение функции  $\Delta y$  (при переходе от точки  $x_0$  к точке  $x_0 + \Delta x$ ) и составим отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ . Если существует предел этого отношения при  $\Delta x \rightarrow 0$ , то указанный предел называют **производной функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$**  и обозначают  $f'(x_0)$ .

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).$$

Операция нахождения производной данной функции называется *дифференцированием* этой функции, Если производная в точке  $x_0$  существует, то говорят, что функция *дифференцируема* в этой точке.

Функция, имеющая производную в каждой точке промежутка, называется *дифференцируемой* на этом промежутке.

**Алгоритм нахождения производной  
функции  $y = f(x)$ .**

1. Зафиксировать значение  $x$ , найти  $f(x)$ .
  2. Дать аргументу  $x$  приращение  $\Delta x$ , перейти в новую точку  $x + \Delta x$ , найти  $f(x + \Delta x)$ .
  3. Найти приращение функции:  $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$ .
  4. Составить отношение  $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ .
  5. Вычислить  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$ .
- Этот предел и есть  $f'(x)$ .

**Пример 1.** Найти производную постоянной функции  $y = C$ .

**Решение.** Здесь  $f(x) = C$ . Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

- 1) Для фиксированного значения  $x$  имеем:  $f(x) = C$ .
- 2) В точке  $x + \Delta x$  имеем:  $f(x + \Delta x) = C$ .
- 3)  $\Delta y = C - C = 0$ .
- 4)  $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$ .
- 5)  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} 0 = 0$ .

**Ответ:**  $(C)' = 0$ .

**Пример 2.** Найти производную функции  $y = \frac{1}{x}$ .

**Решение.** Здесь  $f(x) = \frac{1}{x}$ . Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения  $x$  (разумеется, мы полагаем, что  $x \neq 0$ ) имеем:  $f(x) = \frac{1}{x}$ .

2) В точке  $x + \Delta x$  имеем:  $f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$  (при этом предполагаем, что  $x$  и  $x + \Delta x$  — числа одного знака, чтобы в промежутке между  $x$  и  $x + \Delta x$  не оказалась точка 0).

$$3) \Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}.$$

$$4) \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = \frac{-1}{x(x + \Delta x)}.$$

$$5) \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}.$$

$$\text{Ответ: } \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$

Аналогично можно вывести формулы дифференцирования других функций:

$$(kx + m)' = k.$$

В частности,

$$(x)' = 1.$$

, и еще:

$$(x^2)' = 2x.$$

$$(x^n)' = nx^{n-1}.$$

Запишем таблицу производных:

$$\begin{aligned} C' &= 0; \\ x' &= 1; \\ (kx + m)' &= k; \\ (x^2)' &= 2x; \\ \left(\frac{1}{x}\right)' &= -\frac{1}{x^2}; \\ (\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ (x^n)' &= nx^{n-1} \end{aligned}$$

Таблица производных будет постепенно пополняться новыми формулами.

Существование производной функции в точке связано непрерывностью данной функции.

**ТЕОРЕМА.** Если функция имеет производную в точке  $x_0$ , то она непрерывна в этой точке.

Обратная теорема неверна. Так, функция  $y = |x|$  непрерывна в точке  $x = 0$ , но производная в этой точке не существует.

## ЛЕКЦИЯ 2. Правила дифференцирования. Таблица производных.

- Производные тригонометрических функций.
- Производная суммы (разности) функций.
- Производная произведения.
- Производная частного.
- Производная сложной функции.
- Производная обратной функции.

Добавим в таблицу производных формулы для тригонометрических функций:

$$\begin{aligned}c' &= 0, c - \text{число} \\(x)' &= 1 \\(x^n)' &= n \cdot x^{n-1} \\(\sqrt{x})' &= \frac{1}{2\sqrt{x}} \\ \left(\frac{1}{x}\right)' &= -\frac{1}{x^2} \\(\sin x)' &= \cos x \\(\cos x)' &= -\sin x \\(\operatorname{tg} x)' &= \frac{1}{\cos^2 x} \\(\operatorname{ctg} x)' &= -\frac{1}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

Для нахождения производных выражений, составленных из этих функций, доказано несколько теорем, которые называются правилами дифференцирования.

### Правила дифференцирования.

Пусть  $u$  и  $v$  – функции,  $c$  – число.

$$\begin{aligned}(u + v)' &= u' + v' \\(u - v)' &= u' - v' \\(u \cdot v)' &= u' \cdot v + u \cdot v' \\ \left(\frac{u}{v}\right)' &= \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2} \\(u \cdot v)' &= u' \cdot v + u \cdot v' \\(c \cdot u)' &= c \cdot u'\end{aligned}$$

ПРИМЕРЫ:

$$(x^2 + \sin x)' = (x^2)' + (\sin x)' = 2x + \cos x.$$

$$(5x^2)' = 5(x^2)' = 5 \cdot 2x = 10x;$$

$$\left(-\frac{\cos x}{3}\right)' = -\frac{1}{3} (\cos x)' = -\frac{1}{3} (-\sin x) = \frac{1}{3} \sin x.$$

$$\begin{aligned} ((2x + 3) \sin x)' &= (2x + 3)' \sin x + (2x + 3)(\sin x)' = \\ &= 2 \sin x + (2x + 3) \cos x. \end{aligned}$$

$$\left( \frac{x^2}{5 - 4x} \right)' = \frac{(x^2)' \cdot (5 - 4x) - x^2(5 - 4x)'}{(5 - 4x)^2} = \frac{2x(5 - 4x) - x^2(-4)}{(5 - 4x)^2} = \frac{10x - 4x^2}{(5 - 4x)^2}.$$

Функция называется *сложной*, если ее аргумент тоже функция, например,  $y = \sqrt{3x + 1}$ .

$y = \sqrt{t}$  - внешняя функция,  $y = 3x + 1$  - внутренняя.

Правило для нахождения производной сложной функции:

Производная сложной функции равна произведению производной внешней функции на производную внутренней.

$$(f(t(x)))' = f'(t) \cdot t'(x)$$

ПРИМЕР.

$$y' = (\sqrt{3x + 1})' = \frac{1}{2\sqrt{3x + 1}} \cdot (3x + 1)' = \frac{3}{2\sqrt{3x + 1}}.$$

*Производная обратной функции.*

Если функция  $y = f(x)$  и ее обратная функция  $x = f^{-1}(y)$  имеют производные, то

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$$

Пример. Найдем производную функции  $y = \arcsin x$ , где  $x \in [-1; 1]$ .

$$x = \sin y \Rightarrow x' = \cos y;$$

$$y' = \frac{1}{x'} \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1 - \sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

$$\text{Аналогично } (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

### ЛЕКЦИЯ 3. Применение производной.

- Производная и непрерывность функции.
- Применение непрерывности. Метод интервалов для решения дробно-рациональных неравенств.
- Правило расстановки знаков.
- Примеры решения неравенств.
- Секущая и касательная.
- Существование касательной к графику функции в данной точке.
- Угловой коэффициент прямой.
- Геометрический смысл производной.
- Уравнение касательной.
- Приближенные вычисления с помощью производной.
- Физический смысл производной.
- Нахождение скорости для процесса, заданного формулой и графиком.

1. Функция  $f(x)$  называется непрерывной в точке  $x_0$ , если она определена в некоторой окрестности этой точки и если предел функции при  $x \rightarrow x_0$  равен значению функции в этой точке, т. е.  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ .

2. Функция  $f(x)$ , непрерывная в каждой точке заданного промежутка, называется непрерывной на всем промежутке.

3. Любая рациональная функция непрерывна при всех значениях независимой переменной, при которых она определена. Любая иррациональная функция непрерывна в любой точке области определения, кроме крайних точек, если они существуют.

Например, функция  $y = x^2$  непрерывна в любой точке числовой прямой, а функция  $y = \sqrt{x}$  непрерывна в любой точке  $x > 0$ .

4. Если функция, определенная в некоторой окрестности точки  $x_0$ , в точке  $x_0$  не определена или ее предел в точке  $x_0$  не равен значению функции в этой точке, то говорят, что функция имеет разрыв в точке  $x_0$ , а точку  $x_0$  называют точкой разрыва.

Например, функция  $y = \frac{a}{x}$  непрерывна в любой точке  $x \neq 0$ , а в точке  $x = 0$  терпит разрыв.

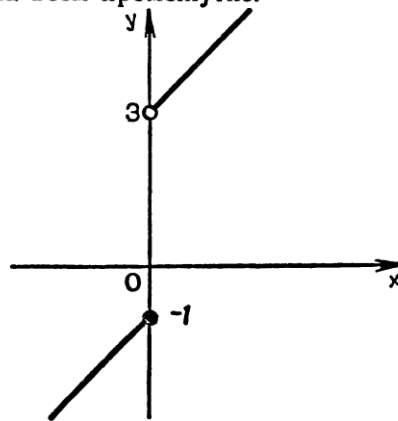


Рис. 179

Если на интервале  $(a; b)$  функция  $f$  непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

2. **Метод интервалов.** На свойстве непрерывных функций, рассмотренном в этом пункте (его полное доказательство приводится в курсах математического анализа), основан метод решения неравенств с одной переменной (*метод интервалов*). Опишем его.

Пусть функция  $f$  непрерывна на интервале  $I$  и обращается в нуль в конечном числе точек этого интервала. По сформулированному выше свойству непрерывных функций этими точками  $I$  разбивается на интервалы, в каждом из которых непрерывная функция  $f$  сохраняет постоянный знак. Чтобы определить этот знак, достаточно вычислить значение функции  $f$  в какой-либо одной точке из каждого такого интервала.

■ **Пример 1.** Решим неравенство  $\frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6} \geq 0$ .

Функция  $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 - 5x + 6}$  непрерывна в каждой точке своей области определения (это дробно-рациональная функция) и обращается в нуль в точках  $-1$  и  $1$ . Область определения этой функции — вся числовая прямая, за исключением нулей знаменателя, т. е. точек  $2$  и  $3$ . Эти точки и точки  $-1$  и  $1$  разбивают область определения  $f$  на 5 промежутков (рис. 90), в каждом из которых функция  $f$  непрерывна и не обращается в нуль. На рисунке отмечен знак  $f$  в каждом из соответствующих интервалов, который определяем, найдя знаки значений  $f$  во внутренних точках интервалов. Неравенство нестрогое, поэтому числа  $-1$  и  $1$  (нули функции  $f$ ) являются решениями неравенства. Рассматривая рисунок, можно записать ответ: множество решений неравенства — объединение промежутков  $(-\infty; -1]$ ,  $[1; 2)$  и  $(3; \infty)$ .



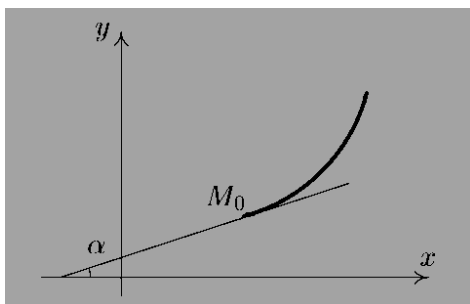
### Геометрический смысл

Производная функции  $y = f(x)$  в точке  $x_0$  равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке  $M_0(x_0, f(x_0))$ , т.е.  $f'(x_0) = \operatorname{tg} \alpha$ , где  $\alpha$  — угол наклона касательной к графику функции  $y = f(x)$  в точке  $M_0$ .

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

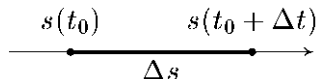
$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \quad -$$

уравнение касательной.



### Физический смысл.

Предположим, что функция  $s = s(t)$  описывает закон движения материальной точки по прямой линии, т.е.  $s = s(t)$  – путь, пройденный этой точкой от начала отсчета за время  $t$ . Тогда за время  $t_0$  пройден путь  $s = s(t_0)$ , а за время  $t_1$  – путь  $s = s(t_1)$ . За промежуток времени  $\Delta t = t_1 - t_0$  точка пройдет отрезок пути  $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$ .



Отношение  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  выражает *среднюю скорость* движения материальной точки за время  $\Delta t$ .

Предел отношения  $\frac{\Delta s}{\Delta t}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  называется *мгновенной скоростью* движения материальной точки в момент времени  $t_0$ . Поскольку  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0)$ , то *физический смысл* производной функции  $s = s(t)$  – мгновенная скорость движения.

### ЛЕКЦИЯ 4. Применение производной к исследованию функции.

- Достаточные признаки возрастания и убывания функции.
- Критические точки.
- Необходимый признак экстремума функции.
- Достаточные признаки существования экстремума функции.
- План исследования функции с помощью производной.
- Исследование функции и построение графика. Пример.
- Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке.

#### Условия возрастания и убывания функций.

**Теорема 1.** Для того чтобы дифференцируемая на интервале  $(a, b)$  функция  $f(x)$  была *неубывающей (невозрастающей)* на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы  $f'(x) \geq 0$  ( $f'(x) \leq 0$ ) для всех  $x \in (a, b)$ .

**Теорема 2.** Если функция  $f(x)$  дифференцируема на интервале  $(a, b)$  и  $f'(x) > 0$  ( $f'(x) < 0$ ) для всех  $x \in (a, b)$ , то эта функция *возрастает (убывает)* на интервале  $(a, b)$ .

#### Точки экстремума.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*.

**Теорема 3.** (*необходимое условие существования экстремума*) Если функция  $f(x)$  в точке  $x_0$  имеет экстремум, то производная  $f'(x_0)$  обращается в нуль или не существует.

**Следствие.** Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум.

*Критическими точками* функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

**Теорема 4.** (*достаточное условие существования экстремума*) Если при переходе через критическую точку  $x_0$  слева направо производная функции  $f'(x)$  меняет знак с “+” на



“–“ , то в точке  $x_0$  функция  $f(x)$  имеет *максимум*, а если производная меняет знак с “–“ на “+” – то функция имеет *минимум*.

### ***Правила нахождения экстремумов функции.***

- 1) Найти производную функции.
- 2) Найти критические точки функции.
- 3) Исследовать знак производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции.
- 4) Определить существование максимумов и минимумов и найти значение функции в этих точках.

### **Схема исследования функций**

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

- 1) Область существования функции (это понятие включает в себя и область значений, и область определения функции).
- 2) Исследовать функцию на четность и периодичность.
- 3) Координаты точек пересечения графика функции с осями координат (если они имеются).
- 4) Интервалы возрастания и убывания.
- 5) Точки максимума и минимума.
- 6) Построение графика.

Наибольшее и наименьшее значения на отрезке непрерывная на этом отрезке функция достигает на концах промежутка или в критических точках этого отрезка. Чтобы найти наибольшее или наименьшее значение функции на заданном отрезке, надо найти критические точки функции, принадлежащие этому отрезку, вычислить значения функции на концах отрезка и в этих критических точках и выбрать наибольшее и наименьшее значения.

### **ЛЕКЦИЯ 5. Вторая производная.**

- Вторая производная.
- Геометрический и физический смысл второй производной.
- Примеры решения задач.

Пусть функция  $f(x)$  – дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную от функции  $f'(x)$ , получим *вторую производную* функции  $f(x)$ .

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е.  $y'' = (y')'$  или  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left( \frac{dy}{dx} \right)$ .

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени  $n$ .

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx} \left( \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} \right)$$

### **Исследование функции на экстремум с помощью производной второго порядка.**

**Теорема 5.** Если  $f'(x) = 0$ , то функция  $f(x)$  в точке  $x_0$  имеет максимум, если  $f''(x_0) < 0$  и минимум, если  $f''(x_0) > 0$ .

Если  $f''(x_0) = 0$ , то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

### **Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.**

Кривая обращена *выпуклостью вверх* на интервале  $(a, b)$ , если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется *выпуклой*, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется *вогнутой*.

**Теорема 6.** Если функция  $f(x)$  имеет на интервале  $(a, b)$  вторую производную и  $f''(x) > 0$  ( $f''(x) < 0$ ) во всех точках данного интервала, то график функции имеет на  $(a, b)$  выпуклость, направленную *вниз* (*вверх*).

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба*. Точками перегиба могут служить только *критические точки второго рода*, т.е. точки, в которых вторая производная  $f''(x)$  обращается в ноль или не существует.

**Теорема 7.** Пусть кривая определяется уравнением  $y = f(x)$ . Если вторая производная  $f''(x) = 0$  или не существует и при переходе через точку  $x = x_0$   $f''(x)$  меняет знак, то точка кривой с абсциссой  $x = x_0$  является точкой перегиба.

### **Правила нахождения точек перегиба.**

- 1) Найти вторую производную функции.
- 2) Найти критические точки второго рода.
- 3) Исследовать знак второй производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции.
- 4) Определить точки перегиба и найти значение функции в этих точках.

*Физический смысл* производной функции  $s = s(t)$  – мгновенная скорость движения.

Соответственно, *вторая производная функции* – ускорение.

## **Тема 3.3. Первообразная и интеграл**

### ЛЕКЦИЯ 1. Первообразная.

- Определение первообразной.
- Интегрирование – операция, обратная дифференцированию.
- Признак постоянства функции.
- Основное свойство первообразных.
- Общий вид первообразных.
- Таблица первообразных.
- Правила нахождения первообразных.
- Примеры нахождения первообразных.

Функция  $F(x)$  называется *первообразной функцией* функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ , если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x) = f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число, т.е.  $F_1(x) = F_2(x) + C$ .

**Таблица первообразных**

№	Функция	Первообразная
1	$k$	$kx + C$
2	$x^n$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
3	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
4	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
5	$\sin x$	$-\cos x + C$
6	$\cos x$	$\sin x + C$
7	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x + C$
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x + C$

**Правила нахождения первообразных**

№	Функция	Первообразная
1	$f \pm g$	$F \pm G$
2	$k \cdot f$	$k \cdot F$
3	$f(kx+b)$	$\frac{1}{k} \cdot F(kx+b)$

Неопределенным интегралом функции  $f(x)$  называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

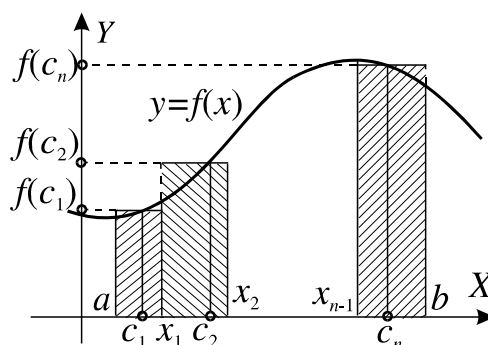
Записывают:  $\int f(x)dx = F(x) + C$ ; здесь  $\int$  – знак интеграла,  $f(x)$  – подынтегральная функция,  $f(x) dx$  – подынтегральное выражение.

Вычисление неопределенного интеграла от заданной функции называется *интегрированием*.

- Криволинейная трапеция.
- Площадь криволинейной трапеции.
- Определенный интеграл.
- Формула Ньютона-Лейбница.
- Вычисление интегралов.

### Определенный интеграл.

Пусть функция  $f(x)$  определена на отрезке  $[a, b]$ . Разобьем отрезок  $[a, b]$  на  $n$  произвольных частей точками  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{i-1} < x_i < \dots < x_n = b$ . На каждом из частичных отрезков выберем произвольно по одной точке:  $c_1 \in [a, x_1]$ ,  $c_2 \in [x_1, x_2]$ , ...,  $c_n \in [x_{n-1}, b]$ .



Введем обозначения:  $\Delta x_1 = x_1 - a$ ,  $\Delta x_2 = x_2 - x_1$ , ...,  $\Delta x_n = b - x_{n-1}$ .

Составим сумму:  $\sigma = \sum_{i=1}^n f(c_i) \Delta x_i$ , которая называется *интегральной суммой* функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$ .

**Геометрический смысл  $\sigma$ :** Каждое слагаемое интегральной суммы представляет собой площадь прямоугольника с основанием  $\Delta x_i$  и высотой  $f(c_i)$ , покрытого штриховкой на рисунке.

Обозначим через  $\lambda = \max(\Delta x_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$  — длину наибольшего частичного отрезка. Величину  $\lambda$  иногда называют *параметром разбиения*.

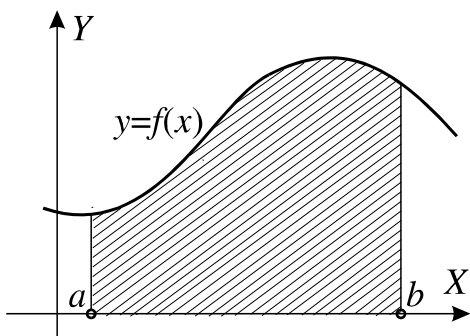
Рассмотрим процесс, при котором число точек разбиения неограниченно возрастает таким образом, что величина  $\lambda$  стремится к нулю.

Если существует предел интегральной суммы  $I = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sigma$ , то он называется *определенным интегралом* от функции  $f(x)$  на отрезке  $[a, b]$  и обозначается

$$I = \int_a^b f(x) dx$$

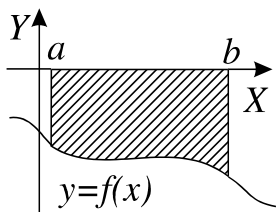
В этом случае функция  $f(x)$  называется *интегрируемой на отрезке  $[a, b]$* . Число  $a$  называется *нижним пределом интегрирования*, а число  $b$  — *верхним пределом интегрирования*.

Если такой предел существует, то он не зависит от первоначального разбиения отрезка  $[a, b]$  и выбора точек  $c_i$ . Из определения определенного интеграла следует, что его величина зависит только от вида функции  $f(x)$  и от чисел  $a$  и  $b$ . Следовательно, если заданы  $f(x)$  и пределы интегрирования, то интеграл определяется однозначно и представляет собой некоторое число.



**Геометрический смысл определенного интеграла:** Если  $f(x) > 0$  на отрезке  $[a, b]$ , то определенный интеграл  $\int_a^b f(x)dx$  геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями  $y = f(x)$ ,  $x = a$ ,  $x = b$ ,  $y = 0$ .

Если  $f(x) < 0$  на отрезке  $[a, b]$ , то  $S = -\int_a^b f(x)dx$ .



### Свойства определенного интеграла

1.  $\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$ ;
2.  $\int_a^a f(x)dx = 0$ ;
3. Если  $c \in [a, b]$ , то  $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ ;
4.  $\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$ ;
5.  $\int_a^b kf(x)dx = k \int_a^b f(x)dx$ , где  $k$  – произвольное число.

### Формула Ньютона-Лейбница

Если функция  $f(x)$  непрерывна на отрезке  $[a, b]$  и функция  $F(x)$  является ее первообразной на этом отрезке, то имеет место *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx = F(x) \Big|_a^b = F(b) - F(a),$$

то есть определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

### ЛЕКЦИЯ 3. Вычисление площадей через интеграл.

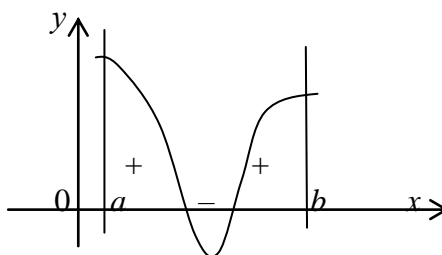
- Площадь криволинейной трапеции через интеграл.
- Площади различных фигур, ограниченных графиками функций.
- Примеры решения задач.

#### Геометрические приложения определенного интеграла.

##### *Площадь плоской фигуры.*

а) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой  $y = f(x)$ , прямыми  $x = a$  и  $x = b$  и отрезком  $[a, b]$ , вычисляется по формуле  $S = \int_a^b f(x) dx$

Если график расположен ниже оси  $Ox$ , т.е.  $f(x) < 0$ , то площадь имеет знак “-“, если график расположен выше оси  $Ox$ , т.е.  $f(x) > 0$ , то площадь имеет знак “+”.



Таким образом, для нахождения суммарной площади используется формула

$$S = \left| \int_a^b f(x) dx \right|.$$

б) Площадь фигуры, ограниченной кривыми  $y_1 = f_1(x)$  и  $y_2 = f_2(x)$  ( $f_1(x) \leq f_2(x)$ ) и прямыми  $x = a$  и  $x = b$ , находится по формуле

$$S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)] dx$$

### ЛЕКЦИЯ 4. Применение интеграла в геометрии и физике.

- Нахождение объемов геометрических тел.
- Нахождение пути материальной точки.
- Нахождение работы переменной силы.
- Примеры решения практических задач.

С помощью интеграла можно вычислять не только площади плоских фигур, но и объемы пространственных тел.

Пусть задано тело объемом  $V$ , причем плоскость, перпендикулярная выбранной оси  $Ox$  и проходящая через точку  $x$ , пересекает это тело. Площадь сечения тела этой плоскостью равна  $S(x)$ . Если функция  $S$  непрерывна на  $[a, b]$ , то

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Пусть криволинейная трапеция опирается на отрезок  $[a, b]$  оси  $Ox$  и ограничена сверху графиком функции  $f(x)$ , неотрицательной и непрерывной на отрезке  $[a, b]$ . При вращении этой криволинейной трапеции вокруг оси  $Ox$  получим тело вращения, объем которого находится по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Если скорость материальной точки при прямолинейном движении есть производная пройденного пути, то путь, пройденный точкой за промежуток времени от  $t_1$  до  $t_2$ , можно найти по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt,$$

А скорость движения, зная ускорение, находим аналогично по формуле

$$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt.$$

Пусть точка движется по оси  $Ox$  под действием силы, проекция которой на ось  $Ox$  есть функция  $f(x)$  - непрерывная функция. Под действием этой силы материальная точка переместилась из точки  $M(a)$  в точку  $M(b)$ . то работа этой силы равна

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

ПРИМЕР.

Сила упругости пружины, растянутой на  $5\text{см}$ , равна  $3\text{Н}$ . Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на  $5\text{см}$ ?

РЕШЕНИЕ.

По закону Гука сила  $F$ , растягивающая пружину на величину  $x$ , вычисляется по формуле  $F=kx$ , Значит,  $3 = k \cdot 0,05$ . Следовательно,  $k=60$  и сила  $F=60x$ .

$$A = \int_0^{0,05} 60x dx = 0.075(\text{Дж})$$