Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет имени
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Е.В.ОРЛИК

СТРАХОВАНИЕ И АКТУАРНЫЕ РАСЧЕТЫ
(Часть 1. Имущественное страхование.)

Учебное пособие

Владимир 2014

УДК 519.64:368
ББК 22.17

Рецензент
Кандидат физико-математических наук, профессор
кафедры Прикладной информатики и математики
Владимирского института бизнеса
Бурков В.Д.

Страхование и актуарные расчеты: учебное пособие / Е.В.Орлик; Владим.гос.ун-т. – Владимир. – 2014. 124 с.

В учебном пособии систематически излагаются теоретические основы актуарной математики. Основное внимание уделяется расчету страховой премии в имущественном страховании. Наряду с этим рассмотрены теория полезности применительно к страхованию, а также основные модели риска: индивидуальная и коллективная. Теоретическое изложение материала сопровождается соответствующими примерами решения типовых задач.

Настоящее пособие может быть использовано студентами математических и экономических специальностей как дополнение к лекционному курсу по страховой математике.

Предисловие.

В последние годы в нашей стране произошли значительные изменения в банковской, страховой и инвестиционной деятельности. Активное развитие данных отраслей экономики привели к необходимости привлечения в эти области специалистов совершенно нового для нашей страны типа. Одной из таких областей оказалась актуарная или страховая математика, основной задачей которой является расчет стоимости и себестоимости страховых услуг. Данная область прикладной математики, несмотря на то, что широко использует общие математические теории, является, тем не менее, самостоятельным научным направлением со своим предметом, методами и сферой применения.

Настоящее учебное пособие предназначено для распространения среди студентов знаний в области актуарной математики и теории риска. Материал пособия составлен на основе прочитанных автором курсов «Страхование и актуарные расчеты» для студентов специальности «Математические методы в экономике», «Актуарная математика» для студентов специальности «Прикладная математика и информатика», «Страхование и управление рисками» для студентов специальности «Бизнес-информатика». Пособие может быть полезным для студентов других специальностей, изучающих в том или ином объеме страховую математику.

Целями изучения представленного курса являются:

- усвоение основного понятийно-терминологического аппарата, характеризующего страховое дело; раскрытие взаимосвязи всех понятий, категорий и представление технологической модели страхового дела;
- изучение различных форм и видов страхования, области их применения;
- ознакомление с вероятностно-статистическими принципами решения актуарных задач в рамках различных моделей страхования;
- освоение методов расчета страховых взносов и оптимизации параметров схем страхования; приобретение навыков применения актуарных расчетов в исчислении тарифных ставок страхования;
- получение студентами научного представления о случайных событиях и величинах, характеризующих финансовый риск в страховом бизнесе, а также о методах их исследования.

Представленный материал охватывает главы «Введение в страхование», «Страховая премия» и «Страховые модели риска». Вопросы общего страхования отражены в учебниках Сахировой [8] и Рябикина[7]. При изложении основ актуарном математики автор опирался на книги Бауэрса и др.[1], Каас Р. и др.[5], Булинская[3]. Автор также использовал для примеров пособия Г.И. Фалина и А.И.Фалина [9], Корнилова[6].

Учебный план для квалификации бакалавр предусматривает значительный объем внеаудиторных часов для самостоятельной работы, поэтому предлагаемое пособие может быть использовано студентами как дополнение к лекционному курсу и практическим занятиям при освоении дисциплин, включающих изучение страховой математики и страховых рисков.

ГЛАВА 1. ВВЕДЕНИЕ В СТРАХОВАНИЕ

Экономику современного общества, как и жизнь человека в этом обществе, невозможно представить без такого понятия как *страхование*. Страхование (институт страхования) представляет собой важный элемент системы общественно-экономических отношений, который направлен на создание эффективной системы защиты имущественных и личных интересов граждан и предприятий. Выполняя множество важных функций в общественно-экономической жизни общества, страхование, в первую очередь, выступает в роли одного из главных факторов стабилизации экономического и социального развития общества.

Почему страхованию отводится такая важная роль в жизни общества и, каковы предпосылки его возникновения?

С одной стороны, общество в своем развитии постоянно повышает свой технический и экономический потенциал, наращивает произведенное богатство. С другой стороны, в процессе своего развития общество сталкивается с различными рисками негативного характера, которые угрожают уничтожить это богатство. Происходит столкновение двух противоположно направленных процессов: созидания и разрушения. Это обусловлено тем, что сам *процесс общественного производства объективно имеет рискованный характер*.

Какова сущность и каковы источники этих рисков?

- Во-первых, это *риски природного характера*. Ураганы и смерчи, наводнение и засуха, землетрясения и другие естественные явления, обусловленные природой, все это сопровождает человека с момента его рождения. Следует отметить, что современный уровень хозяйственной деятельности человека принял такие масштабы, что сам человек начинает воздействовать на окружающую среду и, как результат, провоцировать вышеуказанные разрушительные явления (*антропогенный фактор*).
- Во-вторых, это *риски техногенного характера*. Аварии на химических и радиационных объектах, аварии на пожаро- и взрывоопасных объектах, аварии на транспорте, все это результат того, что уровень современных технологий, обусловленный научно-техническим прогрессом, не позволяет обеспечить полный контроль и исключить подобные опасности полностью.

- В-третьих, это *риски общественного характера*. Источник этих рисков в том, что в процессе производства возникают противоречия, вызванные различием интересов людей, участвующих в совместной деятельности и как результат – страховой случай, где причиной объявляется так называемый *человеческий фактор*. Доминирующее и особое место в рассматриваемой группе риска занимают *социальные риски*, которые затрагивают в первую очередь человека (жизнь, здоровье, трудоспособность).

Перечисленные риски существуют объективно и носят случайный характер. Разрушительные последствия, которые несут эти риски, вынудило общество выработать систему защиты от воздействия этих негативных событий и механизм компенсации соответствующих материальных потерь. Исходя из выше изложенного, можно попробовать сформулировать следующее определение.

Страхование – это исторически выработанная форма общественно-экономических отношений, призванная обеспечить защиту общества и человека от случайных негативных событий природного, техногенного и социального характера**.**

1.1. История зарождения и развития страхования.

Страхование, зародившись в далеком прошлом, имеет длительную и богатую историю, потому что оно присуще любой общественно-экономической формации. Рассмотрим кратко историю зарождения и развития Страхования.

С древнейших времен человека сопровождали угроза и страх потерять жизнь, здоровье, результаты своего труда. Традиционно в ту далекую эпоху человек искал защиту через веру и религиозные обряды.[®] Наряду с этой древней формой защиты, человек уже тогда искал и другие способы уберечься от этих несчастий. Несмотря на случайный характер чрезвычайных событий, человек давно заметил следующую закономерность:

- такие события угрожают многим, но наступают только для некоторых из них;

[®] Несмотря на прошедшие тысячелетия, сегодня даже в нашей стране такие формы защиты иногда практикуются в некоторых регионах.

- число пострадавших значительно меньше числа людей, кому грозит эта опасность.

Данная закономерность позволила выработать еще в древности систему защиты путем объединения владельцев имущества в целях *совместного возмещения материального ущерба* пострадавшей стороне. В истории страхования можно условно выделить четыре этапа.

Этап зарождения страхования.

Еще в XVIII в. до н.э. царь Вавилона Хаммурапи в своих законах предписывал участникам торговых караванов заключать соглашения между собой, по которым они сообща несли убытки, возникающие в пути вследствие ограбления, кражи или падежа. Аналогичные договоры о совместном распределении убытков заключались между участниками сухопутного или морского караванов в Палестине и Сирии, а также между купцами-корабельщиками на берегах Персидского залива, в Финикии и в Древней Греции.

Главной особенностью страхования на этом этапе – применение *раскладочной системы страхования*, которая осуществлялась на принципе взаимопомощи при наступлении стихийных бедствий и несчастных случаев.

Основные ее черты:

- данная помощь ограничена узким кругом участников;
- ущерб возмещался пострадавшему не из заранее образованного страхового фонда, а путем совершаемой после возникновения ущерба специальной раскладки его между участниками пропорционально стоимости их имущества;
- на этом этапе компенсация ущерба производилась исключительно в натуральной форме.

Этап создания страховых фондов.

В Древнем Риме во 2-й половине I века до н.э. страхование широко применяется в различных коллегиях.[®] Коллегии помимо религиозных и товарищеских целей преследовали и цели взаимопомощи своим членам в случаях смерти, болезни и других несчастий *путем регулярных взносов*. В

[®] Коллегии в Древнем Риме – это объединения лиц, связанных общей профессией или отправлением культа.

отличие от предыдущего этапа, в римских коллегиях взносы делались не только в натуральной, но и в денежной форме.

В Средние века эта схема страховых отношений широко использовалась в странах Западной Европы при создании торговых и иных гильдий и ремесленных цехов. Эти организации развили и укрепили идею страхования как коллективной системы защиты. Со временем внутри гильдий и цехов взаимное страхование начинает разделяться на имущественное от стихийных бедствий (кораблекрушение, наводнение, пожар, падеж скота, кража) и личное (болезнь, инвалидность, смерть).

Раскладочная форма страхования имела значительные неудобства. Она, во-первых, не гарантировала быстрого возмещения убытков и, во-вторых, порождала неопределенность отношений, так как никто из страхователей не знал, в каком размере ему придется выплачивать свою долю страхового возмещения. В результате уже в средние века данная схема полностью уступает место новой, при которой производилась предварительная уплата страховых премий, образующих страховой фонд для возмещения ущерба.

Главной чертой страхования на этом этапе - постепенный переход от *раскладочной системы* покрытия ущерба к системе предварительных взносов, т.е. *к созданию определенного страхового фонда в денежной форме.*

Этап возникновения страховых компаний.

В эпоху великих географических открытий, в период бурного развития судоходства и возникновения новых международных рынков торговли, увеличилась потребность в защите имущественных интересов. В это время рождаются первые аналоги страховых компаний, которые создавались отдельными группами купцов и судовладельцев на базе *взаимного страхования*.

С развитием капиталистического способа производства специфическим, определяющим признаком буржуазного страхования становится извлечение прибыли. В это время компании-содружества взаимного страхования, стали преобразовываться в *профессиональные коммерческие страховые компании*, которые создавались на принципах предпринимательства и получения прибыли от такого рода деятельности**.** Акционерные компании, ориентировавшиеся на богатых клиентов и крупные частные фирмы и использовавшие в работе самые современные рыночные механизмы, к середине XIX столетия серьезно потеснили взаимные общества, поделив с ними страховой рынок большинства стран Запада.[®]

Основой возникновения коммерческих страховых компаний послужило:

- развитие капиталистических отношений;
- формирование в тот период кредитных отношений и возможность использования аккумулированных средств страховых организаций в качестве кредитных ресурсов;
- успехи математики в таких разделах как «теория вероятностей» и «математическая статистика», позволили перевести страхование на научную основу.

Главные черты страхования на этом этапе - формирование *профессиональных коммерческих страховых компаний*, которые создавались на принципах предпринимательства, расширения видов страхования и получения прибыли от такого рода деятельности.

Современный этап страхования.

Вплоть до XX в. отсутствие надежной статистической базы данных о причинах, размерах несчастий, прогнозных расчетов вызывало в те времена *высоко рискованный характер* самих страховых операций, крах и разорение многих страховых обществ. Однако к XX в. накопление статистических, математических и экономических знаний, учет конъюнктуры страхового рынка, систематизация страховой информации позволили значительно снизить издержки страховых организаций и риск их банкротства, который был присущ предшествующим историческим периодам.

Уже в XIX в. ведущее место начинают занимать страховые объединения типа картелей и концернов. Крупный картель был создан в Берлине в 1874 г. Он носил международный характер и состоял из 16 страховых обществ (австрийских, русских, шведских и др.). В 1920-х гг. картель объединял уже 230 обществ из 26 стран. Процесс концентрации и монополизации капитала в конце XIX в. начале XX в. приводит к тому, что к середине XX в. возникают страховые монополии как представители одного из звеньев кредитно - финансовой системы, которые формируют глобальный

[®] ОВС - общества взаимного страхования. Несмотря на широко распространенную форму коммерческого страхования, ОВС остаются во многих странах одними из лидеров по объему собираемых платежей и количеству обслуживаемых страхователей, особенно граждан.

рынок страховых операций. Огромные финансы, концентрируемые в страховых компаниях, активно используются, как для расширения страхового дела, так и для долгосрочного финансирования промышленности и других отраслей экономики.

Главные черты страхования на этом этапе - возникновение страховых монополий, как представителей одного из звеньев кредитно - финансовой системы, которые формируют рынок страховых операций. Главной особенностью страхования на современном этапе является *глобализация страхового рынка*.

Страхование в России

До конца XVIII в. страхование в России развивалось медленно. В то время как во многих европейских государствах страхование приобрело широкое развитие, во многих русских городах страхование не существовало вообще. Исключение составляли иностранцы, проживающие в России, и жители прибалтийских губерний, которые ориентировались на страхование имущества, а затем и жизни в иностранных обществах.

Первые страховые общества в России создавались, в первую очередь, для страхования от пожаров. Старейшее из них – «Рижское общество взаимного страхования от пожаров» - было организовано в 1765 г. Дальнейшее развитие страхования при доминирующем присутствии на страховом рынке иностранных страховых компаний приводило к ощутимому оттоку денежных средств за границу в виде страховых премий. В результате правительство попыталось изменить ситуацию и организовать государственную систему страхования от пожаров.

Первая серьезная попытка в сфере страхования была сделана при *императрице Екатерине II*. Она, озабоченная развитием страхования в России, издает 28 июня 1786 г. Манифест об учреждении Государственного Заемного Банка в России, при котором создается страховая экспедиция, на которую возлагается обязанность страхования от огня имущества и строений российских граждан.

Эту дату справедливо можно считать датой рождения страхования в России.

Политику развития страхования в России продолжил император Павел I, однако эти проекты не имели успеха. Неудачи внедрения страхования со стороны государства можно объяснить тем, что при крепостном праве владелец средств и недвижимости больше полагался в случае несчастья на своих подданных, а также поддержку самодержавной власти, нежели на страховое вознаграждение. Финансовые результаты деятельности Государственной страховой экспедиции были столь неутешительными, что в 1822 г. страховая экспедиция была закрыта.

Вторая серьезная попытка в сфере страхования была сделана императором Николаем I, который 27 июля 1827 года подписал ставший знаковым указ, заложивший основы экономического развития страхового рынка на последующие десятилетия. Указом предусматривалось, что страховое общество должно быть частным, но в то же время работать под патронажем государства, неукоснительно следуя его предписаниям. Новое страховое общество, получившее название «Российское страховое от огня общество», было сформировано в октябре 1827 года в Санкт-Петербурге и получило от государства монополию на страхование от огня в Санкт-Петербурге, Москве, Одессе, столичных и прибалтийских губерниях до 1847 года. В дальнейшем с разрешения российского правительства создаются еще два крупных страховых общества: в 1835 г. - «Второе российское от огня страховое общество», а в 1846 г. - «Саламандра». В 1835 г. было создано страховое общество «Жизнь», которое начинает заниматься личным страхованием.

Отмена крепостного права 19 февраля 1861 г., замена натурального хозяйства денежным, развитие капиталистических отношений (рост промышленности, строительство железных дорог) создали предпосылки для формирования национального страхового рынка. За короткое время возникли новые страховые общества (в 1867 г. - «Русское», в 1870 г. - «Коммерческое», «Варшавское», «Русский Ллойд», в 1872 г. - «Северное», «Якорь», «Волга»).

К 1913 г. активы страховых обществ, число которых достигло 22 (19 российских и 3 иностранных), составили 374,1 млн. руб. и играли большую роль в экономической жизни страны. В это время было собрано 190 млн. рублей страховых премий и застраховано имущество на сумму 20 млрд. рублей. Эти цифры можно сравнить с доходной частью бюджета России, которая в 1913 году составляла 3431 млн.руб. Страховые общества в России стали важной составной частью финансово-монополистического капитала. Они не только владели доходными домами и недвижимостью, но и являлись совладельцами капитала крупнейших банков и промышленных предприятий. В свою очередь в капитале страховых обществ большую долю участия имели крупнейшие банки страны.

Начавшаяся в 1914 г. Первая мировая война и последовавшие за ней революционные события 1917 г. внесли кардинальные изменения в жизнь российского государства, в том числе и в области страхового дела. Вслед за национализацией банков начался процесс национализации страховых компаний. Земское и взаимное страхование были переданы местным органам власти. Государственная монополия страхования была окончательно объявлена декретом от 28 ноября 1918 г. «Об организации страхового дела в Российской Республике». Исключение было сделано лишь для взаимного страхования по страхованию движимости и товаров кооперативных организаций, которое было ликвидировано в 1930 г.

Распад бывшего СССР в начале 1990-х гг. и последовавшие в связи с этим глобальные геополитические изменения, вызвали объективную необходимость возрождения цивилизованного страхового рынка в России. В страховании, где в течение многих лет наблюдалась монополия Госстраха (внутреннее страхование) и Ингосстраха (внешнее страхование), также начались процессы, приведшие к значительной активности и созданию новых компаний.

Актуальность страхования в нашей стране иллюстрируют следующие данные:

- риску наводнения подвержены свыше 900 городов;
- воздействию землетрясений свыше 7 баллов – около 20 % населенных пунктов.

Для примера: ущерб от засухи 2010 г. составил по прямым затратам 41,8 млрд. руб. Совокупный ущерб от катастрофического наводнения на Дальнем Востоке в 2013 г. по данным экспертов составил $3,5 млрд. Только из бюджета на ликвидацию последствий наводнения выделено 40 млрд.руб. Однако до сих пор страховой рынок в РФ продолжает пребывать в зачаточном состоянии. Сегодня страхуется только 5–7% потенциальных рисков, в то время как в развитых зарубежных странах – 95–97%. Объясняется это главным образом тем, что роль страхования как механизма защиты материальных интересов российскими гражданами еще не до конца осознана. На страхование ими расходуется менее 1% доходов (против 20% в США).

1.2. Экономическая сущность и функции страхования.

Российская и западная теория страхового дела, несмотря на различие российского понятия *«Страховать»* от принятого в западной практике *Insurance*®, одинаково трактуют экономическую платформу, основу страховых отношений:

- рискованный характер общественного производства;
- объективность и непредсказуемость наступления события и величины потерь в процессе производства;
- возможность разрушительности масштаба убытков.

Отсюда следует, что необходимость и потребность страхования обусловлены объективным и случайным характером убытков.

Цель страхования – защита имущественных, личных, финансовых интересов хозяйствующих субъектов и граждан от убытков, возникающих вследствие объективных разрушительных факторов, не подконтрольных человеку и не влекущих гражданско-правовой ответственности пострадавших лиц (*форс-мажор*). В «форс-мажорных» ситуациях отсутствуют возможности взыскания убытков с конкретного лица, и они остаются на собственном удержании в имущественной сфере потерпевших.

Как достичь цели, сформулированной выше?

Если риски влекут небольшие потери, то отдельно взятый собственник решает эту проблему самостоятельно, формируя специальный резервный фонд. Однако если есть угроза разрушительных потерь, то данная форма защиты становится экономически нецелесообразной. В данном случае выходом является форма, предложенная еще в древности – раскладка ущерба между заинтересованными участниками. На современном этапе для возмещения ущерба страхование использует предварительно совместно сформированный *страховой фонд*, который является *финансовой основой страховых отношений.*

® ***Страховать*** - «...отдавать кому-то на страх, на ответ, на ручательство за обеспечение целостности чего-то...» (толковый словарь Владимира Даля).
Insurance (от англ. sure – «уверенность») — обещание возмещения за возможные будущие убытки в обмен на периодические платежи (Commerce Database).

Несмотря на то, что история страхования насчитывает несколько тысячелетий, его *экономическая сущность* не изменилась.

Экономическая сущность[®] *страхования* заключается *в солидарной и замкнутой раскладке ущерба* между заинтересованными участниками.

Солидарная (совместная) раскладка ущерба означает, что страховой фонд, созданный всеми участниками договора страхования, используется на покрытие убытков одного или нескольких пострадавших страхователей. В страховании применяется принцип «все платят за одного», «здоровый за больного» и т.п.

Замкнутая раскладка ущерба означает, что средства страхового фонда используются на покрытие убытков только среди участников его создавших. Страховая компания не имеет права тратить средства страхового фонда на свои нужды, это целевые средства – собственность страхователей.

Существование широкой филиальной сети страховых компаний и глобализация рынка приводит к *пространственной раскладке ущерба* по территории большого разброса. Долгосрочные договора страхования жизни приводят к *раскладке ущерба во времени*, т. е. в течение не только одного отчетного года, но и нескольких десятков лет подряд.

Функции страхования.

Основной целью страхования является защита имущественных интересов, что говорит об экономической природе страхования и позволяет рассматривать его как экономическую категорию. Любая экономическая категория находит свое воплощение в функциях, которые представляют собой внешнее проявление свойств данной категории в данной системе отношений.

Рисковая функция.

Главной функцией страхования, безусловно, является *рисковая функция*, поскольку именно наличие риска стимулирует возникновение страхования. Есть риск – есть потенциал для страхования со всеми его атрибутами, его проявлениями. Рисковая функция страхования обеспечивает

[®] ***Су́щность*** (Essence) - то постоянное, что сохраняется в явлении при различных его вариациях, в том числе и временных.

ее участников страховой защитой от различного рода рисков - случайных событий, ведущих к потерям.

*Перераспределительная функция***.**

Страхование как часть финансовой системы выражает свою экономическую сущность, прежде всего через *перераспределительную функцию*. Собранные со всех премии, формируют страховой фонд, из которого выплачивается возмещение страхователям понесшим убытки. Кроме страхования крупные перераспределительные процессы протекают в сфере *финансов и кредитных отношений*. Несмотря на схожесть, категория страхования имеет принципиальные отличия от категорий - финансов и кредита:

- в то время как механизм перераспределение средств в сфере финансов и кредита носят *детерминированный характер*, расходование средств страхового фонда связано только с возникновением и последствиями страховых случаев, т.е. *случайных явлений*. Раскладка ущерба, положенная в основу экономических отношений участников страхования, обусловлена вероятностью наступления страховых случаев, которые носят случайный характер;
- в страховании *случайными являются не только наступившие страховые случаи, но и размер страховых выплат*.

*Предупредительная функция***.**

Предупредительная функция отражает одно важное специфическое свойство страхования - страхователь и страховщик экономически одинаково заинтересованы в том, чтобы с объектом страхования ничего не случилось.

Предупредительная функция реализуется в двух различных формах:

- страхователь по согласованию со страховой компанией осуществляет некий набор мер – защиту от рисков, чтобы сделать возможный страховой случай как можно менее вероятным. Данные мероприятия снижают вероятность страхового случая, и как следствие уменьшают страховую премию;
- страховые компании сами, своими силами могут предпринимать некоторые действия, чтобы с тем, что они взяли на страхование, ничего не случилось.

Несмотря на то, что на данные мероприятия расходуются некоторые собственные финансовые ресурсы, страховщики понимают, что лучше по-тратить немного, чтобы потом не «попасть» на большой размер убытков. Расходы страховщика на предупредительные мероприятия *целесообразны*, так как позволяют добиться существенной экономии денежных средств на выплату страхового возмещения.

***Сберегательная функция*.**

Сберегательная функция страхования проявляется, во-первых, в обеспечении, за счет раскладки ущерба, *минимальной стоимости* страховой защиты средств страхователя. Если страхователь решится защищаться от страховых случаев собственными силами, то он должен был бы создавать резервы в объемах страхуемого капитала, что является экономически нецелесообразным.

Сберегательная функция, во-вторых, наиболее полно проявляется *в накопительных видах страхования* (страхование на дожитие до определенного возраста, страхование детей, пенсионное страхование и др.). Используя форму регулярной уплаты взносов, относительно низких в сравнении с заявленными страховыми суммами, страхователь получает возможность накопить относительно большие и устойчивые сбережения в будущем.

***Инвестиционная функция*.**

Инвестиционная функция страхования проявляется в том, что временно свободные денежные средства страховых фондов (страховых резервов) используются в инвестиционной деятельности страховых организаций (фондовый рынок, недвижимость и другие направления). Во многих странах с развитым страхованием активы страховых компаний значительно превышают активы банков и других финансовых институтов, что обусловливает их ведущую роль в стратегическом развитии национальной экономики. В 2010 г. объем мировых активов под управлением составил 79,3 трлн. долларов США. Из них 68 % приходятся на долю пенсионных фондов и фондов страхования.

Страховые компании, обладая значительными инвестиционными ресурсами и вкладывая капиталы в наиболее устойчивые и доходные отрасли экономики, влияют на структуру общественного воспроизводства. За счет страхового капитала финансируются крупнейшие корпорации в промышленности, транспорте и торговле. Таким образом, страхование, выполняя свою основную задачу - защиту имущественных, личных, финансовых интересов хозяйствующих субъектов и граждан от убытков, удовлетворяет также интересы общества в целом, укрепляя и наращивая его экономический потенциал.

Существует определенная закономерность - *чем выше степень развития экономики* той или иной страны**,** *тем значительней вес участия страхового капитала* в процессе воспроизводства и влияния на финансы государства и других экономических участников**.** Происходит интенсивное слияние страхового, банковского, торгового и промышленного капиталов. Важнейшим макроэкономическим показателем значимости страхования является отношение собранных страховых премий к ВВП. Среди стран, добившихся выдающихся результатов: Швейцария - 17,5%, Великобритания - 16,2%, Япония - 13,1%, США- 10,1%, Франция - 10,5%, Германия - 7,9%, а Россия - лишь 1,0%. Данный показатель отражает инвестиционный потенциал страховщиков, благодаря которому можно не только существенно сократить внешние заимствования, но и привлечь внутренние денежные средства, используемые населением как депозиты в банках.

1.3. Классификация страхования.

В научном исследовании и практической деятельности иногда наступает момент, когда информация об объекте исследования становится необозримо большой и сложной и как результат теряется возможность познания или управления этим объектом. Чтобы навести порядок в имеющейся информации данных и связей прибегают к классификации®.

Классификация содействует движению науки со ступени эмпирического накопления знаний на уровень теоретического синтеза. Блестящим примером эффективности научной классификации как инструмента познания является периодическая система элементов Д. И. Менделеева, фиксирующая закономерные связи между химическими элементами и определяющая место каждого из них в единой таблице.

Было время, когда классификация объявлялась высшей целью изучения природы и венцом научного ее познания. Справедливости ради следует сказать, что в XX в. представление о роли классификации в процессе познания заметно изменилось. Далеко не всегда удается четко отделить существенное от несущественного, особенно в области сложных и дина-

® *Классификация* - система соподчиненных понятий (классов, объектов, явлений) в той или иной отрасли знания или деятельности человека, составленная на основе учета общих признаков объектов и закономерных связей между ними.

мичных социальных объектов и явлений, к которым относится и страхование. Не переоценивая классификацию как метод исследования, следует все же признать невозможность решения многих задач без этого инструмента познания. Какова цель и задачи классификации в страховании?

Страхование как особая сфера общественно-экономических отношений охватывает различные объекты и субъекты страховой защиты, различные формы ее организации, многообразные страховые риски и страховые интересы, разные виды и объемы страховой ответственности. Чтобы упорядочить это многообразие и создать единую и взаимосвязанную систему, необходима классификация страхования.

Что и от чего страховать и, какая форма страхования наиболее эффективна?

Формы страхования.

Все звенья классификации страхования охватывают две формы проявления страхования - *обязательную и добровольную*.

Добровольное страхование осуществляется на основе договора между страхователем и страховщиком. Правила добровольного страхования, определяющие общие условия и порядок его проведения, принимаются и утверждаются страховщиком или объединением страховщиков самостоятельно в соответствии с ГК РФ.

Обязательным является страхование, осуществляемое в силу закона. Виды, условия и порядок проведения обязательного страхования определяются соответствующими законами Российской Федерации.

Оптимальное сочетание этих двух форм позволяет сформировать такую систему страхования, которая обеспечивает универсальный объем страховой защиты общественного производства и населения.

Основы классификации страхования.

Классификация в страховании делит всю совокупность страховых отношений на взаимосвязанные звенья, находящиеся между собой в иерархической соподчиненности, в зависимости от того либо иного критерия.

Так классификация страховых отношений, где критериями выступают *субъекты и способы страхования,* выделяет следующую группировку:

- государственное страхование;
- коммерческое страхование;

- взаимное страхование;
- самострахование.

С точки зрения страховой математики для правильного расчета страховых сумм, премий и выплат требуется другие критерии упорядочивания. К числу таких критериев относится классификация страхования *по объектам страхования и видам опасности*, т.е. разбиение данной системы на качественно однородные классы и подклассы. Внутри классов и подклассов определяются количественно однородные группы (типы) страхования.

В основу данной процедуры классификации страхования положены два критерия:

а) различия в *объектах* страхования;

б) различия в *видах страховой опасности*.

1 Критерий (объекты страхования).

Согласно *первому общему критерию* страхование разделяется по отраслям, подотраслям и видам (иногда и по подвидам). В основе классификации страхования на отрасли лежат принципиальные различия в объектах страхования. Данный принцип классификации, используемый в мировой практике, в РФ получил название *всеобщей классификации*.

Объект страхования отвечает на вопрос: *что страховать*?

В соответствии с этим всю совокупности страховых отношений можно подразделить на четыре отрасли[®].

Отрасли страхования

- *имущественное страхование*
- *личное страхование*
- *страхование ответственности*
- *страхование предпринимательских рисков*

Объекты страхования:

- в имущественном страховании в качестве объектов выступают материальные ценности;

[®] На западе разделение часто проходит по линии - ***страхование жизни и не жизни***.

- при личном страховании граждан - их жизнь, здоровье и трудоспособность;
- при страховании ответственности в качестве объектов выступает ответственность страхователя по закону перед третьими лицами (физическими и юридическими), которым может быть причинен ущерб (вред) вследствие какого-либо действия или бездействия страхователя;
- объектами страхования предпринимательских рисков являются потенциально возможные потери доходов страхователя, например, ущерб от простоев предприятия, упущенная выгода по неудавшимся сделкам, риск внедрения новой техники и т.п.

Классификация по отраслям еще не позволяет выявить те конкретные страховые интересы страхователя, которые дают возможность проводить страхование. Для дальнейшей конкретизации этих интересов необходимо выделение из каждой отрасли - *подотрасли и виды страхования*.

Имущественное страхование в свою очередь делится на следующие подотрасли (виды):

- страхование транспортных средств;
- транспортное страхование грузов;
- сельскохозяйственное страхование (страхование урожая, с/х культур, многолетних насаждений, животных);
- страхование имущества юридических лиц, за исключением транспортных средств и с/х страхования;
- страхование имущества физических лиц, за исключением транспортных средств.

К подотраслям *личного страхования* относятся:

- страхование жизни;
- пенсионное страхование;
- страхование от несчастных случаев;
- медицинское страхование (страхование здоровья).

В *страховании ответственности* можно выделить две подотрасли:

- страхование гражданской ответственности (владельцев средств транспорта, организаций, эксплуатирующих опасные объекты, за причинение вреда, вследствие недостатков товаров, работ, услуг, за экологические загрязнения среды и т.п.);

- страхование профессиональной ответственности (врачей, юристов, бухгалтеров и других лиц, работающих в порядке самозанятости).

В *страховании предпринимательской деятельности* можно выделить следующие подотрасли:

- страхование предпринимательских рисков (коммерческие риски; простой оборудования; перерывы в торговле; технические риски и т.п.);
- страхование финансовых рисков (риск непогашения кредита; риск несвоевременной уплаты процента за кредит; страхование депозитов и т.п.).

При подразделении отраслей страхования на иерархические структуры (*первый критерий классификации*), а именно, подотрасль, вид, подвид, иногда страховые события и даже страховые случаи - создаются условия для четкого выявления предмета страхования, объема ответственности и расчета соответствующих тарифных ставок.

2 Критерий (род опасности.)

Согласно *второму критерию* страхование подразделяется *по роду опасности*. Выбор вида страховой опасности дает ответ на вопрос: *от чего страховать?* Например, имущественное страхование классифицируется по роду опасностей:

- страхование от огня (пожар, удар молнии, взрыв бытового газа, взрыв паровых котлов и т.п.);
- страхование имущества от стихийных бедствий (наводнение, ураган, смерч, оползень, обвал, шторм, цунами, обильные снегопады и т.п.);
- страхование с/х культур от стихийных бедствий (засуха, град, ливни, вредители растений, заморозки и т.п.);
- страхование имущества от злоумышленных действий третьих лиц (кража, разбой, грабеж, мошенничество, диверсии, угон транспортных средств и т.п.).

Названные виды страховой опасности отражают различия в объеме страховой ответственности определенных объектов. Классификация по роду опасностей создает условия для разработки специальных методов определения ущерба и страхового возмещения.

Приведенная классификация не охватывает все возможные случаи страхования. В России перечень видов и подвидов страхования, предлагаемых хозяйствующим субъектам и гражданам на страховом рынке, составляет 50 – 100 позиций, в то время как в европейских странах и США на страховом рынке клиентам предлагается от 400 до 1000 страховых продуктов (видов страхования).

1.4. Основные понятия страхования.

Любая область знаний и практической деятельности оперирует набором понятий и терминов, большинство из которых присущи только этой области. Встречаются понятия, которые используются в различных областях, но несут различную смысловую нагрузку. Страхование, как особый вид экономико-правовых отношений использует свою специфическую терминологию. Актуарная математика, которая является математической основой страхования, также богата своими терминами. От специалиста в области страхования требуется глубокое знание основных понятий этой отрасли, что, во-первых, является свидетельством его профессионализма, а, во-вторых, дает ему возможность взаимопонимания с другими участниками страхового процесса, особенно в эпоху глобализации страхового рынка.

Весь комплекс терминов применяемых в страховании и актуарной математике, достигающий несколько тысяч, можно найти в специальных словарях, многие из них будут рассмотрены по мере изложения материала, здесь же остановимся только на основных из них.

Страховой риск. Страховой случай.

Одним из центральных понятий страхования является понятие «*страхового риска*». Что такое риск в страховании? Какие виды страховых рисков встречаются на практике?

Слово *«риск»* происходит от греческих слов *ridsikon, ridsa* – утес, скала. В итальянском языке *risiki* – опасность, угроза; *risicare* – лавировать между скал. Во французском словаре *risdoe* – угроза, рисковать (буквально – объезжать утес, скалу).

Термин *«риск»* очень широкое понятие. Существует множество различных рисков: экономические, финансовые, технические, политические, социальные, военные риски. Эти риски различны по своей природе и имеют свои различные механизмы защиты. Существует целая «Теория управления рисками». В страховании рассматриваются исключительно «*страховые риски*».

Из-за того, что существует неоднозначность определения некоторых терминов, воспользуемся законом РФ *«Об организации страхового дела в РФ»* [10] и будем по мере возможности использовать определения страховых терминов, данных в этом законе®. Итак, первые понятия, с которыми необходимо познакомиться это страховой риск и страховой случай.

Статья 9. *«Страховой риск, страховой случай»*.

1. *Страховым риском* является предполагаемое событие, на случай наступления которого, проводится страхование.

Событие, рассматриваемое в качестве страхового риска, должно обладать признаками вероятности и случайности его наступления.

2. *Страховым случаем* является совершившееся событие, предусмотренное договором страхования или законом, с наступлением которого возникает обязанность страховщика произвести страховую выплату страхователю, застрахованному лицу, выгодоприобретателю или иным третьим лицам.

Таким образом, даже в законе термин «*страховой риск*» неоднозначен и имеет несколько трактовок. Рассмотрим это более подробно.

Во-первых, под страховым риском подразумевается *сама опасность*, от которой производится страхование, нечто, что может произойти, но не обязательно должно случиться. Из определения следует, что для того чтобы отнести событие к страховому риску необходимо выполнение двух условий:

- предполагаемое страховое событие или совокупность событий должно нести в себе потенциальную возможность причинения ущерба объекту страхования;
- предполагаемое страховое событие или совокупность событий должно иметь случайный, вероятностный характер**.**

К страховым рискам следует отнести события, с наступлением которых возможна гибель или повреждение имущества (пожар, наводнение,

® Использования нормативной терминологии оправдано тем, что страховой договор или часть его, имеющий пробелы в этом плане, в спорных ситуациях может быть признан недействительным или не позволит отстоять свои права.

землетрясение, аварии и других бедствий). В отношении жизни и здоровья человека такими событиями могут быть утрата трудоспособности от несчастного случая, болезнь, смерть и т.д. В то же время, такие события как игра в лотерею или игра на фондовой бирже не могут быть отнесены к страховым, поскольку наряду с возможностью получения ущерба, эти события могут приносить и доход. Таким образом, страховой риск по своей сущности является *событием с отрицательными последствиями*, неотъемлемо связанным с понятием ущерба.

Признаки случайности и вероятности являются также определяющими в страховом риске. Случайность не должна зависеть от информированности сторон о наступлении или не наступлении страхового события, т.е. от *субъективных факторов*. Признак вероятности определяется самим событием, т.е. *объективными факторами*. Это означает, что невозможно определить закономерность наступления страхового события. В том случае, если сторона знает об уже произошедшем страховом случае до заключения договора, договор будет являться недействительным.

Во-вторых, под страховым риском подразумевается *степень опасности возникновения страхового события.* В этом смысле термин «*страховой риск*» выражает *количественную оценку опасности*. Данная трактовка отражает *математическую характеристику риска – вероятность* наступления страхового случая.

В-третьих, под страховым риском подразумевается *размер ответственности* страховой организации перед ее пострадавшими клиентами вследствие страхового события. Размер ответственности может устанавливаться законодательством, правилами страхования или же определяться соглашением между страховой организацией и ее клиентами, закрепленными документально.

В имущественном страховании страховым риском могут выступать повреждение (ущерб), уничтожение, противоправные действия третьих лиц, уменьшение товарной стоимости и т.д.

В личном страховании им могут выступать повреждение здоровья, смерть лица, снижение трудоспособности и т.д.

Поскольку материальная ответственность страховщика зависит как от вероятности страхового события, так и от стоимости страхуемого объекта, то страховщик имеет *право на оценку страхового риска*. Для этого страховщик может произвести осмотр страхуемого имущества, а в случае необходимости - назначить экспертизу в целях установления его действительной стоимости. В личном страховании страховщик вправе провести медицинское обследование застрахованного лица для оценки фактического состояния его здоровья.

С понятием риска, как страхового события, связано понятие *страхового случая*. *Страховой случай - это реализованный страховой риск*, совершившееся событие, с наступлением которого у страховщика возникает обязанность по проведению страховой выплаты.

Страховой риск - это потенциальная возможность реализации опасности. За страховой риск *платит страхователь*.   *Страховой* случай - это уже фактическая реализация опасного события. За страховой случай платит *страховщик*.

Нужно также отметить различие понятий «*страховой случай*» и «*страховое событие*». Страховой случай и страховое событие - словосочетания, часто используемые как синонимы. Однако страховое событие - это явление более значительное по масштабу, которое охватывает подчас несколько страховых случаев.

Например, землетрясение - страховое событие, которое может вызвать массу частных страховых случаев: пожар, разрушение строений, гибель людей и т.п. Пожар, в свою очередь, в конкретном проявлении может рассматриваться как страховой случай (сгорел дом), в другом - целым страховым событием, в результате которого не только сгорел дом, но и пострадал человек и т.д. Все зависит от характера риска и принятого на страхование объекта, т.е. *страховой случай должен быть прописан в договоре*. Страховщик платит за страховой случай, а не за страховое событие.

Участники страхования.

Существование страхования означает, что есть нуждающиеся в защите и есть тот, кто обязуется эту защиту обеспечить. Таким образом, основные субъекты страхования – это страхователь и страховщик:

- *страхователь* (юридическое и физическое лицо), нуждающийся в защите и уплачивающий для этого соответствующие взносы (*покупатель страхового продукта*);

- *страховщик*, обеспечивающий защиту путем формирования страхового фонда из взносов страхователей (*продавец страхового продукта)*.

Чем больше страхователей в страховании, тем меньше страховая премия, приходящаяся на одного участника. При этом сумма возмещения убытков каждого страхователя всегда превышает уплаченные им взносы.

К основным участникам следует отнести также застрахованное лицо и выгодоприобретателя:

- *застрахованное лицо* - это физическое лицо, жизнь, здоровье и трудоспособность которого выступают объектом страховой защиты. На практике застрахованный может быть одновременно и страхователем, если он самостоятельно уплачивает страховые взносы. Например, работники предприятия являются застрахованными лицами по обязательному медицинскому страхованию, однако не являются страхователями, поскольку взносы за них оплачивает работодатель;
- *выгодоприобретатели* - это лица, в пользу которых выплачиваются страховые суммы или страховые возмещения после смерти завещателя, если он, в свою очередь, был страхователем. Выгодоприобретатель назначается страхователем (или застрахованным) на случай его смерти в результате страхового случая. Этот факт обязательно фиксируется в договоре страхования.

Другие понятия.

Страховая стоимость – это действительная стоимость имущества или размер предполагаемых убытков от предпринимательской деятельности, принимаемого при его страховании. Условия страхования строятся так, чтобы была застрахована реальная остаточная (с учетом износа) стоимость имущества, хотя возможно и страхование в полной первоначальной стоимости, т.е. без скидки на износ.

Страховая стоимость может быть меньше действительной стоимости имущества, но не может быть больше ее. Для обозначения страховой стоимости будем использовать символ [$\boldsymbol{C}$].

Страховая ответственность — обязанность страховщика выплатить страховое возмещение или страховую сумму при оговоренных в договоре последствиях происшедших страховых случаев.

Основу страховой ответственности составляет установленный условиями страхования перечень конкретных страховых рисков, который определяет объем страховой ответственности. Стоимостное выражение страховой ответственности - соответствующая *страховая сумма. Страховая сумма* (статья 10) – денежная сумма, которая установлена федеральным законом и (или) определена договором страхования и исходя из которой, устанавливается размер страховой премии (страховых взносов) и размер страховой выплаты при наступлении страхового случая.

Для обозначения страховой суммы будем использовать символ [$\boldsymbol{S}$]. Законом определено, что страховая сумма в имущественном страховании не должна превышать страховой стоимости объекта страхования.

$$0 < S \leq C.$$

Законодательством могут быть установлены предельные размеры страховых сумм по обязательным видам страхования.

Страховая премия (статья 11) - сумма, уплачиваемая страхователем страховщику за принятое страховщиком обязательство возместить материальный ущерб, причиненный застрахованному имуществу, или выплата страховой суммы при наступлении определенных событий в жизни застрахованного.

Коротко говоря, страховая премия - это плата за страховую услугу, в дальнейшем, для обозначения страховой премии будем использовать символ [$\boldsymbol{\pi}$]. Страховая премия уплачивается сразу или периодически, в рассрочку. Если страховая премия вносится в рассрочку, то такая часть носит название *страхового взноса*. Страховая премия исчисляется исходя из установленных страховых тарифов и размера страховой суммы.

Страховой тариф - термин, который обозначает собой ставку страховой премии с единицы страховой суммы. Страховой тариф служит основой для формирования страхового фонда. [$\boldsymbol{T}$].

$$T = \pi / S \cdot 100 \text{ руб.}$$

Тарифы по обязательным видам страхования (медицинское страхование, страхование пассажиров и др.) устанавливаются законами. Тарифы по добровольным видам страхования (личного, имущественного и страхование ответственности) рассчитываются самостоятельно с помощью актуарных расчетов.

Страховая премия (брутто премия) по своей структуре состоит из двух частей: нетто-премии и нагрузки.

Нетто-премия - часть страховой премии, предназначенная для обеспечения текущих страховых выплат по договорам страхования [$\pi_н$]. *Нагрузка* - часть страховой премии, предназначенная для покрытия затрат на проведение страхования и создания резерва (фонда) предупредительных мероприятий. В составе нагрузки может быть предусмотрена прибыль от проведения страховых операций. Для обозначения нагрузки мы будем использовать символ [f]. Нагрузка является безразмерной величиной.

Таким образом, *брутто-премия* представляет собой сумму нетто-премии, обеспечивающую выплату страховой суммы и надбавку (нагрузки) к ней, предназначенную для покрытия других расходов, связанных с проведением страхования. По принятой в страховании правилу брутто-премия вычисляется по следующей формуле:

$$\pi_Б = \frac{\pi_н}{1-f}.$$

Страховое покрытие – границы страховой ответственности страховщика, определенные договором страхования. Данный термин может применяться как для обозначения *границы суммы обеспечиваемого возмещения*, так и для обозначения *перечня опасностей*, от которых обеспечивается страхование.

Страховой ущерб - стоимость полностью погибшего или обесцененной части поврежденного имущества по страховой оценке [X].

$$0 < X \le C.$$

Страховая выплата - часть или полная сумма ущерба, причитающаяся к выплате страховщиком страхователю [Y].

$$0 < Y \le min(X,S).$$

Для обозначения страховой выплаты используются следующие термины:

- в имущественном страховании - *страховое возмещение;*
- в личном страховании - *страховое обеспечение*.

ГЛАВА 2. СТРАХОВАЯ ПРЕМИЯ

Необходимым условием заключения договора страхования является осознание потенциальным клиентом того, что наступление страхового случая нанесет его здоровью или его имуществу непоправимый материальный ущерб. Кроме того, он должен понимать, что у него нет достаточных средств, чтобы справиться с этими угрозами собственными силами. В этом случае он выбирает защиту в форме страхования. Заключая договор страхования, страхователь платит премию. Таким образом, *первой главной задачей* является определение величины *страховой премии*. Величина премии должна быть такой, чтобы она устраивала как страхователя, так и страховщика. Для страхователя она должна быть финансово необременительной и иметь разумное соотношение со стоимостью защищаемых ценностей. Для страховщика она должна быть достаточной, чтобы обеспечить в дальнейшем выполнение своих обязательств.

Вопрос: *Кто определяет величину страховой премии?*

Ответ: *Актуарий, на основании актуарных расчетов*.

Актуарий - специалист, который занимается актуарными расчетами (страховой математикой).

Актуарные расчеты - процесс, в ходе которого определяется себестоимость и стоимость страховой услуги.

Термин «*актуарий*»® известен со времен Древнего Рима и относился к человеку, который записывал решения Сената и ежедневно вел записи дебатов. Впервые этот термин по отношению к страхованию употреблен в 1762 г., когда в Лондоне было сформировано Общество справедливого страхования жизни и выживания. На первых порах актуарий выполнял работу больше свойственную секретарю компании, однако, когда в 1775 г. на этот пост был назначен математик Вильям Морган, работа актуария была ограничена расчетом ставок страховых взносов и оценкой надежности финансовых операций Общества. С этих пор термин "*актуарий*" стал применяться для тех, кто выполнял эту финансовую и математическую работу. Именно в это время были заложены основы теории актуарных расчетов как особой отрасли науки.

® ***Актуарий*** - англ. *actuaru*, лат. *aciuamius* - скорописец, счетовод.

Современная актуарная теория страхования представляет собой область знаний, целью которой является *разработка экономико-математических моделей образования и расходования страхового фонда*. В основе страховой математики лежат теория вероятностей и математическая статистика, данные демографии, многолетние статистические данные страховых событий, данные о динамике финансовых и фондовых показателей. При помощи последних актуарий учитывает в страховых премиях доход, который может получить страховщик от использования в качестве кредитных ресурсов временно свободные средства страхового фонда.

В современном понимании «*актуарий*» - это высококвалифицированный специалист - аналитик, имеющий многостороннюю теоретическую подготовку и прикладные умения в таких науках, как теория вероятностей, статистика, экономика, демография, финансы и правовая сфера. По тому, насколько востребованы актуарии в страховом бизнесе, можно судить о зрелости и цивилизованности самого страхового рынка.

2.1. Рисковая премия.

Как было сказано выше, исторически первой задачей, которую пришлось решать в страховании, была *задача определения величины страховой премии.* Проиллюстрируем эту задачу на простом примере. Смоделируем сначала ситуацию вычисления величины страховой премии на раннем этапе развития страхования, когда применялась раскладочная система.

Исходные данные:

- n - число участников договора;
- m - число участников, получивших утрату имущества;
- S - сумма ущерба;
- π - страховая премия.

$$\pi = \frac{\textit{Суммарный ущерб}}{\textit{Число участников}} = \frac{m \cdot S}{n} = \frac{m}{n} \cdot S = w \cdot S \approx p \cdot S\,,$$

где w и p – частота и вероятность страхового случая.

Приведенный пример, несмотря на упрощенность, выражает главный принцип, который лежит в основе расчета страховой премии – «*принцип эквивалентности обязательств сторон*», обеспечивающий эквивалентность рисков страховщика и страхователя, т.е. равенство величин их возможных потерь. С математической точки зрения принцип эквивалентности обязательств сторон означает, что страховая премия должна максимально соответствовать вероятной величине ущерба участников страховых отношений (страховщика и страхователя). С экономической точки зрения принцип эквивалентности соответствует перераспределительной сущности страхования как замкнутой раскладке ущерба и означает, что сумма всех собранных премий (величина страхового фонда) должна равняться сумме выплат по всем ущербам.

$$\sum премий\ страхователей = \sum возмещений\ страховщика.$$

По договору страхователь платит премию, которая является платой за его спокойствие, так как эти взносы ему не возвращаются, а остаются в страховом фонде. В этот состоит *риск страхователя*. *Риск страховщика* состоит в том, что при страховом случае он обязан заплатить страхователю оговоренную договором сумму, значительно превышающую размер страховой премии. Для определения страховой премии необходимо приравнять риски страховщика и страхователя с учетом вероятности наступления страхового случая и величины убытков от него.

Данная премия, которая обеспечивает эквивалентность обязательств сторон, носит название *рисковой премии*[®]. Иногда в литературе ее называют *основной нетто-премией*. Будем обозначать эту премию символом π_0. Если возможная величина ущерба S фиксирована, а вероятность страхового случая равна p, то можно записать:

$$\pi_0 = p \cdot S \qquad (2.1.1)$$

Пример 2.1.

Автомобилист застраховал автомобиль от угона со страховой суммой S = 300 000 руб. Страховая компания оценила вероятность угона в течение года в p = 0,02. Найти рисковую премию.

Решение.

$$\pi_0 = p \cdot S = 0{,}02 \cdot 300000 = 6000\, руб.$$

Этот пример демонстрирует расчет рисковой премии при *фиксированной величине ущерба*, что соответствует договорам автострахования от угона, страхования на случай смерти и т.п. В то же время, в таких договорах как страхование от пожара или других стихийных бедствий, автостраховании от аварии и т.п., сама величина ущерба является *случайной пере-*

[®] ***Рисковая премия*** (*required premium, pure premium)* - часть страховой премии, которую страховщик назначает для создания необходимого резерва с целью выплаты страхового возмещения.

менной величиной. В этом случае возникает дополнительная задача *оценки вероятности того, что нанесенный ущерб составит определенную сумму*.

Рассмотрим ситуацию, когда при наступлении страхового случая величина ущерба X является случайной величиной с некоторым законом распределения. Если A - случайное событие, связанное с наступлением страхового случая, а B_i - случайное событие, заключающиеся в том, что величина ущерба объекта страхователя составила x_i, то мы имеем *сложное событие*. Актуария интересует *условная вероятность события* $P(B_i|A)$, т.е. условное распределение случайной величины ущерба X при наступлении страхового случая.

В актуарной математике принято определенным образом структурировать случайную величину Y, описывающую *величину возмещения страховщика* по индивидуальному договору. В этом случае возмещение записывают в виде произведения:

$$Y = I \cdot X, \tag{2.1.2}$$

где случайная величина I носит название *индикатора*® и равна *1* или *0* в соответствии с тем, был или нет страховой случай, а случайная величина X описывает *размер страхового ущерба* объекта страхования после наступления страхового случая.

Использование подобной модели удобно тем, что позволяет разделить влияние разных факторов на величину возмещения Y по отдельному договору. Как правило, на вероятность наступления страхового случая, $p = P(I = 1)$, влияют одни факторы, а на величину ущерба, описываемого переменной X, совсем другие. В качестве примера можно привести страхование автомобиля от повреждения при дорожно-транспортном происшествии. Скорее всего вероятность попасть в аварию зависит, прежде всего, от возраста и стажа водителя, от погодных условий и качества дорог. Однако величина расходов на ремонт автомобиля после аварии меньше зависит от перечисленных факторов, она чаще связана с маркой автомобиля (цена и качество изготовления). В этом случае ожидаемые потери страховщика по договору страхования описываются величиной

$$\begin{aligned} EY &= P(I=1) \cdot E(Y \mid I=1) + P(I=0) \cdot E(Y \mid I=0) = \\ &= p \cdot E(Y \mid I=1) + q \cdot 0 = p \cdot E(X \mid I=1) = p \cdot EX. \end{aligned}$$

® В теории вероятностей индикатор I называют *бернулевской случайной величиной* или *биномиальной случайной величиной*.

Таким образом, в случае распределенного риска, сначала ищут математическое ожидание ущерба EX[®], а потом определяют рисковую премию:

$$\pi_0 = EY = p \cdot EX. \tag{2.1.3}$$

Из теории вероятностей известно, что для более полного описания случайной величины наряду с ее математическим ожиданием вводятся такие макро характеристики, как дисперсия DY и среднеквадратическое отклонение $\sigma_Y = \sqrt{DY}$, которые характеризуют отклонение возможных значений случайной величины от ее математического ожидания. Вычислим дисперсию возмещения Y, воспользовавшись известной формулой:

$$DY = EY^2 - (EY)^2.$$

Учитывая формулу (2.1.2), запишем математическое ожидание квадрата возмещения:

$$EY^2 = P(I=1) \cdot E(Y^2 \mid I=1) + P(I=0) \cdot E(Y^2 \mid I=0) =$$

$$= p \cdot E(Y^2 \mid I=1) + q \cdot 0 = p \cdot E(X^2 \mid I=1) = p \cdot EX^2.$$

$$DY = p \cdot EX^2 - (p \cdot EX)^2.$$

Учитывая, что $DX = EX^2 - (EX)^2$, после несложных преобразований окончательно получим ($q = 1 - p$):

$$DY = p \cdot DX + p \cdot q \cdot (EX)^2. \tag{2.1.4}$$

Поскольку математическое ожидание, дисперсия и среднеквадратическое отклонение являются размерными величинами, они не всегда позволяют проводить сравнение различных рисков между собой. В теории вероятностей для этого используется безразмерная характеристика – коэффициент вариации, который равен отношению среднеквадратического отклонения случайной величины к ее математическому ожиданию. Для случайной величины Y коэффициент вариации равен:

$$K_{\text{var}} = \sigma_Y / EY. \tag{2.1.5}$$

Для этого коэффициента К.Бурроу [4,стр.60], предложил термин «*степень риска*», но поскольку он в актуарной математике не «*прижился*», мы будем пользоваться термином «*коэффициент вариации*».

Для расчета премии при распределенном ущербе удобнее рассмотреть отдельно случаи дискретного и непрерывного распределения случайной величины X.

[®] Здесь и дальше, для краткости условное математическое ожидание $E(X|I=1)$ будет обозначаться как EX.

Дискретное распределение.

Если случайная величина X дискретна и имеет закон распределения $\{x_i, g_i\}$, где x_i – возможные значения ущерба, а $g_i = P(X = x_i)$, то для математического ожидания имеем:

$$EX = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot g_i .$$

<u>*Пример 2.2.*</u>

Автомобилист застраховал автомобиль от аварии со страховой стоимостью C = 400 усл. ед. Страховая компания оценила вероятность страхового случая в течение года в p = 0,1. Определить размер единовременной рисковой премии и коэффициент вариации, если распределение ущерба при страховом случае имеет вид:

x_i	100	200	300	400
g_i	0,4	0,3	0,2	0,1

<u>*Решение.*</u>

Сначала найдем математическое ожидание ущерба X:

$$EX = 100 \cdot 0{,}4 + 200 \cdot 0{,}3 + 300 \cdot 0{,}2 + 400 \cdot 0{,}1 = 200.$$

Теперь: $$\pi_0 = EY = p \cdot EX = 0{,}1 \cdot 200 = 20.$$

Данная величина и будет искомой рисковой премией. Для вычисления коэффициента вариации вычислим дисперсию ущерба DX:

$$EX^2 = 10^4 \cdot 0{,}4 + 4 \cdot 10^4 \cdot 0{,}3 + 9 \cdot 10^4 \cdot 0{,}2 + 16 \cdot 10^4 \cdot 0{,}1 = 5 \cdot 10^4.$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = 5 \cdot 10^4 - 4 \cdot 10^4 = 10^4.$$

Подставляя полученные данные в формулу (2.1.4) имеем:

$$DY = 0{,}1 \cdot 10^4 + 0{,}1 \cdot 0{,}9 \cdot 4 \cdot 10^4 = 0{,}46 \cdot 10^4 . \Rightarrow K_{\text{var}} = \frac{\sqrt{DY}}{EY} = \frac{68}{20} = 3{,}4.$$

Непрерывное распределение.

В случае, когда случайная величина X непрерывна, с функцией распределения $F(x)=P(X<x)$ и плотностью распределения $f(x)=F'(x)$**,** в соответствии с общими формулами теории вероятностей получим для математического ожидания и дисперсии ущерба страхуемого объекта:

$$EX = \int_0^\infty x \cdot f(x)dx, \quad DX = \int_0^\infty (x - EX)^2 \cdot f(x)dx. \tag{2.1.6}$$

Алгоритм расчета рисковой премии и коэффициента вариации для непрерывной случайной величины X аналогичен дискретному распределению. Применяемая для актуарных расчетов функция распределения $F(x)$

может быть различна и зависит от типа риска. Для теоретических расчетов используются несколько видов функции распределения: равномерное, показательное, распределение Парето, логнормальное распределение и др. Конкретный вид функции распределения определяется из статистических данных прошлых лет. Определение функции распределения для страхуемого риска также является одной из основных задач актуария. Рассмотрим некоторые из функций распределения одиночного ущерба.

Равномерное распределение.

Равномерное распределение является наиболее простым из перечисленных выше. Оно часто используется для упрощения в задачах учебного характера, однако следует помнить, что это распределение далеко от действительного.

Пример 2.3.

Страховая стоимость объекта C = 6 млн.руб. Вероятность пожара на застрахованном объекте равна $p = 10^{-3}$. В случае пожара ущерб X распределен равномерно от нуля до полной стоимости объекта. Определить рисковую премию и коэффициент вариации.

Решение.

Если непрерывная случайная величина X определена на отрезке $[a,b]$ и имеет равномерное распределение, то ее функция и плотность распределения задается следующими выражениями:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \textit{для } x<a.\\ \dfrac{x-a}{b-a}, & \textit{для } x\in[a,b].\\ 1, & \textit{для } x>b.\end{cases} \qquad f(x)=\begin{cases}0, & \textit{для } x\notin[a,b].\\ \dfrac{1}{b-a}, & \textit{для } x\in[a,b].\end{cases} \tag{2.1.7}$$

Равномерное распределение является двухпараметрическим и в общем случае обозначается как $X \sim U[a,b]$. Сначала вычислим математическое ожидание ущерба. Для равномерного распределения, согласно (2.1.7), имеем:

$$EX=\int_a^b xf(x)dx=\int_a^b x\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\cdot\left.\frac{x^2}{2}\right|_a^b=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}.$$

В нашем случае $b = C,\ a = 0$. Отсюда EX = 3 млн.руб.

Для рисковой премии получим:

$$\pi_0 = EY = p\cdot EX = 10^{-3}\cdot 3\cdot 10^6 = 3000 \textit{ руб.}$$

При вычислении дисперсии воспользуемся готовой формулой.

$$DX = \int_a^b (x - EX)^2 f(x)dx = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{C^2}{12} = 3 \cdot 10^{12}.$$

$$DY = pDX + pq(EX)^2 = 10^{-3} \cdot 3 \cdot 10^{12} + 10^{-3} \cdot 0{,}999 \cdot 9 \cdot 10^{12} \approx 1{,}2 \cdot 10^{10}.$$

$$K_{\text{var}} = \frac{\sqrt{DY}}{EY} = \frac{1{,}095 \cdot 10^5}{3 \cdot 10^3} = 36{,}5.$$

Полученное значение коэффициента вариации очень велико. Ни один страхователь не заключит договор страхования с таким K_{var}, когда величина среднеквадратического отклонения риска в несколько раз превышает его математическое ожидание. Обычное значение при “*разумном*” страховании равно 1/10, а лучше всего, когда еще ниже. Такой результат получен, поскольку мы рассматривали одиночный риск (одиночный договор). В реальности страховщик работает с портфелем договоров, что приводит к существенному уменьшению коэффициента вариации. Актуарные расчеты для портфеля будут рассмотрены в следующем разделе.

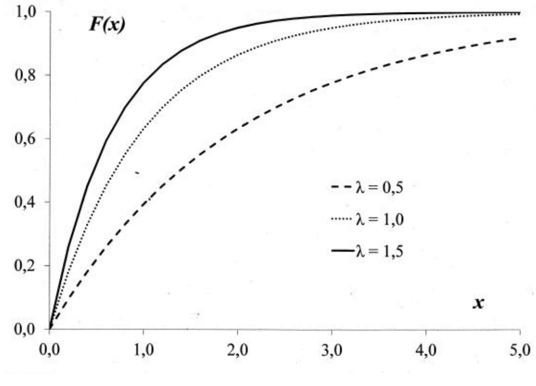
Показательное распределение.

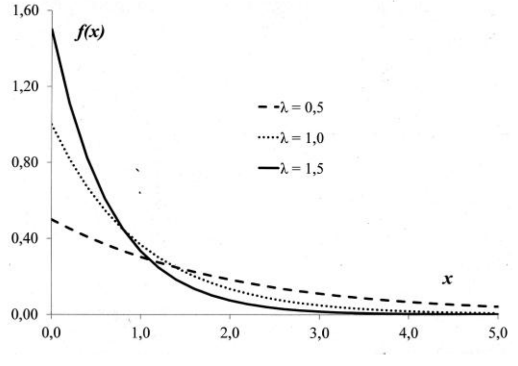
Следующий, широко применяемый в страховании вид распределения ущерба – *экспоненциальное или показательное распределение*. Этот тип распределения соответствует самой природе страховых случаев: *«чаще реализуются малые ущербы и редки ущербы большой величины»*.

Функция распределения и соответствующая плотность распределения имеют вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x < 0. \\ 1 - e^{-\lambda x}, & \text{для } x \geq 0. \end{cases} \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x < 0. \\ \lambda e^{-\lambda x}, & \text{для } x \geq 0. \end{cases} \qquad (2.1.8)$$

Графики функции распределения $F(x)$ и плотности распределения $f(x)$ имеют вид:





Показательное распределение является однопараметрическим распределением, т.к. зависит от одного параметра λ и в общем случае обозначается как $X \sim Exp(\lambda)$. Для показательного распределения справедливы следующие соотношения:

$$EX = \lambda^{-1}; \qquad EX^2 = 2\cdot\lambda^{-2}; \quad DX = \lambda^{-2}; \qquad \sigma_X = \lambda^{-1}. \tag{2.1.9}$$

<u>*Пример 2.4.*</u>

Вероятность страхового случая равна p = 0,05. Размер страхового ущерба распределен по показательному закону $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda \cdot x}$, с параметром λ = 0,007. Определить рисковую премию и коэффициент вариации.

<u>*Решение.*</u>

Вычислим сначала математическое ожидание ущерба объекта страхования.

$$EX = \int_0^\infty x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}dx = \frac{1}{\lambda} = 143.$$

Соответственно рисковая премия равна:

$$EY = p\cdot EX = p\cdot\frac{1}{\lambda} = 7{,}14.$$

Аналогично для дисперсии ущерба получим:

$$DX = \int_0^\infty (x - EX)^2\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda\cdot x}dx = \frac{1}{\lambda^2} = 2{,}04\cdot 10^4.$$

Для коэффициента вариации имеем:

$$DY = p\cdot DX + p\cdot q\cdot(EX)^2 = p\cdot\frac{1}{\lambda^2} + p\cdot q\cdot\frac{1}{\lambda^2} = \frac{p}{\lambda^2}\cdot(1+q) = 1{,}99\cdot 10^3.$$

$$K_{\text{var}} = \frac{\sqrt{DY}}{EY} = \frac{\sqrt{p\cdot(1+q)}/\lambda}{p/\lambda} = \sqrt{\frac{1+q}{p}} = \sqrt{\frac{1{,}95}{0{,}05}} = 6{,}24.$$

<u>*Замечание*</u>. Как видно из полученного результата, коэффициент вариации для данного распределения не зависит от параметра распределения λ.

<u>*Распределение Парето.*</u>

При анализе статистических данных распределения ущерба, несмотря на качественную схожесть с показательным распределением: *большое число мелких ущербов и малое число крупных*, наблюдается также и количественное расхождение от теоретического распределения. Как показано выше для показательного распределения характерно равенство математического ожидания и среднеквадратического отклонения, однако статистические данные часто показывают на различие выборочной средней и стандартного отклонения для страховых ущербов.

Если более детально рассмотреть портфель страховщика, то можно выявить наличие разных групп страхователей. В актуарной математике делается предположение, что в страховом портфеле убытки по отдельным договорам могут иметь показательные распределения, но с различными параметрами λ. Например, в автостраховании ущерба от аварии этот параметр может зависеть от марки машины, манеры езды водителя и т.п. Отсюда можно представить распределение ущерба для усредненного договора по портфелю, как смеси из различных распределений отдельных ущербов.

В общем случае пусть X, как и раньше, есть величина ущерба с функцией распределения $F(x)=P(X<x)$, но X зависит от некоторого параметра Λ. Тогда условная функция распределения величины ущерба X при заданном значении параметра $\Lambda = \lambda$ равна функции $F(x,\lambda)=P(X<x|\Lambda=\lambda)$. Если известна функция распределения параметра $G(\lambda) = P(\Lambda<\lambda)$, можно записать для безусловной функции распределения ущерба соответствующий интеграл:

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,\lambda)dG(\lambda).$$

В данном случае функция распределения $F(x)$ представляет смесь функций распределения $F(x,\lambda)$, учитывающую *рандомизацию* ущерба X по распределению $G(\lambda)$. Для плотности распределения $f(x)$ получим следующее выражение:

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dF(x,\lambda)}{dx} dG(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\lambda)dG(\lambda) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,\lambda)g(\lambda)d\lambda.$$

Конечно, каждому виду страхования и каждому портфелю соответствует своё (смешанное) распределение ущербов, зависящее, в частности, от размеров страховых сумм по отдельным рискам, а также от страхуемых событий. Если для показательного распределения выбрать в качестве функции $G(\lambda)$, которая еще называется *структурной функцией*, гамма-распределение, то получим следующий результат:

$$f(x) = \int_{0}^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} dG(\lambda), \quad dG(\lambda) = \frac{\tau^a e^{-\tau\lambda} \lambda^{a-1}}{\Gamma(a)} d\lambda,$$

где $\Gamma(a) = \int\limits_0^{\infty} \tau^{a-1} e^{-\tau} d\tau.$ - гамма функция Эйлера.

Проведя несложные преобразования получим:

$$f(x) = \int\limits_0^{\infty} \lambda e^{-\lambda x} \frac{\tau^a e^{-\tau\lambda} \lambda^{a-1}}{\Gamma(a)} d\lambda = \frac{\tau^a}{\Gamma(a)} \int\limits_0^{\infty} \lambda^a e^{-\lambda(\tau+x)} d\lambda = -\frac{\tau^a}{\Gamma(a)(\tau+x)} \int\limits_0^{\infty} \lambda^a d e^{-\lambda(\tau+x)} =$$

$$= -\frac{\tau^a}{\Gamma(a)(\tau+x)} \cdot \left(\lambda^a e^{-\lambda(\tau+x)} \Big|_0^{\infty} - a \int\limits_0^{\infty} \lambda^{a-1} e^{-\lambda(\tau+x)} d\lambda \right) = \frac{a\tau^a}{\Gamma(a)(\tau+x)} \int\limits_0^{\infty} \lambda^{a-1} e^{-\lambda(\tau+x)} d\lambda.$$

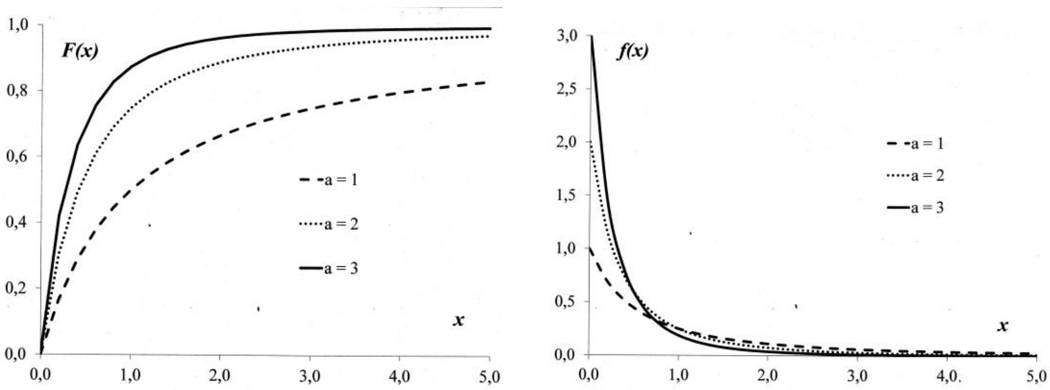
$$\int\limits_0^{\infty} \lambda^{a-1} e^{-\lambda(\tau+x)} d\lambda = \{t = \lambda(\tau+x)\} = \frac{1}{(\tau+x)^a} \int\limits_0^{\infty} t^{a-1} e^{-t} dt = \frac{\Gamma(a)}{(\tau+x)^a}.$$

Окончательно имеем:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x < 0. \\ 1 - \left(\dfrac{\tau}{x+\tau} \right)^a, & \text{для } x \ge 0 \end{cases}. \qquad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{для } x < 0. \\ \dfrac{a}{\tau} \cdot \left(\dfrac{\tau}{x+\tau} \right)^{a+1}, & \text{для } x \ge 0. \end{cases} \qquad (2.1.10)$$

Данное распределение носит название *распределение Парето*®. Распределение встречается при исследовании различных явлений, в частности, социальных, экономических, физических и других. Распределение Парето является двухпараметрическим распределением (a, τ). Последний параметр τ носит название коэффициент масштаба.

Графики функции *F(x)* и плотности *f(x)* распределения для $\tau = 1$ имеют вид:



Для распределения Парето несложно получить следующие соотношения:

$$EX = \frac{\tau}{a-1}, \quad a \ge 1, \qquad DX = \frac{\tau^2 a}{(a-1)^2 (a-2)}, \quad a \ge 2. \qquad (2.1.11)$$

® ***Вильфредо Парето*** - (15.07.1848 – 20.08.1923) - итальянский инженер, экономист и социолог.

Зная математическое ожидание и дисперсию ущерба X (или получив их оценки из статических данных), можно вычислить значение параметров распределения Парето.

$$a = \frac{2DX}{DX - (EX)^2}, \qquad \tau = EX \cdot (a-1). \qquad (2.1.12)$$

Пример 2.5.

Вероятность страхового случая равна p = 0,05. Статистические данных прошлых лет показали, что ущерб объекта страхования моделируется как непрерывная случайная величина X с плотностью распределения, пропорциональной $(1+x)^{-4}$ (при $x \geq 0$). Определить рисковую премию и коэффициент вариации.

Решение.

По условию задачи плотность распределения имеет вид:

$$f(x) = \frac{C}{(1+x)^4}, \; x \geq 0.$$

Постоянную C найдем из условия нормировки:

$$\int_0^\infty \frac{C}{(1+x)^4} dx = -\frac{C}{3}(1+x)^{-3}\Big|_0^\infty = \frac{C}{3} = 1. \; \Rightarrow C = 3.$$

Для плотности распределения имеем следующее выражение:

$$f(x) = \frac{3}{(1+x)^4}.$$

Сравнивая полученный результат с распределением Парето, можно сказать, что случайная величина ущерба X распределена по закону Парето с плотностью распределения:

$$f(x) = \frac{a}{\tau} \cdot \left(\frac{\tau}{x+\tau}\right)^{a+1}, \; где \; a = 3, \; \tau = 1.$$

Используя соотношения (2.1.11) получим:

$$EX = \frac{\tau}{a-1} = \frac{1}{2}, \quad DX = \frac{\tau^2 a}{(a-1)^2(a-2)} = \frac{3}{4}.$$

$$\pi_0 = EY = p \cdot EX = 0{,}025 \qquad DY = p \cdot DX + pq \cdot (EX)^2 = 0{,}049$$

$$\sigma_Y = 0{,}22 \qquad K_{\mathrm{var}} = \frac{\sigma_Y}{\pi_0} = 8{,}9.$$

Смешанное показательное распределение.

Рассмотренное нами преобразование показательного распределения в распределение Парето предполагало, что весь портфель состоит из множества договоров с показательным распределением, но отличающихся по параметру λ. Задачу можно упростить, если предположить, что портфель состоит из двух групп субпортфелей с отличными параметрами λ. Например, в автостраховании от аварий это две группы водителей: «хорошие» и «плохие», или две группы автомобилей: «иномарки» и «отечественные».

В этом случае результирующая плотность распределения есть средневзвешенное двух видов распределения, которая имеет следующий вид для $x \geq 0$:

$$f(x) = \alpha_1 \cdot \lambda_1 \cdot e^{-\lambda_1 x} + \alpha_2 \cdot \lambda_2 \cdot e^{-\lambda_2 x}, \quad где \; \alpha_1 + \alpha_2 = 1. \tag{2.1.13}$$

Полученное распределение является трехпараметрическим. Для определения параметров на основе статистических данных реальных распределений ущербов требуется использовать три момента. Учитывая, что для показательного распределения справедливы следующие соотношения:

$$\nu_1 = EX = \lambda^{-1}; \qquad \nu_2 = EX^2 = 2 \cdot \lambda^{-2}; \qquad \nu_3 = EX^3 = 6 \cdot \lambda^{-3}.$$

Для введенного смешанного показательного распределения получим:

$$EX = \frac{\alpha_1}{\lambda_1} + \frac{\alpha_2}{\lambda_2}; \qquad EX^2 = 2 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_1^2} + \frac{\alpha_2}{\lambda_2^2} \right); \quad EX^3 = 6 \cdot \left(\frac{\alpha_1}{\lambda_1^3} + \frac{\alpha_2}{\lambda_2^3} \right).$$

Решая эти уравнения относительно параметров λ_1, λ_2 и α_1 получим:

$$\left(\frac{1}{\lambda} \right)_{1,2} = \frac{S}{2} \pm \sqrt{\frac{S^2}{4} - P}\,; \quad \alpha_1 = \lambda_1 \frac{1 - \nu_1 \cdot \lambda_2}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

$$S = \frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\nu_3 - 3 \cdot \nu_2 \cdot \nu_1}{\nu_2 - 2\nu_1^2}; \qquad P = \frac{1}{\lambda_1} \cdot \frac{1}{\lambda_2} = \frac{1}{6} \cdot \frac{2 \cdot \nu_1 \cdot \nu_3 - 3\nu_2^2}{\nu_2 - 2\nu_1^2}.$$

где ν_1, ν_2, ν_3 – выборочные начальные моменты случайной величины ущерба X *1*-го, *2*-го и *3*-го порядков.

Логнормальное распределение.

Статистический анализ данных о распределении ущерба объектов страхования показывает, что случайная величина ущерба X не подчиняется нормальному закону распределения. Во-первых, значения X только положительны, во-вторых, в распределении этой случайной величины наблюдается явная асимметрия относительно математического ожидания EX. С другой стороны, распределение случайной величины $Z = \ln X$ близко к нормальному. Данное распределение в теории вероятностей носит название *логнормального распределения*, для которого функция распределения и плотность распределения имеют вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & \text{для } x\le 0.\\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}Erf\left[\frac{\ln x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}\right], & \text{для } x>0.\end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{для } x\le 0.\\ \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x}\exp\left[-\frac{(\ln x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right], & \text{для } x>0.\end{cases} \qquad (2.1.14)$$

где $\sigma>0,\ \mu\in R$ - параметры. Таким образом, логнормальное распределение является двухпараметрическим и обозначается $X \sim LogN(\mu,\ \sigma^2)$. Дополнительная функция ошибок $Erf(x)$, иногда применяется обозначение $erfc(x)$, определяется через функцию ошибок (функцию Лапласа) $erf(x)$:

$$Erf(x)=1-erf(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-t^2}dt; \qquad erf(x)=\Phi(x)=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{x}e^{-t^2}dt.$$

Для логнормального распределения формула k-го момента имеет вид:

$$EX^k=\exp\left(k\mu+\frac{k^2\sigma^2}{2}\right),\ k\in N.$$

Откуда в частности для математического ожидания и дисперсии получаются следующие выражения:

$$EX=e^{\mu+\frac{\sigma^2}{2}}; \qquad DX=\left(e^{\sigma^2}-1\right)\cdot e^{2\mu+\sigma^2}. \qquad (2.1.15)$$

Пример 2.6.

Статистический анализ данных о размере ущерба объекта страхования X показал, что случайная величина lnX имеет нормальное распределение со средним μ = 3,105 и среднеквадратичным отклонением σ = 1,138. Определить рисковую премию и коэффициент вариации, если вероятность страхового случая p = 0,1.

Решение.

Используя выражения(2.1.15) имеем:

$$EX=42{,}62; \qquad DX=4813.$$

$$\pi_0=pEX=4{,}26; \quad DY=pDX+pq(EX)^2=644{,}8; \quad K_{\text{var}}=\sqrt{DY}/EY=5{,}96.$$

Усеченное распределение.

При расчетах премий, в рассмотренных выше распределениях, использовалось интегрирование по *бесконечному верхнему пределу*. В реальных задачах верхний предел ущерба объекта страхования ограничен его страховой стоимостью - C. В этом случае требуется сделать корректировку к классическим формулам теории вероятностей. Полученные новые распределения носят название усеченных распределений. Вывод соответствующих формул проведем на примере показательного распределения, взяв расчетные данные из примера 2.4.

Пример 2.7.

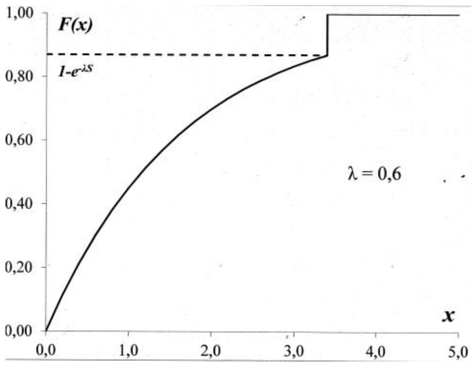
Величина ущерба X в интервале $[0,C]$ имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0{,}007$ и $C = 300$. Вероятность страхового случая равна $p = 0{,}05$.

Решение.

В теории вероятностей этот случай рассматривается как усеченное показательное распределение, а функция распределения этой случайной величины имеет вид:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1 - e^{-\lambda \cdot x} & 0 \le x < C, \\ 1 & x \ge C. \end{cases} \tag{2.1.15}$$

Это распределение смешанного типа с функцией плотности $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $x \in [0, C)$ и «сгустком» вероятностной массы $e^{-\lambda C}$ в точке $x = C$. График этой функции распределения имеет вид.



Рассчитаем соответствующее математическое ожидание и коэффициент вариации для данного усеченного показательного распределения.

$$EX = \int_0^C x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx + C \cdot e^{-\lambda C} = \frac{1 - e^{-\lambda \cdot C}}{\lambda} = 125{,}4$$

$$EX^2 = \int_0^C x^2 \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx + C^2 \cdot e^{-\lambda \cdot C} = \frac{2}{\lambda^2} \cdot \left(1 - e^{-\lambda \cdot C}\right) - \frac{2C}{\lambda} \cdot e^{-\lambda \cdot C}.$$

$$DX = \frac{1 - 2 \cdot \lambda \cdot C \cdot e^{-\lambda \cdot C} - e^{-2\lambda \cdot C}}{\lambda^2} = 9606$$

$$\pi_0 = EY = p \cdot EX = 6{,}27 \qquad DY = p \cdot DX + pq \cdot (EX)^2 = 1227$$

$$\sigma_Y = 35{,}0 \qquad K_{\text{var}} = \frac{\sigma_Y}{\pi_0} = 5{,}58$$

Проведем сравнение полученных результатов с предыдущими результатами.

Распределения	EX	DX, 10^4	π_0 = EY	DY, 10^3	K_{var}
показательное	143,0	2,04	7,14	1,99	6,24
усеченное	125,4	0,96	6,27	1,23	5,58

2.2. Рисковая надбавка

В предыдущем разделе было введено понятие *рисковой премии* π_0, которая является основной составляющей нетто-премии и определяется из принципа эквивалентности обязательств сторон: страховщика и страхователя.

$$\pi_0 = EY = p \cdot EX$$

Величина Y определяет возмещение, которое страховщик выплачивает страхователю. Поскольку Y является случайной величиной, поэтому реальная средняя величина выплаты по договору может отличаться от его математического ожидания. В общем случае, эта величина может быть как меньше, так и больше π_0 - его математического ожидания EY. Страховщика волнует именно последний вариант, поэтому он должен к рисковой премии добавить еще одно слагаемое $r_н$ – *рисковую надбавку*, которая учитывала бы данное возможное отклонение.

В примерах предыдущего раздела уже отмечалось высокое значение K_{var}. Объясняется это тем, что мы рассматривали страхование одиночного риска. В реальности страховщик работает со множеством страхователей, формируя страховой портфель. Страховщика не интересует величина возмещения по конкретному договору, а интересует сумма возможных выплат по всему портфелю. Общая сумма возмещений по портфелю Z будет складываться из случайных выплат Y_i по каждому договору:

$$Z = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n. \qquad (2.2.1)$$

Так же как и при анализе рисковой премии проведем раздельный расчет для фиксированного и распределенного ущерба объекта страхования X.

Рисковая надбавка при фиксированном ущербе.

Пусть компания имеет однородный портфель n договоров с одинаковыми страховыми суммами S и вероятностью наступления страховых случаев p. Страхуется риск фиксированного ущерба, например, угон автомобиля. Учитывая, что возможная сумма ущерба является фиксированной величиной S и, используя связь ущерба с возмещением $Y = I \cdot X$, можно получить:

$$Z = \sum_{i=1}^{n} Y_i = \sum_{i=1}^{n} I_i X_i = \sum_{i=1}^{n} I_i S = S \sum_{i=1}^{n} I_i = S \cdot K.$$

Таким образом, при фиксированной величине ущерба объекта страхования единственной случайной величиной, определяющей в задаче суммарное возмещение по портфелю, выступает K – число страховых случаев в портфеле из n договоров.

Компанию интересует не только среднее число страховых случаев $EK = np$, которое определяет рисковую премию π_0, но и Δ_K - величину возможного *превышения* числа страховых случаев над ожидаемым средним числом, а также и *вероятность* γ такого отклонения. Если число страховых случаев превысило среднее ожидаемое значение EK на величину Δ_K, то страховщик должен изыскать дополнительную сумму выплат равную $\Delta_K \cdot S$ или распределить ее между n страхователями. Данная добавка к рисковой премии называется *рисковой надбавкой* и для фиксированного ущерба равна:

$$r_н = \frac{\Delta_K \cdot S}{n} = \frac{\Delta_K}{np} \cdot p \cdot S = \theta \cdot \pi_0,$$

где величина $\theta = r_н / \pi_0$ носит название *относительной рисковой надбавки*. Таким образом, рисковая надбавка $r_н$ является второй по значимости, после рисковой премии π_0, составляющей *нетто-премии* $\pi_н$.

$$\pi_н = \pi_0 + r_н = \pi_0 \cdot (1 + \theta). \qquad (2.2.2)$$

Величина Δ_K, которая определяет рисковую надбавку, есть превышение числа страховых случаев K над ее математическим ожиданием EK. Закон распределения этой дискретной случайной величины K в условиях сформулированной выше задачи носит название «*Биноминального закона распределения*» и определяется формулой Бернулли:

$$P(K=k)=P_n(k)=C_n^k\cdot p^k\cdot q^{n-k}=\frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\cdot p^k\cdot q^{n-k}. \qquad (2.2.3)$$

Эта формула определяет вероятность того, что в n независимых испытаниях (договорах) число страховых случаев K точно равно k. Для построения интегральной оценки нам потребуется сумма вероятностей.

$$P(K\le k)=\sum_{i=0}^{k}P_n(i).$$

Пример 2.8.

Пусть число договоров n = 1000, вероятность наступления страхового случая p = 0,1. Страховая сумма S = 1000 руб. Компанию интересует вероятность того, что фактическое число случаев не превысит некоторого заданного значения k_{max}. Какова при этом рисковая надбавка, которая обеспечила бы вероятность неразорения γ = 0,95? Оценить конкурентоспособность компании, если для данного вида риска надбавка, в среднем, составляет 10% от рисковой премии.

Решение.

Среднее ожидаемое число страховых случаев $EK = np$ = 100. Рисковая премия, определяемая из эквивалентности обязательств сторон, равна $\pi_0 = S\cdot p$ = 100 рублей. Общий страховой фонд, образованный из рисковых премий, $\Pi_0 = n\cdot\pi_0$ = 100 000 рублей, обеспечивает исполнение обязательств не превышающих 100 исков. Определим теперь рисковую надбавку.

Подход № 1.

Легко видеть, что пользоваться формулой Бернулли (2.2.3) при больших значениях n достаточно неудобно, т.к. формула требует выполнения действий над громадными числами, поэтому воспользуемся формулой *Excel*:

БИНОМ.РАСП(k;n;p;kod),

где *kod = 0 (ЛОЖЬ)* для весовой функции распределения® *P(K = k), kod = 1* (*ИСТИНА)* для интегральной функции распределения $P(K \le k)$.

Построим соответствующую таблицу. Учитывая, что страховщика интересует правая граница доверительного интервала, отсчет начнем с k = 100.

® Терминология из Excel.

Таблица № 1.

k	100	104	108	112	114	115	116
$P(K = k)$	0,042	0,038	0,029	0,018	0,014	0,012	0,010
$P(K \le k)$	0,527	0,686	0,816	0,905	0,935	0,947	0,957
$P(K<k)$	0,500	0,663	0,800	0,897	0,930	0,943	0,955

В третьей строчке таблицы интегральная функция распределения $P(K \le k)$ показывает вероятность того, что число страховых случаев не превысит k. Уже из таблицы видно, что рисковая премия, которая определяется средним числом страховых случаев, обеспечивает достаточно низкую надежность, всего 53%. Поскольку в задаче задана предельная надежность $\gamma = 0{,}95$, то можно утверждать, что с надежностью 95,7% число страховых случаев не превысит 116.

Таким образом, для надежности 95% наибольшее превышение числа случаев над ожидаемым средним равно $\Delta_K = 116 - 100 = 16$ случаев. Страховщик, чтобы обеспечить заданную надежность, обязан изыскать сумму, равную $\Delta_K \cdot S = 16\,000$ рублей, для возможных страховых выплат по этим 16 договорам.

Страховщик может поступить следующим образом:

1. использовать собственный резервный фонд для покрытия этого риска в объеме 16 000 рублей;

2. отнести этот риск на всех страхователей, т.е. добавить к рисковой премии рисковую надбавку $r_н$, которая составит:

$$r_н = \Delta_K \cdot S / n = 16 \text{ рублей}.$$

В последнем случае, относительная рисковая надбавка равна $\theta = r_н/\pi_0 = 16\%$. С позиции конкурентоспособности эта надбавка велика, т.к. превышает среднерыночную $\theta_{ср} = 10\%$**;**

3. исходя из средней надбавки в данной отрасли 10%, разумно часть собственного резервного фонда в размере 6 000 рублей использовать для покрытия этого риска, а оставшуюся часть риска включить в рисковую надбавку, тогда $r_н = 10$ рублей. Итоговая нетто-премия $\pi_н = \pi_0 + r_н = 110$ рублей. В этом случае страховщик обеспечит себе и заданную надежность, и нужный уровень конкуренции. (Здесь не рассматриваются другие коммерческие расходы страховщика).

Подход № 2.

Как уже отмечалось, пользоваться формулой Бернулли при больших значениях n достаточно неудобно. В теории вероятностей есть асимптотическая формула приближенного вычисления этой вероятности, которая носит название интегральной теоремой Лапласа. Согласно ее

$$P(K < k) \cong P\left(\frac{K - np}{\sqrt{npq}} < \beta\right) = \gamma = \Phi(\beta) + 0{,}5; \quad где\ \beta = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{\Delta_K}{\sqrt{npq}}. \qquad (2.2.4)$$

Функция $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot \int_0^x e^{-t^2/2} dt$ *носит название функции Лапласса.*

<u>*Примечание*</u>.

1. При решении задач, в которых применяется интегральная теорема Лапласа, пользуются специальными таблицами, так как неопределенный интеграл $\int e^{-t^2/2} dt$ не выражается через элементарные функции.

2. Относительная погрешность замены точной формулы Бернулли на формулу Лапласа равна

$$\frac{2(k - np)}{npq} + \frac{1 + pq}{10npq},$$

поэтому приближение Лапласа применимо, когда $npq >> 1, \quad k \approx np.$

3. Результаты расчета по формуле (2.2.4) приведены в последней строке таблицы 1. Небольшое расхождение объясняется асимптотичностью формулы Лапласа. Вернемся к решению задачи.

$DK = npq = 90; \ \sigma_K = \sqrt{D} = \sqrt{npq} = 9{,}48$. Вероятность невыхода за правую границу равна:

$$\gamma = 1/2 + \Phi(\beta) = 0{,}95,$$

тогда $\Phi(\beta) = 0{,}45$ и по таблице функции Лапласа находим значение квантиля β порядка 0,95: $\beta = 1{,}645$. Отсюда максимально допустимое превышение числа страховых случаев над его средним значением равно:

$$\Delta_K = k - np = \beta \cdot \sqrt{npq} = 1{,}645 \cdot \sqrt{1000 \cdot 0{,}1 \cdot 0{,}9} = 15{,}6 \approx 16.$$

Округлять естественно нужно только в большую сторону. Относительная рисковая надбавка равна

$$\theta = \Delta_K / np = 16/100 = 16\ \%.$$

<u>*Вывод*</u>.

Страховщик, чтобы обеспечить вероятность неразорения на уровне 0,95, обязан ввести относительную надбавку в 16%. С позиции конкурентоспособности эта надбавка велика, т.к. значительно превышает среднерыночную – 10%. Кроме того, вероятность разорения в 5%, по современным стандартам также велика. Как поступить?

Попытаемся проанализировать данную ситуацию путем изменения условий, занося различные варианты в таблицу № 2.

Вариант 2.

Пусть страховщик поставил задачу обеспечить среднерыночную относительную надбавку $\theta = 10\%$. Какая при этом получиться надежность?

Решение:

Запишем связь параметров θ и γ, согласно формуле (2.2.4):

$$\beta(\gamma) = \frac{\Delta_K}{\sqrt{npq}} = \frac{\Delta_K}{np} \cdot \frac{np}{\sqrt{npq}} = \theta \cdot \frac{np}{\sqrt{npq}} = \theta \cdot \sqrt{\frac{np}{q}}. \qquad (2.2.5)$$

Тогда $$\beta(\gamma) = 0{,}1 \cdot \sqrt{\frac{1000 \cdot 0{,}1}{0{,}9}} = \frac{1}{\sqrt{0{,}9}} = 1{,}054. \quad \Rightarrow \quad \gamma = \Phi(\beta) + 0{,}5 = 0{,}855.$$

Полученный результат отмечен как второй вариант в таблице 2. Значение надежности в 85,5% явно низкое и неприемлемо.

Вариант 3.

Пусть страховщик поставил задачу обеспечить надежность не ниже 99%. Какая относительная надбавка получится в этом случае?

Решение.

Из таблицы функции Лапласа для $\gamma = 0{,}99$ находим $\beta = 2{,}33$. Тогда согласно формуле (2.2.5) получим

$$\theta = \beta(\gamma) \cdot \sqrt{\frac{q}{np}} = 2{,}33 \cdot \sqrt{\frac{0{,}9}{1000 \cdot 0{,}1}} = 0{,}233 \cdot 0{,}949 \approx 22\,\%.$$

Вывод.

Варьируя значения надежности и относительной рисковой надбавки, страховщику не удалось сформировать портфель с хорошими показателями. Полученный результат вызван противоречием между относительно высокой вероятностью наступления страхового случая $p = 0{,}1$ и сравнительно небольшим объемом страхового портфеля $n = 1000$.

Проанализируем ситуацию у другого страховщика, который работает с тем же риском $p = 0{,}1$, но имеет портфель объемом в 10 раз больше, т.е. $n = 10\,000$. Какова будет у него относительная рисковая надбавка при заданной надежности $\gamma = 0{,}95$?

Таблица № 2

вариант	***γ, %***	***n***	***θ, %***	*надежность*	*конкурентоспособность*
1	95,0	1 000	**16**	средняя	низкая
2	**85,5**	1 000	10	низкая	средняя
3	99,0	1 000	***22***	высокая	очень низкая
4	95,0	10 000	**5**	средняя	высокая
5	99,0	10 000	**7**	высокая	высокая
6	**99,95**	10 000	10	***без комментариев***	
A	95,0	***2 435***	10		
B	99,0	***4 886***	10		

Вариант 4.

Если страховщик хочет добиться надежности $\gamma = 0{,}95$, то

$$\theta = \beta(\gamma)\cdot\sqrt{\frac{q}{np}} = 1{,}645\cdot\sqrt{\frac{0{,}9}{10000\cdot 0{,}1}} = 1{,}645\cdot 3\cdot 10^{-2} = 0{,}049 \approx 5\%.$$

$\theta = 5\%$. Надбавка уменьшилась по сравнению с первым вариантом втрое!

Вариант 5.

Если страховщик хочет добиться надежности $\gamma = 0{,}99$, то

$$\theta = \beta(\gamma)\cdot\sqrt{\frac{q}{np}} = 2{,}33\cdot\sqrt{\frac{0{,}9}{10000\cdot 0{,}1}} = 2{,}33\cdot 3\cdot 10^{-2} = 0{,}0699 \approx 7\%.$$

Величина $\theta = 7\%$ остается ниже рыночной, но надежность достигает 0,99. Это означает, что такая компания может, обойдясь практически без страховых резервов, обеспечить себе на рынке высокую конкурентоспособность и надежность, в то время как малая компания обязана для достижения таких же параметров создать солидный резерв из собственных средств или прибегать к услугам перестраховщиков.

Вариант 6.

Страховщик устанавливает относительную рисковую надбавку на уровне рыночной $\theta = 10\%$. Какова надежность портфеля?

$$\beta(\gamma) = \theta\cdot\sqrt{\frac{np}{q}} = 0{,}1\cdot\sqrt{\frac{10000\cdot 0{,}1}{0{,}9}} = \frac{10}{3} = 3{,}333. \Rightarrow \gamma = 0{,}9995.$$

Вывод.

1. Страховая компания с портфелем небольшого объема (варианты 1 - 3) для того, чтобы обеспечить себе конкурентные условия с приемлемой надежностью обязана использовать свой начальный капитал или прибегать к перестрахованию.

2. Страховая компания с большим объемом портфеля (варианты 4, 5 и 6) обеспечивает себе комфортные условия без привлечения дополнительного капитала. Эта компания может даже позволить себе уменьшить относительную рисковую надбавку (вариант 5) ниже рыночной (до 7%), сохраняя при этом высокую надежность (γ = 99%).
3. Приведенные примеры являются иллюстрацией преимуществ крупных компаний перед небольшими компаниями, пытающими внедриться на страховой рынок. В конечном итоге это приводит к вынужденному слиянию страховых компаний, и как результат - монополизации страхового рынка.

Рассмотрим еще два варианта. Каково должно быть количество договоров n, чтобы при относительной надбавке θ = 10%. обеспечить надежность γ = 0,95 (*вариант A*) и надежность γ = 0,99 (*вариант B*)?

Для вычисления объема портфеля n несложно получить следующую формулу:

$$n = \left(\frac{\beta}{\theta}\right)^2 \cdot \frac{q}{p}$$

Результаты также представлены в таблице №2.

Влияние объема портфеля n на относительную рисковую надбавку θ можно выразить аналитически:

$$\theta = \frac{\Delta_K}{np} = \frac{\beta\sqrt{npq}}{np} = \beta \cdot \frac{\sqrt{pq}}{p} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}} = \beta(\gamma) \cdot K_{\text{var}} \cdot \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

- Первый множитель $\beta(\gamma)$ является квантилем при надежности γ.
- Второй множитель K_{var} является коэффициентом вариации в одном отдельном договоре из портфеля.
- Третий множитель характеризует объем портфеля.

Для конкретного вида риска K_{var} является детерминированной величиной, поэтому при заданном уровне надежности γ единственный путь уменьшения относительной рисковой надбавки, а значит и усиления конкурентной позиции, является увеличение объема портфеля.

Рисковая надбавка при распределенном ущербе.

Основное и принципиальное отличие формирования страховой премии при фиксированном ущербе от премии при распределенном ущербе заключается в том, что:

- при фиксированном ущербе мы имеем дело с одной случайной величиной – K, числом страховых случаев или относительной частотой событий $w = k/n$, отличной от вероятности p.
- при распределенном ущербе у нас наряду со случайной величиной – K, появляется новая случайная переменная X – величина ущерба объекта страхователя. В этом варианте на рисковую надбавку влияет как отклонение числа страховых случаев от среднего ожидаемого, так и отклонение величины ущерба X от его математического ожидания EX**.** Таким образом, при распределенном ущербе меняется и вид формулы для рисковой надбавки.

Для актуарных расчетов в случае распределенного ущерба удобнее пользоваться величиной Z, которая определяет *суммарные выплаты* по портфелю. Если портфель качественно однороден, т.е. не содержит резко выделяющихся наблюдений (договоров), и число договоров n достаточно велико, то согласно закону больших чисел суммарный объем возмещений в портфеле подчиняется нормальному закону, тогда можно записать:

$$P\left(\frac{Z-EZ}{\sigma_z}<\beta\right)=\gamma=0{,}5+\Phi(\beta)$$

$$Z_{\max}=EZ+\beta\cdot\sigma_Z=EZ+\beta\cdot\sqrt{DZ},$$

$$\pi_н=\frac{Z_{\max}}{n}=\frac{EZ}{n}+\beta\cdot\frac{\sqrt{DZ}}{n}=\pi_0+r_н.$$

Здесь Z_{max} – максимальная величина возможных суммарных выплат по портфелю при заданной надежности γ. Для однородных договоров, с независимыми выплатами Y_i, имеющих одинаковый закон распределения, можно написать:

$$EZ=\sum_{i=1}^{n}EY_i=n\cdot EY \qquad DZ=\sum_{i=1}^{n}DY_i=n\cdot DY$$

Тогда формула для рисковой надбавки по отдельному договору приобретает вид:

$$r_н=\beta\cdot\frac{\sqrt{DY}}{\sqrt{n}},$$

где DY – дисперсия возмещения страховщика в отдельном договоре. Согласно формуле (2.1.4) она равна:

$$DY=p\cdot DX+p\cdot q\cdot(EX)^2$$

Пример 2.9.

В страховой компании N = 5000 договоров, в каждом из которых вероятность страхового случая равна p = 0,05. Страховая стоимость объекта страхования C = 300, а размер страхового ущерба распределен по следующему закону:

x_i	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300
g_i	0,35	0,20	0,15	0,10	0,07	0,05	0,03	0,02	0,02	0,01

Учитывая, что собственный капитал компании U = 1 500, а средняя относительная надбавка на рынке $\theta_{ср}$ = 10%, оценить ситуацию для надежности γ = 0,95.

Решение.

$$EX = \sum x_i g_i = 87. \qquad EX^2 = \sum x_i^2 g_i = 11718.$$

$$DX = E[X^2] - (EX)^2 = 4149. \quad \pi_0 = EY = p \cdot EX = 4{,}35.$$

$$DY = p \cdot DX + pq \cdot (EX)^2 = 567. \qquad \sigma_Y = 23{,}8.$$

$$r_н = 1{,}645 \cdot \frac{\sigma_Y}{\sqrt{n}} = 0{,}554. \quad \theta = 0{,}127. \qquad \pi_н = \pi_0 + r_н = 4{,}90.$$

Чтобы обеспечить конкурентоспособность страховая компания устанавливает нетто-премию в размере

$$\pi_н = 4{,}35 \cdot 1{,}1 = 4{,}785.$$

Поскольку рассчитанная относительная рисковая надбавка в портфеле страховщика θ, выше среднерыночной по данному виду риска $\theta_{ср.}$, то страховщик обязан уменьшить ее за счет собственного капитала:

$$U = \pi_0 \cdot (\theta - \theta_{ср.})$$

Таким образом, разницу 4,35·(0,127-0,100)·5000 = 587, страховая компания покрывает из собственного капитала.

Пример 2.10.

В страховой компании N = 5 000 договоров, в каждом из которых вероятность страхового случая равна p = 0,05. Страховая стоимость C = 600, а размер страхового ущерба распределен по показательному закону $f(x) = \lambda \cdot e^{-\lambda x}$, $\lambda = 7 \cdot 10^{-3}$. Учитывая, что собственный капитал компании U = 2 000, а средняя относительная надбавка на рынке $\theta_{ср}$ = 10 %, оценить ситуацию для надежности γ = 0,95.

Решение.

В данной задаче мы имеем случай усеченного распределения. Вычислим математическое ожидание и дисперсию ущерба страхователя, воспользовавшись ранее выведенным формулам:

$$EX = \int_0^C x \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda x} dx + C \cdot e^{-\lambda C} = \frac{1 - e^{-\lambda \cdot C}}{\lambda} = 140{,}7.$$

$$DX = \frac{1 - 2 \cdot \lambda \cdot C \cdot e^{-\lambda \cdot C} - e^{-2\lambda \cdot C}}{\lambda^2} = 17833.$$

$\pi_0 = EY = p \cdot EX = 7{,}035.$

$DY = p \cdot DX + pq \cdot (EX)^2 = 1832.$ $\quad \sigma_Y = 42{,}8.$

$r_н = 1{,}645 \cdot \dfrac{\sigma_Y}{\sqrt{N}} = 0{,}996.$ $\quad \theta = 0{,}141.$ $\quad \pi_н = \pi_0 + r_н = 8{,}03.$

Чтобы обеспечить конкурентоспособность страховая компания устанавливает нетто-премию в размере

$$\pi_н = 7{,}035 \cdot 1{,}1 = 7{,}74.$$

Таким образом, разницу 7,035·(0,141-0,10)·5000 = 1442, страховая компания покрывает из собственного капитала.

Замечание. Для сравнения приведем результаты расчета в случае обычного показательного распределения с бесконечным пределом.

$$\pi_0 = 7{,}14. \quad DY = 1990. \quad \sigma_Y = 44{,}6.$$

$$r_н = 1{,}039. \quad \theta = 0{,}145. \quad \pi_н = 8{,}18.$$

2.3. Системы страховой ответственности.

В предыдущих разделах приведена методика расчета страховой премии, которая использует законы теории вероятностей и математической статистики. При расчете премии актуарий страховой компании использует законы распределения случайной величины X – ущерб объекта страхования, исходя из объективности и вероятной природе страхового случая.

Наряду с объективными факторами при расчете страховой премии возможно внесение субъективных элементов. Таким элементом является *системы страховой ответственности.* Данные системы представляют организационную форму разделения ответственности по возмещению ущерба между страховщиком и страхователем. Система страховой ответственности обусловливает соотношение между *страховой стоимостью (С), страховой суммой* застрахованного имущества *(S)*, *фактическим* *ущербом* объекту страхователя *(X)* и *степенью возмещения* возникшего *ущерба страховщиком* (*Y*).

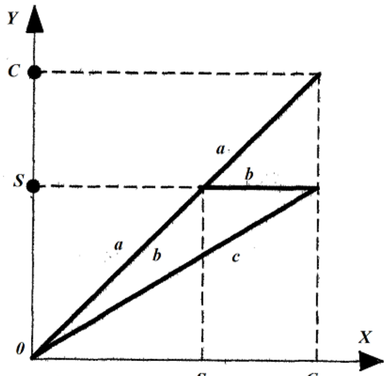


Рис. 1

В общем случае

$$Y = f(X, S, C)$$

Использование различных вариантов степени ответственности страховщика и страхователя позволяют часть ответственности страховщика перенести на страхователя. Страхователь в результате получает, в виде компенсации, меньшую страховую премию. Выбор той либо иной системы ответственности определяются сторонами, в первую очередь страхователем, на интуитивном уровне и руководствуясь экономической целесообразности.

При определении степени ответственности страховщика и страхователя можно выделить несколько систем:

a) по полной ответственности;
b) по ответственности по первому риску;
c) по пропорциональной ответственности;
d) безусловная и условная франшизы;

Вторая и третья системы составляют группу ограничения ответственности страховщика сверху, четвертая – ограничение снизу.

a). ***Страхование по полной ответственности***.

Классическая схема – *схема полного возмещения*, когда страховщик принимает на себя весь риск, и при возникновении страхового случая выплачивает возмещение в *полном объеме*. При страховании *по полной ответственности* имущества, страховая сумма равна страховой стоимости имущества на день заключения договора *S* = *C*. Страховое возмещение равно величине ущерба. Здесь страхуется полный интерес.

$$Y = X, \qquad X \in [0, C]$$

<u>*Пример.*</u>

Стоимость объекта страхования *C* = 5 млн. руб. Страховая сумма *S* = 5 млн. руб. В результате пожара погибло имущество, т. е. убыток страхователя составил *X* = 5 млн. руб. Величина страхового возмещения также составила *Y* = 5 млн. руб.

Пример.

Страховая стоимость автомобиля C = 300 тыс. руб. Страховая сумма S = 300 тыс. руб. В результате аварии ущерб составил X = 250 тыс. руб. Величина страхового возмещения также составила Y = 250 тыс. руб.

Данная система не предусматривает участие страхователя в возмещении ущерба. Случай полной ответственности изображен на рис. 1 (кривая ***a***). По согласованию сторон возможны также и такие договоры, в которых страхователь участвует в возмещении части ущерба в обмен на снижение страховых взносов. Одной из таких схем является система «первого риска».

b). *Страхование по системе первого риска*.

Страхование по *системе первого риска* предусматривает выплату страхового возмещения в размере ущерба, но в пределах страховой суммы $S < C$. По этой системе весь ущерб, в пределах страховой суммы (*первый риск*), компенсируется полностью. Ущерб сверх страховой суммы (*второй риск*) не возмещается.

Данная система применяется, как правило, там, где оценка стоимости имущества сопряжена со значительные сложностями.

$$Y = \begin{cases} X, & \text{если } X \le S \\ S, & \text{если } X > S. \end{cases} \quad \text{или} \quad Y = \min(X, S), \qquad X \in [0, C], \qquad Y \in [0, S].$$

Случай страхования по *системе первого риска* изображен на рис. 1 (кривая ***b***).

Пример.

Автомобиль страховой стоимостью C = 600 тыс. руб. застрахован по системе первого риска на страховую сумму S = 400 тыс. руб. Определить возмещение Y для различной величины ущерба X.

Варианты	1	2	3	4	5	6
X (ущерб)	100	200	300	400	500	600
Y (возмещение)	100	200	300	400	400	400

Страхователь выбирает эту систему ответственности, когда полагает, что возникновение больших ущербов объекта страхования маловероятно. Данная система применяется также тогда, когда возникают сложности определения стоимости объекта (C).

с). ***Система пропорциональной ответственности.***

Страхование по *системе пропорциональной ответственности* означает неполное, частичное страхование объекта $S < C$. Эта система похожа на систему первого риска, но разделение происходит не в форме фиксированной суммы S, а в форме фиксированной доли от стоимости объекта. Страховое возмещение выплачивается в размере той части ущерба, в какой страховая сумма составляет пропорцию по отношению к оценке стоимости объекта страхования. Величина страхового возмещения по этой системе определяется по формуле:

$$Y = X \cdot \frac{S}{C}, \qquad X \in [0, C], \qquad Y \in [0, S].$$

<u>*Пример.*</u>

Стоимость объекта страхования C = 10 млн. руб., страховая сумма S = 8 млн. руб. Убыток страхователя в результате повреждения объекта X = 5 млн. руб. Величина страхового возмещения составит:

$$Y = 5 \cdot \frac{8}{10} = 4\, \textit{млн. руб.}$$

При страховании по системе пропорциональной ответственности проявляется участие страхователя в возмещении ущерба, т. е. страхователь принимает часть риска на себя, но зато соответствующая рисковая премия также уменьшается. Случай страхования по системе пропорциональной ответственности изображен на рис. 1 (кривая ***с***).

Расчет рисковой премии и коэффициента вариации.

Ранее была выведена формула для расчета рисковой премии в случае полной ответственности:

$$\pi_0 = EY = P(I=1) \cdot E(Y \mid I=1) + P(I=0) \cdot E(Y \mid I=0) =$$
$$= p \cdot E(Y \mid I=1) + q \cdot 0 = p \cdot E(X \mid I=1) = p \cdot EX.$$

Данная формула предполагает равенство (для сокращения будем обозначать условие *I = 1* наступившим событием A:

$$E(Y \mid A) = E(X \mid A).$$

При системах ответственности отличных от полной ответственности формула расчета премии меняется:

$$\pi_0 = p \cdot E(Y \mid A) = p \cdot E(Y(x) \mid A).$$

Если страховая стоимость объекта равна *C*, а страховой ущерб $X \in [0, C]$ представляет собой непрерывную случайную величину с плотностью распределения *f(x)*, тогда рисковая премия равна

$$\pi_0 = p \cdot \int_0^C y(x) \cdot f(x)dx. \tag{2.3.1}$$

Функция *y(x)* выражает форму и степень разделения ответственности за ущерб между страховщиком и страхователем.

Аналогично меняется выражение для дисперсии возмещения:

$$\begin{aligned} EY^2 &= P(A) \cdot E(Y^2 \mid A) + P(\bar{A}) \cdot E(Y^2 \mid \bar{A}) = p \cdot E(Y^2 \mid A), \\ DY &= EY^2 - (EY)^2 = p \cdot E(Y^2 \mid A) - (p \cdot E(Y \mid A))^2. \end{aligned} \tag{2.3.2}$$

Для коэффициента вариации имеем:

$$K_{\text{var}} = \frac{\sqrt{DY}}{EY} .= \sqrt{\frac{E(Y^2 \mid A)}{E^2(Y \mid A)} \cdot \frac{1}{p} - 1} \ . \tag{2.3.3}$$

Рассмотрим расчет рисковой премии и коэффициента вариации для равномерного распределения страхового ущерба *X* при различных системах ответственности. Исходные данные: *C* =1000; *S* = 800; *p* = 0,01.

<u>Система полной ответственности</u>:

$$E(Y_a \mid A) = E(X \mid A) = \int_0^C \frac{1}{C} x dx = \frac{1}{C} \frac{x^2}{2}\bigg|_0^C = \frac{C}{2}, \quad \pi_0^a = p \cdot \frac{C}{2} = 5.$$

$$E(Y_a^2 \mid A) = E(X^2 \mid A) = \int_0^C \frac{1}{C} x^2 dx = \frac{C^2}{3} = \frac{10^6}{3}, \quad K_{\text{var}}^a = \sqrt{\frac{4}{3p} - 1} = 11{,}5.$$

<u>Система страхования по первому риску</u> (ответственность страховщика ограничена страховой суммой *S*):

$$Y = \begin{cases} X, & \text{если } X \le S \\ S, & \text{если } X > S. \end{cases}$$

$$E(Y_b \mid A) = \int_0^S \frac{1}{C} x dx + \int_S^C \frac{1}{C} S dx = \frac{1}{C} \cdot \frac{x^2}{2}\bigg|_0^S + \frac{S}{C} \cdot x\bigg|_S^C =$$

$$= \frac{C}{2} k(2-k) = 480, \ \text{где } k = \frac{S}{C}. \qquad \pi_0^b = p \cdot E(Y_b \mid A) = 4{,}8.$$

$$. \ E(Y_b^2 \mid A) = \int_0^S \frac{1}{C} x^2 dx + \int_S^C \frac{1}{C} S^2 dx = \frac{x^3}{3C}\bigg|_0^S + \frac{S^2}{C} \cdot x\bigg|_S^C = \frac{C^2}{3} k^2 (3-2k) = 298667.$$

$$K_{\text{var}}^b = \sqrt{\frac{4(3-2k)}{3(2-k)^2} \frac{1}{p} - 1} = 11{,}3.$$

Система пропорциональной ответственности.

Для этой системы распределения ответственности несложно получить:

$$\pi_0^c = k \cdot \pi_0^a. \quad K_{\text{var}}^c = K_{\text{var}}^a$$

Вывод данных соотношений оставляю для самостоятельной работы.

d) ***Франшиза.***

Ответственность страховщика может быть ограничена *не только* страховой суммой *(сверху)*. Возможно и *ограничение снизу*, если по договору страхователь принимает на себя возмещение ущерба в пределах $X \le L$. Система ответственности, когда предусматривается условиями договора страхования освобождение страховщика от возмещения убытков, не превышающих определенный размер, носит название *франшиза*[®]. Страховщик освобождается от риска в этих лах, а страхователь получает соответствующее уменьшение взносов. Франшиза является одной из форм собственного участия страхователя в покрытии убытка и применяется, как правило, для тех случаев, когда убытки страхователя относительно не велики - франшиза примерно соответствует затратам страховщика на определение суммы ущерба. *Франшиза* может быть *условной* (рис. 2a) или *безусловной* (рис. 2b).

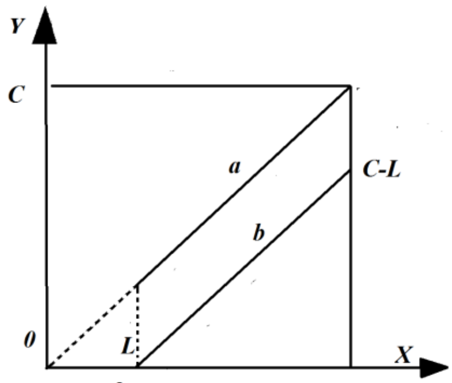


рис.2

Безусловная франшиза - это часть убытка, не подлежащая возмещению страховщиком и вычитаемая при расчете страхового возмещения, подлежащего выплате страхователю, из общей суммы возмещения.

Если *безусловная франшиза* составляет L, то из каждого требования о выплате вычитается эта сумма. То есть можно игнорировать и не регистрировать убытки, меньшие, чем эта франшиза. Если размер ущерба $X > L$, то страховщик возмещает только часть его:

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{если } X \le L \\ X - L, & \text{если } X > L. \end{cases}$$

Пример.

[®] От фр.Franchise – льгота.

Безусловная франшиза равна 1000 руб., а размер ущерба 400 руб.

Поскольку размер ущерба меньше безусловной франшизы, ущерб не возмещается.

Пример.

Безусловная франшиза равна 1000 руб., а размер ущерба 5000 руб.

Страховое возмещение определяется при помощи вычитания:

$$5000 - 1000 = 4000 \text{руб.}$$

Условная франшиза подразумевает, что если убыток по страховому случаю не превысил размера оговоренной франшизы, то страховщик по такому убытку ничего не выплачивает. В том случае если убыток превысил размер франшизы, то такой убыток возмещается полностью.

Если договор предусматривает *условную франшизу*, то страховщик полностью освобождается от возмещения убытков, меньших указанной суммы, но возмещает весь ущерб, превысивший ее, т.е.

$$Y = \begin{cases} 0, & \text{если } X \le L \\ X, & \text{если } X > L. \end{cases}$$

Так как при условной франшизе ответственность страховщика выше, чем при безусловной, то увеличивается и цена страховки. Условная франшиза является комбинацией обычного страхового договора и безусловной франшизы.

Пример.

Условная франшиза равна L = 1000 руб., а размер ущерба X = 400 руб.

Поскольку размер ущерба меньше условной франшизы $X < L$, он не возмещается.

Пример.

Условная франшиза равна L = 1000 руб., а размер ущерба X = 6000 руб. Найти страховое возмещение.

Поскольку размер ущерба превышает условную франшизу $X > L$, он возмещается в полном объеме и возмещение составляет Y = 6000 руб.

Как в безусловной, так и в условной франшизе страховщик знает только о больших ущербах: $X > L$. Страхователь соглашается на *неполную компенсацию* потерь в обмен на снижение страхового взноса.

Проиллюстрируем это графически (рис. 2). Видно, что при одинаковой величине франшизы L ответственность страховщика (определяемая площадью под линией) больше для условной франшизы (линия а), чем для безусловной франшизы (линия b). Этим определяется и различие страховых взносов. При сравнении франшизы со схемой первого риска видно, что в договоре с франшизой стороны игнорируют малые убытки. Это связано с необходимостью затрат на урегулирование убытков: уведомление, проведение экспертиз и прочее.

Расчет рисковой премии и коэффициента вариации.

Случай дискретного распределении ущерба.

Предположим, что в договоре страхования автомобиля от возможных повреждений предусматривается франшиза $L = 100$. Как это отразится на размере премии и коэффициенте вариации? Вероятность страхового случая равна $p = 0{,}1$. Закон распределение ущерба $\{x_i;g_i\}$ задан в таблице.

x_i	50	100	150	200	250	300	350	400
g_i	0,30	0,20	0,17	0,13	0,10	0,05	0,03	0,02
$Y_{усл}$	0	0	150	200	250	300	350	400
$Y_{безусл}$	0	0	50	100	150	200	250	300

Решение. Найдем характеристики:

$$E(Y_{полная} \mid A) = E(X \mid A) = \sum x_i g_i = 145. \quad \pi_o^{полная} = p \cdot E(Y_{полная} \mid A) = 14{,}5.$$

$$E(Y_{усл} \mid A) = \sum (y_{усл})_i g_i = 110. \quad \pi_o^{усл} = p \cdot E(Y_{условн} \mid A) = 11{,}0. \quad (76\%).$$

$$E(Y_{безусл} \mid A) = \sum (y_{безусл})_i g_i = 60. \quad \pi_o^{безусл} = p \cdot E(Y_{безусл} \mid A) = 6{,}0. \quad (41\%)$$

$$E(Y_{полная}^2 \mid A) = E(X^2 \mid A) = \sum x_i^2 g_i = 29400 \quad K_{\text{var}} = 3{,}6.$$

$$E(Y_{усл}^2 \mid A) = \sum (y_{усл})^2 g_i = 26650 \quad K_{\text{var}} = 4{,}6.$$

$$E(Y_{безусл}^2 \mid A) = \sum (y_{безусл})_i^2 g_i = 9650 \quad K_{\text{var}} = 5{,}1.$$

Видно, что франшиза существенно *снижает цену страхования*, но повышает коэффициент вариации.

Пример равномерного распределении ущерба.

(Вероятность страхового случая $p = 0{,}1$; стоимость объекта $C = 400$, франшиза $L = 100$, $d = L/C = 0{,}25$).

1. Условная франшиза.

$$E(Y_{усл} \mid A) = \int_0^L 0dx + \int_L^C \frac{1}{C} xdx = \left.\frac{x^2}{2C}\right|_L^C = (1-d^2)\cdot\frac{C}{2}, \quad \pi_0^{усл} = p \cdot E(Y_{усл} \mid A) = 18{,}75.$$

$$E(Y_{усл}^2 \mid A) = \int_0^L 0dx + \int_L^C \frac{1}{C} x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3C}\right|_L^C = (1-d^3)\cdot\frac{C^2}{3}$$

$$K_{\mathrm{var}} = \frac{\sqrt{DY_{усл}}}{EY_{усл}} = \sqrt{\frac{4(1-d^3)}{3(1-d^2)^2}\cdot\frac{1}{p} - 1} = 3{,}73.$$

2. Безусловная франшиза.

$$E(Y_{безусл} \mid A) = \int_0^L 0dx + \int_L^C \frac{1}{C}(x-L)dx = \frac{C}{2}(1-d)^2, \quad \pi_0^{безусл} = p\cdot E(Y_{безусл} \mid A) = 11{,}25.$$

$$E(Y_{безусл}^2 \mid A) = \int_0^L 0dx + \int_L^C \frac{1}{C}(x-L)^2 dx = \frac{(1-d)^3 C^2}{3}.$$

$$K_{\mathrm{var}} = \frac{\sqrt{DY_{безусл}}}{EY_{безусл}} = \sqrt{\frac{4}{3(1-d)p} - 1} = 4{,}1.$$

Таким образом, видно, что безусловная франшиза существенно уменьшает рисковую премию, но коэффициент вариации возрастает.

2.4. Теория полезности в страховании.

Как было указано ранее, договор страхования может быть заключен при условии, что была определена страховая премия, которая устраивала как страховщика, так и страхователя. Однако страховщик и страхователь оценивают стоимость страховой услуги по-разному.

Актуарий страховой компании рассматривает страховое событие как независимое случайное массовое явление, и расчет премии делает на основе законов теории вероятностей и математической статистики. В частности, он руководствуется так называемым принципом эквивалентности обязательств сторон, согласно которому рисковая премия равна математическому ожиданию возмещений страховщика. В экономике аналогичный принцип носит название *принципом ожидаемого значения*. ***С***траховщик, руководствующийся данным принципом, должен быть согласен принять участие в рискованном проекте со случайными возмещениями Y, если ему заплатят сумму, не менее величины EY, которая в страховании называется рисковой премией π_0. Если страхователь тоже следует принципу ожидаемого значения, то для него безразлично взять случайный риск ущерба X на себя, или, заплатив премию равную π_0, переложить обязанность возмещения ущерба на страховщика.

Однако страхователь не знает законов вероятности и принципа ожидаемого значения. Страхователь руководствуется какими-то своими внутренними субъективными оценками данного рискового проекта. В первую очередь, на принятие решения страхователя будет влиять соотношение размера капитала, который он может случайно потерять, и суммы премии, которую он должен заплатить с тем, чтобы обезопасить себя от возможного ущерба. Подобное поведение лица, принимающего решение (*ЛПР),* подробно разработано в *теории полезности*, которая помогает сделать правильный выбор перед лицом неопределенности.

Приведем пример выбора страхователем правильного варианта в условиях неопределенности.

Вариант	Возможный ущерб	Ожидаемый ущерб
1	1	0,01
2	1 000	10
3	1 000 000	10 000

Пусть вероятность наступления страхового случая равна 0,01. В таблице приведены три варианта для различных возможных ущербов, а также соответствующие значения страховой премии (ожидаемый ущерб), полученной из принципа ожидаемого значения.

Скорее всего, возможный ущерб размера 1 мало волнует человека, принимающего решения, а значит, он не будет платить сумму, большую, чем величина ожидаемого ущерба, или вообще может отказаться от страхования. Однако ущерб в размере 1 млн. может оказаться для него катастрофическим. В этом случае страхователь может согласиться заплатить за страхование даже больше, чем сумма ожидаемого ущерба, которая составляет 10000. Приведенный пример демонстрирует неадекватность принципа ожидаемого значения с точки зрения страхователя.

Приведем еще один пример, который носит название «*Петербургский парадокс*» »[®].

Рассматривается следующая задача. Вступая в игру, игрок платит некоторую премию, а затем подбрасывает симметричную монету до первого выпадения герба. Вероятность каждого исхода – 1/2. Если герб появится на n – ом бросании, то выигрыш составит 2^n. Нужно определить,

[®] Этот парадокс был рассмотрен Даниилом Бернулли (1700-1782). Парадокс был впервые опубликован в «Комментариях Санкт-Петербургской Академии» в 1738 г.

какой размер вступительного взноса делает такую игру справедливой, то есть найти математическое ожидание выигрыша игрока. Ожидаемое значение выигрыша составит $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot (1/2)^n = \infty$. Парадокс заключается в том, что вычисленное значение этого справедливого взноса равно бесконечности, то есть больше любого возможного выигрыша. Этот парадокс также демонстрирует нарушение принципа ожидаемого значения. Бернулли показал, что в рамках линейной шкалы измерения стоимости невозможно решить проблему этого парадокса, требуется другой подход оценки реакции *ЛПР* на возможные исходы.

Представленные примеры выявили две особенности поведения страхователя:

- премия за страховой риск с точки зрения страхователя не является однородной, т.е пропорциональной возможному ущербу;
- страхователь готов платить сумму большую, чем ожидаемый ущерб.

Таким образом *ЛПР* при оценке того либо иного финансового результата руководствуется своими субъективными представлениями о полезности капитала. Рассмотрим подробнее поведение *ЛПР* в рамках теории полезности.

Основные положения

Для того чтобы объяснить, почему *ЛПР* может согласиться платить больше, чем ожидаемое значение, требуется количественно оценить стоимость капитала для субъекта, используя шкалу, отличную от денежной шкалы. Бернулли назвал ее «*моральной стоимостью*». К сожалению, этот принцип, по непонятным причинам, был почти полностью забыт в последовавшем столетии. Возрождение теории полезности следует отнести к середине XX в., благодаря работам Дж. Фон Неймана и О. Моргенштерна»[®]. В дальнейшем во многих работах было показано, как используя теорию полезности можно ставить и решать задачи, относящиеся к страхованию. Рассмотрим это подробнее.

В теории полезности допускается, что *ЛПР* может приписать каждому значению своего капитала w, определенное число u – полезность для него этого капитала («*моральную стоимость*»). В результате может быть

[®] В 1944 году вышла монография Джона фон Неймана и Оскара Моргенштерна «Теория игр и экономическое поведение», в которой авторы обобщили и развили результаты теории игр и предложили новый метод для оценки полезности благ.

построена функция $u(w)$, называемая *функцией полезности капитала Неймана-Моргенштерна*, которая показывает полезность, которую он приписывает каждому возможному исходу.

У каждого *ЛПР*, своя функция полезности, которая показывает его предпочтение к тем или иным исходам в зависимости от его отношения к риску. Эта функция, в дальнейшем, может быть использована для принятия решения при выборе между двумя случайными финансовыми исходами, которые определяются случайными величинами X и Y. Теория полезности позволяет выработать правила принятия решения, которые будут соответствовать предпочтениям, выявленным при определении функции полезности капитала данного *ЛПР*.

Исходным положением теории полезности является предположение о том, что *ЛПР*, сталкиваясь с двумя различными случайными исходами, влияющих на его капитал, сумеет выразить либо предпочтение по отношению к одному из этих исходов, либо одинаковое отношение к обоим. Так, если *ЛПР* соответствует функция полезности $u(w)$, то имея капитал w при выборе случайных исходов X и Y, он выберет X, если

$$E[u(w+X)] > E[u(w+Y)] \qquad (2.4.1)$$

и ему будет безразлично, какой из исходов X и Y осуществится, если

$$E[u(w+X)] = E[u(w+Y)] \qquad (2.4.2)$$

Справедливо также обратное утверждение. Если распределение X предпочтительнее для *ЛПР*, чем распределение Y, то $E[u(X)] > E[u(Y)]$, а если *ЛПР* не отдает предпочтение ни одному из этих распределений, то $E[u(X)] = E[u(Y)]$. Таким образом, теория полезности позволяет качественное предпочтение или отсутствие такового перевести на процедуру сравнения значений функции полезности.

Отметим два важных свойства функции полезности *«консервативного»* или *«разумного» ЛПР*:

- функция полезности является возрастающей функцией;
- функция полезности является выпуклой вверх функцией.

Первое свойство очевидно - большему капиталу соответствует большая полезность. Второе свойство следует из закона *убывающей предельной полезности,* который заключается в том, что с ростом потребления какого-то одного блага (при неизменном объёме потребления всех остальных) общая полезность, получаемая потребителем, возрастает, но возрастает все более медленно. Математически это означает, что первая производная функции общей полезности по количеству данного блага положительна, т.е. $u'(w) > 0$, а вторая – отрицательна, т.е. $u''(w) < 0$. Другими словами, закон убывающей предельной полезности гласит, что функция полезности возрастает и выпукла вверх.

Справедливости ради следует отметить, что есть *ЛПР*, у которых функция полезности вогнута вниз, т.е. для такого человека $u''(w) > 0$. *ЛПР* с такой функцией полезности называются лицами «*склонными к риску*» или «*алчными*» людьми, т.к. для них принцип предельной полезности не выполняется (нет предела насыщения). *ЛПР*, для которого справедливо $u''(w) = 0$ является лицом «безразличным» («нейтральным») к риску. Следует отметить, что склонность или несклонность лица, принимающего решения к риску, может зависеть от его финансового положения, текущей ситуации принятия решения и других факторов, т.е. эта характеристика *ЛПР* не является абсолютной, присущей ему при любых обстоятельствах.

Отметим еще одно важное свойство функции полезности, это свойство линейности. Если для функции полезности $u(w)$ определена функция $\tilde{u}(w) = a \cdot u(w) + b,\ a > 0$, то соотношение

$$E[u(X)] > E[u(Y)] \text{ эквивалентно } E[\tilde{u}(X)] > E[\tilde{u}(Y)].$$

Применим теорию полезности к проблеме выбора решения в страховании. Страхователь, собственность которого подвергается риску, может понести убыток. Будем считать, что закон распределения случайного ущерба *X* известен. При наступлении страхового случая капитал страхователя уменьшится и составит (*w – X*). С другой стороны, он может заключить договор страхования, заплатив премию *π*. Тогда, при наступлении страхового случая он получит от страховщика возмещение, но его капитал составит (*w – π*). Если для этого *ЛПР* известна его функция полезности капитала *u(w)*, тогда из теории полезности в случае эквивалентности этих исходов следует:

$$E[u(w-\pi)] = w(w-\pi) = E[u(w-X)] \tag{2.4.3}$$

Правая часть этой формулы представляет собой ожидаемую полезность оставшегося капитала страхователя при отказе им от заключения страхового договора. Левая часть представляет собой ожидаемую полезность оставшегося капитала страхователя при заключении страхового договора с выплатой премии в размере *π*. Знак равенства означает, что владельцу собственности безразлично платить ли сумму π страховщику, перекладывая на него случайные финансовые потери, или принять риск потерь на себя.

Определение функции полезности.

Давайте рассмотрим следующую задачу. Предположим, что страхователь, принимающий решение, имеет капитал 20000 и для своей функции полезности он определил два значения: $u(0) = 0$ и $u(20000) = 1$. Перед страхователем стоит задача: он может понести потери в размере 20000 с вероятностью p или остаться со своим капиталом с вероятностью $q = 1 - p$. Какую сумму π он готов заплатить за полное страховое покрытие возможных потерь? Воспользовавшись формулой (2.4.3), этот вопрос можно переформулировать так: для какого значения π справедливо равенство

$$u(20000-\pi) = E[u(w-X)] = p\cdot u(0) + q\cdot u(20000)?$$

Если страхователь платит премию π, то его капитал, естественно сократится до величины $20000 - \pi$. Знак равенства в уравнении означает безразличие *ЛПР* к этим двум исходам: либо, заплатив премию π, переложить обязанность возмещения ущерба на страховщика, либо принять на себя этот риск потерь. Предположим, что для $p = 0,5$ ответ *ЛПР* будет $\pi = 13000$. Тогда

$$u(20000-13000) = u(7000) = 0,5\cdot 0 + 0,5\cdot 1 = 0,5.$$

Продолжив опрос *ЛПР*, получим для вероятности $p = 0,25$ ответ $\pi = 7000$. Для функции полезности имеем:

$$u(20000-7000) = u(13000) = 0,25\cdot 0 + 0,75\cdot 1 = 0,75$$

Наконец для вероятности $p = 0,75$ ответ $\pi = 3000$. Тогда

$$u(20000-17000) = u(3000) = 0,75\cdot 0 + 0,25\cdot 1 = 0,25$$

Эту процедуру выяснения предпочтений можно продолжить. В итоге мы получим множество точек. Построив по полученным точкам гладкую кривую, можно принять ее в качестве функции полезности данного *ЛПР*. На рис. 3 проведена пунктирная кривая, проведенная через точки, полученные при опросе.

Наиболее важная особенность, полученной кривой, заключается в том, что она выпукла вверх, т.е. страхователь согласен платить за страхование сумму, которая превосходит ожидаемую величину потерь, которая соответствует прямой на этом рисунке. Прямая на графике функции полезности выражает принцип ожидаемого значения и является нижней границей для премий, при получении которых страховщик согласен взять на себя страховой риск.

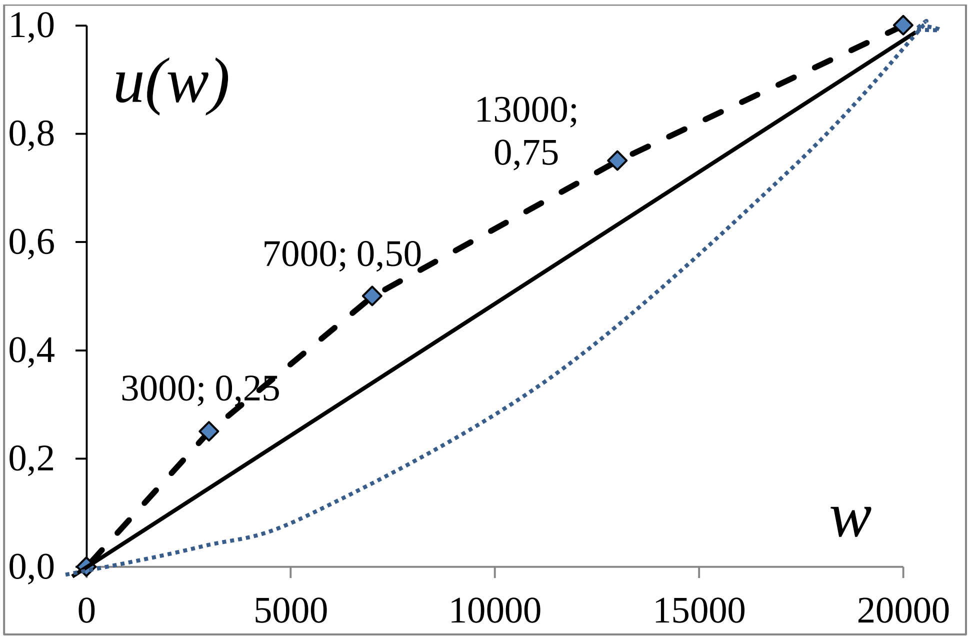


Рисунок 3. График функции полезности

На рисунке также приведена кривая, вогнутая вниз, которая соответствует типу *ЛПР* «склонного к риску». Поскольку эта кривая лежит ниже прямой, то договор страхования с лицом «склонным к риску» невозможен. Для *ЛПР*, рационального и «не склонного к риску», функция полезности строго вогнута вверх и лежит выше прямой. Последнее означает, что заключение договора страхования с таким лицом возможно.

Для дальнейших расчетов нам необходима теорема, именуемая *неравенством Йенсена*. Приводим ее без доказательств.

Неравенство Йенсена.

Если задана вогнутая вниз функция *f(x)* на некотором множестве *C* $x_i \in C,\ \lambda_i \geq 0$, то

$$f\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} f\left(\lambda_i x_i\right) \qquad (*)$$

где $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Равенство достигается тогда и только тогда, когда либо $x_1 = x_2 = \ldots = x_n$, либо *f(x)* - линейная функция.

Интегральное неравенство Йенсена для вогнутой вниз функции *f(x)* на *D*:

$$f\left(\int_D \lambda(t)x(t)dt\right) \le \int_D \lambda(t) f(x(t))dt \qquad (**)$$

где $x(D) \subset C,\ \lambda(t) \ge 0\ \textit{при}\ t \in D,\ \int_D \lambda(t)dt = 1.$ Равенство достигается тогда и только тогда, когда либо *x(t) = const* на *D*, либо *f(x)* - линейная функция. Знаки неравенств меняются на противоположные, если функция *f(x)* выпуклая вверх. Неравенство (*) установлено О. Гёльдером в 1889 г., неравенство (**) - И. Йенсеном в 1906 г.

Применительно к нашему случаю, для функции полезности неравенства Йенсена приобретают вид:

$$\begin{aligned} &\textit{если}\ u''<0,\ \textit{то}\ E[u(X)] \le u(EX),\\ &\textit{если}\ u''>0,\ \textit{то}\ E[u(X)] \ge u(EX). \end{aligned} \qquad (2.4.4)$$

Применим первое неравенство Йенсена к функции полезности страхователя:

$$u(w-\pi) = E[u(w-X)] \le u(E[w-X]) = u(w-\mu).$$

Отсюда следует, что $\pi \ge \mu = \pi_0$, где $\mu = EX$.

Рассмотрим теперь позицию страховщика. Как *ЛПР* он тоже имеет свою функцию полезности *U*. Если страховщик имеет капитал *W*, то он возьмет на себя риск *X* по выплате возмещения, если страхователь заплатит ему премию *П* и если функция полезности удовлетворяет следующему равенству:

$$E[U(W+\Pi-X)] = E[U(W)] = U(W). \qquad (2.4.5)$$

Правая часть этой формулы представляет собой ожидаемую полезность капитала страховщика при отказе им от заключения страхового договора. Левая часть представляет собой ожидаемую полезность оставшегося капитала страховщика при заключении страхового договора с выплатой случайного возмещения *X* при получении премии в размере *П.* Знак равенства означает, что страховщику безразлично отказаться от договора страхования либо, получив премию *П*, взять риск на себя.

Применим первое неравенство Йенсена к функции полезности страховщика:

$$U(W) = E[U(W+\Pi-X)] \le U(E[W+\Pi-X]) = U(W+\Pi-\mu).$$

Отсюда следует, что $\Pi \geq \mu$. Итогом приведенных выкладок следует, что взаимовыгодный договор страхования будет подписан, если

$$\pi \geq \Pi \geq \mu = \pi_0.$$

В работе Каас Р. и др. [5,стр.23] предложен вариант оценки предельной величины премии, которую согласен заплатить страхователь. Приведем эти выкладки. Пусть для случайной величины X определены ее математическое ожидание μ и среднее квадратическое отклонение σ. Запишем неравенство (1) для страхователя:

$$E[u(w-\pi)] \geq E[u(w-X)] \qquad (2.4.6)$$

Поскольку функция полезности монотонно возрастает, то равенство достигается, когда премия, которую согласен платить страхователь достигает своего максимального значения π_{max}.

$$u(w-\pi_{\max}) = E[u(w-X)] \qquad (2.4.7)$$

Разложим функцию полезности страхователя в точке $(w - \mu)$ до второго члена включительно:

$$\begin{aligned} u(w-\pi_{\max}) &\approx u(w-\mu) + (\mu-\pi_{\max}) \cdot u'(w-\mu) \\ u(w-X) &\approx u(w-\mu) + (\mu-X) \cdot u'(w-\mu) + \frac{1}{2}(\mu-X)^2 \cdot u''(w-\mu) \end{aligned} \qquad (2.4.8)$$

Вычислим математическое ожидание от левой и правой частей второго равенства:

$$Eu(w-X) \approx u(w-\mu) + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot u''(w-\mu) \qquad (2.4.9)$$

Используя полученное выражение (7), можно записать:

$$\pi_{\max} = \mu + \frac{1}{2}\sigma^2 r(w-\mu), \qquad (2.4.10)$$

где для $r(w)$ – *коэффициент несклонности к риску ЛПР* с функцией полезности $u(w)$ (Каас), при размере капитала w, определяется следующим выражением:

$$r(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = -(\ln u'(w))'. \qquad (2.4.11)$$

Виды функции полезности.

Наряду с линейной функцией полезности $u = aw + b$, которая соответствует *ЛПР* «нейтральному» к риску и определяет премию равную рисковой премии π_0, соответствующей принципу ожидаемой полезности, существует и другие виды функции полезности. Основные требования к функции полезности страхователя определяется соотношениями $u'(w) > 0$ и $u''(w) < 0$. Рассмотрим некоторые из них.

Показательная функция полезности.

Предположим, что страхователь имеет показательную функцию полезности с параметром α: $u(w) = -\alpha e^{-\alpha w}$. Какова максимальная премия π_{max} за страхование риска? Для страхователя уравнение равновесия полезности имеет вид (2.4.7):

$$u(w - \pi_{\max}) = E[u(w - X)]$$

Решая это уравнение с показательной функцией полезности, получим:

$$\pi_{\max} = \frac{1}{\alpha}\ln(m_X(\alpha)), \tag{2.4.12}$$

где $m_X(\alpha) = E\left[e^{\alpha X}\right]$ - производящая функция моментов случайной величины *X*, с параметром α. Несложно проверить, что параметр α равен коэффициенту несклонности к риску страхователя $r(w)$. Особенностью показательной функции полезности является независимость премии страхователя от его текущего капитала.

Пример 2.11.

Предположим, что случайная величина ущерба *X* имеет показательное распределение с параметром λ = 0,01: $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$. Функция полезности страхователя также имеет показательный вид с α = 0,005. Определить π_{max}.

Решение.

Формула приближенной оценки максимальной премии страхователя (2.4.10) дает значение

$$\pi_{\max} \approx EX + \frac{1}{2}\alpha \cdot DX = \frac{1}{\lambda} + \frac{\alpha}{2\lambda^2} = 125.$$

Точная оценка согласно (2.4.12) дает следующее значение:

$$\pi_{\max} = \frac{1}{\alpha}\ln(m_X(\alpha)) = 200 \cdot \ln\left(\frac{\lambda}{\lambda - \alpha}\right) = 200\ln 2 \approx 138{,}6.$$

Полученное значение показывает, что страхователь готов согласится на довольно значительную добавку к рисковой премии $\pi_0 = EX = 1/\lambda = 100$.

Степенная функция полезности.

Семейство степенных с дробным показателем функций полезности задается соотношением:

$$u(w) = w^{\gamma},\ w > 0,\ 0 < \gamma < 1.$$

Данная функция может представлять функцию полезности страхователя, поскольку

$$w'(u) = \gamma u^{\gamma-1} > 0 \quad и \quad w''(u) = \gamma(\gamma-1)u^{\gamma-2} < 0.$$

Коэффициент несклонности к риску равен:

$$r(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = \frac{1-\gamma}{w}.$$

Согласно уравнению (2.4.10) видно, что размер премии зависит от капитала *w ЛПР*, что является реалистичным.

Пример 2.12.

Функция полезности страхователя, имеющего капитал $w = 100$, задается выражением $u(w) = \sqrt{w}$. Какую максимальную премию готов заплатить страхователь за полное страховое покрытие, если ущерб X распределен равномерно на отрезке [0;100]?

Решение.

Подставляя данные задачи в уравнение равновесия полезности страхователя (2.4.7), получим:

$$u(100-\pi_{\max}) = E\left[\sqrt{100-X}\,\right] = \int_0^{100} \frac{\sqrt{100-x}}{100}dx = \left.\frac{-2(100-x)^{3/2}}{3\cdot 100}\right|_0^{100} = 6,(6), \ \pi_{\max} = 55,(5).$$

Страхователь не склонен к риску, поэтому он согласен платить премию большую, чем ожидаемый ущерб $EX = 50$.

Решим предыдущую задачу, предположив, что случайная величина ущерба X имеет показательное распределение с параметром $\lambda = 0,02$.

$$EX = \int_0^C x\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx + C\cdot e^{-\lambda C} = \frac{1-e^{-\lambda\cdot C}}{\lambda} = 125,4$$

$$EX^2 = \int_0^C x^2\cdot\lambda\cdot e^{-\lambda x}dx + C^2\cdot e^{-\lambda\cdot C} = \frac{2}{\lambda^2}\cdot\left(1-e^{-\lambda\cdot C}\right) - \frac{2C}{\lambda}\cdot e^{-\lambda\cdot C}.$$

$$DX = \frac{1-2\cdot\lambda\cdot C\cdot e^{-\lambda\cdot C} - e^{-2\lambda\cdot C}}{\lambda^2} = 9606$$

$$r(w) = -\frac{u''(w)}{u'(w)} = \frac{2}{w}. \ r(w-\mu) = 0,035.$$

$$\pi_{\max} \approx EX + \frac{1}{2}r\cdot DX = 50 + 0,0175\cdot 1225 = 71,4.$$

Некоторые приложения.

Пример 2.13.

Функция полезности *ЛПР* имеет вид $u(w) = -e^{-5w}$. Для принимающего решения имеется две случайные экономические возможности. Первая из них, обозначаемая через X, имеет нормальное распределение со средним 5 и дисперсией 2. Говоря о нормальном распределении со средним μ и с дисперсией σ^2, пользуются сокращенной записью $N(\mu,\sigma^2)$. Другая возможность, обозначаемая через Y, имеет распределение $N(6;2,5)$. Какую возможность следует предпочесть?

Решение.

Если случайная величина X имеет нормальное распределение $N(\mu,\sigma^2)$, то производящая функция моментов имеет вид:

$$m_X(t) = E\left[e^{tX}\right] = \exp\left(\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right).$$

Используя это выражение получим:

$$E[u(X)] = E\left[-e^{-5X}\right] = -m_X(-5) = -\exp\left(-5\cdot 5 + 2\cdot 5^2/2\right) = -1.$$

$$E[u(Y)] = E\left[-e^{-5Y}\right] = -m_Y(-5) = -\exp\left(-5\cdot 6 + 2{,}5\cdot 5^2/2\right) = -e^{1{,}25}.$$

Таким образом,

$$E[u(X)] = -1 > E[u(Y)] = -e^{1{,}25},$$

и распределение с.в. X предпочтительнее распределения с.в. Y.

В данном примере с.в. X предпочтительнее, чем Y, несмотря на то, что $\mu_X = 5 < \mu_Y = 6$. Поскольку принимающий решение не склонен к риску, тот факт, что распределение с.в. Y более «*размазано*», чем распределение с.в. X, свидетельствует против распределения с.в. Y при оценки его желательности. Если с.в. Y имеет распределение $N(6;\ 2{,}4)$, то $E[u(Y)] = -1$ и для принимающего решения будет безразлично, выбрать распределение X или распределение Y.

Пример 2.14.

Функция полезности лица, принимающего решения, задается выражением

$$u(w) = w - 0{,}01w^2,\ w < 50.$$

Принимающий решения сохранит капитал w с вероятностью p и будет нести финансовые потери величины X с вероятностью $q = 1 - p$. Для значений w, X и p, указанных в приведенной ниже таблице, найдем максимальную страховую премию, которую принимающий решения готов заплатить за полное страховое покрытие. Предположим, что $X \le w < 50$.

Решение.

Для нашей задачи формула (2.4.7) приобретает вид

$$u(w-\pi_{\max}) = E[u(w-X)] = p \cdot u(w) + q \cdot u(w-X)$$

$$(w-\pi_{\max}) - 0{,}01 \cdot (w-\pi_{\max})^2 = p \cdot u(w - 0{,}01 \cdot w^2) + q \cdot \left[(w-X) - 0{,}01 \cdot (w-X)^2\right]$$

Для заданных значений w, X и p эта формула становится квадратным уравнением. Ниже приведены два его решения.

Капитал (w)	Потери (X)	Вероятность (p)	Страховая премия (π)
10	10	0,5	5,28
20	10	0,5	5,37

В примере, как и ожидалось, π_{max} превосходит величину ожидаемых потерь, $EX = 5$. Однако максимальная страховая премия за потери с одним и тем же распределением растет с ростом капитала лица, принимающего решения. Этот результат кажется неестественным тем, кто считает, что более типичным поведением было бы уменьшение суммы, которую принимающий решения готов выплачивать за страхование, поскольку при увеличении капитала он мог бы позволить себе больший риск. К сожалению**,** рост максимальной страховой премии с ростом капитала *явля*ется характеристической чертой квадратичной функции полезности. Поэтому тем из принимающих решения лиц, которые полагают, что их способность брать на себя случайные потери растет с ростом капитала, не следует выбирать такие функции полезности.

Если мы рассмотрим пример (2.11), используя показательную функцию полезности, то, как мы знаем, премия π_{max} не будет зависеть от w, величины капитала. *Так, если* $u(w) = -e^{-0{,}01w}$, то можно показать, что $\pi_{max} = 5{,}12$ как при $w = 10$, так *и при* $w = 20$.

Пример 2.15.

Вероятность того, что собственности не будет нанесен ущерб за времени, равняется 0,75. Функция плотности возможных положительных потерь задается соотношением $f(x) = 0{,}01 \cdot e^{-0{,}01 \cdot x}, x > 0.$ Функция полезности владельца собственности имеет вид $u(w) = -e^{-0{,}005x}, x > 0.$ Вычислим ожидаемые потери и максимальный размер страховой премии, которую владелец собственности готов заплатить за полное страховое покрытие.

Решение.

Ожидаемые потери задаются формулой

$$EX = \int_0^\infty x\left(0{,}01e^{-0{,}01x}\right)dx = 100, \quad EY = (1-p)\cdot EX = 25$$

Рассчитаем максимальную премию, которую владелец собственности выплатит за такой страховой договор.

$$w(u-\Pi) = 0{,}75\cdot w(u) + 0{,}25\cdot\int_0^\infty w(u-x)\,f(x)dx$$

$$-e^{-0{,}005(u-\Pi)} = -0{,}75\cdot e^{-0{,}005u} - 0{,}25\cdot\int_0^\infty e^{-0{,}005(u-x)}\cdot\left(0{,}01e^{-0{,}01x}\right)dx$$

$$e^{0{,}005\Pi} = 0{,}75 + 0{,}25\cdot\int_0^\infty e^{0{,}005x}\cdot\left(0{,}01e^{-0{,}01x}\right)dx = 0{,}75 + 0{,}25*2 = 1{,}25.$$

$$\Pi = 200\ln 1{,}25 = 44{,}63$$

Таким образом, владелец собственности готов заплатить сумму, превышающую ожидаемые частичные потери, самое большее, на величину

44,63 – 25 = 19,63.

ГЛАВА 3. МОДЕЛИ РИСКА В СТРАХОВАНИИ

Элементарной составляющей финансового риска страховой компании являются выплаты (потери, убытки) по индивидуальному договору Y_i. Эта величина в общем случае будет зависеть от величины ущерба страхуемого объекта X_i, вероятности наступления страхового случая p_i, страховой стоимости объекта C_i, страховой суммы S_i, а также от выбора формы ответственности. Кроме того, в ряде случаев (например, при страховании жизни) в рамках договора страхования может произойти только один страховой случай. В других случаях (например, при страховании автомобилей от аварии) за время действия одного договора может произойти несколько страховых случаев. Таким образом, даже на этом этапе, перед страховщиком стоит достаточно сложная задача определения выше обозначенной величины возмещения Y_i.

С другой стороны, *главной составляющей* финансового риска страховой компании является общая сумма выплаты:

$$Z = \sum Y_i \,.$$

Если страховщик имеет активы на сумму U, которые складываются из страхового фонда (сумм собранных нетто-премий) $П_н$ и собственных средств U_0:

$$U = U_0 + \Sigma \pi_н = U_0 + П_н,$$

то главной его задачей является определить вероятность выполнения своих обязательств, т.е. $P(Z<U)$. Сложность решения данной задачи породило два подхода в актуарной математике страхования: *индивидуальную* и *коллективную* модели риска.

Теория страхового риска *исторически* начинается с построения модели для *индивидуальных убытков*. В рамках этой модели интересуются только величиной индивидуального возмещения Y_i, измеренной в тех или иных денежных единицах. Основным является следующее положение: относительно величины потерь, связанного с отдельным конкретным договором, нельзя заранее сказать ничего определенного, кроме простой констатации факта, что он либо будет, либо нет. Однако, если страховщик сформировал большой портфель однородных договоров, то он может рассматривать величину возмещения Y как случайную величину по усредненному договору. В этом случае величина Y_i является реализацией случайной величины Y в i-ом договоре. Таким образом, если страховщик имеет портфель с *большой однородной* группой договоров и не интересуется судьбой конкретных договоров из этой группы, то он может изучать величину Y в рамках теории вероятностей и математической статистики.

3.1. Индивидуальная модель риска.

Модель индивидуального риска – это простейшая модель функционирования страховой компании, предназначенная для расчета вероятности разорения. В основе любой модели лежит принцип упрощения реального явления, процесса. Модель фиксирует наиболее важные и существенные свойства и связи и отбрасывает малозначимые. Модель индивидуального риска базируется на следующих упрощающих предположениях:

1. анализируется фиксированный, относительно короткий промежуток времени (так что можно пренебречь инфляцией и не учитывать доход от инвестирования активов) – обычно это один год;
2. число договоров страхования n фиксировано и не случайно (система замкнута);
3. премия полностью вносится в начале анализируемого периода, никаких новых поступлений в течение этого периода нет;
4. наблюдается каждый отдельный договор страхования и известны статистические свойства связанных с ним индивидуальных потерь;
5. предъявляется только 1 иск по договору.

Обычно предполагается, что в модели индивидуального риска случайные величины $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ – независимы и имеют один закон распределения. Если портфель имеет неоднородность и эту неоднородность нельзя обойти, введя какую-то рандомизацию, тогда необходимо весь портфель разбить на субпортфели, внутри которых условие однородности выполнено.

В рамках индивидуальной модели риска *разорение* определяется *суммарными выплатами* по портфелю $Z = Y_1 + \dots + Y_n$. Если эта сумма больше, чем активы компании U, то компания не сможет выполнить все свои обязательства и разорится. Поэтому вероятность разорения компании равна

$$P_R = P(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n > U) = P_R(Z > U).$$

В страховании величина ущерба объекта страхования X_i может иметь фиксированный или распределенный характер. Рассмотрение индивидуальной модели риска начнем, как и раньше, со случая фиксированного ущерба.

Случай фиксированного ущерба.

Вернемся к модели индивидуального риска. Страховщика интересует общий размер страховых выплат по всему страховому портфелю. Рассмотрим ситуацию, где все договоры заключены на один год. Тогда возможны следующие варианты:

1. для всех договоров одинаковы и страховые суммы S, и вероятности требований о выплате p;
2. страховые суммы S одинаковы, а вероятности p_i различны;
3. страховые суммы S_i различны, а вероятности p одинаковы;
4. различаются и страховые суммы S_i и вероятности p_i.

Во всех случаях ущерб фиксирован, и можно предъявить *только одно* требование о выплате. *Последнее требование является обязательным для индивидуальной модели риска*. Приведем примеры для данных вариантов. Будем считать, что активы компании складываются из рисковых премий $\Pi_0 = \Sigma\pi_0$ и собственных активов компании U_0.

Вариант 1. Для всех договоров одинаковы и страховые суммы S, и вероятности требований о выплате p**.** Случай *полностью однородного портфеля*.

Портфель содержит $n = 400$ независимых договоров страхования, заключенных на 1 год. Все страховые суммы одинаковы $S = 1000$. При наступлении страхового случая выплачивается возмещение, равное страховой сумме $Y = S$. Вероятность наступления страховых случаев одинаковы $p = 0{,}1$. Компания имеет собственные активы $U_0 = 1\,500$. Задана надежность неразорения $\gamma = 95\%$. Оценить ситуацию.

Решение.

1 этап (расчет отдельного договора).

$$\pi_0 = EY = p \cdot S = 0{,}1 \cdot 1000 = 100.$$

$$EY^2 = p \cdot S^2 = 0{,}1 \cdot 10^6 = 10^5.$$

$$DY = EY^2 - (EY)^2 = 10^5 - 10^4 = 9 \cdot 10^4.$$

$$\sigma_Y = \sqrt{DY} = 3 \cdot 10^2.$$

2 этап (расчет портфеля).

$$Z = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$EZ = E\left(\sum Y_i\right) = \sum EY_i = nEY = 400 \cdot 100 = 4 \cdot 10^4$$

$$\textit{Основной страховой фонд}\ \Pi_0 = n \cdot \pi_0 = 4 \cdot 10^4.$$

$$DZ = D\left(\sum Y_i\right) = \sum DY_i = n \cdot DY = 400 \cdot 9 \cdot 10^4 = 36 \cdot 10^6.$$
$$\sigma_Z = \sqrt{DZ} = 6 \cdot 10^3.$$

3 этап (расчет условия неразорения).

Определим правую границу возможных выплат по искам $Z_Г$ при заданной надежности γ, перейдя к нормированной случайной величине. Будем считать, что объем портфеля достаточный, чтобы предположить, что случайная величина Z распределена по нормальному закону.

$$P(Z < Z_Г) = P\left(\frac{Z - EZ}{\sigma_Z} < \frac{Z_Г - EZ}{\sigma_Z} = \beta(\gamma)\right) = \gamma = 0{,}5 + \Phi(\beta)$$
$$\Phi(\beta) = 0{,}95 - 0{,}5 = 0{,}45 \Rightarrow \beta = 1{,}645$$
$$Z_Г = EZ + \beta \cdot \sigma_Z = 4 \cdot 10^4 + 1{,}645 \cdot 6 \cdot 10^3 = 5 \cdot 10^4.$$
$$U = U_0 + П_0 = 4{,}15 \cdot 10^4 < Z_Г = 5 \cdot 10^4.$$

Здесь *Ф(x)* – функция Лапласа, β – квантиль нормального распределения®.

<u>Вывод</u>: собранных рисковых премий, с учетом собственных активов, при заданной надежности может не хватить на выплату по искам. Требуется вводить рисковую надбавку.

Расчет других вариантов.

Общий принцип расчета для других вариантов остается прежним. Вычисляются характеристики по одному типу договора, а потом производится соответствующее суммирование для получения данных по портфелю.

$$EZ = \sum n_i \cdot p_i \cdot S_i. \qquad DZ = \sum n_i \cdot p_i \cdot q_i \cdot S_i^2.$$

<u>Вариант 2</u>. Страховые суммы S одинаковы, а вероятности p_i различны.

Портфель содержит n = 300 независимых договоров страхования на 1 год. Все страховые суммы одинаковы S = 1000. Вероятности требования по n_1 = 100 договорам равны p_1 = 0,1; а по другим n_2 = 200 договорам – p_2 = 0,2. Задана надежность неразорения γ = 95%. Компания имеет собственные активы U_0 = 1 500. Оценить ситуацию.

® Квантúль в теории вероятностей - значение, которое заданная случайная величина не превышает с фиксированной вероятностью.

Решение.

Поскольку в портфеле представлено два вида риска, то логично разделить его на два однородных субпортфеля. Расчет ведем для них как в 1-м варианте.

1 этап (расчет отдельного договора).

1 *субпортфель*

$$\pi_{01} = EY_1 = p_1 \cdot S = 0{,}1 \cdot 1000 = 100.$$

$$EY_1^2 = p_1 \cdot S^2 = 0{,}1 \cdot 10^6 = 10^5.$$

$$DY_1 = EY_1^2 - (EY_1)^2 = 10^5 - 10^4 = 9 \cdot 10^4.$$

2 *субпортфель*

$$\pi_{02} = EY_2 = p_2 \cdot S = 0{,}2 \cdot 1000 = 200.$$

$$EY_2^2 = p_2 \cdot S^2 = 0{,}2 \cdot 10^6 = 2 \cdot 10^5.$$

$$DY_2 = EY_2^2 - (EY_2)^2 = 2 \cdot 10^5 - 4 \cdot 10^4 = 16 \cdot 10^4.$$

2 этап (расчет портфеля).

$$\varPi_0 = EZ = EZ_1 + EZ_2 = n_1 \cdot EY_1 + n_2 \cdot EY_2 = 5 \cdot 10^4.$$

$$DZ = DZ_1 + DZ_2 = n_1 \cdot DY_1 + n_2 \cdot DY_2 = 41 \cdot 10^6.$$

$$\sigma_Z = \sqrt{DZ} = 6{,}4 \cdot 10^3.$$

3 этап (расчет условия неразорения).

$$P\left(\frac{Z - EZ}{\sigma_Z} < \frac{Z_\Gamma - EZ}{\sigma_Z} = \beta(\gamma)\right) = \gamma = 0{,}5 + \varPhi(\beta)$$

$$\varPhi(\beta) = 0{,}95 - 0{,}5 = 0{,}45 \;\Rightarrow\; \beta = 1{,}645$$

$$Z_\Gamma = EZ + \beta \cdot \sigma_Z = 5 \cdot 10^4 + 1{,}645 \cdot 6{,}4 \cdot 10^3 = 6{,}05 \cdot 10^4.$$

$$U = U_0 + \varPi_0 = 5{,}15 \cdot 10^4 < Z_\Gamma = 6{,}05 \cdot 10^4.$$

Вывод: Не хватает 900. Требуется введения рисковой добавки.

Вариант 3. Страховые суммы S_i различны, а вероятности p одинаковы.

Портфель содержит n = 8000 договоров страхования на 1 год. Из них n_1 = 5000 договоров на страховую сумму S_1 = 10 000, и n_2 = 3000 договоров на сумму S_1 = 20 000. Вероятности предъявления требования одинаковы и равны p = 0,02. Компания имеет собственные активы U_0 = 60 000. Задана надежность неразорения γ = 95%. Оценить ситуацию.

Решение. Аналогично варианту 2 разобьем портфель на два однородных субпортфеля.

1 этап (расчет отдельного договора).

1 *субпортфель*

$$\pi_{01} = EY_1 = p \cdot S_1 = 0{,}02 \cdot 10^4 = 2 \cdot 10^2.$$

$$EY_1^2 = p \cdot S_1^2 = 0{,}02 \cdot 10^8 = 2 \cdot 10^6.$$

$$DY_1 = EY_1^2 - (EY_1)^2 = 1{,}96 \cdot 10^6.$$

2 *субпортфель*

$$\pi_{02} = EY_2 = p \cdot S_2 = 0{,}02 \cdot 2 \cdot 10^4 = 4 \cdot 10^2.$$

$$EY_2^2 = p \cdot S_2^2 = 0{,}02 \cdot 4 \cdot 10^8 = 8 \cdot 10^6.$$

$$DY_2 = EY_2^2 - (EY_2)^2 = 7{,}84 \cdot 10^6.$$

2 этап (расчет портфеля).

$$\Pi_0 = EZ = EZ_1 + EZ_2 = n_1 \cdot EY_1 + n_2 \cdot EY_2 = 22 \cdot 10^5$$

$$DZ = DZ_1 + DZ_2 = n_1 \cdot DY_1 + n_2 \cdot DY_2 = 3{,}33 \cdot 10^{10}.$$

$$\sigma_Z = \sqrt{DZ} = 1{,}82 \cdot 10^5.$$

3 этап (расчет условия неразорения).

$$P\left(\frac{Z - EZ}{\sigma_Z} < \frac{Z_\Gamma - EZ}{\sigma_Z} = \beta(\gamma)\right) = \gamma = 0{,}5 + \Phi(\beta)$$

$$\Phi(\beta) = 0{,}95 - 0{,}5 = 0{,}45 \Rightarrow \beta = 1{,}645$$

$$Z_\Gamma = EZ + \beta \cdot \sigma_Z = 22 \cdot 10^5 + 1{,}645 \cdot 1{,}82 \cdot 10^5 = 2{,}5 \cdot 10^6.$$

$$U = U_0 + \Pi_0 = 2{,}26 \cdot 10^6 < Z_\Gamma = 2{,}5 \cdot 10^6.$$

Вывод: Не хватает $24 \cdot 10^4$. Требуется введения рисковой добавки.

Четвертый случай рассматривается аналогично.

Расчет рисковой надбавки.

В рассмотренных выше примерах мы получили, что страховой фонд портфеля, образованный рисковыми премиями, вместе с собственным капиталом страховой компании не покрывает величину предполагаемых выплат. В этом случае страховщик обязан ввести *рисковую надбавку* $r_н$. Однако рисковая премия и рисковая надбавка по портфелю отличается от рисковых премий и рисковых надбавок по субпортфелям его образующих.

Рассмотрим более подробно эту ситуацию на примере варианта № 3.

Используя, ранее полученные результаты, рассчитаем рисковую премию π_0, относительную рисковую надбавку θ и рисковую надбавку r_H для усредненного договора по всему портфелю, а также эти же характеристики для субпортфелей. В данном случае портфель состоит из двух субпортфелей. Подсчитаем характеристики для каждого из них.

1 *субпортфель*

$$\pi_{01} = 200. \quad \theta_1 = \beta \cdot \frac{\sqrt{DY_1}}{EY_1} \cdot \frac{1}{\sqrt{n_1}} = 1{,}645 \cdot \frac{\sqrt{1{,}96 \cdot 10^6}}{200 \cdot \sqrt{5000}} = 16{,}3\%.$$

$$r_{н1} = \theta_1 \cdot \pi_{01} = 0{,}1628 \cdot 200 = 32{,}6.$$

2 *субпортфель*

$$\pi_{02} = 400. \quad \theta_2 = \beta \cdot \frac{\sqrt{DY_2}}{EY_2} \cdot \frac{1}{\sqrt{n_2}} = 1{,}645 \cdot \frac{\sqrt{7{,}84 \cdot 10^6}}{400 \cdot \sqrt{3000}} = 21{,}0\%.$$

$$r_{н2} = \theta_2 \cdot \pi_{02} = 0{,}21 \cdot 400 = 84{,}0.$$

Для всего портфеля имеем:

$$\pi_0 = EZ / n = 22 \cdot 10^5 / 8 \cdot 10^3 = 275.$$

$$\theta = \beta \cdot \sigma_Z / EZ = 1{,}645 \cdot 1{,}82 \cdot 10^5 / 2{,}2 \cdot 10^6 = 0{,}1365 = 13{,}65\%.$$

$$r_н = \theta \cdot \pi_0 = 0{,}1365 \cdot 275 = 37{,}5.$$

Чтобы проанализировать полученный результат, сведем все данные в таблицу. Индексами 1 и 2 обозначены субпортфели, индексом Σ обозначен весь портфель. $П_0$ обозначает сумму собранных рисковых премий в субпортфелях и во всем портфеле. Это же соответствует суммарным дисперсиям D.

	n	π_0	$П_0, 10^6$	$D, 10^{10}$	$\sigma, 10^5$	$\theta, \%$	$r_н$	$r_н \cdot n, 10^3$	
1	*5 000*	*200*	*1,0*	*0,98*	*0,99*	*16,3*	*32,6*	*163,0*	*414,7*
2	*3 000*	*400*	*1,2*	*2,35*	*1,53*	*21,0*	*84,0*	*251,7*	
Σ	*8 000*	*275*	*2,2*	*3,33*	*1,82*	*13,65*	*37,5*	*300,0*	

Выводы:

1). Очевидно, что математическое ожидание и дисперсии портфелей являются аддитивными величинами, поэтому рисковая премия портфеля есть средневзвешенная рисковых премий субпортфелей:

$$\pi_{0\Sigma} = \frac{n_1}{n} \cdot \pi_{01} + \frac{n_2}{n} \cdot \pi_{02}.$$

С другой стороны, исходя из принципа эквивалентности обязательств сторон и учитывая неоднородность портфеля, разумно считать, что рисковые премии должны определяться характеристиками субпортфелей, т.е. $\pi_{01} = 200$, $\pi_{02} = 400$.

2) Относительная рисковая надбавка портфеля $\theta_\Sigma = 13{,}65$, меньше относительных рисковых надбавок субпортфелей: $\theta_1 = 16{,}3$ и $\theta_2 = 21{,}0$. Это объясняется тем, что объем портфеля больше соответствующих объемов субпортфелей.

3) Правило аддитивности для рисковых надбавок не выполняется. Если взять за основу рисковые надбавки субпортфелей, то их сумма $r_{н1} \cdot n_1 + r_{н2} \cdot n_2 = 414{,}7 \cdot 10^3$. С другой стороны, из таблицы видно, что если взять портфель в целом, то для обеспечения надежности выполнения своих обязательств на уровне 95 % страхователю достаточно собрать сумму рисковых надбавок равную $300{,}0 \cdot 10^3$, которая меньше $414{,}7 \cdot 10^3$. Встает задача *корректировки рисковых надбавок в субпортфелях* в сторону их уменьше-

ния. Какой принцип положить в основу этой корректировки. Здесь возможны несколько вариантов. Давайте рассмотрим их, а результаты запишем в виде таблицы.

	1 вариант		2 вариант		3 вариант		4 вариант	
	$r_н$	θ, %	$r_н$	θ, %	$r_н$	θ, %	$r_н$	θ, %
1	37,5	18,7	27,2	13,6	17,6	8,8	31,1	15,5
2	37,5	9,4	54,4	13,6	70,5	7,6	48,1	12,0
Σ	$r_н = const$		$\theta = const$		$r_н \cdot n/D = const$			

1 вариант.

Можно взять за основу рисковую надбавку портфеля $r_н = 37{,}5$. Тогда для субпортфелей получим соответствующие относительные надбавки равные $\theta_1 = 18{,}7$ % и $\theta_2 = 9{,}4$ %**.** Данный вариант трудно обосновать, так как именно второй субпортфель дает основной вклад в дисперсию, а это значит, что он должен иметь и большую относительную рисковую надбавку.

2 вариант.

Представляется, что более *справедливым* будет, если относительные рисковые надбавки в каждом субпортфеле будут равны относительной рисковой надбавке в портфеле:

$$\theta_\Sigma = \theta_1 = \theta_2.$$

Этот принцип исходит из того, что коэффициенты риска в портфеле и субпортфеле были бы равны. В этом случае:

$$r_{н1} = \theta_\Sigma \pi_{01} = 27{,}2; \qquad r_{н2} = \theta_\Sigma \pi_{02} = 54{,}4;$$

3 вариант.

Однако возможен и другой подход: надбавка делится пропорционально не математическому ожиданию E, а дисперсии D в отдельном договоре.

$$\frac{r_{н\Sigma}}{D/n} = \frac{r_{н1}}{D_1/n_1} = \frac{r_{н2}}{D_2/n_2} = \frac{37{,}5}{3{,}33\cdot 10^{10}/8\cdot 10^3} = 9\cdot 10^{-6}$$

$$r_{н1} = r_{н\Sigma}\cdot\frac{D_1/n_1}{D/n} = 9\cdot 10^{-6}\cdot\frac{0{,}98\cdot 10^{10}}{5\cdot 10^3} = 17{,}6$$

$$r_{н2} = r_{н\Sigma}\cdot\frac{D_2/n_2}{D/n} = 9\cdot 10^{-6}\cdot\frac{2{,}35\cdot 10^{10}}{3\cdot 10^3} = 70{,}5$$

Проверка: суммарный фонд рисковой надбавки равен:

$$r_{н1} \cdot n_1 + r_{н2} \cdot n_2 = 17{,}6 \cdot 5000 + 70{,}5 \cdot 3000 = 299{,}5 \cdot 10^3 \approx 300 \cdot 10^3$$

$$\theta_1 = r_{н1} / \pi_{01} = 8{,}8\%; \qquad \theta_2 = r_{н2} / \pi_{02} = 17{,}6\%;$$

4 вариант.

Возможен еще один подход, когда рисковая надбавка пропорциональна не дисперсии, а среднеквадратическому отклонению σ в отдельном договоре.

$$r_{н1} = r_{н\Sigma} \cdot \frac{\sigma_1}{\sigma_1 \frac{n_1}{n} + \sigma_2 \cdot \frac{n_2}{n}} = 31{,}1; \qquad r_{н2} = r_{н\Sigma} \cdot \frac{\sigma_2}{\sigma_1 \frac{n_1}{n} + \sigma_2 \cdot \frac{n_2}{n}} = 48{,}1.$$

Проверка: суммарный фонд рисковой надбавки равен:

$$r_{н1} \cdot n_1 + r_{н2} \cdot n_2 = 31{,}1 \cdot 5000 + 48{,}1 \cdot 3000 = 299{,}8 \cdot 10^3 \approx 300 \cdot 10^3$$

$$\theta_1 = r_{н1} / \pi_{01} = 15{,}5\%; \qquad \theta_2 = r_{н2} / \pi_{02} = 12{,}0\%;$$

Следует отметить, что в данном варианте, как и в первом, относительная рисковая надбавка во втором субпортфеле ниже, чем в первом. Учитывая, что второй субпортфель вносит большую неопределенность в суммарный портфель, данный вариант следует признать небезупречным.

Заключение.

В общем случае рисковые надбавки *не пропорциональны* размерам рисковых премий. Риски могут быть *качественно однородными*, но *существенно различными* по величине. Тогда компания стремиться обезопасить себя, прежде всего, от больших рисков. Принципы расчета рисковых надбавок в субпортфелях не ограничиваются рассмотренные выше вариантами. Так в работе Корнилов [6,стр.36] отмечается, что некоторые исследователи для расчета рисковых надбавок используют линейную комбинацию:

$$r_н = A \cdot EZ + B \cdot DZ + C \cdot \sigma_Z.$$

Числовые коэффициенты рассчитываются на основании статистических данных из предыдущего опыта.

Случай распределенного ущерба.

Мы рассмотрели модели индивидуального риска для случая фиксированного ущерба. Это, естественно не охватывает все многообразие страховых договоров. В случае распределенного ущерба меняются несколько формулы расчета, но принцип остается прежним. Перечислим следующие четыре возможных варианта (в определенном смысле аналогичных ранее изложенным):

- для всех договоров требование предъявляется с вероятностью p, а величина выплаты распределена по закону с плотностью $f(x)$;
- вероятность p постоянна, а плотности $f_i(x)$ различны;
- вероятности p_i различаются, а плотность $f(x)$ постоянна;
- различаются и вероятности p_i, и плотности $f_i(x)$.

Очевидно, что каждая из перечисленных ситуаций порождает определенную *индивидуальную модель риска*.

<u>*Пример*</u>.

Есть n = 1000 срочных договоров с вероятностью предъявления требования p = 0,1. При наличии требования размер его X имеет равномерное распределение на (0, 900). Компания имеет собственные активы U_0 = 1000. Задана надежность не разорения γ = 95%. Оценить ситуацию.

<u>*Решение.*</u> Очевидно, плотность равна $f(x) = 1/(b - a) = 0{,}001$

$$EX = \int_0^S xf(x)dx = \frac{S}{2} = 450 \qquad EX^2 = \int_0^S x^2 f(x)dx = \frac{S^2}{3} = 27 \cdot 10^4$$

$$DX = EX^2 - (EX)^2 = \frac{S^2}{12} = 6{,}75 \cdot 10^4$$

1 этап (расчет отдельного договора).

$$\pi_0 = EY = p \cdot EX = 0{,}1 \cdot 450 = 45.$$

$$DY = p \cdot DX + pq \cdot (EX)^2 = 2{,}5 \cdot 10^4. \quad \sigma_Y = \sqrt{DY} = 158.$$

2 этап (расчет портфеля).

$$Z = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n$$

$$EZ = E\left(\sum Y_i\right) = \sum EY_i = n \cdot EY = 4{,}5 \cdot 10^4$$

$$\text{Основной страховой фонд}\ \Pi_0 = 4{,}5 \cdot 10^4.$$

$$DZ = D\left(\sum Y_i\right) = \sum DY_i = n \cdot DY = 0{,}25 \cdot 10^8. \ \sigma_Z = \sqrt{DZ} = 0{,}5 \cdot 10^4.$$

3 этап (расчет условия неразорения).

Определим правую границу возможных выплат по искам $Z_Г$ при заданной надежности γ.

$$P(Z < Z_Г) = P\left(\frac{Z - EZ}{\sigma_Z} < \frac{Z_Г - EZ}{\sigma_Z} = \beta(\gamma)\right) = \gamma = 0{,}5 + \Phi(\beta)$$

$$\Phi(\beta) = 0{,}95 - 0{,}5 = 0{,}45 \Rightarrow \beta = 1{,}645.$$

$$Z_Г = EZ + \beta \cdot \sigma_Z = 4{,}5 \cdot 10^4 + 1{,}645 \cdot 0{,}5 \cdot 10^4 = 5{,}32 \cdot 10^4.$$

$$U = U_0 + П_0 = 4{,}6 \cdot 10^4 < Z_Г = 5{,}32 \cdot 10^4.$$

Вывод: собранных рисковых премий, с учетом собственных активов, при заданной надежности может не хватить на выплату по искам. Требуется вводить рисковую надбавку. Если исключить из страхового фонда собственные активы компании, тогда необходимо ввести дополнительно к рисковой премии рисковую надбавку:

$$\theta = \beta \frac{\sigma_Z}{EZ} = 1{,}645 \cdot \frac{0{,}5 \cdot 10^4}{4{,}5 \cdot 10^4} = 18{,}3\%. \quad r_н = \pi_0 \cdot \theta = 8{,}23.$$

Все остальные типы договоров рассчитываются по общему правилу.

Делается расчет по конкретному субпортфелю. *Затем результаты суммируются.*

В заключении, приведем пример расчет портфеля, который содержит как фиксированные, так и распределенные ущербы.

Пример. Портфель страховщика состоит из двух субпортфелей.

1-й субпортфель. Договор страхования автомобиля от угона со следующими характеристиками: количество договоров n_1 = 3000, вероятность страхового случая p_1 = 0,01; страховая сумма S = 2500.

2-й субпортфель. Страхование автомобиля от ущерба при аварии со следующими характеристиками: количество договоров n_2 = 4000, вероятность страхового случая p_2 = 0,05, страховая стоимость объекта C = 2500. Ущерб распределен равномерно на отрезке *[0,C]***.** Найти нетто премии в субпортфелях для надежности γ =0,95.

Решение.

1 этап (расчет отдельного договора).

1 *субпортфель*

$$\pi_{01} = EY_1 = p_1 S = 25.$$

$$EY_1^2 = p_1 S^2 = 6{,}25 \cdot 10^4.$$

$$DY_1 = EY_1^2 - (EY_1)^2 = 61{,}9 \cdot 10^3.$$

2 *субпортфель*

$$\pi_{02} = EY_2 = p_2 EX = p_2 \frac{C}{2} = 62{,}5.$$

$$DY^2 = pDX + pq(EX)^2 = p \cdot \frac{C^2}{12} + pq\frac{C^2}{4} = 100{,}26.$$

2 этап (расчет портфеля).

$$EZ = EZ_1 + EZ_2 = n_1 \cdot EY_1 + n_2 \cdot EY_2 = 325 \cdot 10^3$$

$$DZ = DZ_1 + DZ_2 = n_1 \cdot DY_1 + n_2 \cdot DY_2 = 587 \cdot 10^6.$$

$$\sigma_Z = \sqrt{DZ} = 24{,}22 \cdot 10^3.$$

$$\theta = \beta \cdot \frac{\sigma_Z}{EZ} = 1{,}645 \cdot \frac{24{,}22 \cdot 10^3}{325 \cdot 10^3} = 12{,}26\%$$

3 этап (расчет нетто премий в субпортфелях).

Применяя принцип равенства относительных надбавок в портфеле и субпортфелях получим.

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta = 12{,}26\%.$$

$$\pi_{н1} = \pi_{01} + r_{н1} = \pi_{01} \cdot (1 + \theta_1) = 28{,}1.$$

$$\pi_{н2} = \pi_{02} + r_{н2} = \pi_{02} \cdot (1 + \theta_2) = 70{,}2.$$

Проводя расчет рисковых надбавок, мы использовали нормальное распределение для случайной величины Z. При большом объеме портфеля данное распределение оправдано, однако при небольших портфелях процедура расчета закона распределения суммарных возмещений Z изменяется. Рассмотрим некоторые из них.

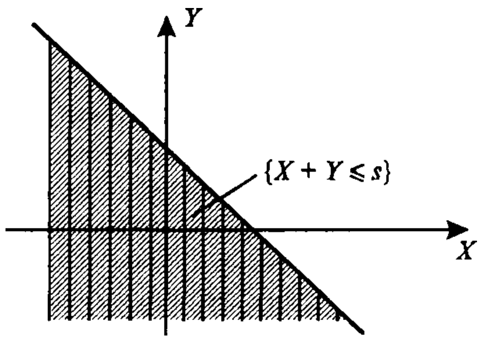
Суммы независимых случайных величин.

В модели индивидуальных рисков страховые выплаты, производимые страховой компанией, представляются как сумма выплат многим отдельным лицам.

В большинстве приложений страховые выплаты отдельным лицам предполагаются независимыми. В этом разделе мы напомним два метода определения распределения суммы независимых случайных величин. Рассмотрим сначала сумму двух случайных величин, $S = X + Y$, выборочное пространство которых изображено на рисунке.

Прямая $X + Y = S$ и область, находящаяся под этой прямой, представляют собой событие $\{S = X + Y \leq s\}$. Поэтому функция распределения с.в. S имеет вид:

$$F_S(s) = P(S \leq s) = P(X + Y \leq s). \qquad (3.1.1)$$



Для двух дискретных неотрицательных случайных величин мы можем воспользоваться формулой полной вероятности и записать

$$F_S(s) = \sum_{y=0}^{s} P(X + Y \le s \mid Y = y) \cdot P(Y = y) =$$
$$= \sum_{y=0}^{s} P(X \le s - y \mid Y = y) \cdot P(Y = y). \qquad (3.1.2)$$

Если X и Y независимы, то последняя сумма может быть переписана в виде:

$$F_S(s) = \sum_{y=0}^{s} F_X(s - y) \cdot f_Y(y). \qquad (3.1.3)$$

Функция вероятностей, соответствующая этой функции распределения, может быть найдена по формуле:

$$f_S(s) = \sum_{y=0}^{s} f_X(s - y) \cdot f_Y(y). \qquad (3.1.4)$$

Для непрерывных неотрицательных случайных величин формулы, соответствующие формулам (3.1.2), (3.1.3) и (3.1.4), имеют вид:

$$F_S(s) = \int_0^s P(X \le s \mid Y = y) f_Y(y) dy. \qquad (3.1.5)$$

$$F_S(s) = \int_0^s F_X(s - y) f_Y(y) dy. \qquad (3.1.6)$$

$$f_S(s) = \int_0^s f_X(s - y) f_Y(y) dy. \qquad (3.1.7)$$

Когда либо одна, либо обе случайные величины X и Y имеют распределение смешанного типа (что характерно для моделей индивидуальных рисков), формулы аналогичны, но более громоздки.

В теории вероятностей операция в формулах (3.1.3) и (3.1.6) называется *сверткой* двух функций распределения $F_x(x)$ и $F_y(y)$ и обозначается через $F_x * F_y$. Операция свертки может также быть определена для пары функций вероятностей или функций плотности с помощью формул (3.1.4) и (3.1.7).

Для определения распределения суммы более чем двух случайных величин мы можем использовать итерации процесса взятия свертки. Для $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, где X_i являются независимыми случайными величинами, F_i обозначает функцию распределения с.в. X_i, а $F^{(k)}$ является функцией распределения с.в. $X_1 + X_2 + \cdots + X_k$, мы получим:

$$F^{(2)} = F_2 * F^{(1)} = F_2 * F_1,$$
$$F^{(3)} = F_3 * F^{(2)} = F_3 * F_2 * F_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$F^{(n)} = F_n * F^{(n-1)} = F_n * \ldots\ldots * F_2 * F_1,$$

Следующий пример иллюстрирует эту процедуру для трех дискретных случайных величин.

Пример. Случайные величины X_1, X_2 и X_3 независимы и имеют распределения, которые определяются столбцами (1), (2) и (3) приведенной ниже таблицы. Выпишем функцию вероятностей и функцию распределения с.в. $S = X_1 + X_2 + X_3$.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
x	$f_1(x)$	$f_2(x)$	$f_3(x)$	$f^{(2)}(x)$	$f^{(3)}(x)$	$F_1(x)$	$F^{(2)}(x)$	$F^{(3)}(x)$
0	0,4	0,5	0,6	0,20	0,120	0,4	0,20	0,120
1	0,3	0,2	0,0	0,23	0,138	0,7	0,43	0,258
2	0,2	0,1	0,1	0,20	0,140	0,9	0,63	0,398
3	0,1	0,1	0,1	0,16	0,139	1,0	0,79	0,537
4	0,0	0,1	0,1	0,11	0,129	1,0	0,90	0,666
5	0,0	0,0	0,1	0,06	0,115	1,0	0,96	0,781
6	0,0	0,0	0,0	0,03	0,088	1,0	0,99	0,869
7	0,0	0,0	0,0	0,01	0,059	1,0	1,00	0,928
8	0,0	0,0	0,0	0,00	0,036	1,0	1,00	0,964
9	0,0	0,0	0,0	0,00	0,021	1,0	1,00	0,985
10	0,0	0,0	0,0	0,00	0,010	1,0	1,00	0,995
11	0,0	0,0	0,0	0,00	0,004	1,0	1,00	0,999
12	0,0	0,0	0,0	0,00	0,001	1,0	1,00	1,000

Решение. В таблице используются обозначения, введенные перед примером:

- В столбцах (1) - (3) содержится имеющаяся информация.
- Столбец (4) получен из столбцов (1) и (2) с применением (3.1.4).
- Столбец (5) получен из столбцов (3) и (4) с применением (3.1.4).

Определение столбца (5) завершает нахождение функции вероятностей для с.в. S. Ее функция распределения в столбце (8) является набором частичных сумм столбца (5), начиная сверху. Для наглядности мы включили столбец (6), функцию распределения для столбца (1), столбец (7), который можно получить непосредственно из столбцов (1) и (6), применяя (3.1.3), и столбец (8), определяемый аналогично по столбцам (3) и (7). Столбец (5) можно определить из столбца (8) последовательным вычитанием.

Перейдем к рассмотрению двух примеров с непрерывными случайными величинами.

<u>*Пример 1.*</u>

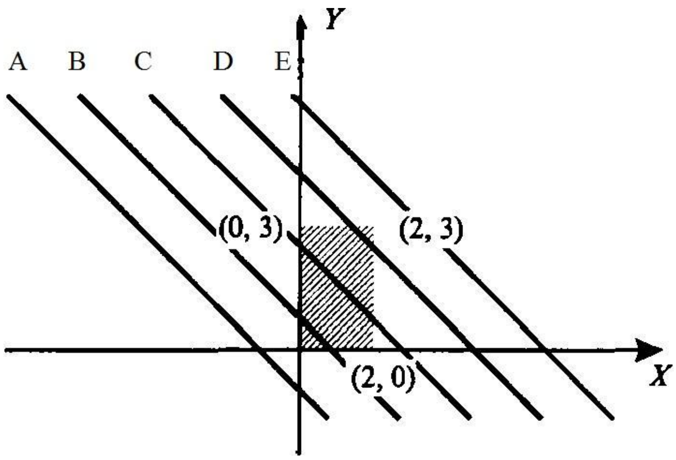
Пусть с.в. X имеет равномерное распределение на интервале (0,2), и пусть с.в. Y не зависит от с.в. X и имеет равномерное распределение на интервале (0,3). Определим функцию распределения с.в. $S = X + Y$.

<u>*Решение.*</u> Поскольку распределения с.в. X и Y непрерывны, воспользуемся формулой (3.1.6):

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x/2, & 0 \le x < 2, \\ 1, & x \ge 2. \end{cases} \quad \text{и} \quad f_Y(y) = \begin{cases} 1/3, & 0 < y < 3, \\ 0 & \text{для остальных } y. \end{cases}$$

Тогда
$$F_S(s) = \int_0^s F_X(s-y)\, f_Y(y)dy.$$

Выборочное пространство с.в. X и Y иллюстрируется следующий рисунок свертки двух равномерных распределений.



Прямоугольная область содержит все возможные значения пары X и Y. Интересующее нас событие, $X + Y \le s$, изображается на рисунке для пяти значений s. Для каждого значения прямая пересекает ось Y в точке s и прямую $X = 2$ в точке s - 2. Значения функции Fs для этих пяти случаев описываются следующей формулой:

$$F_X(x)=\begin{cases}0, \quad x<0, & s<0, \quad \textit{прямая } A,\\ \int\limits_0^s \frac{s-y}{2}\cdot\frac{1}{3}dy=\frac{s^2}{12}, & 0\le s<2, \quad \textit{прямая } B,\\ \int\limits_0^{s-2} 1\cdot\frac{1}{3}dy+\int\limits_{s-2}^{s}\frac{s-y}{2}\cdot\frac{1}{3}dy=\frac{s-1}{3}, & 2\le s<3, \quad \textit{прямая } C,\\ \int\limits_0^{s-2} 1\cdot\frac{1}{3}dy+\int\limits_{s-2}^{3}\frac{s-y}{2}\cdot\frac{1}{3}dy=1-\frac{(5-s)^2}{12}, & 3\le s<5, \quad \textit{прямая } D,\\ 1, & s\ge 5, \quad \textit{прямая } E.\end{cases}$$

Пример 2.

Рассмотрим три независимые с.в. X_1, X_2, X_3. Для i = 1,2,3 с.в. X_i имеет показательное распределение и $E[X_i]=1/i$. Найдем функцию плотности с.в. $S = X_1 + X_2 + X_3$, применяя операцию свертки.

Решение. Имеем

$$f_1(x)=e^{-x}, \qquad f_2(x)=2e^{-2x}, \qquad f_3(x)=3e^{-3x}.$$

Воспользовавшись формулой (3.1.7) трижды, мы получим:

$$f^{(2)}(x)=\int\limits_0^x f_1(x-y)\cdot f_2(y)dy=\int\limits_0^x e^{-(x-y)}\cdot 2e^{-2y}=$$

$$=2e^{-x}\int\limits_0^x e^{-y}dy=2e^{-x}-2e^{-2x}, \qquad x>0.$$

$$f_S(x)=f^{(3)}(x)=\int\limits_0^x f^{(2)}(x-y)\cdot f_3(y)dy=\int\limits_0^x\left(2e^{-(x-y)}-2e^{-2(x-y)}\right)\cdot 3e^{-3y}=$$

$$=6e^{-x}\int\limits_0^x e^{-2y}dy-6e^{-2x}\int\limits_0^x e^{-y}dy=3e^{-x}-6e^{-2x}+3e^{-3x}, \qquad x>0.$$

$$f_S(x)=f^{(3)}(x)=\int\limits_0^x f^{(2)}(x-y)\cdot f_3(y)dy=\int\limits_0^x\left(2e^{-(x-y)}-2e^{-2(x-y)}\right)\cdot 3e^{-3y}=$$

$$=6e^{-x}\int\limits_0^x e^{-2y}dy-6e^{-2x}\int\limits_0^x e^{-y}dy=3e^{-x}-6e^{-2x}+3e^{-3x}, \qquad x>0.$$

Другой метод определения распределения суммы независимых случайных величин основан на единственности *производящей функции моментов*, которая для с.в. X определяется соотношением $M_x(t) = E[e^{tx}]$. Эту единственность можно использовать следующим образом: для суммы $S = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$

$$M_S(t)=E[e^{tS}]=E[e^{t(X_1+X_2+\cdots+X_n)}]=E[e^{tX_1}e^{tX_2}\cdots e^{tX_n}] \qquad (3.1.8)$$

Если $X_1, X_2, \ldots, X_n$ независимы, то математическое ожидание произведения в формуле (3.1.8) равно $E[e^{tS}] = E[e^{tX_1}]E[e^{tX_2}]\cdots E[e^{tX_n}]$, так что

$$M_S(t) = M_{X_1}(t)M_{X_2}(t)\cdots M_{X_n}(t) \qquad (3.1.9)$$

Нахождение явного выражения для того единственного распределения, которое соответствует производящей функции моментов (3.1.9), завершило бы нахождение распределения с.в. S. Если указать его в явном виде не удается, то можно проводить его поиск численными методами.

Пример.

Рассмотрим случайные величины из предыдущего примера. Определим функцию плотности с.в. $S = X_1 + X_2 + X_3$, пользуясь производящей функцией моментов с.в. S.

Решение. Согласно равенству (3.1.9)

$$M_S(t) = \frac{1}{1-t}\cdot\frac{2}{2-t}\cdot\frac{3}{1-t},$$

что можно записать в виде:

$$M_S(t) = \frac{A}{1-t} + \frac{2B}{2-t} + \frac{3C}{1-t},$$

с помощью метода разложения на простейшие дроби. Решением является $A = 3$, $B = -3$, $C = 1$. Но $\beta/(\beta - t)$ является производящей функцией моментов показательного распределения с параметром β, так что функция плотности с.в. S имеет вид:

$$f_S(x) = 3e^{-x} - 6e^{-2x} + 3e^{-3x}.$$

3.2. Расчет тарифов по методикам Росстрахнадзора.

В начале 90-х годов, когда Россия переходила на рыночные отношения, стали возникать различные новые страховые компании. Учитывая сложность оценки страховых рисков и расчета страховых тарифов для начинающих страховую деятельность страховых организаций, Федеральная служба России по надзору за страховой деятельностью издает распоряжение № 02-03-36 от 8 июля 1993 г., в котором рекомендует использовать две методики расчета страховых тарифов по рисковым видам страхования. Под рисковыми в настоящих методиках понимаются виды страхования, относящиеся к видам страховой деятельности иным, чем страхование жизни.

Данные методики сегодня имеют в основном чисто исторический интерес, однако в случаях, когда страховая компания предполагает выпустить новый страховой продукт, по которому отсутствует достаточный статистический материал, и невозможно обоснованно применять методики с использованием математических методов, учитывающих специфику страховых операций, данные методики могут быть востребованы.

Методика (I) расчета тарифных ставок по массовым рисковым видам страхования®.

Предположим, что известно число n страховых договоров, заключенных в течение некоторого периода в прошлом. Пронумеруем эти договоры индексами $i = 1,...,n$ так, чтобы в договорах с индексами $i = 1,..., m$ $(m < n)$ страховые события произошли, а в договорах с индексами $i = m+1, ..., n$ - нет. Обозначив страховую сумму, установленную в i - м договоре $(i = 1,...,n)$, символом S_i, а страховое возмещение, выплаченное в результате j - го страхового случая $(j = 1,..., m)$, - символом Sb_j, введем следующие величины:

$$p = \frac{m}{n} \tag{3.2.1}$$

$$S = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i \tag{3.2.2}$$

$$Sb = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} Sb_j \tag{3.2.3}$$

Величины p, S, Sb рекомендуется использовать в качестве оценок вероятности наступления страхового события, средней страховой суммы и средней страховой выплаты соответственно.

Росстрахнадзор рекомендует при страховании по новым видам рисков при отсутствии фактических данных о результатах проведения страховых операций, т.е. статистики по величинам p, S *и* Sb, эти величины оценивать экспертным методом либо в качестве них использовать значения показателей - аналогов. В этом случае должны быть представлены мнения экспертов либо пояснения по обоснованности выбора показателей - анало-

® Под массовыми рисковыми видами страхования в настоящих методиках понимаются виды страхования, предположительно охватывающие значительное число субъектов страхования и страховых рисков, характеризующихся однородностью объектов страхования и незначительным разбросом в размерах страховых сумм.

гов p, S, Sb, а отношение средней выплаты к средней страховой сумме (Sb/S) рекомендуется принимать не ниже:

- 0,3 - при страховании от несчастных случаев и болезней, в медицинском страховании;
- 0,4 - при страховании средств наземного транспорта;
- 0,5 - при страховании грузов и имущества, кроме средств транспорта;
- 0,6 - при страховании средств воздушного и водного транспорта;
- 0,7 - при страховании ответственности владельцев автотранспортных средств и других видов ответственности, и страховании финансовых рисков.

Следуя обозначениям, использованным в Распоряжении № 02-03-36, введем для нетто-ставки, ее основной части и рисковой надбавки обозначения $T_н$, T_0 и T_p соответственно. Тогда соотношение для нетто-ставки примет вид:

$$T_н = T_0 + T_p. \tag{3.2.4}$$

Расчет основной части нетто-ставки T_0 со 100 руб. страховой суммы рассчитывается по формуле:

$$T_0 = p \cdot \frac{Sb}{S} \cdot 100 \ руб. \tag{3.2.5}$$

После того как получена оценка основной части T_0 нетто-ставки $T_н$, необходимо произвести оценку рисковой надбавки T_p. С этой целью сначала нужно установить уровень требуемой гарантии (вероятности) безопасности γ, достаточный для того, чтобы собранных страховых премий хватило на страховые выплаты, а затем воспользоваться одним из следующих двух вариантов.

1 вариант. Рисковая надбавка может быть рассчитана для каждого риска. В этом случае

$$T_p = T_0 \cdot \alpha(\gamma) \sqrt{\frac{1}{np}\left[q + \left(\frac{Rb}{Sb}\right)^2\right]} \tag{3.2.6}$$

где $q = 1 - p$, $\alpha(\gamma)$ - коэффициент, зависящий от гарантии безопасности γ. Значение этого коэффициента можно взять из следующей таблицы:

γ	0,84	0,90	0,95	0,98	0,9986
α(γ)	1,0	1,3	1,645	2,0	3,0

Среднее квадратическое отклонение страховых выплат Rb оценивается следующим образом:

$$Rb = \sqrt{\frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m} Sb_j^2 - \frac{m}{m-1}(Sb)^2} \qquad (3.2.7)$$

Если у страховой компании нет информации, позволяющей вычислить значение Rb, тогда допускается вычисление рисковой надбавки по формуле:

$$T_p = 1{,}2 \cdot T_0 \alpha(\gamma)\sqrt{\frac{q}{np}} \qquad (3.2.8)$$

<u>*2 Вариант*</u>. Страховая компания проводит страхование по нескольким видам риска (k = 1,...,r). В этом случае рисковая надбавка рассчитывается по формуле

$$T_p = T_0 \cdot \alpha(\gamma) \cdot \mu, \qquad (3.2.9)$$

где μ - коэффициент вариации страхового возмещения, который соответствует отношению среднеквадратического отклонения к ожидаемым выплатам страхового возмещения. Если для k - го риска известны число страховых договоров n_k, вероятность наступления страхового события p_k, среднее страховое возмещение Sb_k и среднее квадратическое отклонение страховых возмещений Rb_k, тогда коэффициент μ может быть рассчитан по формуле

$$\mu = \frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{r}\left[Sb_k^2 \cdot n_k \cdot p_k \cdot q_k + Rb_k^2 \cdot n_k \cdot p_k\right]}}{\sum_{k=1}^{r} Sb_k \cdot n_k \cdot p_k} \qquad (3.2.10)$$

При неизвестной величине Rb_k среднеквадратического отклонения выплат при наступлении k - го риска соответствующее этому риску слагаемое в числителе формулы (10) $Sb_k^2 \cdot n_k \cdot p_k \cdot q_k + Rb_k^2 \cdot n_k \cdot p_k$ допускается заменять величиной

$$1{,}44 \cdot Sb_k^2 \cdot n_k \cdot p_k \cdot q_k \qquad (3.2.11)$$

В случае, если по всем k рискам неизвестны величины Rb_k, тогда формула (3.2.14) заменяется следующей формулой

$$\mu = 1{,}2\frac{\sqrt{\sum_{k=1}^{r} Sb_k^2 \cdot n_k \cdot p_k \cdot q_k}}{\sum_{k=1}^{r} Sb_k \cdot n_k \cdot p_k} \qquad (3.2.12)$$

Замечание. Формулы (3.2.6), (3.2.9) и (3.2.10) для вычисления рисковой надбавки тем точнее, чем больше величины np и $n_k p_k$. При $np < 10$ и $n_k p_k$ <10 перечисленные формулы носят приближенный характер.

Если о величинах *p, S и Sb* нет достоверной информации, например, когда они оцениваются не по формулам (3.2.2) - (3.2.6), а из других источников, тогда рекомендуется принимать значение $\alpha(\gamma) = 3$.

Брутто-ставка $T_Б$ рассчитывается по формуле:

$$T_Б = \frac{T_Н}{1-f}, \tag{3.2.13}$$

где f – доля нагрузки в общей тарифной ставке.

Рассмотрим несколько примеров применения методики.

Пример 1.

Страховая компания заключила $n_1 = 10000$ договоров имущественного страхования. Вероятность наступления страхового случая $p_1 = 0{,}01$, средняя страховая сумма $S_1 = 500$ тыс. руб., среднее возмещение при наступлении страхового случая $Sb_1 = 375$ тыс. руб., доля нагрузки в структуре тарифа $f_1 = 30$ %. Данных о разбросе возможных возмещений нет. Определить соответствующие тарифы.

Решение. Основная часть нетто-ставки со 100 руб. страховой суммы по формуле (3.2.5):

$$T_{01} = p_1 \cdot \frac{Sb_1}{S_1} \cdot 100 = 0{,}01 \cdot \frac{375}{500} \cdot 100 = 0{,}75\,(руб.)$$

Рассчитаем страховую надбавку. Пусть страховая компания с надежностью $\gamma_1 = 0{,}95$ предполагает обеспечить не превышение возможных возмещений над собранными премиями, тогда из таблицы $\alpha(\gamma) = 1{,}645$. Рисковая надбавка согласно формуле (3.2.8):

$$T_{p1} = 1{,}2 \cdot T_{01} \cdot \alpha(\gamma)\sqrt{\frac{q_1}{n_1 p_1}} = 1{,}2 \cdot 0{,}75 \cdot 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}99}{10000 \cdot 0{,}01}} = 0{,}15\ (руб.)$$

Нетто-ставка со 100 руб. страховой суммы по формуле (3.2.4)

$$T_{н1} = T_{01} + T_{p1} = 0{,}90\ \ (руб.)$$

Брутто-ставка со 100 руб. страховой суммы по формуле (3.2.13)

$$T_Б = \frac{T_Н}{1-f} = \frac{0{,}90}{1-0{,}3} = 1{,}29\ руб.$$

Пример 2.

Страховая компания заключила n_2 = 3000 договоров страхования граждан от несчастных случаев. Вероятность наступления страхового случая p_2 = 0,04, средняя страховая сумма S_2 = 140 тыс. руб., среднее возмещение при наступлении страхового случая Sb_2 = 56 тыс. руб., доля нагрузки в структуре тарифа f_2 = 30 %. Средний разброс возмещений Rb_2 = 30 тыс.руб. Определить соответствующие тарифы.

Решение. Основная часть нетто-ставки со 100 руб. страховой суммы по формуле (3.2.5):

$$T_{02} = p_2 \cdot \frac{Sb_2}{S_2} \cdot 100 = 0{,}04 \cdot \frac{56}{140} \cdot 100 = 1{,}6\,(руб.)$$

Рассчитаем страховую надбавку согласно формуле (3.2.8). Для надежности γ_2 = 0,95 $\alpha(\gamma)$ = 1,645. Отсюда:

$$T_{p2} = T_{02} \cdot \alpha(\gamma) \sqrt{\frac{q_2 + \left(\frac{Rb_2}{Sb_2}\right)^2}{n_2 p_2}} = 1{,}6 \cdot 1{,}645 \cdot \sqrt{\frac{0{,}96 + \left(\frac{30}{56}\right)^2}{3000 \cdot 0{,}04}} = 0{,}27\ (руб.)$$

Нетто-ставка со 100 руб. страховой суммы по формуле (3.2.4)

$$T_{н2} = T_{02} + T_{p2} = 1{,}87\ \ (руб.)$$

Брутто-ставка со 100 руб. страховой суммы по формуле (3.2.13)

$$T_Б = \frac{T_Н}{1-f} = \frac{1{,}87}{1-0{,}3} = 2{,}67\ \ руб.$$

Пример 3.

Допустим, что страховая компания проводит виды страхования, описанные в предыдущих примерах, т.е. в ее портфеле есть разнородные риски. В этом случае основные части нетто-ставок будут такими же, как в примерах 1 и 2. Для расчета рисковых надбавок определяем коэффициент μ, используя формулу (10), учитывая, что средний разброс выплат по 1-му риску неизвестен:

$$\mu = \frac{\sqrt{1{,}44 \cdot Sb_1^2 \cdot n_1 \cdot p_1 \cdot q_1 + Sb_2^2 \cdot n_2 \cdot p_2 \cdot q_2 + Rb_2^2 \cdot n_2 \cdot p_2}}{Sb_1 \cdot n_1 \cdot p_1 + Sb_2 \cdot n_2 \cdot p_2} =$$

$$= \frac{\sqrt{1{,}44 \cdot 375^2 \cdot 10^4 \cdot 0{,}01 \cdot 0{,}99 + 56^2 \cdot 3000 \cdot 0{,}04 \cdot 0{,}96 + 30^2 \cdot 3000 \cdot 0{,}04}}{375 \cdot 10000 \cdot 0{,}01 + 56 \cdot 3000 \cdot 0{,}04} = 0{,}102.$$

Рисковая надбавка рассчитывается по формуле (3.2.9):

$$T_p = T_0 \cdot \alpha(\gamma) \cdot \mu = T_0 \cdot 1{,}645 \cdot 0{,}102 = 0{,}17 \cdot T_0.$$

Нетто-ставка для любого вида страхования, составляющего страховой портфель,

$$T_H = T_0 + T_p = T_0 + 0{,}17 \cdot T_0 = 1{,}17 \cdot T_0.$$

Нетто-ставка со 100 руб. страховой суммы: при имущественном страховании $T_{H1} = 1{,}17 \cdot 0{,}75 = 0{,}88$, при страховании граждан от несчастных случаев $T_{H2} = 1{,}17 \cdot 1{,}6 = 1{,}87$. Соответствующие брутто-ставки со 100 руб. страховой суммы: $T_{Б1} = 1{,}26$ *и* $T_{Б2} = 2{,}67$.

Методика (II) расчета тарифных ставок по массовым рисковым видам страхования.

Данную методику целесообразно использовать по массовым видам страхования на основе имеющейся страховой статистики за определенный период времени или при отсутствии таковой использовать статистическую информационную базу (демографическая статистика, смертность, инвалидность, производственный травматизм и т.д.). Определение страхового тарифа на основе страховой статистики за несколько лет осуществляется с учетом прогнозируемого уровня убыточности страховой суммы на следующий год.

Предлагаемая методика применима при следующих условиях:

1) имеется информация о сумме страховых возмещений и совокупной страховой сумме по рискам, принятым на страхование, за ряд лет;
2) зависимость убыточности от времени близка к линейной.

Расчет нетто-ставки производится в следующей последовательности:

а) по каждому году рассчитывается фактическая убыточность страховой суммы (Y) как отношение страхового возмещения к страховой сумме, со 100 руб. страховой суммы:

$$Y = Sb / S. \tag{3.2.14}$$

Таблица 1

годы	Общая страховая сумма (S)	Страховое возмещение (Sb)	Фактическая убыточность (Y)
1988	2278	410	0,18
1989	2942	765	0,26
1990	2755	799	0,29
1991	3094	1114	0,36
1992	3346	1305	0,39

б) на основании полученного ряда исходных данных рассчитывается прогнозируемый уровень убыточности страховой суммы, для чего используется модель линейного тренда, согласно которой фактические данные по убыточности страховой суммы выравниваются на основе линейного уравнения:

$$y^* = a_0 + a_1 \cdot i\,, \qquad (3.2.15)$$

где y^* - выравненный показатель убыточности страховой суммы; a_0, a_1 – параметры линейного тренда; i – порядковый номер соответствующего года. Параметры линейного тренда можно определить методом наименьших квадратов, решив следующую систему уравнений с двумя неизвестными:

$$\begin{cases} a_0 \cdot n + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} i = \sum_{i=1}^{n} y_i, \\ a_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} i + a_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} i^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i \cdot i, \end{cases} \qquad (3.2.16)$$

где n – число анализируемых лет. Коэффициенты данной системы уравнений находятся с помощью таблицы 2:

Таблица 2

год	***i***	Фактическая убыточность (Y_i)	$\boldsymbol{Y_i \cdot i}$	$\boldsymbol{i^2}$
1988	1	0,18	0,18	1
1989	2	0,26	0,52	4
1990	3	0,29	0,87	9
1991	4	0,36	1,44	16
1992	5	0,39	1,95	25
Сумма	15	1,48	4,96	55

Подставив данные из последней строки табл. 2 в систему (3.2.16), получим следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 5a_0 + 15a_1 = 1{,}48 \\ 15a_0 + 55a_1 = 4{,}96 \end{cases} \qquad (3.2.17)$$

Решением системы уравнений (3.2.17) является пара чисел

$$a_0 = 0{,}14, \qquad a_1 = 0{,}052. \qquad (3.2.18)$$

Подставляя значения (3.2.18) в (3.2.15), получаем уравнение прямой линии регрессии:

$$y_i^* = 0{,}14 + 0{,}052 \cdot i \qquad (3.2.19)$$

Подставив теперь в соотношение (3.2.19) значение $\boldsymbol{i}$ = 6, получим прогноз убыточности на 1993 г.:

$$y_6^* = 0{,}452\,. \qquad (3.2.20)$$

Полученное значение и является основной части T_0 нетто-ставки $T_н$.

в) для определения рисковой надбавки необходимо по следующей формуле рассчитывать среднее квадратическое отклонение фактических значений убыточности от выравненных значений:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - y_i^*\right)^2} \qquad (3.2.21)$$

Для этого удобно составить таблицу (табл. 3).

Таблица 3

$\boldsymbol{i}$	*Фактическая убыточность* y_i	*Выравненная убыточность* $y^*_{\boldsymbol{i}}$	y^*_i - y_i	$(y^*_i - y_i)^2$
1	0,18	0,192	+0,012	0,000144
2	0,52	0,244	-0,016	0,000256
3	0,87	0,296	+0,006	0,000036
4	1,44	0,348	-0,012	0,000144
5	1,95	0,400	+0,010	0,000100
Сумма				0,000680

Из (3.2.21) получаем

$$\sigma = \sqrt{\frac{0{,}00068}{4}} = 0{,}013\,.$$

Нетто-ставка рассчитывается следующим образом:

$$T_H = y_6 + \beta(\gamma, n)\cdot\sigma\,, \qquad (3.2.22)$$

где $\beta(\gamma,n)$ - коэффициент, зависящий от заданной гарантии безопасности γ и числа n анализируемых лет. Значения $\beta(\gamma,n)$ приведены в табл. 4.

Таблица 4.

n / γ	0,8	0,9	0,95	0,975	0,99
3	2,972	6,649	13,640	27,448	68,740
4	1,592	2,829	4,380	6,455	10,448
5	1,184	1,984	2,850	3,854	5,500
6	0,980	1,596	2,219	2,889	3,900

Допустим, страховая компания считает необходимым с уровнем вероятности $\gamma = 0{,}9$ быть уверенной в том, что собранной суммы взносов достаточно для выплаты страховых возмещений. Тогда из табл. 4 для $\gamma = 0{,}9$ и $n = 5$ находим $\beta(\gamma,n) = 1{,}984$. Далее по (3.2.22) получаем

$$T_Н = 0{,}452 + 1{,}984 \cdot 0{,}013 = 0{,}48 \ (руб.).$$

Если доля нагрузки f в тарифной ставке $T_Б$ составляет 30 %, то тарифная ставка в соответствии рассчитывается по формуле

$$T_Б = \frac{T_н}{1-f} = \frac{0{,}48}{1-0{,}3} = 0{,}69 \ руб.$$

<u>*Ответ*</u>. 0,69 руб.

3.3. Коллективные модели риска[®].

В рассмотренных выше *индивидуальных* моделях риска главным ограничением была недопустимость предъявления более одного требования об оплате по каждому договору. Это вполне естественно в договорах страхование жизни, договорах страхования от угона машин и т.п., но не выполняется при работе с договорами общего страхования. Страховые модели риска, в которых условие *единственности требования о выплате* отсутствует, носят название *коллективных моделей риска*.

Общим в этих моделях является то, что при расчетах анализируется относительно короткий промежуток времени (обычно год) и предполагается, что плата за страховку полностью вносится в начале анализируемого периода. Рассмотрим главные различия этих моделей. *Модель индивидуальных рисков* рассматривает отдельные страховые договоры и страховые случаи, возникающие по каждому из них. При этом суммарные страховые выплаты получаются сложением выплат по всем страховым договорам, содержащимся в портфеле. *Модель коллективных рисков* связана со случайным процессом, который порождает страховые случаи по всему страховому портфелю. Весь портфель заключенных договоров страхования рассматривается *как единое целое*, без различения отдельных составляющих его договоров. Соответственно, наступающие страховые случаи не связываются с конкретными договорами, а рассматриваются как результат суммарного риска компании. Отсюда следует, что основной характеристикой портфеля является не число заключенных договоров n, а общее число

[®] Данный раздел написан по материалам Бауэрса [1,гл.12].

страховых случаев N за анализируемый период. Ясно, что N является случайной величиной. В коллективных моделях предполагается, что число требований (по портфелю или его части) подчиняется некоторому *распределению*, и исследуется общий размер требований для портфеля. Так же как и в модели индивидуального риска, в модели коллективного риска понятие «*разорение*» определяется суммарными выплатами S страховой компании®. Однако теперь S записывается в виде:

$$S = X_1 + \ldots + X_N,$$

и поэтому в модели коллективного риска вероятность разорения компании определяется как

$$P_R = P(X_1 + \ldots + X_N > U), \tag{3.3.1}$$

где U - активы компании.

Второе важное отличие модели коллективного риска от модели индивидуального риска заключается в том, что случайные величины $X_1, X_2, \ldots,$ описывающие величины потерь вследствие последовательных страховых случаев, одинаково распределены и взаимно независимы. Это предположение означает *определенную равноценность страховых случаев*, связанную с тем, что страховые случаи рассматриваются как следствие общего риска компании, а не индивидуальных договоров с их специфическими особенностями.

Для получения информации о суммарных выплатах S необходимо знание их основных числовых макрохарактеристик: математического ожидания ES и дисперсии DS. Для вычисления этих характеристик нужно воспользоваться тождеством Вальда.

Лемма (тождество А.Вальда)

Пусть дано случайное число N взаимно независимых и одинакового распределенных случайных величин $X_1, X_2, \ldots, X_N$, причем $S = X_1 + \ldots + X_N$ и существуют конечные математические ожидания EX и EN, тогда справедливо равенство

$$ES = EN \cdot EX\ . \tag{3.3.2}$$

Данное равенство несложно получить, используя известные из теории вероятностей выражения для условного математического ожидания:

® При рассмотрении коллективной модели риска, в отличии от предыдущих обозначений, будем использовать традиционно принятые обозначения: X – выплаты по отдельному страховому случаю, S – суммарные выплаты по всему портфелю.

$$ES = E[E[S \mid N]] = E[\nu_1 N] = \nu_1 EN = EN \cdot EX \ ,$$

где $\nu_k = EX^k \ - k - й \ начальный \ \ момент \ с.в. \ X$.

Аналогичное выражение можно получить для дисперсии *DS:*

$$DS = E[D[S \mid N]] + D[E[S \mid N]] = E[N \cdot DX] + D[\nu_1 N].$$

Окончательно:

$$DS = EN \cdot DX + DN \cdot (EX)^2. \qquad (3.3.3)$$

Сравнение полученных выражений с соответствующими формулами для индивидуальных моделей показывает различие подходов их вычислений:

- в индивидуальных моделях сначала вычисляются математические ожидания и дисперсии по каждому договору, а затем эти характеристики суммируются по числу договоров;
- в коллективных *моделируется* число требований, поэтому суммирование по договорам заменяется *умножением* двух математических ожиданий;
- дисперсия суммарных страховых выплат является суммой двух слагаемых, первое из которых относится к изменчивости величины индивидуальной страховой выплаты, а второе - к изменчивости числа страховых случаев.

Следующая важная характеристика с.в. S – закон распределения, который строится в основном с использованием аппарата *свертки*. Однако в этом методе результаты достаточно наглядны лишь для самых простых случаев. Другим важным техническим средством в моделях коллективного риска являются производящие функции. Анализ коллективной модели риска начнем со следующей задачи, когда с.в. N и X имеют дискретный вид.

Пример 1.

Рассмотрим страховой портфель, который приводит к 0, 1, 2 или к 3 страховым случаям на фиксированном временном интервале с вероятностями 0,1, 0,3, 0,4 и 0,2 соответственно. Размер индивидуальной страховой выплаты равен X 1, 2 или 3 с вероятностями 0,5, 0,4 и 0,1 соответственно. Эти условия можно представить в виде таблиц.

N	0	1	2	3
p_N	0,1	0,3	0,4	0,2

X	1	2	3
p_X	0,5	0,4	0,1

Найти функцию распределения суммарных страховых выплат, математическое ожидание и дисперсию, а также вероятность превышения суммарных выплат величины равной математическому ожиданию с.в. S.

Решение данной задачи можно сделать несколькими способами. Начнем с варианта, который использует традиционные законы и теоремы классической теории вероятностей.

Решение 1.

Вычисления сведены в приведенной ниже таблице, в которой показаны лишь ненулевые значения.

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
x	$p^{*0}(x)$	$p^{*1}(x)$	$p^{*2}(x)$	$p^{*3}(x)$	$f_S(x)$	$F_S(x)$
0	1,0	—	—	—	0,1000	0,1000
1	—	0,5	—	—	0,1500	0,2500
2	—	0,4	0,25	—	0,2200	0,4700
3	—	0,1	0,40	0,125	0,2150	0,6850
4	—	—	0,26	0,300	0,1640	0,8490
5	—	—	0,08	0,315	0,0950	0,9440
6	—	—	0,01	0,184	0,0408	0,9848
7	—	—	—	0,063	0,0126	0,9974
8	—	—	—	0,012	0,0024	0,9998
9	—	—	—	0,001	0,0002	1,0000
n	0	1	2	3	—	—
$P(N=n)$	0,1	0,3	0,4	0,2	—	—

Поскольку происходят не более трех страховых случаев, и каждый из них влечет за собой страховую выплату размера не более 3, мы можем ограничиться вычислениями для $x = 0,1,2,..., 9$, которые расположены в 1-м столбце.

Рассмотрим 2-й столбец. Вероятность, что суммарные выплаты равны нулю при отсутствии страховых случаев, т.е. $P(S=0\,|\,N=0)=1$. Этот случай, представляет собой функцию вероятностей вырожденного распределения, у которого вся вероятностная масса сосредоточена в нуле. Аналогично в 3-м, 4-м и 5-м столбцах вычисляются условные вероятности с.в. S: $P(S=s\,|\,N=n)$ для $N = 1$, 2 и 3, соответственно.

Рассмотрим 3-й столбец ($N = 1$).

$$P(S=1\,|\,N=1)=0{,}5; \quad P(S=2\,|\,N=1)=0{,}4; \quad P(S=3\,|\,N=1)=0{,}1.$$

Рассмотрим 4-й столбец (N = 2).

$P(S=2 \mid N=2)=0{,}5^2=0{,}25;$ $P(S=3 \mid N=2)=2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4=0{,}40;$

$P(S=4 \mid N=2)=2\cdot 0{,}5\cdot 0{,}1+0{,}4^2=0{,}26;$ $P(S=5 \mid N=2)=2\cdot 0{,}4\cdot 0{,}1=0{,}08;$

$P(S=6 \mid N=2)=0{,}1^2=0{,}01.$

Рассмотрим 5-й столбец (N = 3).

$$P(S=3 \mid N=3)=0{,}5^2=0{,}125;$$
$$P(S=4 \mid N=3)=3\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}4=0{,}300;$$
$$P(S=5 \mid N=3)=3\cdot 0{,}5^2\cdot 0{,}1+3\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4^2=0{,}315;$$
$$P(S=6 \mid N=3)=6\cdot 0{,}5\cdot 0{,}4\cdot 0{,}1+0{,}4^3=0{,}184;$$
$$P(S=7 \mid N=3)=3\cdot 0{,}5\cdot 0{,}1^2+3\cdot 0{,}4^2\cdot 0{,}1=0{,}063;$$
$$P(S=8 \mid N=3)=3\cdot 0{,}4\cdot 0{,}1^2=0{,}012;$$
$$P(S=9 \mid N=3)=0{,}1^3=0{,}001.$$

Значения в 6-м столбце дает величину полной вероятности для с.в. S согласно формуле:

$$f_S(x)=P(S=x)=\sum_{n=0}^{3}P(S=x \mid N=n)\cdot P(N=n).$$

Наконец 7-й столбец дает значение интегральной функции вероятностей с.в. S:

$$F_S(x)=\sum_{y=0}^{x}f_S(y).$$

Для вычисления математического ожидания и дисперсии суммарных выплат S используем данные 1-го и 6-го столбцов таблицы, тогда соответствующие значения ES и DS равны:

$$ES=\sum_{x=0}^{9}x\cdot f_S(x)=2{,}72;\qquad ES^2=\sum_{x=0}^{9}x^2\cdot f_S(x)=10{,}22;\qquad DS=ES^2-(ES)^2=2{,}8216.$$

Таким образом

$$P(S>ES)=P(S>2{,}72)=P(S\geq 3)=0{,}315.$$

Следующий метод решения задачи использует производящие функции.

Решение 2.

Производящие функции числа страховых случаев $\pi(u)\equiv Eu^N$ и величины ущерба в отдельном договоре при наступлении страхового случая $g(u)\equiv Eu^X$, даются следующими выражениями:

$$\pi(u)=Eu^N=\sum_{n=0}^{3}p_n\cdot u^n=0{,}1\mathrm{u}^0+0{,}3\mathrm{u}^1+0{,}4\mathrm{u}^2+0{,}2\mathrm{u}^3=0{,}1\cdot(1+3\mathrm{u}+4\mathrm{u}^2+2\mathrm{u}^3).$$

$$g(u) = Eu^X = \sum_{x=1}^{3} p_x \cdot u^x = 0{,}5\mathrm{u}^1 + 0{,}4\mathrm{u}^2 + 0{,}1\mathrm{u}^3 = 0{,}1\mathrm{u} \cdot (5 + 4\mathrm{u} + \mathrm{u}^2).$$

Величина суммарных потерь $S = X_1 + ... + X_N$ является целочисленной случайной величиной. Поэтому мы будем характеризовать ее распределение (как и распределение размера индивидуальных потерь) производящей функцией $G(u) \equiv Eu^S$. По формуле полного математического ожидания мы имеем:

$$G(u) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot E[u^{X_1 + X_2 + ... + X_N} \mid N = n] = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot E[u^{X_1 + X_2 + ... + X_n}] =$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot \left(E[u^{X_i}]\right)^n = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot \left(g(u)\right)^n = \pi\left(g(u)\right).$$

Соответствующая производящая функция для с.в. S равна:

$$G(u) = 0{,}1 \cdot \left(1 + 3g(u) + 4g(u)^2 + 2g(u)^3\right) = 0{,}1 \cdot [1 + 0{,}3u(5 + 4u + u^2) +$$
$$+ 0{,}04u^2(5 + 4u + u^2)^2 + 0{,}002u^3(5 + 4u + u^2)^3] = 0{,}1 \cdot [1 + 1{,}5u + 1{,}2u^2 +$$
$$+ 0{,}3u^3 + u^2 + 1{,}6u^3 + 1{,}04u^4 + 0{,}32u^5 + 0{,}04u^6 + 0{,}25u^3 + 0{,}6u^4 + 0{,}63u^5 +$$
$$+ 0{,}368u^6 + 0{,}126u^7 + 0{,}024u^8 + 0{,}002u^9) = 0{,}1 + 0{,}15u + 0{,}22u^2 +$$
$$+ 0{,}215u^3 + 0{,}164u^4 + 0{,}095u^5 + 0{,}0408u^6 + 0{,}0126u^7 + 0{,}0024u^8 + 0{,}0002u^9$$

Отсюда дифференцированием по u в точке $u = 1$ можно получить среднее значение суммарных потерь ES:

$$G'(u) = 0{,}15 + 0{,}44u + 0{,}645u^2 + 0{,}656u^3 + 0{,}475u^4 + 0{,}2448u^5 +$$
$$+ 0{,}0882u^6 + 0{,}0192u^7 + 0{,}0016u^8. \qquad G'(u = 1) = ES = 2{,}72$$

Аналогично определим дисперсию суммарных выплат S:

$$G''(u) = 0{,}44 + 1{,}29u + 1{,}968u^2 + 1{,}9u^3 + 1{,}224u^4 +$$
$$+ 0{,}5292u^5 + 0{,}1344u^6 + 0{,}0128u^7. \qquad G''(u = 1) = 7{,}4984.$$
$$DS = G''(1) + G'(1) - [G'(1)]^2 = 2{,}82.$$

Кроме того, коэффициенты при степенях u дают распределение вероятностей случайной величины S, что совпадает со значениями, приведенными в таблице. Поэтому искомая вероятность $P(S > ES)$ равна

$$P(S > 2{,}72) = P(S \geq 3) = 1 - P(S = 0) - P(S = 1) - P(S = 2) = 0{,}315.$$

Наконец решим задачу, используя операцию свертки.

Решение 3.

Для того чтобы найти функцию распределения с.в. S, мы рассмотрим события {N=n} и воспользуемся формулой полной вероятности:

$$F_S(x) = P(S \le x) = \sum_{n=0}^{\infty} P(S \le x \mid N = n) \cdot P(N = n) =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} P(X_1 + X_2 + ... + X_n \le x) \cdot P(N = n) \qquad (3.3.4)$$

Применяя итеративный процесс взятия свертки, можно записать:

$$P(X_1 + X_2 + ... + X_n \le x) = [P * P * P * ... * P](x) = P^{*n}(x),$$

т.е. получить n-кратную свертку функции распределения P.

Напомним, что

$$P^{*0}(x) = \begin{cases} 1, & x \ge 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}$$

Таким образом, формула (4) приобретает вид:

$$F_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} P^{*n}(x) \cdot P(N = n). \qquad (3.3.5)$$

Если распределение индивидуальных страховых выплат является дискретным с функцией вероятностей $p(x) = P(X = x)$, то распределение суммарных страховых выплат также дискретно. По аналогии с рассуждениями, проведенными выше, функция вероятностей с.в. S может быть получена непосредственно:

$$f_S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p^{*n}(x) \cdot P(N = n), \qquad (3.3.6)$$

где

$$p^{*n}(x) = [p * p * p * ... * p](x) = p(X_1 + X_2 + ... + X_n = x),$$
$$p^{*0}(x) = \begin{cases} 0, & x \ne 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases} \qquad (3.3.7)$$

Вернемся к решению нашей задачи.

Столбец (2) представляет собой функцию вероятностей вырожденного распределения, у которого вся вероятностная масса сосредоточена в нуле ($p^{*0}(0) = 1$). Столбец (3) дает функцию вероятностей случайной величины индивидуальной страховой выплаты.

$$p^{*1}(x) = \sum_{y}^{x} p^{*0}(x - y) p(y);$$
$$p^{*1}(0) = p^{*0}(0) p(0) = 0;$$
$$p^{*1}(1) = p^{*0}(1) p(0) + p^{*0}(0) p(1) = p(1) = 0{,}5.$$
$$p^{*1}(2) = p^{*0}(2) p(0) + p^{*0}(1) p(1) + p^{*0}(0) p(2) = p(2) = 0{,}4$$

$p^{*1}(3) = p^{*0}(3)p(0) + p^{*0}(2)p(1) + p^{*0}(1)p(2) + p^{*0}(0)p(3) = p(3) = 0{,}1.$

$p^{*1}(x > 3) = 0.$

Рассмотрим 4-й столбец®.

$$p^{*2}(x) = \sum_{y}^{x} p^{*1}(x-y)p(y);$$

$p^{*2}(0) = p^{*1}(0)p_0 = 0;$

$p^{*2}(1) = p^{*1}(1)p_0 + p^{*1}(0) = 0.$

$p^{*2}(2) = p^{*1}(2)p_0 + p^{*1}(1)p_1 + p^{*1}(0)p_2 = 0{,}5p_1 = 0{,}25.$

$p^{*2}(3) = p^{*1}(3)p_0 + p^{*1}(2)p_1 + p^{*1}(1)p_2 + p^{*1}(0)p_3 = 0{,}4p_1 + 0{,}5p_2 = 0{,}40.$

$$p^{*2}(4) = p^{*1}(4)p_0 + p^{*1}(3)p_1 + p^{*1}(2)p_2 + p^{*1}(1)p_3 + p^{*1}(0)p_4 = \\ = 0{,}1p_1 + 0{,}4p_2 + 0{,}5p_3 = 0{,}26.$$

$$p^{*2}(5) = p^{*1}(5)p_0 + p^{*1}(4)p_1 + p^{*1}(3)p_2 + p^{*1}(2)p_3 + p^{*1}(1)p_4 + p^{*1}(0)p_5 = \\ = 0{,}1p_2 + 0{,}4p_3 = 0{,}08.$$

$$p^{*2}(6) = p^{*1}(6)p_0 + p^{*1}(5)p_1 + p^{*1}(4)p_2 + p^{*1}(3)p_3 + p^{*1}(2)p_4 + \\ + p^{*1}(1)p_5 + p^{*1}(0)p_6 = 0{,}1p_3 = 0{,}01.$$

$p^{*2}(x > 6) = 0.$

Рассмотрим 5-й столбец.

$$p^{*3}(x) = \sum_{y}^{x} p^{*2}(x-y)p(y).$$

$p^{*3}(0) = p^{*2}(0)p_0 = 0.$

$p^{*3}(1) = p^{*2}(1)p_0 + p^{*2}(0)p_1 = 0.$

$p^{*3}(2) = p^{*2}(2)p_0 + p^{*2}(1)p_1 + p^{*2}(0)p_2 = 0.$

$p^{*3}(3) = p^{*2}(3)p_0 + p^{*2}(2)p_1 + p^{*2}(1)p_2 + p^{*2}(0)p_3 = 0{,}25p_1 = 0125.$

$$p^{*3}(4) = p^{*2}(4)p_0 + p^{*2}(3)p_1 + p^{*2}(2)p_2 + p^{*2}(1)p_3 + p^{*2}(0)p_4 = \\ = 0{,}4p_1 + 0{,}25p_2 = 0{,}300.$$

$$p^{*3}(5) = p^{*2}(5)p_0 + p^{*2}(4)p_1 + p^{*2}(3)p_2 + p^{*2}(2)p_3 + p^{*2}(1)p_4 + p^{*2}(0)p_5 = \\ = 0{,}26p_1 + 0{,}4p_2 + 0{,}25p_3 = 0{,}315.$$

® Для сокращения записи будем обозначать *p(y)* как p_y.

$$p^{*3}(6) = p^{*2}(6)p_0 + p^{*2}(5)p_1 + p^{*2}(4)p_2 + p^{*2}(3)p_3 + p^{*2}(2)p_4 +$$
$$+ p^{*2}(1)p_5 + p^{*2}(0)p_6 = 0{,}08p_1 + 0{,}26p_2 + 0{,}4p_3 = 0{,}184.$$
$$p^{*3}(7) = p^{*2}(7)p_0 + p^{*2}(6)p_1 + p^{*2}(5)p_2 + p^{*2}(4)p_3 + p^{*2}(3)p_4 + p^{*2}(2)p_5 +$$
$$+ p^{*2}(1)p_6 + p^{*2}(0)p_7 = 0{,}01p_1 + 0{,}08p_2 + 0{,}26p_3 = 0{,}063.$$
$$p^{*3}(8) = p^{*2}(8)p_0 + p^{*2}(7)p_1 + p^{*2}(6)p_2 + p^{*2}(5)p_3 + p^{*2}(4)p_4 + p^{*2}(3)p_5 +$$
$$+ p^{*2}(2)p_6 + p^{*2}(1)p_7 + p^{*2}(0)p_8 = 0{,}01p_2 + 0{,}08p_3 = 0{,}012.$$
$$p^{*3}(9) = p^{*2}(9)p_0 + p^{*2}(8)p_1 + p^{*2}(7)p_2 + p^{*2}(6)p_3 + p^{*2}(5)p_4 + p^{*2}(4)p_5 +$$
$$+ p^{*2}(3)p_6 + p^{*2}(2)p_7 + p^{*2}(1)p_8 + p^{*2}(0)p_9 = 0{,}01p_3 = 0{,}001.$$

При вычислении значений 6-го столбца используем формулу (3.3.6). В этой процедуре для удобства функция вероятностей с.в. N записана в последней строке таблицы. Наконец элементы столбца (7) – это частичные суммы столбца (6).

Как видно из решения, рассмотренной задачи, актуарию необходим выбор законов распределения числа страховых случаев N и величины страховых выплат X. Рассмотрим это более подробно.

Законы распределения с.в. N и X.

Многочисленные исследования показали, что реальные данные из практики страхования о числе страховых случаев за фиксированный промежуток времени (наряду с общим биномиальным) хорошо описываются с помощью пуассоновского или отрицательного биномиального распределения. Если N имеет *распределение Пуассона*

$$P(N = n) = \frac{\lambda^n}{n!} \cdot e^{-\lambda}, \quad n = 0,1,2,..., \quad \lambda > 0,$$

то несложно получить следующие выражения:

$$EN = DN = \lambda.$$

При пуассоновском распределении с.в. N распределение с.в. S называется *сложным пуассоновским распределением,* а числовые макрохарактеристики в этом случае имеют вид:

$$ES = \lambda \cdot \nu_1; \qquad DS = \lambda \cdot \nu_2; \ \text{где}$$
$$\nu_k = EX^k \ - k\text{-й начальный момент с.в. } X.$$

Сложное пуассоновское распределение имеет ряд привлекательных свойств, поэтому часто применяется в актуарных расчетах. Однако пуассоновское распределение не годится, если дисперсия числа страховых случаев превышает его среднее. Последнюю ситуацию можно объяснить нарушением однородности договоров по параметру λ. Данную неоднородность можно учесть введением *процедуры рандомизации*.

Предположим, что параметр пуассоновского распределения является случайной величиной Λ с функцией плотности $u(\lambda)$, $\lambda > 0$, а условное распределение с.в. N при условии $\Lambda = \lambda$ является пуассоновским с параметром λ, тогда мы получаем семейство распределений для числа страховых случаев. Этот подход может оказаться полезным при рассмотрении распределения с.в. N в целом ряде случаев. Например, рассмотрим группу страхователей, такую, что страховые случаи в различных ее подгруппах возникают в соответствии с пуассоновскими распределениями, имеющими различные значения параметра λ для разных подгрупп. Если обозначить через $u(\lambda)$ относительную частоту значений параметра λ, то можно, используя формулу полной вероятности, получить

$$P(N=n)=\int_0^\infty P(N=n\mid\Lambda=\lambda)\cdot u(\lambda)d\lambda=\int_0^\infty\frac{\lambda^n}{n!}\cdot e^{-\lambda}u(\lambda)d\lambda.$$

Далее не сложно получить:

$$E[N]=E[E[N\mid\Lambda]]=E[\Lambda]$$

$$D[N]=E[D[N\mid\Lambda]]+D[E[N\mid\Lambda]]=E[\Lambda]+D[\Lambda]$$

Если в качестве $u(\lambda)$ выбрать гамма-функцию с параметрами α и β:

$$u(\lambda)=\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda},\qquad \lambda>0,\quad где\ \ \Gamma(\alpha)=\int_0^\infty y^{\alpha-1}e^{-y}dy,$$

то для с.в. N получим распределение, которое носит название *отрицательного биномиального распределения*®

$$P(N=n)=C_{n+r-1}^n\cdot p^rq^n=\binom{n+r-1}{n}p^rq^n,$$

Распределение случайной величины S в этом случае носит название *сложного отрицательного биномиального распределения*. Для с.в. N числовые макрохарактеристики в этом распределении имеют вид:

$$EN=\frac{rq}{p},\quad DN=\frac{rq}{p^2}.$$

® Отрица́тельное биномиа́льное распределе́ние в теории вероятностей - это распределение дискретной случайной величины ***n*** равной количеству произошедших неудач в последовательности испытаний Бернулли с вероятностью успеха ***p***, проводимой до ***r*** - го успеха.

Параметры отрицательного биномиального распределения связаны с параметрами гамма функции следующими соотношениями:

$$r = \alpha, \quad p = \frac{\beta}{1+\beta}, \quad q = 1 - p = \frac{1}{1+\beta}.$$

Для распределения размеров индивидуальных страховых возмещений X_i имеется гораздо больше возможностей, но все же класс возможных распределений не слишком широк (дискретные распределения, экспоненциальное распределение, распределение Парето, гамма-распределение и, возможно, еще 3-4 типа распределений). Особенно важен случай, когда X_i принимают дискретные значения. В сущности, этот частный случай покрывает все реальные ситуации, так как на практике страховые возмещения обычно измеряются целыми рублями (или даже округляются до сотен или тысяч рублей).

Специфические предположения о характере распределений случайных величин N и X позволяют установить ряд дополнительных свойств модели коллективного риска и сделать общие формулы более содержательными. В частности свойства сложного пуассоновского распределения можно использовать в случае неоднородного портфеля. Если портфель сильно неоднороден и невозможно провести процедуру рандомизации, тогда необходимо разбить его на несколько однородных портфелей, вычислить для них соответствующие характеристики и законы распределений. Соответствующий закон распределения суммарных выплат для всего портфеля будет определяться согласно следующей теоремы:

Теорема 1.

Если $S_1, S_2, \ldots, S_m$ – взаимно независимые случайные величины, такие, что Si имеет сложное пуассоновское распределение с параметром λ_i и функцией распределения величины страховых выплат $F_i(x)$, $i = 1,2,\ldots,m$, то с.в. $S = S_1 + S_2 + \ldots + S_m$ имеет сложное пуассоновское распределение с

$$\lambda = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i. \tag{3.3.8}$$

$$F(x) = \sum_{i=1}^{m} \frac{\lambda_i}{\lambda} \cdot F_i(x). \tag{3.3.9}$$

Аппроксимация распределения суммарных выплат

Как показывают формулы (3.3.6) и (3.3.7) для получения законов распределения суммарных выплат необходимо иметь выражения для сверток распределения индивидуальных страховых возмещений. Как показал предыдущий пример получение сверток для произвольных распределений достаточно громоздкая процедура. Поэтому, когда возможно, разумно выбирать то семейство распределений, для которого свертки легко найти либо в виде формулы, либо численно. Например, если величина страховых выплат имеет нормальное распределение со средним μ и дисперсией σ^2, то его n –ая свертка имеет нормальное распределение со средним $n\mu$ и дисперсией $n\sigma^2$. К сожалению, большинство распределений для индивидуальных страховых возмещений таким простым свойством не обладают.

Часто для решений задач нахождения закона распределения суммарных выплат прибегают к аппроксимирующим формулам. Приведем две из них без доказательства.

Теорема 2.

Если с.в. S имеет сложное пуассоновское распределение с параметром λ и с функцией распределения индивидуальных страховых возмещений $F(x)$, то распределение с.в.

$$Z = \frac{S - \lambda \nu_1}{\sqrt{\lambda \nu_2}}$$

сходится при $\lambda \to \infty$ к стандартному нормальному распределению.

Теорема 3.

Если с.в. S имеет сложное отрицательное биномиальное распределение с параметром α, p и с функцией распределения индивидуальных страховых возмещений $F(x)$, то распределение с.в.

$$Z = \frac{S - r(q/p)\cdot \nu_1}{\sqrt{r(q/p)\cdot \nu_2 + r(q/p)^2 \cdot \nu_1^2}}$$

сходится при $r \to \infty$ к стандартному нормальному распределению.

3.4. Динамические модели риска.

В предыдущем разделе была рассмотрена *коллективная модель* риска (статический вариант). В этой модели предполагается, что все премии вносятся сразу в начале действия договора и в полном объеме. В дальнейшем требовалось определить рисковую премию, необходимую рисковую надбавку и величину резервного капитала для заданной вероятности неразорения. В реальной ситуации премии поступают не одновременно, т.е. являются функцией времени *П(t)*. В этом случае задача меняется и решается она в рамках динамического варианта коллективной модели или *динамической модели риска (ДМР)*. Рассмотрим это подробнее. Рисковый капитал страховой компании, предназначенный для выплат по искам, имеет вид:

$$U(t) = u + \Pi(t) - S(t) \tag{3.4.1}$$

где *U(t)* - рисковый капитал в момент времени *t*, *П(t)* – величина премий, собранных к моменту *t*, *S(t)* – величина суммарных страховых выплат к моменту *t*, а *u* = *U(0)*.

В некоторые моменты времени рисковый капитал может принять отрицательное значение. Момент времени *T*, когда это произошло впервые, называют *моментом разорения*. Данное понятие не надо путать с понятием *банкротства,* т.к. после проведения определенных мероприятий рисковый капитал страховой компании может опять стать положительным (например, заем определенной суммы в банке). Состояние разорения в *ДМР* следует рассматривать лишь условно, как математическую абстракцию: на практике страховая компания с капиталом -1$ еще не разорена, а с капиталом +1$ вряд ли может быть признана платежеспособной. Таким образом, момент разорения в динамической модели риска определяется следующим выражением:

$$T = \inf\left(t : t \geq 0 \ \text{и} \ U(t) < 0\right) \tag{3.4.2}$$

Страховую компанию, с практической точки зрения, интересует вероятность разорения (*ruin probability*) за время *t*:

$$\psi(u,t) = P\left(T \leq t\right)$$

Определение вероятности разорения и его времени наступления является одной из важнейших задач в классической теории риска. Однако, данная задача достаточно сложна с математической точки зрения, поэтому на практике решают задачу определения вероятности разорения за бесконечное время:

$$\psi(u) = P(T < \infty) \tag{3.4.3}$$

Следует отметить, что $\psi(u)$ является верхней границей $\psi(u,t)$. Кроме того, на практике в теории риска работают не с вероятностью разорения, а с вероятностью неразорения:

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u) = P(U(t) \geq 0,\ \text{для}\ \ t \geq 0) \tag{3.4.4}$$

Правильное решение поставленной задачи позволяет получить важный инструмент в управлении страховой компании, который служит индикатором надежности процесса для рискового капитала и который может предупредить заранее об опасной степени риска.

Поскольку динамическая модель риска, как модель, отличается от действительности, следует отметить те упрощения, которые в ней введены. Это, в первую очередь, отсутствие учета изменения стоимости денег, инфляции, а также возможные изменения со временем законов распределения рассматриваемых случайных величин.

Модель Крамера - Лундберга.

Одним из признанных основоположников динамической модели риска является Ф. Лундберг. Именно в его работах еще в начале прошлого века были впервые поставлены задачи нахождения вероятности разорения и даны оценки этой вероятности. В дальнейшем в работах его соотечественника Г. Крамера модель получила последующее развитие, где были сформулированы основы теории риска как математической модели. Модель Крамера – Лундберга несмотря на свою простоту до сих пор широко используется в теории риска, именно благодаря своей прозрачности.

Рассмотрим данную модель подробнее. В ней предполагается детерминированный процесс поступления премий с интенсивностью c, а уравнение для рискового капитала имеет вид:

$$U(t) = u + ct - S(t), \quad t \geq 0. \tag{3.4.5}$$

где $S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} X_i$, X_i – величина i - ой выплаты до момента времени t, $N(t)$ – число страховых выплат до момента времени t.

<u>В основе модели лежат следующие предположения</u>:

1. X_i - независимые одинаково распределённые случайные величины, с функцией распределения $F(x)$ и имеющие конечные математическое ожидание и дисперсию;

2. случайные величины $T_1, T_2, \ldots$ представляют собой моменты наступления страховых случаев: $T_1 < T_2 < \ldots < T_i \ldots;$

3. промежутки времени τ_i ($\tau_1 = T_1$, $\tau_2 = T_2 - T_1, \ldots$, $\tau_i = T_i - T_{i-1.}$), через которые предъявляются страховые иски, являются независимыми случайными величинами, одинаково распределёнными по экспоненциальному закону с параметром λ:

$$P(T_i - T_{i-1} \geq t) = e^{-\lambda t}.$$

4. X_i и τ_i независимы.

Из 3 предпосылки следует, что $N(t)$ – представляет собой пуассоновский процесс с некоторой постоянной интенсивностью λt, которая определяет количество выплат, произошедших в интервале времени $[0, t]$. Характерным свойством пуассоновского процесса является отсутствие «*памяти*», т.е. наступление страхового события в последующий момент не зависит от истории процесса. Преимуществом данного процесса является его математическая простота, а недостаток состоит в не реалистичности такого предположения. Суммарный размер выплат $S(t)$ при пуассоновском процессе наступления страховых случаев представляет так называемый сложный пуассоновский процесс. Типичная реализация процесса рискового капитала в модели Крамера – Лундберга представлена на рисунке.

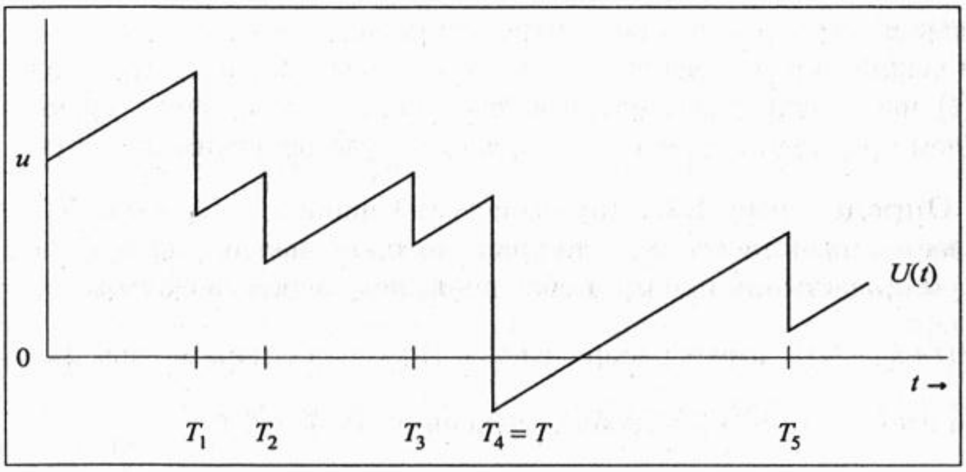


График процесса рискового капитала $U(t)$.

Выведем уравнение для вероятности неразорения $\varphi(u)$ в модели Крамера - Лундберга. В течение малого промежутка времени Δt поступают премии величиной $c\Delta t$, кроме того возможны следующие несовместные события:

- отсутствие скачка у процесса $N(t)$ с вероятностью $(1-\lambda\Delta t)+o(\Delta t)$;
- один скачок у процесса $N(t)$ с вероятностью $\lambda\Delta t+o(\Delta t)$.

Согласно формуле полной вероятности можно записать:

$$\varphi(u)=(1-\lambda\Delta t)\varphi(u+c\Delta t)+\lambda\Delta t\cdot\int_0^{u+c\Delta t}\varphi(u+c\Delta t-x)dF(x)+o(\Delta t),$$

где $F(x)$ – функция распределения величины выплат X.

Учитывая, что $\varphi(u+c\Delta t)=\varphi(u)+\varphi'(u)c\Delta t+o(\Delta t)$, получим:

$$\varphi(u)=\varphi(u)+\varphi'(u)c\Delta t-\lambda\Delta t\varphi(u+c\Delta t)+\lambda\Delta t\int_0^{u+c\Delta t}\varphi(u+c\Delta t-x)dF(x)+o(\Delta t)$$

После деления на Δt и предельного перехода $\Delta t\to 0$ получим следующее интегро-дифференциальное уравнение:

$$\lambda\varphi(u)=c\varphi'(u)+\lambda\int_0^u\varphi(u-x)dF(x) \tag{3.4.6}$$

Решение данного уравнения в общем случае является чрезвычайно сложной задачей. Для показательного распределения $F(x)=1-\exp(-x/\mu)$, где $\mu=EX$, решение данного интегро-дифференциального уравнения можно получить в явном виде. Решим уравнение (3.4.6), используя преобразование Лапласа. Для этого запишем некоторые операционные соотношения для преобразования Лапласа (оригинал => изображение):

$$\begin{array}{lcl}\varphi(u) & \Rightarrow & f(s)\\ \varphi'(u) & \Rightarrow & s\cdot f(s)-\varphi(0)\\ \displaystyle\int_0^u\varphi(u-x)\cdot e^{-ax}dx & \Rightarrow & f(s)\cdot\dfrac{1}{s+a}\end{array}$$

Для изображения имеем следующее выражение:

$$f(s)=\varphi(0)\cdot\frac{s+\mu^{-1}}{s\cdot(s+\alpha)},\ \ где\,\alpha=\mu^{-1}-\frac{\lambda}{c}.$$

Обратное преобразование Лапласа дает выражение для оригинала:

$$\varphi(u) = \varphi(0) \cdot \left(A + Be^{-\alpha u}\right), \ где \ A = \left(1 - \frac{\lambda\mu}{c}\right)^{-1}, \ A + B = 1. .$$

Учитывая, что $\varphi(\infty) = 1$, получим

$$\varphi(u) = 1 - \frac{\lambda\mu}{c} e^{-\alpha u} .$$

Данное выражение можно упростить, если вспомнить, что согласно принципов эквивалентности обязательств страховщика и страхователя и финансовой устойчивости страховой компании, страховые премии $П(t)$ на временном промежутке $[0, t\,]$ вычисляются следующим образом:

$$П(t) = (1+\theta)ES = (1+\theta)EN(t) \cdot EX$$

где θ – относительная рисковая надбавка. Такая структура премии означает, что в среднем общие премии должны быть больше, чем суммарные выплаты по искам (в случае равенства премия называется *рисковой премией,* а сам принцип исчисления рисковой премии - *принципом эквивалентности обязательств сторон*). Учитывая, что $П(t) = ct$, $EN(t)=\lambda t$, $EX=\mu$, получим:

$$c = \lambda\mu(1+\theta) \tag{3.4.7}$$

Окончательное выражение для вероятности неразорения приобретает вид:

$$\varphi(u) = 1 - \frac{1}{1+\theta} \exp\left(-\frac{\theta}{1+\theta} \cdot \frac{u}{\mu}\right) \tag{3.4.8}$$

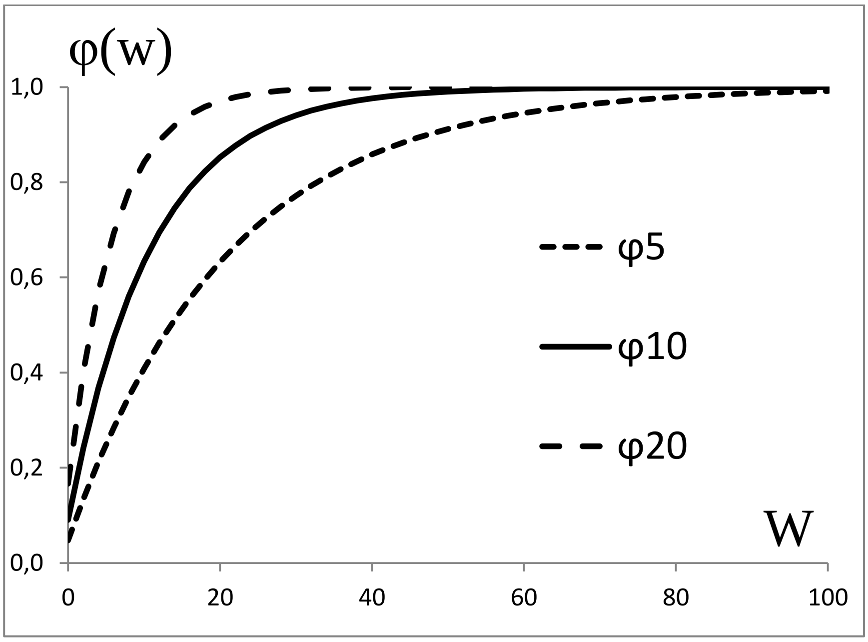
Если отнормировать начальный капитал на среднюю величину иска μ, то для безразмерного начального капитала $w = u/\mu$, вероятность неразорения будет функцией одного параметра – θ.

$$\varphi(w) = 1 - (1-\alpha)e^{-\alpha w}, \ где \ \alpha = \varphi(0) = \frac{\theta}{1+\theta}. \tag{3.4.9}$$

На приводимом ниже графике, представлены кривые вероятности неразорения $\varphi(w)$ для нескольких значений относительной рисковой надбавки (указаны цифрами в %).

Замечание.

Примечательно, что $\varphi(0)$ зависит только от относительной рисковой надбавки θ и не зависит от структуры распределения величин страховых выплат. Следует отметить также, что при $u = 0$ вероятность неразорения отлична от нуля. Это объясняется тем, что ответственность страховщика начинается не с момента заключения договора, а с момента оплаты премии. Поэтому поступление премии опережает возникновение обязанности возмещения ущерба. Таким образом, даже при отсутствии собственного начального капитала, резервный фонд отличен от нуля, так как он содержит собранные премии.



***Неравенство Лундберга*.**

Как было сказано выше, интегро-дифференциальное уравнение (6) в общем случае не имеет решения в явном виде. Лундбергом была предложена оценка верхней границы вероятности разорения $\psi(u)$ (нижней границы вероятности неразорения $\varphi(u)$). Для формулировки этого неравенства требуется дополнительное требование, которое часто называют *условием Крамера.*

Условие Крамера *(Определение коэффициента Лундберга).*

Существует единственный положительный корень R уравнения:

$$\lambda \cdot m_X(r) = \lambda + cr \tag{3.4.10}$$

Через $m_X(r)$ обозначена производящая функция моментов, т.е. $m_X(r)=Ee^{rX}$. Параметр R носит название *коэффициента Лундберга* (*adjustment coefficient*). Иногда условие Крамера формулируют следующими выражениями:

$$m_X(r) = 1 + (1+\theta)\mu \cdot r\,. \tag{3.4.10a}$$

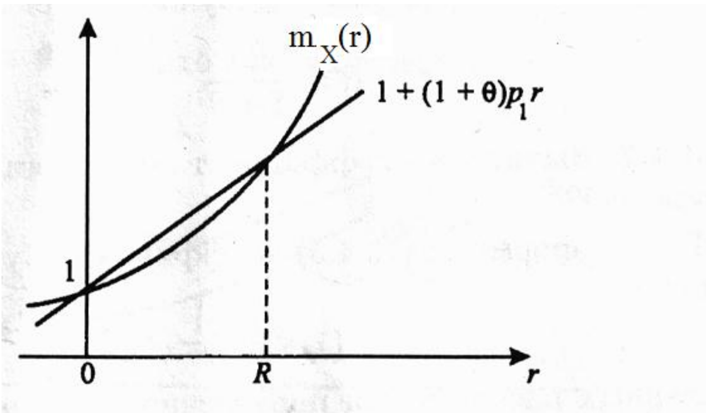
$$m_S(r) = \exp\{\lambda(m_X(r) - 1)\}. \tag{3.4.10b}$$

Доказательство.

Пусть (-∞,γ) обозначает наибольший открытый интервал, для которого существует производящая функция моментов распределения *F(x)*. Предположим, что γ > 0. В случае показательного распределения с параметром β число γ равняется β, а для любого распределения, для которого величина страховых выплат ограничена, число γ равно +∞. Предположим, что $m_X(r)$ стремится к +∞ при $r \to \gamma$. Рассмотрим период длины $t > 0$, где размер собранных премий равен ct, а $S(t)$ представляет сложный пуассоновский процесс с $EN(t) = \lambda t$. В качестве коэффициента Лундберга выбирается наименьший положительный корень уравнения

$$m_{S(t)-ct}(r) = Ee^{r(S(t)-ct)} = e^{-rct} m_{S(t)}(r) = e^{-rct} e^{-\lambda t(m_X(r)-1)} = 1$$

Таким образом, $m_X(r) = 1 + (1+\theta)\mu \cdot r$, что соответствует уравнению (3.4.10a). Его правая часть является линейной функцией от r, а левая часть – положительная возрастающая функция, которая, согласно предположению, стремится к +∞ при $r \to \gamma$. При определенных условиях регулярности уравнение (3.4.10a) для коэффициента Лундберга имеет единственное положительное решение.



Определение коэффициента Лундберга *R*

В самом деле, $m_X(r)$ строго выпукла вниз, поскольку $m_X''(r) = E\left[X^2 e^{rX}\right] > 0$, $m_X'(0) < (1+\theta)\mu$. Кроме того, за исключением отдельных случаев, $m_X(r)$ стремится к бесконечности®. Отметим, что при $\theta \to 0$ предел величины R равен 0, а при $\theta \to \infty$ значение R приближается к точке пересечения оси r с асимптотой функции $m_X(r)$, т.е. к ∞.

® Тот факт, что это предположение для конечных γ не всегда выполняется, иллюстрируется отрицательным гауссовским распределением.

Мартингальная интерпретация коэффициента Лундберга.

Коэффициент Лундберга R обладает тем свойством, что среднее $Ee^{-RU(t)}$ не зависит от t**.** Другими словами, случайный процесс $e^{-RU(t)}$ является *мартингалом***.** Этот факт можно доказать следующим образом: поскольку $U(t) = u + ct - S(t)$ и случайная величина $S(t)$ имеет сложное пуассоновское распределение с параметром λt, из уравнения (3.4.10а) получаем

$$Ee^{-R\cdot U(t)} = Ee^{-R(u+ct-S(t))} = e^{-Ru} \cdot \left[e^{-Rc} \exp\{\lambda m_X(R) - 1\}\right]^t = e^{-Ru}$$

Отметим, что если R заменить на любое другое вещественное число, то выражение в квадратных скобках не равно 1, так что коэффициент Лундберга - это в действительности единственное положительное вещественное число R, для которого случайный процесс $e^{-RU(t)}$ является мартингалом.

Теорема. (*Неравенство Лундберга*).

Для сложного пуассоновского процесса рискового капитала (3.4.5) при выполнении условия Крамера (3.4.10), вероятность разорения оценивается сверху, для любого u, следующим образом:

$$\psi(u) \le e^{-Ru} \quad . \tag{3.4.11}$$

Доказательство.

Очевидно, что разорение может наступить лишь в момент поступления некоторого требования, т.к. только в эти моменты происходят скачки процесса $U(t)$ вниз, а в промежутках капитал растет с постоянной скоростью. Обозначим $\psi_k(u)$, $k = 0,1,2,\ldots$, как вероятность того, что разорение произойдет не позднее момента возникновения k-го страхового случая. Очевидно, что $\psi_k(u) = 1$ при $u<0$. Поскольку $\psi_k(u) < \psi(u)$ для любого k и $\psi_k(u) \to \psi(u)$ при $k \to \infty$, достаточно доказать, что $\psi_k(u) \le e^{-Ru}$ при всех k. Этот факт устанавливается с помощью индукции по k. При $k = 0$ неравенство справедливо, поскольку

$$\psi_0(u) = \begin{cases} 1, & \text{если } u < 0 \\ 0, & \text{если } u \ge 0 \end{cases}$$

Предположим, что k–й страховой случай наступил в момент времени $t + dt$. Вероятность этого события, с точностью до $o(dt)$, равна $\lambda e^{-\lambda t}dt$. Пусть величина иска по этому случаю равна x, а вероятность выплаты такого размера равна $dF(x)$. Тогда капитал в этот момент времени равен $u + ct - x$. При сделанных предположениях формула полной вероятности приводит к равенству:

$$\psi_k(u) = \int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt \int_0^\infty \psi(u + ct - x) dF(x) \tag{3.4.12}$$

Предположим, что соотношение $\psi_{k-1}(u) \le e^{-Ru}$ верно. Докажем справедливость аналогичного неравенства для $\psi_k(u)$. Согласно предположению индукции правая часть уравнения (3.4.12) не превосходит

$$\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda t} dt \int_0^\infty e^{-R(u+ct-x)} dF(x) = e^{-Ru} \int_0^\infty \lambda e^{-t(\lambda + Rc)} dt \int_0^\infty e^{Rx} dF(x)$$

Интегрирование приводит к следующему результату

$$e^{-Ru} \frac{\lambda}{\lambda + cR} m_X(R) = e^{-Ru}$$

(последнее равенство является следствием условия Крамера).

В рамках классической модели Крамера-Лундберга получено также точное выражение для вероятности разорения.

Теорема.

Если $U(t)$ является процессом рискового капитала, причем соответствующий процесс суммарных страховых выплат $S(t)$ является сложным пуассоновским, и если $c > \lambda\mu$, т.е. рисковая надбавка положительна, то для $u \ge 0$ имеет место следующее равенство [5]:.

$$\psi(u) = \frac{e^{-Ru}}{E[e^{-RU(T)} \mid T < \infty]}, \tag{3.4.13}$$

где $U(T)$ – резерв в момент разорения ($U < 0$), R – коэффициент Лундберга, определяемый из условия Крамера (3.4.10). В общем случае знаменатель в (3.4.13) не удается вычислить в явном виде, но т.к. $U < 0$, то величина знаменателя больше единицы и из (3.4.13) следует неравенство Лундберга (3.4.11).

Расчет коэффициента Лундберга

Определим коэффициента Лундберга для различных видов законов распределения страховых выплат – $F(x)$.

1. Показательное распределение - $f(x) = F'(x) = \mu^{-1}e^{-x/\mu}$. За основу возьмем условие Крамера в форме (3.4.10а).

$$1+(1+\theta)\mu \cdot r = m_X(r) = \int_0^\infty e^{rx} \cdot \mu^{-1} e^{-x/\mu} dx = \frac{1}{1-r\mu},$$

или, в форме квадратного уравнения по r,

$$(1+\theta)\mu^2 r^2 - \theta\mu r = 0.$$

Наименьший положительный корень данного уравнения является коэффициентом Лундберга и совпадает со значением полученным ранее:

$$R = \frac{\theta}{1+\theta} \cdot \mu^{-1}.$$

2. Нормальное распределение – $N(\mu, \sigma^2)$. За основу возьмем условие Крамера в форме (3.4.10а).

$$1+(1+\theta)\mu \cdot r = m_X(r) = \exp\left(\mu r + \frac{2\theta\mu}{\sigma^2}\right).$$

Предполагая выполнение условия $(1+\theta)\mu r << 1$, после логарифмирования получим:

$$R = \frac{2\theta\mu}{\sigma^2}.$$

<u>*Замечание*</u>. Для большинства распределений явных выражений для коэффициента Лундберга нет. Чтобы упростить решение уравнения (3.4.10а) численными методами, можно использовать тот факт, что $R \in [0, 2\mu_1/\mu_2]$.

РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Бауэрс Н. Л., и др. Актуарная математика (2-е.изд.). - М.: Янус-К, 2001.
2. Бойков А.В. Страхование и актуарные расчеты. – М.: РОХОС, 2004. – 96с.
3. Булинская Е.В. Теория риска и перестрахование. Части 1 и 2. Учебное пособие. Изд. мех.- мат. ф-та МГУ, Москва, 2001, 2006 г.
4. Бурроу, К. Основы страховой статистики. - М.: Анкил,1996.- 96 с.
5. Каас Р. и др. Современная актуарная теория риска.- М.: Янус-К, 2007.- 376 с..
6. Корнилов И.А. «Основы страховой математики». М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2004. - 400 с.
7. Рябикин В.И., и др. Страхование и актуарные расчёты./ – М.: Экономиста, 2006. – 459 с.
8. Сахирова Н.П. Страхование: учебное пособие. / – М.: Проспект, 2006. – 744 с.
9. Фалин Г.И., Фалин А.И. «Теория риска для актуариев в задачах» - М.:Мир. 2004. – 240 с.
10. Сокол П.В. Комментарий к Закону РФ «Об организации страхового дела в Российской Федерации» (постатейный).-М.:ЗАО «Юстицинформ», 2006.-200 с.

ОГЛАВЛЕНИЕ