Практическая работа

Решение задач оптимизации с использованием MS Excel

Для решения задач оптимизации широкое променение находят различные средства Excel.

В этом разделе рассмотрим команды:

1. Подбор параметров для нахождения значения, приводящего к требуемому результату.
2. Надстройку Поиск решения для расчета оптимальной величины по нескольким переменным и ограничениям;
3. Диспетчер сценариев для создания и оценки наборов сценариев «что – если» с несколькими вариантами исходных данных.

Подбор параметров

Основной командой для решения оптимизационных задач в Excel является команда Сервис/Подбор параметра. Эта команда определяет неизвестную величину, приводящую к требуемому результату.

Если команда Подбор параметра отсутствует в меню Сервис, выполните команду Сервис/Надстройка и установите флажок Пакет анализа в окне диалога Надстройка

Для работы с командой Подбор параметра необходимо подготовить лист, чтобы в листе находились:

- формула для расчета;
- пустая ячейка для искомого значения;
- другие величины, которые используются в формуле.

Ссылка на пустую ячейку должна обязательно присутствовать в формуле, так как именно она является переменной, значение которой ищет Excel.

Во время подбора параметра в переменную ячейку непрерывно заносятся новые значения, пока не будет найдено решение поставленной задачи.

Такой процесс называется итерацией, и продолжается он до тех пор, пока редактор не выполнит 100 попыток или не найдет решения, лежащее в пределах точности 0,001 от точного значения (настройка этих параметров осуществляется с помощью команды Сервис/Параметры, вкладка Вычисления)

Оптимизация с помощью команды Подбор параметров выполняется так:

1. Создайте лист, например, с формулой =B1*B2 в ячейке B3, пустой (переменной) ячейкой (B2) и другими данными (B1), которые могут понадобиться при вычислениях. Например, необходимо определить

количество книг по цене 23,75 грн., которые необходимо продать, чтобы объем продаж составил 10000,00 грн.

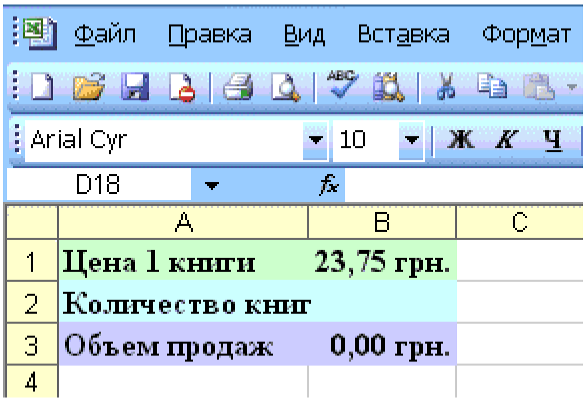


Рис. 1.

2. Выделите ячейку листа (В3), в которой содержится формула (эта ячейка появится в поле "Установить в ячейке" в окне диалога Подбор параметра). Выполните команду Сервис/Подбор параметра. Открывается окно диалога Подбор параметра.

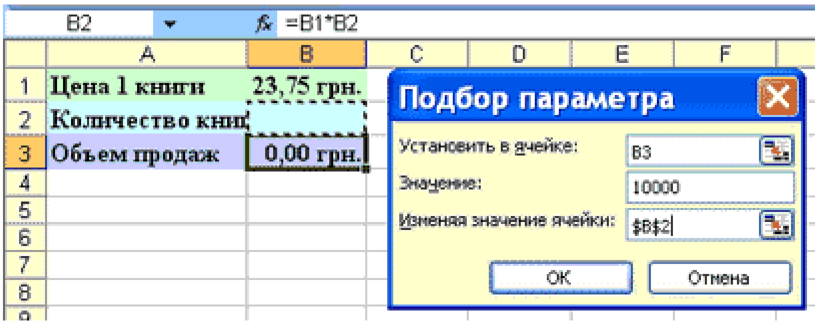


Рис. 2.

3. Введите в текстовое поле Значение число, соответствующее объему продаж - 10000. Переместите курсор в текстовом поле Изменяя значения ячейки. Выделите ту ячейку, в которой должен содержаться ответ (переменная ячейка). Ее содержимое будет подобрано и подставлено в формулу командой Подбор параметра. Выделенная ячейка (В2) выделяется на листе рамкой. Нажмите кнопку ОК, чтобы найти решение.

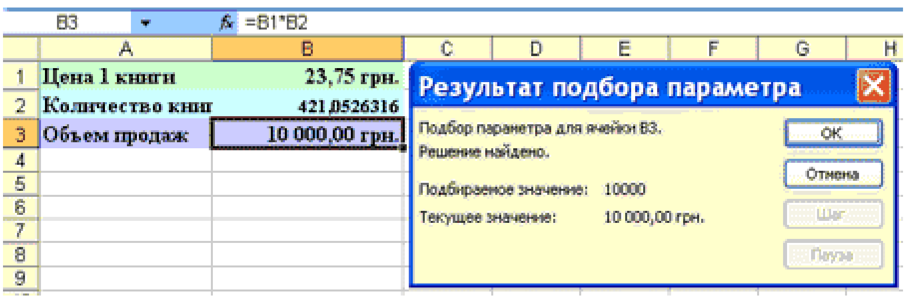


Рис. 3.

После завершения итерационного цикла в окне диалога Результат подбора параметра появляется сообщение, а результат заносится в ячейку листа.

Решение показывает, что для достижения объема продаж 10000 грн. необходимо продать 421 книгу по цене 23,75 грн. Для закрытия окна диалога Результат подбора параметра щелкните на кнопке ОК.

Команда Поиск решения

Для решения сложных задач, требующих применения линейного и нелинейного программирования, а также методов исследования операций применяется надстройка - Поиск решения. Чтобы использовать надстройку Поиск решения не обязательно знать методы программирования и исследования операций, но необходимо определять, какие задачи можно решать этими методами.

Пользователь должен уметь с помощью диалоговых окон надстройки Поиск решения правильно сформулировать условия задачи, и если решение существует, то “Поиск решения” отыщет его. В основе надстройки лежат итерационные методы.

В том случае, когда оптимизационная задача содержит несколько переменных величин, для анализа сценария необходимо воспользоваться надстройкой Поиск решения. “Поиск решения” позволяет использовать одновременно большое количество изменяемых ячеек (до 200) и задавать ограничения для изменяемых ячеек.

Общие свойства, которые характерны для задач, решаемых с помощью надстройки Поиск решения:

1. Существует единственная целевая ячейка, содержащая формулу, значение которой должно быть сделано максимальным, минимальным или же равным, какому-то конкретному значению.
2. Формула в этой целевой ячейке содержит ссылки на ряд изменяемых ячеек. Поиск решения заключается в том, чтобы подобрать такие значения переменных в изменяемых ячейках, которые бы обеспечили оптимальное значение для формулы в целевой ячейке.
3. Может быть задано некоторое количество ограничений — условий или соотношений, которым должны удовлетворять некоторые из изменяемых ячеек.

Постановка задачи

Первым шагом при работе с командой Поиск решения является создание специализированного листа. Для этого необходимо создать целевую ячейку, в которую вводится основная формула.

Кроме того, лист может включать другие значения и формулы, использующие значения целевой и переменных ячеек. Формула в целевой ячейке должна опираться в вычислениях на значения переменных ячеек.

После того, как задача оптимизации будет подготовлена на листе, можно приступать к работе:

1. Выделите на листе целевую ячейку, в которую введена формула.
2. Выполните команду Сервис/Поиск решения. Открывается окно диалога Поиск решения (Рис. 3.). Поскольку была выделена ячейка, в текстовом поле «Установить целевую ячейку» появится правильная ссылка на ячейку. В группе «Равной» переключатель по умолчанию устанавливается в положение «Максимальному значению».
3. Перейдите к полю "Изменяя ячейки" и введите переменные ячейки листа.
4. Добавьте ограничения на переменные в изменяемых ячейках. Для ввода ограничений нажмите кнопку Добавить, чтобы задать первое ограничение в окне диалога, затем можно ввести второе, третье и т.д.
5. Когда оптимизационная задача будет готова к выполнению, можно нажать кнопку Выполнить для получения ответа. Появится окно диалога с описанием результатов процесса оптимизации.
6. Чтобы отобразить найденное решение в ячейках листа, установите переключатель "Сохранить найденное решение" и нажмите кнопку ОК. Найденная максимальная величина помещается в целевую ячейку, а переменные ячейки заполняются оптимальными значениями переменных, которые удовлетворяют установленным ограничениям.

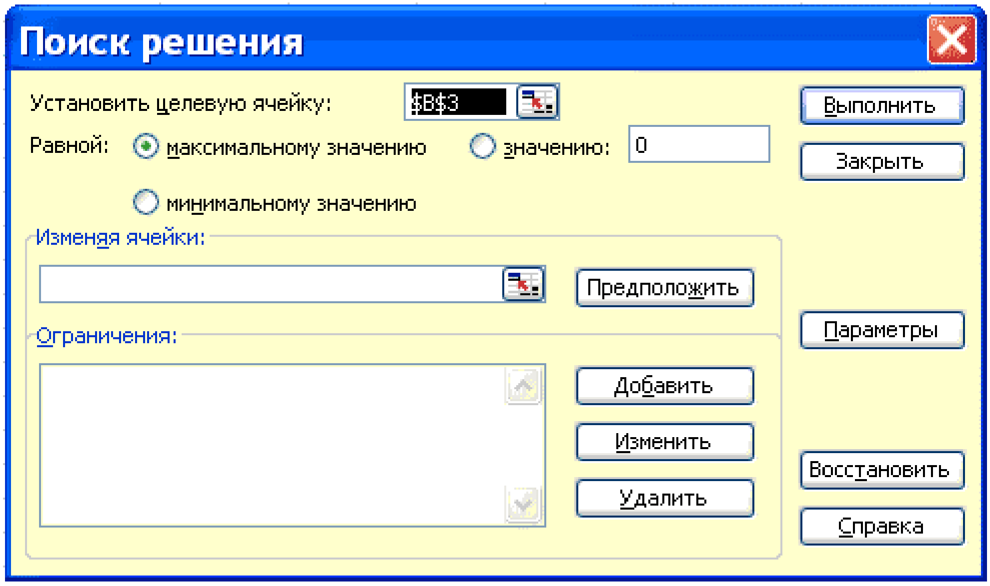


Рис. 4.

Диспетчер сценариев «что – если»

При работе с командами Подбор параметра и Поиск решения не существует удобного способа сравнения результатов вычислений – при каждом изменении данных предыдущее значение пропадает.

Чтобы устранить эти ограничения, разработчики Excel создали Диспетчер сценариев, помогающий работать с несколькими моделями «что – если».

Командой Сервис/Сценарии можно создавать новые и просматривать существующие сценарии для решения задач, и отображать консолидированные отчеты.

Создание сценария

Сценарием называется модель «что – если», в которую входят переменные ячейки, связанные одной или несколькими формулами. Перед созданием сценария необходимо спроектировать лист так, чтобы на нем была хотя бы одна формула, зависящая от ячеек, которые могут принимать различные значения. Например, может возникнуть потребность в сравнении лучшего и худшего сценариев.

Создание сценариев происходит следующим образом:

1. Выполните команду Сервис/Сценарии. Открывается изображение окна диалога Диспетчер сценариев.
2. Нажмите кнопку Добавить, чтобы создать первый сценарий. Откроется окно диалога Добавление сценария.
3. Введите Лучший вариант (или любое другое имя) в поле Название сценария, затем с помощью окон диалога введите изменяемые ячейки. Когда этот сценарий будет готов, введите следующий.
4. Нажмите кнопку Добавить, чтобы создать второй сценарий. Введите название Худший вариант. После завершения создания двух сценарием можно приступить к просмотру результатов.
5. Закройте окно диалога Диспетчер сценариев кнопкой Закрыть.

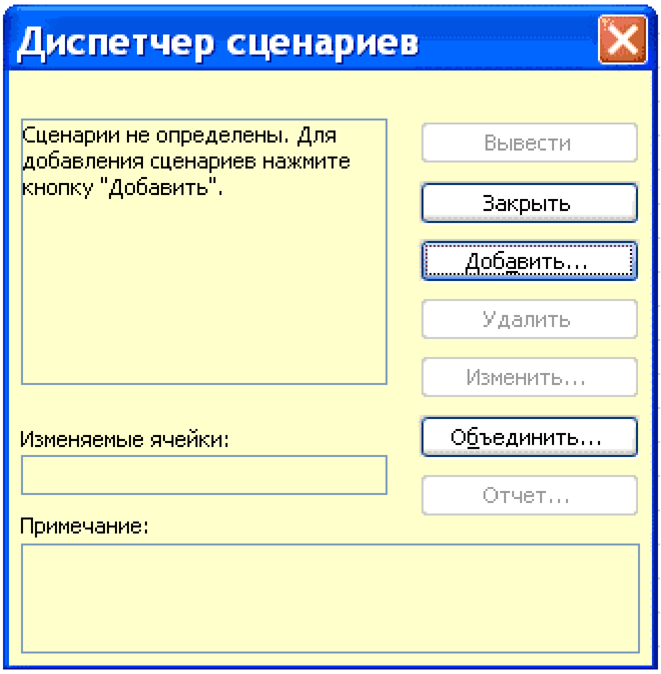


Рис. 5.

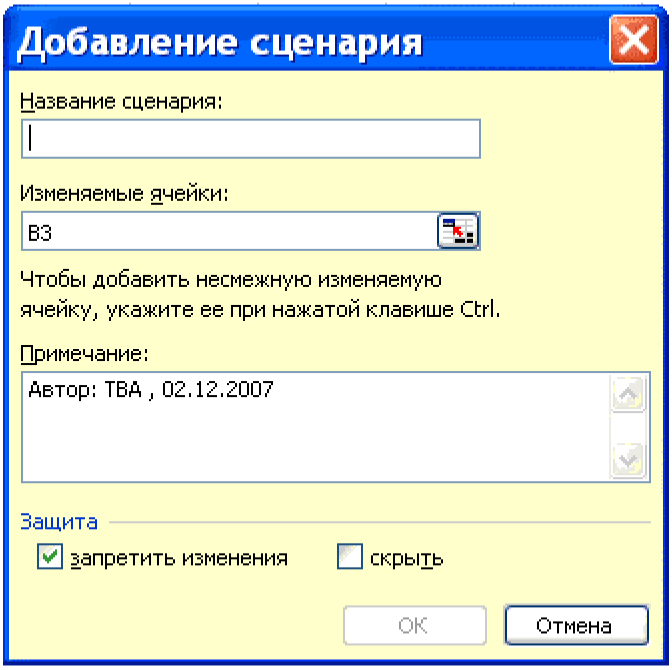


Рис. 6.

Просмотр сценария

Excel сохраняет сценарии вместе с листом текущей книги, и просмотр их командой Сервис /Сценарии возможен только при открытии данного листа.

Просмотр сценария выполняется следующим образом:

1. Выполните команду Сервис/Сценарии. Открывается окно диалога.
2. Выберите из списка сценарий для просмотра.
3. Нажмите кнопку Вывести. Excel заменяет содержимое ячеек листа значениями из сценария и отображает результаты на листе.
4. Выберите из списка другие сценарии и воспользуйтесь кнопкой Вывести для сравнения результатов моделей «что – если». После завершения нажмите кнопку Закрыть. Значения последнего активного сценария остаются в ячейках листа.

Создание отчетов по сценарию

Сравнивать различные сценарии можно, переходя от сценария к сценарию с помощью кнопки показать в окне диалога Диспетчер сценариев, но иногда возникает необходимость в создании отчета с обобщенной информацией о различных сценариях листа.

Эту задачу можно выполнить с помощью кнопки Отчет в окне диалога Диспетчер сценариев. Созданный сводный отчет будет автоматически отформатирован и скопирован на новый лист текущей книги.

Создание отчета по сценарию происходит следующим образом:

1. Выполните команду Сервис/Сценарии. Откроется окно диалога Диспетчер сценариев.

2. Нажмите кнопку Отчет. Открывается окно диалога Отчет по сценарию, в котором предлагается выбрать ячейки, входящие в отчет, а также его тип. Отчет типа структура представляет собой форматированную таблицу, которая выводится на отдельном листе. Отчет сводная таблица является специальной таблицей, которую можно настраивать за счет перестановки столбцов и строк.

работа 1

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕДОСТАТКА ИНФОРМАЦИИ. МЕТОД АПРИОРНОГО РАНЖИРОВАНИЯ

Цель работы: подробное ознакомление с методом априорного ранжирования на примере оценки основных задач системы управления АТП.

Краткие сведения

Для принятия квалифицированного управленческого решения в условиях недостатка информации часто применяется метод априорного ранжирования факторов, влияющих на состояние объекта. При использовании данного метода необходимо провести ранжирование факторов в соответствии с их влиянием на достижение поставленной перед системой цели. При ранжировании факторов решают следующие задачи:

- оценивают факторы по их вкладу в достижение поставленной цели;
- сравнивают факторы по необходимому времени реализации достижения заданного изменения целевого норматива;
- определяют рациональную последовательность реализации ряда мероприятий;
- распределяют ресурсы в условиях их ограничения между мероприятиями.

Для решения этих задач применяют методы экспертной оценки, дисперсионный анализ, моделирование, множественный регрессионный анализ, метод главных компонент и др.

Метод экспертных оценок подразделяется на две основные группы: коллективную работу экспертных групп и получение, а затем суммирование индивидуальных оценок членов экспертных групп. К первой группе относятся методы совещания:

- метод открытого обсуждения и принятия решений (метод комиссий);
- метод «мозговой атаки», в процессе которой внимание участников концентрируется на выдвижении возможных путей для решения одной конкретной задачи;
- метод «суда», воспроизводящий правила ведения судебного процесса, причём рассматриваемое решение выступает в качестве подсудимого, а группы экспертов исполняют роль прокурора и защиты.

При втором методе для получения мнения каждого эксперта используют интервью в виде свободной беседы или по типу «вопрос–ответ», а также анкетирование, в процессе которого каждый эксперт даёт количественные оценки сравниваемым факторам или альтернативам, т.е. ранжирует их. Наиболее простым является метод априорного ранжирования, основанный на экспертной оценке факторов группой специалистов, компетентных в исследуемой области.

Ход работы

Необходимо провести экспертный опрос на рассматриваемом предприятии. Получить вариант задания у преподавателя (прил. 1, 2).

Раздать данные анкеты инженерно-техническим работникам предприятия, которые занимаются техническим обслуживанием и ремонтом подвижного состава с просьбой об их заполнении. После этого обработать полученную информацию по вышеизложенной методике.

В ходе проведения работы ранжируется 10 основных задач системы управления.

В основе решения ряда задач автомобильного транспорта (АТ) лежит системный анализ, предполагающий упорядочение элементов, чёткое определение их соподчинения путём распределения по иерархическим уровням. Для решения данных задач необходима объективная и полная информация. Однако, её получение традиционными методами (статистическое наблюдение, стендовый эксперимент и т.п.) часто невозможно в силу временных, экономических и иных ограничений. В этом случае возможно использование субъективной информации, которая при определённых методиках сбора и обработки может дать объективную (или приближённую к ней) картину. На этой основе возможно ранжирование элементов (целей, программ и факторов) в порядке возрастания (или убывания) какого либо присущего им свойства.

Наиболее простым и оперативным методом ранжирования является экспертиза, основанная на выявлении и систематизации коллективного мнения квалифицированных специалистов.

Оценка проводится группой экспертов, обладающих достаточной квалификацией и опытом для решения поставленной задачи.

При оценке экспертам предлагается ранжировать группу факторов или объектов, сформированную лицом, проводящим экспертизу. Каждый эксперт независимо от других присваивает ранги a_{km} каждому фактору и передаёт результаты экспертизы руководителю группы экспертов. Наиболее значимому фактору присваивается ранг 1, менее значимому – 2 и так далее. Обработка полученных данных проводится по нижеприведённой методике.

1. Оценки всех экспертов сводятся в табл. 1 априорного ранжирования.
2. Определяется сумма рангов всех экспертов по каждому фактору

$$\Delta_k = \sum_{m=1}^{m} a_{km} \, , \qquad (1)$$

где m – число экспертов; k – число факторов.

1. Результаты априорного ранжирования

Фактор	Эксперты, m					Сумма рангов, Δ_k	Отклонение суммы рангов, $\Delta_{k'}$	$(\Delta_{k'})^2$	Занимаемое место, M	Вес фактора, q_k
	1	2	3	…	n					
	Ранг фактора									
1										
2										
…										
k										
Итого										

3. Проверяется правильность заполнения таблицы по трём критериям:

– максимальный ранг по конкретному фактору a_{km} не может быть больше числа сравниваемых факторов k:

$$a_{km} \le k . \tag{2}$$

– максимальное значение суммы рангов по любому фактору не может быть больше произведения максимально возможного ранга на число экспертов:

$$(\Delta_k)_{\max} \le (a_{km})_{\max} m . \tag{3}$$

– минимально возможная сумма рангов по любому фактору не может быть меньше минимального ранга, умноженного на число экспертов:

$$(\Delta_k)_{\min} \ge (a_{km})_{\min} m . \tag{4}$$

4. Вычисляется общая сумма рангов всех экспертов $\sum_{k=1}^{k} \Delta_k$ и средняя сумма рангов:

$$\overline{\Delta} = \frac{\sum_{k=1}^{k} \Delta_k}{k} . \tag{5}$$

5. Определяется отклонение суммы рангов каждого фактора от средней суммы рангов:

$$\Delta_{k'} = \Delta_k - \overline{\Delta} . \tag{6}$$

6. Степень согласованности мнений экспертов оценивается с помощью коэффициента конкордации

$$W = \frac{12S}{m^2(k^3 - k)} , \tag{7}$$

где S – сумма квадратов отклонений суммы рангов каждого фактора от средней суммы рангов; m – число экспертов; k – число факторов;

$$S = \sum_{k=1}^{k} (\Delta_{k'})^2 . \tag{8}$$

Коэффициент конкордации может изменяться от 0 до 1. Если он существенно отличается $W \ge 0{,}5$, то можно считать, что между экспертами существует определённое согласие. Если коэффициент конкордации недостаточен $W < 0{,}5$, то организаторами экспертизы проводится анализ причин низкой согласованности мнений экспертов. Такими причинами в общем случае могут быть неправильный выбор факторов, подбор некомпетентных экспертов, сговор между экспертами, нечёткая постановка вопросов, некачественный инструктаж экспертов.

В зависимости от результатов анализа принимается решение о корректировании экспертизы, например, по следующим направлениям:

- передача её проведения другой группе специалистов;
- изменение инструкций;
- корректировка состава факторов;

- привлечение других экспертов.

Проводить повторную экспертизу прежним составом не рекомендуется.

7. При $W \geq 0{,}5$ проверяется гипотеза о неслучайности согласия экспертов по критерию Пирсона:

$$\chi_{\text{р}}^2 = Wm(k-1), \tag{9}$$

где $(k - 1)$ – число степеней свободы.

Расчётное значение коэффициента сравнивается с табличным (табл. 2), определённым при числе степеней свободы $k - 1$.

Если расчётное значение критерия Пирсона больше табличного, а $W \geq 0{,}5$, то это свидетельствует о наличии существенного сходства мнений экспертов, значимости коэффициента конкордации и неслучайности совпадения мнений экспертов, т.е. $\chi_{\text{р}}^2 > \chi_{\text{табл}}^2$.

8. По сумме рангов Δ_k производится ранжирование факторов. Минимальной сумме рангов $(\Delta_k)_{\min}$ соответствует наиболее важный фактор, получающий первое место $M = 1$; далее факторы располагаются по мере возрастания суммы рангов.

2. Значение $\chi_{\text{табл}}^2$ с числом степеней свободы $(k - 1)$
и доверительной вероятностью β

$k-1$	β			
	0,98	0,95	0,90	0,80
4	11,67	9,49	7,78	5,99
5	13,39	11,07	9,24	7,29
6	15,03	12,59	10,64	8,56
7	16,6	14,07	12,02	9,8
8	18,2	15,51	13,36	11,03
9	19,7	16,9	14,68	12,24
10	21,2	18,3	15,99	13,44

9. Определяется удельный вес фактора

$$q_k = \frac{2(k - M + 1)}{k(k+1)}, \tag{10}$$

где M – место ранжирования.

При этом должно соблюдаться условие

$$\sum_{k=1}^{k} q_k = 1{,}0\,. \tag{11}$$

По данным экспертной оценки может быть построена диаграмма, отражающая весомость рассматриваемых факторов рис. 1.

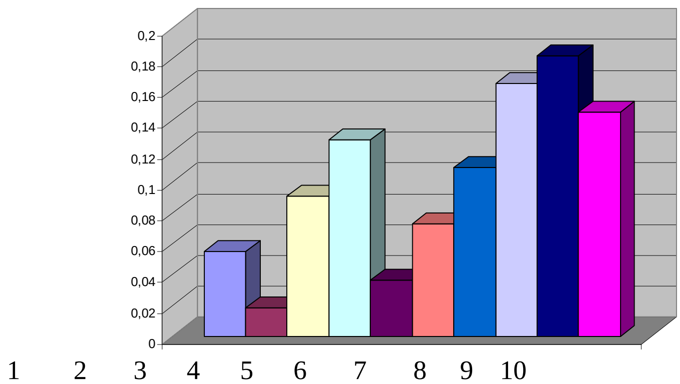


Рис. 1. Основные задачи системы управления:
1 – управление возрастной структурой парка; *2* – корректирование режимов ТО и закрепление маршрутов; *3* – управление качеством ТО и ремонта; *4* – оптимизация нормативов ТО и диагностирования; *5* – управление уровнем механизации; *6* – диспетчерское управление ТО и ремонтом; *7* – управление запасами запасных частей и материалов; *8* – управление затратами на ТО и ремонт; *9* – управление расходом топлива; *10* – управление расходом шин

ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ НЕДОСТАТКА ИНФОРМАЦИИ. ПРИНЯТИЕ РЕШЕНИЯ В УСЛОВИЯХ РИСКА

Цель работы: подробное ознакомление с методом принятия решений в условиях риска на примере определения запаса одноимённых агрегатов для проведения ремонта автомобилей.

Краткие сведения

Как правило, в реальной производственной ситуации отсутствует полная информация обо всех внешних факторах, т.е. условиях, в которых будет функционировать система (цех, бригада, участок, АТП).

Одним из методов принятия решений в этих условиях является анализ производственной ситуации с использованием *теории игр и статистических решений*. В игре функционируют стороны и рассматриваются (воспроизводятся) их возможные стратегии, т.е. совокупность правил, предписывающих определённые действия в зависимости от ситуации, сложившейся в ходе игры. При решении технических и технологических задач обычно рассматриваются две неантагонистические стороны:

А — организаторы производства (активная сторона), т.е. работники ИТС АТП;

П — совокупность случайно возникающих производственных ситуаций («природа»).

Активная сторона должна выбрать такую стратегию, т.е. принять решение, чтобы получить максимальный эффект. При этом «природа» активно не противодействует мероприятиям организаторов производства, но точное состояние внешних факторов не известно. Подобные игры называются «играми с природой».

Принятие таких решений игровыми методами основывается на определённых правилах, которые регламентируют: возможные варианты (стратегии) действия сторон, участвующих в игре; наличие и объём информации каждой стороны о поведении другой; результат игры, т.е. изменение целевой функции при сочетаниях определённых стратегий сторон.

Принятие решений в условиях риска. В условиях риска задача выбора решения формируется следующим образом: при заданных условиях a_i и действии внешних факторов Z_k, вероятность появления которых известна, найти элементы решений x_m, которые по возможности обеспечивают получение экстремального значения целевой функции.

Применение методов статистических решений при определении оптимального запаса агрегатов на АТП. На основании данных по надёжности и расчёта потока замен агрегатов с использованием понятия ведущей функции или анализа отчётных данных устанавливается максимальное количество однотипных агрегатов, требующихся ежедневно при ремонте.

Ход работы

Получить вариант задания у преподавателя (прил. 1).

Исходные данные заносятся в табл. 3.

3. Стратегии сторон (определение оптимального запаса агрегатов)

Стратегии стороны, $П_i$	Потребность агрегатов для ремонта, n_i	Вероятность замены агрегатов, q_i	Стратегия стороны, $А_i$	Наличие исправных агрегатов на складе, n_i
$П_1$	0	0,1	$А_1$	0
$П_2$	1	0,3	$А_2$	1
$П_3$	2	0,3	$А_3$	2
$П_4$	3	0,2	$А_4$	3
$П_5$	4	0,1	$А_5$	4

Пример. Ежедневно при ремонте требуется не более четырёх агрегатов, причём вероятность того, что агрегаты не требуются для ремонта в течение смены, равна 0,1; потребуется один агрегат – 0,3; два – 0,3; три – 0,2; четыре – 0,1.

Указанные вероятности можно рассматривать как вероятность реализации стратегий стороны П, причём первая стратегия $П_1$ состоит в том, что фактически потребуется для ремонта $n_1 = 0$ агрегатов; $П_2$ – один агрегат; $П_3$ – два агрегата; $П_4$ – три агрегата и $П_5$ – четыре агрегата (табл. 1).

При организации на промежуточном складе запаса можно применить следующие стратегии: $А_1$ – не иметь запаса; $А_2$ – иметь один агрегат в запасе ($n_2 = 1$); $А_3$ – два; $А_4$ – три и $А_5$ – четыре агрегата. Так как потребность более четырех агрегатов за смену не была зафиксирована, то дальнейшее увеличение запасов априорно нецелесообразно. В реальных условиях сочетание стратегий $А_i$ и $П_i$, может быть случайным, но каждому сочетанию стратегий $А_i$ и $П_i$, соответствуют выигрыши a_{ij}, которые рассчитываются в данном случае для стороны А (складское хозяйство) из следующих условий: хранение одного невостребованного агрегата оценивается как ущерб в одну условную единицу ($b_1 = -1$); удовлетворение потребности в одном агрегате – прибыль в две единицы ($b_2 = +2$); отсутствие необходимого агрегата – ущерб в три единицы ($b_3 = -3$).

Природа ущерба и прибыли в каждом конкретном случае может быть различной, а сами значения ущерба и прибыли должны быть строго обоснованы, так как от них зависит выбор оптимального решения. Удовлетворение потребности в агрегатах связано с сокращением простоев автомобилей в ремонте, что приносит прибыль АТП. Излишний запас вызывает дополнительные затраты на хранение агрегатов.

Выигрыши при сочетании всех возможных стратегий сторон сводятся в платёжной матрице (табл. 4).

4. Платёжная матрица (определения оптимального запаса агрегатов)

		Необходимое число агрегатов при стратегии $П_1 – П_5$					Минимальный выигрыш по стратегиям (минимумы строк), a_i
		0	1	2	3	4	
Имеющееся число агрегатов при стратегии $А_1 – А_5$	0						
	1						
	2						
	3						
	4						
Максимальный выигрыш (максимумы столбцов), β							

Пример. При сочетании стратегий $А_2$ и $П_4$ выигрыш составит a_{24}, равный 1×2 (при потребности три на складе имеется один агрегат) минус 2×3 (две заявки не удовлетворены), т.е. 2 – 6 = – 4. Сочетание стратегий $А_4$ и $П_2$ (необходим для замены один агрегат, на складе имеются три): a_4 равно 1×2 (одно требование удовлетворено) минус 2×1 (два агрегата не востребованы), т.е. 2 – 2 = 0 и т.д.

При известных вероятностях каждой стратегии $П_i$, выбирается стратегия $А_i$, при которой математическое ожидание выигрыша будет максимальным. Для этого вычисляют суммарный выигрыш по каждой строке для i-й стратегии:

$$\overline{a_i} = q_1 a_{i1} + q_2 a_{i2} + \ldots + q_n a_{in} = \sum_{j=1}^{n} q_i a_{ij} . \qquad (1)$$

Максимальное значение $\overline{a_i}$, соответствует оптимальной стратегии (в примере это четвёртая стратегия). Результаты заносятся в табл. 5.

5. Матрица выигрышей (определения оптимального запаса агрегатов)

Стратегии, $А_i$	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	Суммарный выигрыш
$А_1$						
$А_2$						
$А_3$						
$А_4$						
$А_5$						
Вероятность стратегии, q_j						

6. Платёжная матрица (определения оптимального запаса агрегатов)

		Необходимое число агрегатов при стратегии $П_1 – П_5$					Минимальный выигрыш по стратегиям (минимумы строк), a_i
		0	1	2	3	4	
Вариант I		$b_1 = – 1$; $b_2 = + 2$; $b_3 = – 3$					
Имеющееся число агрегатов при стратегии $А_1 – А_7$	0						
	1						
	…						
Максимальный выигрыш (максимумы столбцов), β							
Вариант II		$b_1 = – 1$; $b_2 = + 4$; $b_3 = – 3$					
Имеющееся число агрегатов при стратегии $А_1 – А_7$	0						
	1						
	…						

Максимальный выигрыш (максимумы столбцов), β							
Вариант III $b_1 = -1$; $b_2 = +3$; $b_3 = -4$							
Имеющееся число агрегатов при стратегии $A_1 - A_7$	0						
	1						
	…						
Максимальный выигрыш (максимумы столбцов), β							
Вариант IV $b_1 = -2$; $b_2 = +4$; $b_3 = -3$							
Имеющееся число агрегатов при стратегии $A_1 - A_7$	0						
	1						
	…						
Максимальный выигрыш (максимумы столбцов), β							
Вариант V $b_1 = -2$; $b_2 = +2$; $b_3 = -3$							
Имеющееся число агрегатов при стратегии A_1–A_7	0						
	1						
	…						
Максимальный выигрыш (максимумы столбцов), β							

Расчёт, проведённый только на основе вероятностей без учёта экономических последствий, даёт средневзвешенное количество расходуемых за смену агрегатов

$$\bar{n}_j = \sum_{j=1}^{n} q_j n_j \ . \tag{2}$$

Экономическая эффективность применения оптимальной стратегии

$$Э = 100 \frac{\bar{a}_o - \bar{a}_c}{\bar{a}_о} \ , \tag{3}$$

где $\bar{a}_o$ – выигрыш при оптимальной стратегии; $\bar{a}_c$ – то же, при средне взвешенной потребности.

Используя данный метод требуется оценить влияние факторов: изменения стоимости хранения агрегатов b_1, убытка или прибыли при наличии b_2 и отсутствии b_3, увеличение запаса однотипных агрегатов до 6. Данные по расчёту занести в табл. 6 и 7.

По данным табл. 7 столбец 7 заполняем табл. 8.

7. Матрица выигрышей

(определения оптимального запаса агрегатов)

Стратегии, A_i	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$	Суммарный выигрыш
Вариант I $b_1 = -1$; $b_2 = +2$; $b_3 = -3$						
Вариант II $b_1 = -1$; $b_2 = +4$; $b_3 = -3$						
Вариант III $b_1 = -1$; $b_2 = +3$; $b_3 = -4$						

Вариант IV $b_1 = -2$; $b_2 = +4$; $b_3 = -3$							
Вариант V $b_1 = -2$; $b_2 = +2$; $b_3 = -3$							
Вероятность стратегии, q_j							

8. Матрица выигрышей при изменении различных стоимостных затрат

Число агрегатов на складе	Параметры, b, A	Выигрыши по вариантам				
		I	II	III	IV	V
	b_1 b_2 b_3	– 1 + 2 – 3	– 1 + 4 – 3	– 1 + 3 – 4	– 2 + 4 – 3	– 2 + 2 – 3
Оптимальная стратегия	–					
Выигрыш при оптимальной стратегии	–					

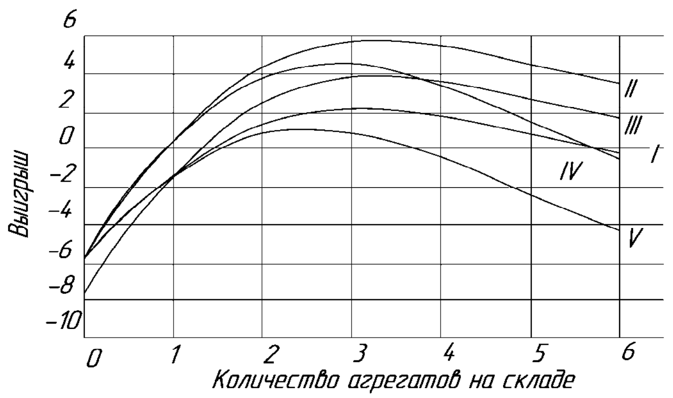


Рис. 2. Влияние запаса агрегатов на складе на средний выигрыш при наличии информации по вероятностям стратегии

По данным табл. 8 построить график влияния запаса агрегатов на складе на средний выигрыш при наличии информации по вероятностям стратегии. Сделать вывод.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Техническая эксплуатация автомобилей : учебник для вузов / под ред. Е.С. Кузнецова. – М. : Наука, 2001. – 535 с.
2. Яговкин, А.И. Организация производства технического обслуживания и ремонта машин : учебное пособие / А.И. Яговкин. М. : Издательский центр «Академия», 2006. – 440 с.

Приложение 1

Номера вариантов

Вариант	Номера экспертов								
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	11	12	13	14	15	16	17	18	19
3	21	22	23	24	1	2	3	4	5
4	7	8	9	10	11	12	13	14	15
5	1	3	5	7	9	11	13	15	17
6	21	23	2	4	6	8	10	12	14
7	18	20	22	24	1	3	5	9	15
8	7	8	9	10	11	12	15	16	17
9	15	17	19	20	21	22	23	24	1
10	3	4	5	6	7	8	9	10	13
11	16	17	18	19	20	21	22	23	24
12	5	6	7	8	9	10	11	12	13
13	12	14	16	18	20	22	24	2	4
14	8	9	10	11	12	13	14	15	16
15	24	22	20	18	16	17	18	19	1
16	4	6	8	10	12	14	16	18	20
17	15	16	19	20	23	24	2	4	6
18	9	10	11	12	13	14	15	16	17
19	19	20	21	22	23	24	8	9	10
20	2	4	6	8	10	11	12	13	14
21	20	18	17	16	14	13	11	9	4
22	12	13	14	15	16	17	18	19	20
23	13	14	15	16	17	18	19	20	21
24	14	15	16	17	18	19	20	21	22
25	15	16	17	18	19	20	21	22	23
26	17	18	19	20	21	22	23	24	1
27	18	19	20	21	22	23	24	1	2
28	19	20	21	22	23	24	1	2	3
29	20	21	22	23	24	1	2	3	4
30	21	22	23	24	1	2	3	4	5
31	22	23	24	1	2	3	4	5	6
32	23	24	1	2	3	4	5	6	7

Приложение 2

Номера экспертов

Основные задачи системы управления	Условные номера экспертов																						
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
Управление затратами на ТО и ремонт	1	1	1	2	5	2	4	4	3	1	2	2	2	1	1	2	1	1	4	2	2	1	2	4
Управление расходом топлива	2	2	2	1	4	1	2	1	5	3	4	7	1	2	7	1	3	2	6	1	1	3	1	1
Управление расходом шин	7	3	7	4	1	8	5	3	7	2	3	5	3	3	2	3	2	3	3	5	6	5	6	8
Оптимизация нормативов ТО и ремонта	4	4	8	3	2	3	3	5	6	7	8	3	4	4	3	7	4	4	2	3	3	7	5	7
Управление качеством ТО и ремонта	5	5	6	6	3	4	6	2	2	8	7	1	6	6	4	6	6	5	1	4	7	8	7	6
Управление запасами ЗЧ и материалов	6	6	5	5	7	5	1	6	1	6	5	6	5	5	6	5	5	6	5	6	5	6	8	5
Диспетчерское управление ТО и ремонтами	3	7	4	8	6	7	8	8	8	5	9	10	7	7	5	4	7	7	7	8	9	2	9	9
Управление возрастной структурой парка	8	8	3	7	8	9	7	7	4	4	1	8	9	8	10	8	8	8	8	7	4	10	4	2
Управление уровнем механизации	9	9	9	10	10	10	9	9	10	9	10	4	8	10	8	10	9	9	10	9	10	9	10	3
Корректирование режимов ТО и закрепление маршрутов	10	10	10	9	9	6	10	10	9	10	6	9	10	9	9	9	10	10	9	10	8	4	3	10

Вероятность замены агрегатов, q_i

Варианты	Стратегия				
	$П_1$	$П_2$	$П_3$	$П_4$	$П_5$
1	0,1	0,4	0,3	0,1	0,1
2	0,2	0,2	0,1	0,1	0,4
3	0,3	0,1	0,4	0,1	0,1
4	0,1	0,2	0,3	0,2	0,2
5	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1
6	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1
7	0,2	0,1	0,3	0,2	0,2
8	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1
9	0,1	0,2	0,4	0,1	0,2
10	0,2	0,1	0,4	0,2	0,1
11	0,3	0,1	0,1	0,4	0,1
12	0,1	0,3	0,2	0,3	0,1
13	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1
14	0,3	0,2	0,1	0,2	0,2
15	0,4	0,1	0,2	0,1	0,2
16	0,3	0,1	0,3	0,2	0,1
17	0,3	0,2	0,2	0,1	0,2
18	0,2	0,1	0,1	0,2	0,4
19	0,3	0,2	0,1	0,2	0,2
20	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2
21	0,1	0,3	0,3	0,2	0,1
22	0,1	0,3	0,4	0,1	0,1
23	0,2	0,2	0,4	0,1	0,1
24	0,2	0,3	0,1	0,3	0,1
25	0,1	0,1	0,3	0,3	0,2
26	0,2	0,1	0,3	0,1	0,3
27	0,1	0,2	0,1	0,3	0,3
28	0,3	0,1	0,1	0,2	0,3
29	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4
30	0,2	0,2	0,1	0,1	0,4
31	0,1	0,3	0,1	0,1	0,4
32	0,1	0,2	0,2	0,1	0,4

Введение

Проблемы принятия решений, которые в широком плане можно рассматривать как проблемы анализа сложных систем, занимают все большее место в современной науке [69].

В той или иной степени системы поддержки принятия решений присутствуют в любой информационно-управляющей системе. По мере развития предприятия, упорядочения структуры организации и налаживания межкорпоративных связей, проблема разработки и внедрения системы поддержки принятия решений (СППР) становится особенно актуальной.

ИУС промышленного предприятия должна обладать возможностями и MIS (Manager Information System – ориентирована на обеспечение процесса управления необходимой информацией о прошлом, настоящем и будущем управляемой системы), и DSS (Decision Support System – ориентирована на интеллектуальное обеспечение процесса принятия решения и ставит своей целью поддержку данного процесса) систем, так как руководителю предприятия необходима не только конкретная информация для принятия управленческого решения, но и возможность поддержки решения. Возможной реализацией такого подхода является разработка и внедрение в существующую ИУС предприятия СППР как ее подсистемы.

Одним из главных вопросов разработки СППР является выбор математических моделей и методов принятия решений, составляющих основу ее функционирования. Принятие решений в системе управления промышленными предприятиями связано со сложностью системы, распределенностью ее подсистем, неопределенностью текущего состояния, необходимостью учитывать большое число различных факторов и критериев, характеризующих варианты решений. Поэтому при разработке СППР промышленного предприятия возникает проблема выбора адекватных математических методов, позволяющих отражать структуру сложной системы, для которой принимается решение, оперировать субъективными оценками экспертов, принимать во внимание качественный (вербальный) характер оценки специалистами вариантов решения проблемы, учитывать неясность, неточность данных средствами нечеткой логики.

Бурно развивавшаяся в последнее время математическая теория оптимизации создала совокупность методов, помогающих при компьютерной поддержке эффективно принимать решения при фиксированных и известных параметрах, характеризующих исследуемый процесс, а также в том случае, когда параметры – случайные величины. Однако основные трудности возникают в том случае, когда параметры оказываются неопределенными и когда они в то же время сильно влияют на результаты решения. Такие ситуации могут возникать как вследствие недостаточной изученности процессов, для которых принимается решение, так и из-за участия в управление нескольких лиц, преследующих различные цели.

Приближенные, но в то же время эффективные способы анализа сложных, плохо определенных систем, не поддающихся точному математическому описанию, опираются на использование лингвистических переменных и нечетких алгоритмов. Основные приложения данного подхода относятся к областям экономики, управления производством, искусственному интеллекту, психологии, лингвистики, обработки информации, медицины, биологии.

Компьютеризация общества вызвала быстрое расширение сферы использования количественных методов анализа за счет их применения для анализа экономических, урбанистических, социальных, биологических и других систем. Большинство методов, используемых в настоящее время для анализа гуманистических систем, т.е. систем, в которых участвует человек, представляют собой модификации методов, которые в течение длительного времени создавались для механистических систем. Замечательные успехи, достигнутые с помощью этих методов, позволили объяснить многие природные явления и создавать все более и более совершенные устройства. Но эти же успехи вселили широко распространенное убеждение в том, что теми же методами или подобными им можно сравнительно эффективно исследовать и гуманистические системы. Так, например, успехи, достигнутые с помощью теории управления в конструировании космических навигационных систем высокой точности, стимулировали применение этой теории для анализа экономических и биологических систем. Успехи макроскопического анализа физических систем с помощью моделирования на ЭВМ привели к тому, что эконометрическое моделирование с помощью ЭВМ стали применять для решения задач прогнозирования, экономического планирования и управления производством.

По глубоко укоренившейся традиции научного мышления понимание явления отождествляют с возможностью его количественного анализа. Однако, по своей сути обычные количественные методы анализа систем непригодны для гуманистических систем и вообще любых систем, сравнимых по сложности с гуманистическими системами. В основе этого тезиса лежит то, что можно было бы назвать принципом несовместимости. Суть этого принципа можно выразить примерно так: чем сложнее система, тем менее мы способны дать точные и в то же время имеющие практическое значение суждения о ее поведении. Чем глубже мы анализируем реальную задачу, тем неопределеннее становится ее решение. Для систем, сложность которых превосходит некоторый пороговый уровень, точность и практический смысл становятся почти исключающими друг друга характеристиками. Именно в этом смысле точный количественный анализ поведения гуманистических систем не имеет, по-видимому, большого практического значения в реальных социальных, экономических и других задачах, связанных с участием одного человека или группы людей.

Представленная работа опирается на предпосылку о том, что элементами мышления человека являются не числа, а элементы некоторых нечетких множеств или классов объектов [61-64, 69], для которых переход от «принадлежности к классу» к «непринадлежности» не скачкообразен, а непрерывен. И в самом деле, нечеткость, присущая процессу мышления человека, наводит на мысль о том, что в основе этого процесса лежит не традиционная двузначная или даже многозначная логика, а логика с нечеткой истинностью, нечеткими связями и нечеткими правилами вывода. Именно такая нечеткая логика играет основную роль в том, что может оказаться одной из наиболее важных сторон человеческого мышления – способности оценивать информацию, т.е. выбирать из разнообразия сведений те и только те, которые имеют отношение к анализируемой проблеме.

По своей природе оценка является приближением. Во многих случаях достаточна весьма приближенная характеризация набора данных, поскольку в большинстве основных задач, решаемых человеком, не требуется высокая точность. Человек использует допустимость такой неточности, кодируя информацию, «достаточную для решения задачи» элементами нечетких множеств, которые лишь приближенно описывают исходные данные. Поток информации, поступающей в мозг через органы зрения, слуха, осязания и др., суживается, таким образом, в тонкую струйку информации, необходимой для решения поставленной задачи с минимальной степенью точности. Способность оперировать нечеткими множествами и вытекающая из нее способность оценивать информацию является одним из наиболее ценных качеств человеческого разума, которое фундаментальным образом отличает человеческий разум от так называемого машинного разума, приписываемого вычислительным машинам.

Традиционные методы анализа систем недостаточно пригодны для анализа гуманистических систем именно потому, что они не в состоянии охватить нечеткость человеческого мышления и поведения. Поэтому для действенного анализа гуманистических систем нужны подходы, для которых точность, строгость и математический формализм не являются чем-то абсолютно необходимым и в которых используется методологическая схема, допускающая нечеткости и частичные истины. В работе, с одной стороны, проводится сравнительный анализ методов принятия решения в условиях неопределенности; с другой стороны, рассматривается возможность создания единого подхода к процессу принятия решений, что позволит специалисту конкретной предметной области не выбирать среди имеющихся методов адекватный для данной ситуации, а пользоваться универсальным алгоритмом, значительно упрощающим процедуру принятия решений.

1. Основные понятия теории принятия решений

1.1. Системы поддержки принятия решений и их место в информационно-управляющих системах

Все процессы функционирования современного промышленного предприятия, от проектирования изделия до его продажи, тесно взаимосвязаны и требуют четкого централизованного управления. Основные решения, принимаемые на уровне руководителя предприятия, невозможно реализовать без развитой информационной инфраструктуры. Качество информационного обеспечения управления – один из важных факторов, определяющих действенность принимаемых управленческих решений. Отсутствие слаженной системы информационного обеспечения управления приводит к вероятностному характеру принимаемых управленческих решений, дублированию в сборе информации, потерям нужной информации и, как следствие, к невысокой эффективности управления. Создание ИУС предприятия позволяет оптимизировать сложившиеся каналы сбора информации и обеспечить более полное удовлетворение информационных потребностей руководителей и коллектива в целом. Существующие же в настоящее время системно-технические инфраструктуры большинства предприятий обеспечивают в той или иной мере только отдельные виды производственно-хозяйственной, финансово-экономической деятельности и управления; в целом уровень ИУС не соответствует современному уровню информационных технологий и теоретических разработок по данной проблеме.

ИУС представляет собой сложную многоуровневую информационную систему, гарантирующую автоматизированное управление всеми подсистемами управляющей системы и видами деятельности предприятия. Наглядную укрупненную модель ИУС можно представить в виде взаимодействия трех подсистем (рис. 1.1). Программа создания ИУС предусматривает три этапа [84]: совершенствование и развитие существующей системы сбора и обработки информации по критерию максимального и оперативного обеспечения управляющих структур и руководства предприятия всей необходимой и достоверной информацией в необходимые сроки; развитие ИУС в целях автоматизации поддержки принятия управленческих решений; построение стратегической информационно-управляющей системы предприятия. Основная цель второго этапа – создание системы поддержки принятия решений как подсистемы ИУС, повышающей качество оперативных, тактических и стратегических решений.

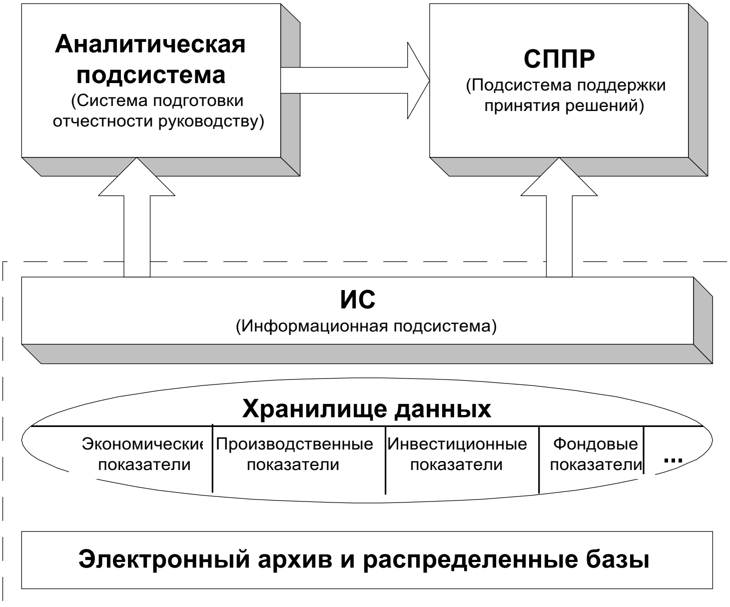


Рис 1.1. Модель информационно-управляющей системы промышленного предприятия

Первый этап можно рассматривать как процесс развития ИС, который в настоящее время уже в какой-то мере реализован большинством предприятий. В то же время, вопросы разработки СППР до сих пор являются одними из наиболее обсуждаемых и актуальных [52, 66, 101, 121], что связано со все более возрастающей ролью квалифицированно принятых решений в процессе оптимального управления, с одной стороны, и недостаточно развитыми, реализованными на сегодняшний день, СППР, с другой стороны.

Создание и внедрение СППР в ИУС предприятия требует поэтапной разработки и развития совокупности всех обеспечивающих подсистем СППР: технического, математического, программного, информационного, организационного обеспечения. В монографии рассматриваются вопросы разработки математического и программного обеспечения как совокупности математических методов, моделей, алгоритмов и программ для реализации целей и задач поддержки принятия решений.

Центральное место в сложной, многогранной и трудоемкой деятельности по организационному управлению промышленным предприятием занимают процессы принятия решений. Цикл управления организацией начинается с этапа *получения* по информационным каналам *задания* от вышестоящего звена, уяснения поставленных задач и оценки возможности их выполнения в соответствии с имеющимися ресурсами и условиями [111]. На втором этапе производится *декомпозиция общей задачи управления* на задачи подчиненных элементов, т.е. распределяются работы между подразделениями организации согласно их функциональному предназначению и возможностям. Эта деятельность составляет процесс принятия решений на втором этапе цикла управления. Следующий этап начинается с *передачи по информационным каналам организации принятых решений*. Подчиненным звеньям управления передается подробное задание, а вышестоящему звену сообщается обобщенная характеристика принятого решения. Далее следует этап *оперативного управления и контроля*, по результатам которого принимаются решения. Исходя из определенных таким способом этапов, управление промышленным предприятием можно представить как циклический процесс информационного обмена и принятия решений в звеньях иерархии.

Анализ решений в процессе промышленного производства и характера деятельности по их поддержке позволяет выделить 10 основных областей решений, принимаемых на предприятии (объединении) в ходе выпуска изделий [66] – *развитие*: установление количественных и качественных показателей развития предприятия (объединения), выбор капиталовложений, реконструкция и новое строительство, снятие изделия с промышленного производства; *реорганизация*: слияние с другими предприятиями, создание совместных предприятий, изменение внутренней организационной структуры; *управление*: выбор производственной программы, регулирование производства, внедрение новой продукции в производство; *проектирование*: разработка нового изделия, разработка новой ресурсосберегающей технологии производства продукции; *технология*: техническое и технологическое перевооружение производства, технологическая подготовка выпуска нового изделия; *снабжение*: определение круга поставщиков сырья, материалов, комплектующих изделий; *реализация*: выбор перспективных рынков сбыта продукции, определение круга потребителей изделия, заказчиков; *обслуживание*: открытие собственных обслуживающих центров, пересмотр технических условий и требований к изделию; *кадры*: аттестация, обучение, создание благоприятных производственных условий; *социально-бытовые услуги*: жилищное строительство, культурно-просветительные мероприятия, организация работы подведомственных оздоровительных учреждений.

Оказание помощи руководителю во всех перечисленных направлениях функционирования предприятия, осуществляемое систематически, по определенным процедурам, в индивидуальном порядке или в условиях коллективной работы, но каждый раз ориентированное на выработку конкретных и конечных решений сложных неструктурированных проблем, за принятие которых отвечает руководитель, – это основная функция СППР, которая является подсистемой информационно-управляющей системы промышленного предприятия.

СППР – это система, включенная в организационную среду и оказывающая помощь руководителю в получении приемлемых решений неструктурированных проблем, включающая в себя следующие этапы: анализ ситуаций и постановка проблем, формирование и выбор вариантов решений, организация выполнения решений, контроль выполнения решений (рис. 1.2).

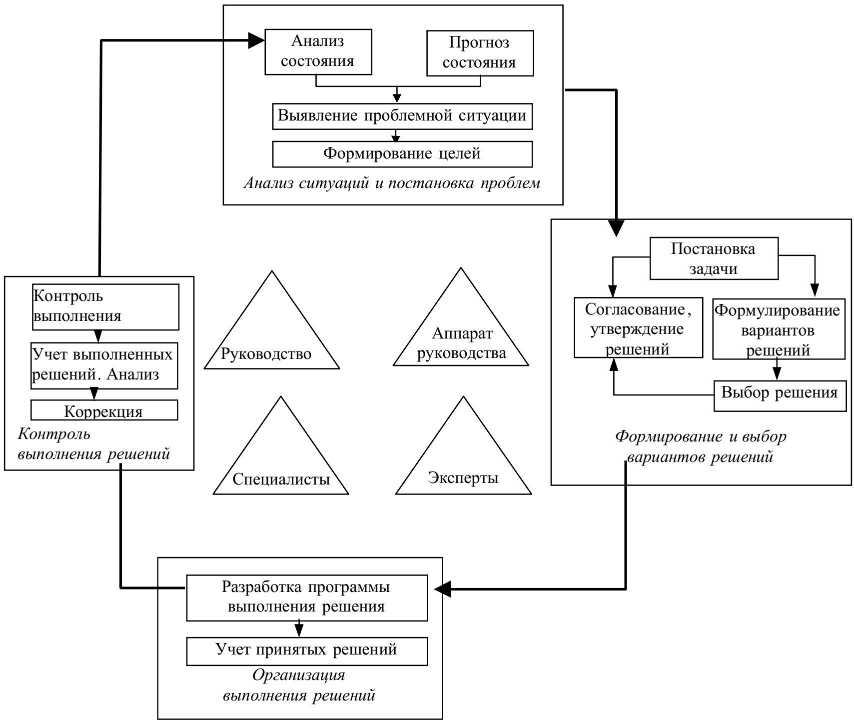


Рис 1.2. Схема функционирования СППР

Существуют различные типы СППР. В зависимости от уровня процессов управленческих решений – индивидуального, группового, организационного и межорганизационного, – выделяют соответствующие типы СППР. *Индивидуальная* СППР обслуживает отдельно взятое лицо, принимающее решение – руководителя объединения, предприятия, организации. Возможности такой системы зависят от личных качеств руководителя, его знаний, навыков, опыта. На структуру и конфигурацию системы непосредственное влияние оказывают стили мышления и руководства конкретного лица – пользователя системы. *Групповая* СППР ориентирована на обслуживание группы лиц, взаимодействующих между собой при решении какой-либо проблемы. Поддержка процесса выработки групповых решений осуществляется за счет устранения коммуникационных барьеров между членами группы, применения количественных методов анализа решений группой лиц, рациональной организацией самих процедур работы группы. Организационные и межорганизационные СППР применяются при анализе сложных проблем комплексного, междисциплинарного характера, для решения которых нужны знания и опыт в самых разнообразных областях.

В зависимости от типа принимаемых решений подразделяют различные уровни СППР: оперативный, тактический и стратегический.

Оперативный уровень обеспечивает решение многократно повторяющихся задач и операций на коротком временном интервале (неделя, декада, месяц и т.д.). На этом уровне велики как объем выполняемых операций, так и динамика принятия управленческих решений. Оперативные решения, как правило, принимаются при анализе проблем низовых звеньев организации, ее участков, рабочих мест. Тактический уровень обеспечивает решение задач, требующих предварительного анализа информации, подготовленной на первом уровне. Тактические решения принимаются на более длительном промежутке времени (квартал, полугодие и т.д.). На этом уровне объем решаемых задач уменьшается, но возрастает их сложность. Тактические решения характерны для подсистем ИУС. Стратегический уровень обеспечивает выработку решений, направленных на достижение долгосрочных стратегических целей организации. Такой тип решений характеризует длительный временной интервал (годы, несколько лет и т.д.), и сфера действия – весь управляемый объект в целом (предприятие, межорганизационный комплекс и т.д.). Классификация СППР приведена на рис. 1.3.

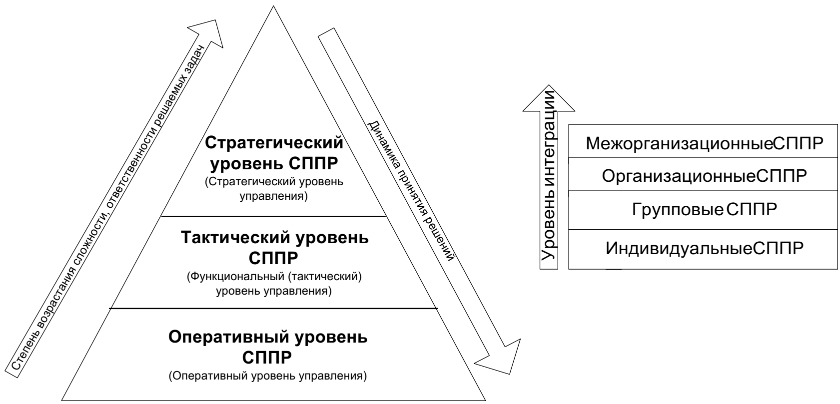


Рис 1.3. Классификация СППР

1.2. Компьютерная поддержка принятия решений

Поддержки принятия решений существуют длительное время, но с возникновением вычислительной техники появилась информационная технология поддержки принятия решений, главной особенностью которой является качественно новый метод организации взаимодействия человека и компьютера. Первоначально компьютер рассматривался лишь как средство «машинизации» методов принятия решений, как средство быстрой реализации вычислений. В настоящее время компьютер является партнером человека в принятии решений. СППР создается обычно для определенного класса задач и обеспечивает поддержку ЛПР при анализе проблемы. ЛПР запрашивает необходимые данные, изучает проблемы, получает советы СППР, относящиеся к опыту решения подобных проблем, пробует применить для решения различные методы, знания экспертов [64]. Такой глубокий анализ зависит, прежде всего, от хорошей предварительной подготовки СППР, от ввода в нее нужных данных и знаний, необходимых методов. Этот анализ помогает ЛПР понять проблему, уточнить свои предпочтения и выработать наилучший вариант ее решения. Большинство существующих СППР ориентированы на сравнительно узкий круг задач. В настоящее время СППР развиваются в следующих направлениях:

- объединение СППР с автоматизированными информационными системами и системами связи;
- сближение СППР с экспертными системами и появление «интеллектуальных СППР»;
- совершенствование технологической базы СППР.

В будущем появятся системы, которые смогут подстраиваться под стиль мышления человека, имитировать приемы его работы, которые станут как бы продолжением «Я» руководителя. Но есть некоторые принципиальные границы – СППР сама по себе не может породить качественно новый вариант решения. Однако есть надежда, что такой вариант может возникнуть либо в процессе диалога человека с СППР, либо как догадка, которой способствовал этот диалог.

Выделяются различные виды компьютерной поддержки принятия решений: СППР, экспертные системы, советующие системы и т.д. [64].

Советующие системы [71] предполагают последовательное интерактивное взаимодействие с оператором с целью выявления параметров текущей проблемной ситуации и выдачи поэтапных рекомендаций оператору по решению возникшей проблемы.

Экспертные системы [63, 64, 101] разрабатываются для компьютерного представления и хранения знаний высококвалифицированных экспертов с тем, чтобы ими могли в дальнейшем воспользоваться специалисты с более низкой квалификацией. Экспертные системы направлены на класс задач с повторяющимися решениями, при этом опыт и интуиция эксперта возрастает с годами. Предполагается, что проблемы, подлежащие решению, являются слабо структурированными. Экспертные системы могут применяться для различных видов деятельности, которые можно сгруппировать по следующим категориям: интерпретация, прогноз, диагностика, проектирование, планирование, наблюдение, отладка, ремонт, обучение, управление. Именно при решении слабо структурированных проблем человеческая интуиция имеет особую ценность. Догадки эксперта, основанные на его прошлом опыте, на чутье, позволяют ему решать проблемы на высоком уровне. В связи с этим и возникла идея о передаче этих умений компьютеру. Диапазон применения ЭС очень широк, но каждая из таких систем может работать только в одной ограниченной области. Попытки расширить предметную область, даже в пределах одной области знаний, в подавляющем большинстве случаев неуспешны.

Компьютерная СППР [64, 66, 101] – это интерактивная автоматизированная система, использующая модели выработки решений, обеспечивающая пользователям эффективный доступ к распределенной базе данных и предоставляющая им разнообразные возможности по отображению информации. В таком понимании система поддержки принятия решений представляет собой совокупность следующих подсистем: комплекса распределенных технических средств; комплекса математических моделей; анализа состояний и выработки решений; базы данных; систем управления моделями, языков моделирования, обработки и отображения информации. В состав СППР входят три главных компонента: база данных, база моделей и программная подсистема (рис. 1.4).

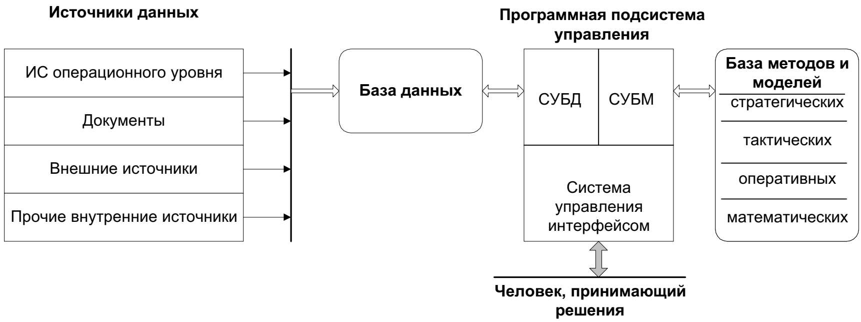


Рис 1.4. Архитектура СППР

Компьютерные СППР, как правило, ориентированы на конкретные математические методы принятия решений [13, 32, 38, 52, 64, 71, 76, 87, 101, 106, 117, 121]. В связи с этим является актуальным анализ математического обеспечения СППР: задач, моделей, методов, схем и т.п. – с тем, чтобы сгруппировать их, наметить пути к упорядоченному, обоснованному исследованию и использованию [8].

1.3. Участники процесса принятия решений

В подготовке и принятии решения участвует целая группа специалистов, отвечающая за тот или иной этап процесса поддержки решения, руководитель, на которого ложится задача окончательного выбора наилучшего варианта, а также ряд заинтересованных лиц. В слабо структурированных задачах принятия решений (ЗПР) сама проблема выбора тесно связана с человеком – ее *владельцем* [64]. Владельцем проблемы является человек, который (по мнению окружающих) должен ее решать и несет ответственность за принятые решения. Эти решения могут оказывать непосредственное воздействие на его благосостояние и общественного положение. Но это далеко не всегда означает, что владелец проблемы является также и *лицом, принимающим решение* (ЛПР). Конечно, ЛПР может быть таковым, но бывают ситуации, когда владелец проблемы является лишь одним из нескольких человек, принимающих участие в ее решении. Он может быть представителем коллективного органа, принимающего решения, члены которого вынуждены идти на компромиссы, чтобы достичь согласия. Третий возможный случай – ЛПР и владелец проблемы – разные люди. Известны примеры, когда руководители стремятся переложить на других принятие решений: глава фирмы полагается на заместителя, подписывает подготовленные другими (и иногда противоречивые) распоряжения. Таким образом, владелец проблемы и ЛПР могут быть как одной, так и разными личностями. Проект решения готовят специалисты, как говорят, «аппарат ЛПР». Если ЛПР доверяет своим помощникам, то может даже не вникать в решение, а просто подписать его. Но ответственность все равно лежит на ЛПР, а не на тех, кто участвовал в подготовке решения.

На принятие решений влияют *активные группы* (в [93, 94] их называют *акторами*) – группы людей, имеющих общие интересы по отношению к проблеме, требующей решения. Так, при принятии решения о постройке АЭС акторами являются: сотрудники министерства энергетики, заинтересованные в приросте электроэнергии; сотрудники строительной организации, осуществляющей постройку; представителя рядовых граждан; представители защитников окружающей среды. В данном случае владельцем проблемы (и иногда ЛПР) являются местные власти, которые должны дать разрешение на постройку АЭС на своей территории.

Разумное ЛПР всегда принимает во внимание интересы активных групп, учитывая их позиции и их критерии при оценке альтернативных вариантов решений.

При практической работе важно четко отделять этап дискуссий, когда рассматриваются различные варианты решения, от этапа принятия решения, после которого надо решение выполнять, а не обсуждать. При рассмотрении вариантов решений важную роль играют *эксперты* – люди, которые профессионально (лучше, чем ЛПР) знают отдельные аспекты рассматриваемой проблемы. По-английски expert – это специалист, в русском языке эти два слова имеют несколько различающийся смысл: под экспертом понимают опытного высококвалифицированного специалиста, умеющего использовать всю интуицию для принятия решений [80]. К ним обычно обращаются за оценками, за прогнозами исходов тех или иных решений. Давая такие оценки, эксперты высказывают свое субъективное мнение. Но если эксперт беспристрастен и является профессионалом в своем деле, его оценки близки к объективным. При принятии сложных (обычно стратегических) решений в их подготовке принимает участие *консультант по принятию решений*. Его роль сводится к разумной организации процесса принятия решений: помощь ЛПР и владельцу проблемы в правильной постановке задачи; выявление ролей и позиций акторов; организация работы с экспертами. Консультант (или аналитик) обычно не дает собственных оценок при принятии решений, он помогает другим уяснить предпочтения, взвесить все «за» и «против» и выработать разумный компромисс.

Часто можно констатировать конфликты между менеджерами одной и той же организации по поводу сфер ответственности – кто за что отвечает, кто какие решения принимает. Поэтому очень важны регламенты, определяющие порядок работы. Недаром любое собрание принято начинать с утверждения председательствующего и повестки заседания, а работу любого предприятия или общественного объединения – с утверждения его устава.

Практически любой решение можно считать индивидуальным (кроме случаев принятия решений жюри и комиссией, в которых выбор осуществляется голосованием без обсуждения). Так как даже в случае коллективного органа, принимающего важные решения, обычно наблюдается стремление членов этого органа объяснить свои позиции, найти общую политику, общее решение. В этом случае такой орган выступает как ЛПР, обладающее определенной политикой.

1.4. Цели и ресурсы

При выполнении различных функций менеджмента возникает необходимость принимать решения [80]. Например, процесс планирования должен завершиться решением об утверждении плана, процесс контроля – решением о порядке ликвидации отклонений или о корректировке плана.

Каждое решение направлено на достижение одной или нескольких целей. Например, при строительстве АЭС желательно выполнить следующие задачи: получить прирост электроэнергии; получить максимальную прибыль от функционирования АЭС. Эти две цели можно достичь одновременно. Однако так бывает не всегда.

Часто встречающаяся формулировка «максимум прибыли при минимуме затрат» внутренне противоречива. Минимум затрат равен 0, когда работа не проводится, но и прибыль тогда тоже равна 0. Если же прибыль велика, то и затраты велики, поскольку и то, и другое связано с объемом производства. Можно либо максимизировать прибыль при фиксированных затратах, либо минимизировать затраты при заданной прибыли.

Каждое решение предполагает использование тех или иных ресурсов. Так, министерство энергетики исходит из существования необходимого материального и кадрового обеспечения для работы АЭС. Если бы такого обеспечения не было бы, то и дискуссия не имела бы смысла.

В обыденной жизни мы чаще всего принимаем решения, покупая товары и услуги. И тут совершенно ясно, что такое ресурсы – это количество имеющихся денег. Выступая как потребитель, человек должен решить, какие товары ему следует покупать и по какой цене. А выступая как производитель – на что разумно потратить свои усилия. В западных странах теория принятия решений считается разделом экономики. В рамках экономической теории обсуждаются поднятые вопросы о соотношении полезности товара (для потребителя) и отношения полезности к цене. У каждого приобретаемого товара есть своя полезность для потребителя. Закон предельной полезности гласит, что предельная полезность убывает. Иначе говоря, последующие партии товара менее ценны для потребителя чем первые. Если есть необходимость покупки нескольких товаров, то потребитель стремится распределить свои деньги так, чтобы отношение полезности этого товара к общей единице измерения было постоянным. Иначе говоря, если полезность товара больше, то средства, затраченные на него, должны быть больше. Точно так же ведет себя человек при решении задачи о капиталовложении: он вкладывает большие средства в более полезные направления деятельности. Экономисты считают, что такое поведение человека является единственно правильным, и называют человека, осуществляющего таким образом свой выбор, рациональным человеком.

Таким образом, при практической работе над проектом решения важно проанализировать: «Чего мы хотим достичь? Какие ресурсы мы готовы использовать для этого?».

1.5. Альтернативы и критерии

Альтернативами [64] называют варианты принимаемых решений. Под проблемной ситуацией понимают ситуацию, которая имеет не менее двух вариантов решений. В примере со строительством АЭС как минимум можно выделить две альтернативы: разрешение строительства и его запрет. Следовательно, для существования самой задачи принятия решений необходимо иметь хотя бы две альтернативы. *Независимыми* являются те альтернативы, любые действия с которыми (удаление из рассмотрения, выделение в качестве лучшей и т.п.) не оказывают влияния на качество других альтернатив. При *зависимых* альтернативах решения по одним из них оказывают влияние на качество других. Примером является групповая зависимость – если решено рассматривать хотя бы одну альтернативу из группы, то надо рассматривать всю группу. Другим типом зависимости является зависимость от альтернатив, исключаемых из рассмотрения. Например, зависимость выбираемых в ресторане блюд от тех, которые включены или исключены из меню. Выделяют также зависимость от несуществующих альтернатив. Так, образ идеальной альтернативы, создаваемой человеком во время выбора, может оказывать влияние на выбор из реальных альтернатив, особенно если есть надежда на реализуемость идеального варианта.

Задачи принятия решений могут существенно отличаться по числу альтернатив и их наличию на момент выработки политики и принятия решений. Встречаются задачи, когда все альтернативы уже заданы и необходим лишь выбор из этого множества. Так, мы можем искать правило выбора лучших изделий из уже имеющихся, определять наиболее эффективную организацию, лучший университет и т.д. Особенностью этих задач является замкнутое и нерасширяющееся множество альтернатив. Но существует множество задач другого типа, где все альтернативы или их значительная часть не сформированы на момент принятия решений. В таких задачах, как выбор плана развития города, выбор фасона одежды и т.п. основных альтернатив, с рассмотрения которых начинается выбор, сравнительно немного. Но они не являются единственно возможными. Часто на основе этих альтернатив в процессе выбора возникают либо новые альтернативы, либо совокупность требований к недостающим альтернативам. Этот класс задач можно *назвать задачами с конструируемыми альтернативами*. Итак, альтернативы, присутствующие в ЗПР, могут быть следующими:

– независимыми;
– зависимыми;
– заранее заданными;
– появляющимися после выработки правила принятия решения;
– конструируемыми в процессе принятия решений.

Критерии – это способ описания альтернативных вариантов решений, способ выражения различий между ними с точки зрения предпочтений ЛПР. Количество критериев в различных теоретических построениях и разных методах принятия решений обычно превышает единицу. Современные методы принятия решений ориентированы на учет всех отличительных особенностей качеств альтернатив, что существенно приближает формальные схемы к реальному миру. Поэтому в настоящее время многокритериальное описание альтернатив становится все более принятым. Как правило, критерии оценки не заданы на начальном этапе анализа проблемы, а должны быть выявлены в диалоге ЛПР–эксперт.

Критерии могут быть зависимыми и независимыми. Критерии называют *зависимыми*, когда оценка альтернативы по одному из них определяет (детерминированно либо с большой степенью вероятности) оценку по другому критерию. ЗПР и методы их решений зависят от числа критериев. При небольшом количестве критериев (2-5) задача сопоставления двух альтернатив достаточно проста для ЛПР. При большем числе критериев задача становится малообозримой. В этом случае критерии объединяются в группы, которые можно считать независимыми – появляется иерархия критериев.

Таким образом, выявление перечня альтернатив и структуры критериев является необходимым и первым этапом ЗПР.

1.6. Риски и неопределенности

Многие решения принимаются в условиях риска, т.е. при возможной опасности потерь [80]. Связано это с разнообразными неопределенностями, окружающими нас. Иногда прогноз основан на хорошо изученных закономерностях и осуществляется наверняка. Например, методы прогнозирования движения космических аппаратов разработаны настолько, что возможна автоматическая стыковка кораблей. Однако встающие перед менеджером фирмы проблемы прогнозирования обычно не позволяют дать однозначный обоснованный прогноз. Под неопределенностью в [78] понимаются явления, не поддающиеся анализу и измерению со сколь угодно большой точностью.

В [80] приводится классификация различных видов неопределенностей, часть из которых связана с недостаточностью знаний о природных явлениях и процессах, например:

- неопределенности, связанные с недостаточными знаниями о природе (например, нам неизвестен точный объем полезных ископаемых в конкретном месторождении, а потому мы не можем точно предсказать развитие добывающей промышленности и объем налоговых поступлений от ее предприятий);

- неопределенности природных явлений, таких, как погода, влияющая на урожайность, на затраты на отопление, на туризм, на загрузку транспортных путей и др.;

- неопределенности, связанные с осуществлением действующих (неожиданные аварии) и проектируемых (возможные ошибки разработчиков или физическая невозможность осуществления процесса, которую заранее не удалось предсказать) технологических процессов.

Многие возможные неопределенности связаны с ближайшим окружением фирмы, менеджер которой занимается прогнозированием:

- неопределенности, связанные с деятельностью участников экономической жизни (прежде всего партнеров и конкурентов фирмы), в частности, с их деловой активностью, финансовым положением, соблюдением обязательств;

- неопределенности, связанные с социальными и административными факторами в конкретных регионах, в которых фирма имеет деловые интересы.

Большое значение имеют и неопределенности на уровне страны, в частности:

- неопределенность будущей рыночной ситуации в стране, в том числе отсутствие достоверной информации о будущих действиях поставщиков в связи с меняющимися предпочтениями потребителей;

- неопределенности, связанные с колебаниями цен (динамикой инфляции), нормы процента, валютных курсов и других макроэкономических показателей;

- неопределенности, порожденные нестабильностью законодательства и текущей экономической политики (т.е. с деятельностью руководства страны, министерств и ведомств), связанные с политической ситуацией, действиями партий, профсоюзов, экологических и других организаций в масштабе страны.

Часто приходится учитывать и внешнеэкономические неопределенности, связанные с ситуацией в зарубежных странах и международных организациях, с которыми вы поддерживаете деловые отношения.

Таким образом, менеджеру приходится прогнозировать будущее, принимать решения и действовать, буквально купаясь в океане неопределенностей. Полезно ввести их классификацию на СТЭП-факторы (по первым буквам от слов - социальные, технологические, экономические, политические) и факторы конкурентного окружения. СТЭП-факторы действуют независимо от менеджера, а вот конкуренты отнюдь к нам не безразличны. Возможно, они будут бороться с нами, стремиться к вытеснению нашей фирмы с рынка. Но возможны и переговоры, ведущие к обоюдовыгодной договоренности.

Каждая из перечисленных видов неопределенности может быть структурирована далее. Так, имеются крупные разработки по анализу неопределенностей при технологических авариях, в частности, на химических производствах и на атомных электростанциях.

Учет рисков и неопределенностей в процессе принятия решений определяет выбор математических методов, позволяющих учитывать данные факторы.

1.7. Экспертное оценивание

Для принятия обоснованных решений необходимо опираться на опыт, знания и интуицию специалистов [80]. После второй мировой войны в рамках теории управления (менеджмента) стала развиваться самостоятельная дисциплина – экспертные оценки.

Методы экспертных оценок – это методы организации работы со специалистами-экспертами и обработки мнений экспертов, выраженных в количественной и/или качественной форме с целью подготовки информации для принятия решений ЛПР. Для проведения работы по методу экспертных оценок создают рабочую группу (РГ), которая и организует по поручению ЛПР деятельность экспертов, объединенных (формально или по существу) в экспертную комиссию (ЭК).

Существует различные методы получения экспертных оценок. В одних с каждым экспертом работают отдельно, он даже не знает, кто еще является экспертом, а потому высказывает свое мнение независимо от авторитетов. В других экспертов собирают вместе для подготовки материалов для ЛПР, при этом эксперты обсуждают проблему друг с другом, учатся друг у друга, и неверные мнения отбрасываются. В одних методах число экспертов фиксировано и таково, чтобы статистические методы проверки согласованности мнений и затем их усреднения позволяли принимать обоснованные решения.

В других – число экспертов растет в процессе проведения экспертизы, например, при использовании метода «снежного кома» (о нем – дальше). Не меньше существует и методов обработки ответов экспертов, в том числе весьма математизированных и компьютеризированных.

Что должна представить экспертная комиссия в результате своей работы – информацию для принятия решения ЛПР или проект самого решения? От ответа на этот методологический вопрос зависит организация работы комиссии.

Если цель экспертного совета – сбор информации для ЛПР, то тогда рабочая группа должна собрать возможно больше относящейся к делу информации, аргументов «за» и «против» определенных вариантов решений. Полезен метод постепенного увеличения числа экспертов: сначала первый эксперт приводит свои соображения по рассматриваемому вопросу; составленный им материал передается второму эксперту, который добавляет свои аргументы; накопленный материал поступает к следующему – третьему – эксперту... Процедура заканчивается, когда иссякает поток новых соображений.

Отметим, что эксперты в рассматриваемом методе только поставляют информацию, аргументы «за» и «против», но не вырабатывают согласованного проекта решения. Более того, наибольшую пользу приносят эксперты с мышлением, отклоняющимся от массового, поскольку именно от них следует ожидать наиболее оригинальных аргументов.

Если цель – подготовка проекта решения для ЛПР, то применяются методы выработки единого мнения экспертов.

Догма согласованности. Считается, что решение может быть принято лишь на основе согласованных мнений экспертов. Поэтому исключают из экспертной группы тех, чье мнение отличается от мнения большинства. При этом отсеиваются как неквалифицированные лица, попавшие в состав экспертной комиссии по недоразумению или по соображениям, не имеющим отношения к их профессиональному уровню, так и наиболее оригинальные мыслители.

Бывает и так, что эксперты делятся на две или более групп, имеющих единые групповые точки зрения.

Мнения диссидентов. С целью искусственно добиться согласованности стараются уменьшить влияние мнений экспертов-диссидентов. Жесткий способ борьбы с диссидентами состоит в их исключении из состава экспертной комиссии. Отбраковка экспертов, как и отбраковка резко выделяющихся результатов наблюдений, приводит к процедурам, имеющим плохие или неизвестные статистические свойства.

Мягкий способ борьбы с диссидентами состоит в применении робастных (устойчивых) статистических процедур. Простейший пример: если ответ эксперта – действительное число, то резко выделяющееся мнение диссидента сильно влияет на среднее арифметическое ответов экспертов и не влияет на их медиану. Поэтому разумно в качестве согласованного мнения рассматривать медиану. Однако при этом игнорируются (не достигают ЛПР) аргументы диссидентов.

Основные стадии экспертного опроса. Как показывает опыт проведения экспертных исследований, целесообразно выделять следующие стадии экспертного опроса:

1) формулировка ЛПР цели экспертного опроса;

2) подбор ЛПР основного состава РГ, обычно – руководителя и секретаря;

3) разработка РГ и утверждение у ЛПР технического задания на проведение экспертного опроса;

4) разработка РГ подробного сценария проведения сбора и анализа экспертных мнений (оценок), включая как конкретный вид экспертной информации (слова, условные градации, числа, ранжировки, разбиения или иные виды объектов нечисловой природы) и конкретные методы анализа этой информации;

5) подбор экспертов в соответствии с их компетентностью;

6) формирование экспертной комиссии (целесообразно заключение договоров с экспертами об условиях их работы и ее оплаты, утверждение ЛПР состава экспертной комиссии);

7) проведение сбора экспертной информации;

8) анализ экспертной информации;

9) при применении процедуры из нескольких туров – повторение двух предыдущих этапов;

10) интерпретация полученных результатов и подготовка заключения для ЛПР;

11) официальное окончание деятельности РГ (в том числе подготовка и утверждение научного и финансового отчетов о проведении экспертного исследования, оплата труда экспертов и сотрудников РГ).

Подбор экспертов. Проблема подбора экспертов является одной из наиболее сложных. Очевидно, в качестве экспертов необходимо использовать тех людей, чьи суждения наиболее помогут принятию адекватного решения. Но как выделить, найти, подобрать таких людей? Надо прямо сказать, что нет методов подбора экспертов, наверняка обеспечивающих успех экспертизы. Часто предлагают использовать методы взаимооценки и самооценки компетентности экспертов. С одной стороны, кто лучше может знать возможности эксперта, чем он сам? С другой стороны, при самооценке компетентности скорее оценивается степень самоуверенности эксперта, чем его реальная компетентность. Тем более, что само понятие «компетентность» строго не определено. Можно его уточнять, выделяя составляющие, но при этом усложняется предварительная часть деятельности экспертной комиссии.

При использовании метода взаимооценки, помимо возможности проявления личностных и групповых симпатий и антипатий, играет роль неосведомленность экспертов о возможностях друг друга. В современных условиях достаточно хорошее знакомство с работами и возможностями друг друга может быть лишь у специалистов, много лет работающих совместно. Однако привлечение таких пар специалистов не очень-то целесообразно, поскольку они слишком похожи друг на друга.

Использование формальных показателей (должность, ученые степень и звание, стаж, число публикаций...), очевидно, может носить вспомогательный характер. Успешность участия в предыдущих экспертизах – хороший критерий для деятельности дегустатора, врача, судьи в спортивных соревнованиях, т.е. таких экспертов, которые участвуют в длинных сериях однотипных экспертиз.

Есть полезный метод «снежного кома», при котором от каждого специалиста, привлекаемого в качестве эксперта, получают несколько фамилий тех, кто может быть экспертом по рассматриваемой тематике. Очевидно, некоторые из этих фамилий встречались ранее в деятельности РГ, а некоторые – новые. Процесс расширения списка останавливается, когда новые фамилии перестают встречаться. В результате получается достаточно обширный список возможных экспертов. Ясно, что если на первом этапе все эксперты были из одного «клана», то и метод «снежного кома» даст, скорее всего, лиц из этого «клана», мнения и аргументы других «кланов» будут упущены.

Необходимо подчеркнуть, что подбор экспертов в конечном счете – функция рабочей группы, и никакие методики подбора не снимают с нее ответственности. Другими словами, именно на рабочей группе лежит ответственность за компетентность экспертов, за их принципиальную способность решить поставленную задачу. Важным является требование к ЛПР об утверждении списка экспертов.

2. Математический аппарат, используемый в методах принятия решений

2.1. Вычисление главного собственного вектора примитивных матриц

Основы метода анализа иерархий базируются на классической теории матриц, изложенной в [9, 33, 60, 93, 94].

Матрицы парных сравнений МАИ представляют собой положительные обратносимметричные неприводимые матрицы, к которым предъявляется требование согласованности.

Квадратные матрицы $A = (a_{ij})$, для которых $a_{ij} > 0$, $i, j = 1,2,...,n$, $a_{ij} = 1/ a_{ji}$, $i,j = 1, 2, ..., n$, называются *положительными обратносимметричными матрицами*.

Положительные обратносимметричные матрицы $A = (a_{ij})$, для элементов которых выполняется соотношение $a_{ik} = a_{ij}a_{jk}$, $i,j,k = 1, 2, ..., n$, являются *согласованными*.

Квадратная матрица – *неприводимая*, если она не может быть представлена в виде $\begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}$, где A_1 и A_3 – квадратные матрицы, 0 – нулевая матрица. В противном случае матрицу называют *приводимой*. Заметим, что в некоторых работах такие матрицы называют *неразложимыми* [33].

Пример. Матрица $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$ приводима.

Граф, соответствующий этой матрице, имеет дугу из первой в первую и третью вершины и аналогично – из третьей в первую и третью вершины, но переход во вторую вершину невозможен (рис. 2.1). Из второй вершины можно перейти во все три вершины.

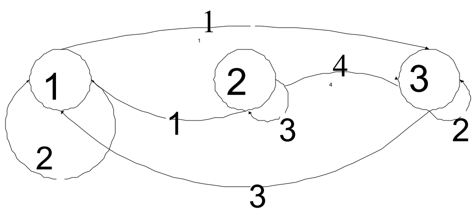


Рис. 2.1. Граф, иллюстрирующий матрицу

Таким образом, первая и третья вершины образуют неприводимую компоненту, а вторая связана с ними.

Заметим, что комплексная матрица A неприводима в том и только в том случае, если ее направленный граф $D(A)$ – сильно связный.

Теорема. Квадратная матрица или неприводима, или не может быть приведена путем перестановок индексов к виду:

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & A_2 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & A_k & 0 & \ldots & 0 \\ A_{k+1,1} & A_{k+1,2} & \ldots & A_{k+1,k} & A_{k+1} & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mk} & A_{m\,k+1} & \ldots & A_m \end{bmatrix}$$

содержащему блок - диагональную матрицу с неприводимыми матрицами A_i на диагонали. При этом, по крайней мере, одна из матриц с двойным индексом в каждой строке, в которой они появляются, нулевая.

МАИ позволяет вычислять приоритеты альтернатив $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$. Приоритетами альтернатив, полученными на основе матрицы их парных сравнений, служат нормализованные значения главного собственного вектора матрицы.

Векторы x, для которых $Ax = \lambda x$ $(x \neq 0)$, называются *собственными векторами*, а соответствующие им числа λ – *характеристическими*, или *собственными числами матрицы* A.

Собственные числа матрицы A являются корнями характеристического уравнения матрицы $|A - \lambda\,\mathrm{I}| = 0$, где I – единичная матрица. Как полиномиальное уравнение относительно λ, оно имеет N корней. Каждому собственному значению ставится в соответствие собственный вектор, определенный с точностью до скалярного множителя.

В теореме Фробениуса [33] утверждается, что неприводимая неотрицательная матрица A (в теореме Перрона, что положительная матрица A) всегда имеет действительное положительное простое собственное значение λ_{max}. Причем модули всех других характеристических чисел не превосходят λ_{max}.

Теорема (*Перрон -Фробениуса*)

Пусть $A \geq 0$ – неприводимая матрица. Тогда:

1. A имеет действительное положительной простое (т.е. некратное) собственное значение λ_{max}, которое по модулю не меньше любого другого собственного значения матрицы A (некоторые из которых могут быть комплексными числами).

2. Собственный вектор A, соответствующий собственному значению λ_{max}, имеет положительные компоненты и, по существу (с точностью до постоянного множителя), единственен.
3. Число λ_{max} (иногда называемое конем Перрона матрицы A) удовлетворяет условию

$$\lambda_{max} = \max_{x \geq 0} \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \min_{x \geq 0} \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}; \quad x \geq 0 \quad \text{– произвольно.}$$

Следствие. Пусть $A \geq 0$ неприводима и пусть $x \geq 0$ произвольно. Тогда корень Перрона удовлетворяет условию

$$\min_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \lambda_{max} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}.$$

λ_{max} называют *главным собственным значением* (в некоторых источниках *корнем Перрона*) матрицы A, а соответствующий ему собственный вектор w – *главным собственным вектором*.

Таким образом, вычислять приоритеты элементов (находить главный собственный вектор) возможно следующим образом: составляется характеристическое уравнение матрицы A, среди корней данного уравнения выбирается наибольшее, вычисляется соответствующий собственный вектор w, значения вектора нормализуются. Составление и решение такого рода уравнений для каждой матрицы в методе анализа иерархий – достаточно трудоемкий и сложный процесс.

В МАИ предложено использовать другие способы получения главного собственного вектора матрицы, один из которых опирается на следствие к теореме Перрона-Фробениуса, при этом матрицы должны удовлетворять условию примитивности.

Если неприводимая неотрицательная матрица имеет всего h характеристических чисел: $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h$ с максимальным модулем r ($\lambda_1 = |\lambda_2| = \dots = |\lambda_h| = r$), то такая матрица называется *примитивной* при $h = 1$ (главное собственное значение по модулю является единственным $\lambda_1 = \lambda_{max}$), при $h > 1$ матрица называется *импримитивной* (существуют характеристические корни матрицы, совпадающие по модулю с главным собственным значением). Т. Саати использует в качестве определения примитивной матрицы утверждение теоремы: неприводимая матрица $A \geq 0$ является примитивной в том и только в том случае, когда $\exists\ m \geq 1$, такое, что $A^m > 0$ (некоторая степень матрицы A положительна).

Основная теорема МАИ формулируется для примитивных матриц.

Теорема. Для примитивной матрицы A $\lim\limits_{k \to \infty} \dfrac{A^k e}{\left\| A^k \right\|} = cw, \quad \left\| A^k \right\| = e^T A^k e$,

где c — постоянная, а w — собственный вектор, соответствующий $\lambda_{max} = \lambda_1$.

Используя следствие теоремы Перрона, получаем менее трудоемкий (при компьютерной поддержке) способ вычисления вектора приоритетов матрицы парных сравнений: матрица возводится в произвольно большие степени, вычисляются суммы элементов строк матрицы-результата, полученные суммы нормализуются. Такой подход предоставляет возможность находить главный собственный вектор матрицы A без использования характеристического уравнения, что намного облегчает процедуру его вычисления. Пример вычисления главного собственного вектора и классическим методом, и с использованием основной теоремы МАИ, рассмотрен нами в работе [20].

2.2. Иерархии и приоритеты

Первым этапом МАИ является построение иерархии, отражающей процесс принятия решений. Иерархии рассматриваются в [93] как специальный тип упорядоченного множества или частный случай графа. Первая интерпретация выбрана в качестве основы формального определения, а вторая — в качестве иллюстрации. Изложим некоторые математические основы иерархий.

Частично упорядоченным множеством называется множество S с бинарным отношением $\leq$, которое удовлетворяет законам рефлексивности, антисимметричности и транзитивности:

Рефлексивность: для всех x, $x \leq x$.

Антисимметричность: если $x \leq y$ *и* $y \leq x$, *то* $x = y$.

Транзитивность: если $x \leq y$ *и* $y \leq z$, *то* $x \leq z$.

Для любого отношения $x \leq y$ такого типа можно определить $x < y$, что означает $x \leq y$ и $x \neq y$.

Говорят, что *y покрывает* (доминирует) x, если $x < y$ и если $x < t < y$ невозможно ни для какого t.

Упорядоченные множества с конечным числом элементов могут быть удобно представлены направленным графом. Каждый элемент системы представлен вершиной так, что дуга направлена от a к b, если $a > b$.

Вполне упорядоченное множество (также называемое *цепью*) есть упорядоченное множество со следующим дополнительным свойством: если $x, y \in S$, то или $x \leq y$ или $y \leq x$.

Вводится обозначение $x^{-} = \{y \mid x$ покрывает $y\}$ и $x^{+} = \{y \mid y$ покрывает $x\}$ для любого элемента x в упорядоченном множестве.

Пусть H – конечное частично упорядоченное множество с наибольшим элементом b. H есть *иерархия*, если выполняются следующие условия:

1. Существует разбиение H на подмножества L_k, $k = 1,2,...,h$, где $L_1 = \{b\}$.

2. Из $x \in L_k$ следует, что $x^{-} \subset L_{k+1}$, $k = 1,...,h-1$.

3. Из $x \in L_k$ следует, что $x^+ \subset L_{k-1}$, $k = 2,...,h$.

Для каждого $x \in H$ существует весовая функция (сущность ее зависит от явления, для которого строится иерархия)

$$w_x : x^- \to [0;1], \text{ что } \sum_{y \in x^-} w_x(y) = 1 .$$

Множества L_k являются уровнями иерархии, а функция w_x есть функция приоритета элемента одного уровня относительно цели *x*.

Пример. Рассмотрим иерархию *H*, построенную для задачи выбора руководителя из трех кандидатов. Элементами множества *H* в данном случае являются цель задачи и факторы, на нее влияющие, а также кандидаты на должность руководителя.

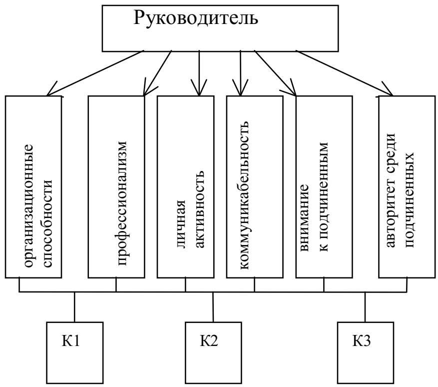


Рис. 2.2. Иерархия задачи «Выбор руководителя»

H = {руководитель, организационные способности, профессионализм, личная активность, коммуникабельность, внимание к подчиненным, авторитет среди подчиненных, кандидат 1, кандидат 2, кандидат 3}.

Для иерархии выполняются все условия определения.

1. Существует разбиение множества *H* на подмножества L_1, L_2, L_3 (h = 3), где L_1 = {Руководитель}, L_2 = {организационные способности, профессионализм, личная активность, коммуникабельность, внимание к подчиненным, авторитет среди подчиненных}, L_3 = {кандидат 1, кандидат 2, кандидат 3}.

2. Рассмотрим *x* = Руководитель $\in L_1$, в этом случае $x^- = L_2$. (аналогичные выводы справедливы и для всех других *x*).

3. Рассмотрим *x* = кандидат 1 $\in L_3$, в этом случае $x^+ = L_2$. (аналогичные выводы справедливы и для всех других *x*).

Определим весовую функцию для элемента *x* = Руководитель. Эта функция ставит в соответствие качествам руководителя (элементам уровня L_2) значения из отрезка [0, 1] и определяет приоритет этих качеств относительно цели – «Руководитель». Весовая функция задается субъективно экспертами. К примеру, она может быть такой:

$w_{\text{руководитель}}$(орг. способ.) = 0,3; $w_{\text{руководитель}}$(профес.) = 0,2;
$w_{\text{руководитель}}$(личн. актив.) = 0,1; $w_{\text{руководитель}}$(коммуникабельность) = 0,1;
$w_{\text{руководитель}}$(внимание к под.) = 0,1; $w_{\text{руководитель}}$(авторитет) = 0,2.

Условие $\sum_{y \in x^-} w_x(y) = 1$ выполняется.

Основная задача МАИ заключается в следующем: как определить для любого заданного элемента $x \in L_\alpha$ и подмножества $S \subset L_\beta$ ($\alpha < \beta$) функцию $w_{x,S} : S \to [0;1]$, чтобы она отражала свойства функций приоритетов w_x на уровнях L_{k+1}, $k = \alpha,...,\beta - 1$. В частности, что это за функция $w_{b,L_h} : L_h \to [0;1]$.

В [93, 94] предлагается следующий метод решения основной задачи. Предположим, что $Y = L_k$, $X = L_{k+1}$. Пусть также существует элемент $z \in L_{k-1}$. Рассмотрим функции приоритетов

$$w_z : Y \to [0;1], w_{y_j} : X \to [0;1], j = 1,...,n_k ,$$

где n_k – количество объектов на k-ом уровне иерархии.

Обозначим $w(x_i)$ функцию приоритета элемента x_i относительно цели z. В [93] такая функция задается в виде $w(x_i) = \sum_{j=1}^{n_k} w_{y_j}(x_i) w_z(y_j), i = 1,...,n_{k+1}$.

То есть, происходит процесс взвешивания показателя влияния элемента y_j на приоритет элемента x_i путем умножения этого показателя на важность элемента y_i относительно z. Если из $w_{y_j}(x_i)$ образовать матрицу B, положив $b_{ij} = w_{y_j}(x_i)$, $W=w(x_i)$, $W'=w_z(y_j)$, то окончательная формула примет вид: $W = BW'$. Такое взвешивание производится для каждого уровня иерархии.

Рассматривая процесс взвешивания на всей иерархии, получаем формулу вектора приоритетов самого низкого уровня относительно цели b: $W = B_h B_{h-1} ... B W'$, где h – количество уровней в иерархии, W' – приоритет элементов первого уровня иерархии (в большинстве случаев первый уровень состоит из одного элемента – цели процесса принятия решений, в этом случае W' – скаляр).

2.3. Комплекты. Нечеткие множества. Нечеткие отношения

Четкие и нечеткие множества

Любые ситуации, требующие принятия решений, содержат, как правило, большое количество неопределенностей. В этом случае информация, на основе которой принимается решение, может быть выражена нечетко. Начало развития понятий нечетких множеств связано с именем Л.А. Заде. Современные понятия нечеткой логики представлены в работах А.Н. Мелихова [70, 71], А.Н. Борисова [23, 24, 25, 26], С.А. Орловского [81], Х. Райфа [89], А. Кофмана [56], В.Б. Кузьмина [57, 58], в работах [74, 78, 79, 87].

Множество A – четкое множество, если A – часть некоторого универсального для данной прикладной задачи множества U, характеризующегося условиями:

- все элементы множества четко различимы между собой, в множестве нет нескольких экземпляров некоторых элементов;
- относительно каждого элемента $u \in U$ можно четко определить, принадлежит он данному множеству или нет.

Эти условия позволяют охарактеризовать четкое множество его характеристической функцией, заданной на универсальном множестве U и принимающей значения в множестве $\{0, 1\}$:

$$\chi_A(u) = \begin{cases} 0, u \notin A, \\ 1, u \in A \end{cases} \quad u \in U.$$

Отказ от первого условия приводит к более общему, чем множество, понятию *комплекта*, допускающего наличие нескольких экземпляров некоторых элементов. Комплект характеризуется функцией экземплярности, заданной на универсальном множестве U и принимающей значения в множестве неотрицательных целых чисел: $\psi_A(u) \in \{0, 1, 2, ...\}$ – число экземпляров элемента $u \in U$ в комплекте A.

Отказ от второго условия приводит к более общему, чем множество, понятию *нечеткого множества*, допускающего определение лишь некоторой степени принадлежности элементов такому множеству.

Нечетким подмножеством $\tilde{A}$ множества X называется совокупность пар вида $\tilde{A} = \{< x, \mu_A(x) >\}$, где $x \in X$, а $\mu_A(x)$ – функция принадлежности, ставящая в соответствие множеству X отрезок $[0;1]$.

X – базовое множество, или базовая шкала. В множество $\tilde{A}$ не включаются элементы, для которых $\mu_A(x) = 0$. Нечеткое множество $\varnothing$ - пустое, если $\mu_\varnothing(x) = 0$ для каждого $x \in X$. Нечеткое множество X – универсальное, если $\mu_X(x) = 1$ для каждого $x \in X$.

Функция принадлежности выбирается субъективно, зависит от субъекта, его настроения, цели построения множеств, решаемой задачи и т.д.

Пример.

Пусть X – множество отечественных машин. X = {«Волга», «Ока», «Москвич», «Жигули»}. Тогда можно определить нечеткое множество $\tilde{A}$ хороших машин так: $\widetilde{A}$ = {(«Волга»; 1), («Запорожец»; 0,4), («Москвич»; 0,6), («Жигули»; 0,8)}.

Пример.

Функция принадлежности четкому множеству В = $\{x|\ 0 \le x \le 2\}$ принимает значение 1, если $0 \le x \le 2$ и значение 0 в противном случае. Ее график приведен на рисунке.

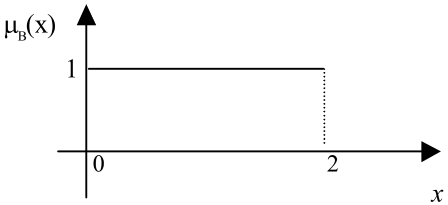


Рис. 2.3. График функции принадлежности множеству В = $\{x|\ 0 \le x \le 2\}$

График же функции принадлежности любому нечеткому множеству (за исключением пустого и универсального множеств) будет представлять собой некую кривую. Рассмотрим, например, нечеткое множество С = { x| «значение x близко к 1»}. График его функции принадлежности может выглядеть так, как например на рис. 2.4.

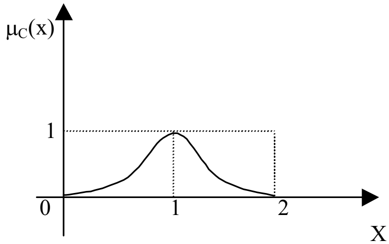


Рис. 2.4. График функции принадлежности множеству
С = { x| «значение x близко к 1»}

Носителем нечеткого множества $\widetilde{A}$ называется подмножество A множества X, содержащее те элементы из X, для которых значения функции принадлежности $\mu_A(x) > 0$. Следует заметить, что носитель нечеткого множества – это множество в обычном смысле.

Пример.

Пусть X – множество натуральных чисел. Тогда его нечеткое подмножество $\widetilde{M}$ очень малых чисел может быть таким: $\widetilde{M}$ = {(1; 1), (2; 0,8), (3; 0,7), (4; 0,6), (5; 0,5), (6; 0,3), (7; 0,1)}.

Носителем нечеткого множества $\widetilde{M}$ является множество $M = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. Это обычное четкое подмножество множества X.

Нечеткие высказывания и операции над ними

Определение. *Нечеткое высказывание* – предложение, относительно которого можно судить о степени его истинности или ложности в настоящее время. Степень истинности или ложности $d(\widetilde{A})$ принимает значения из [0; 1].

Где 0, 1 – предельные значения степени истинности и совпадают с понятиями «лжи» и «истины» для четких высказываний.

Нечеткие высказывания со степенью истины 0,5 называются *индифферентностью*, поскольку оно истинно в той же мере, что и ложно.

Пример.

«2 – маленькое число» – нечеткое высказывание, степень истинности которого 0,9.

Определение. Отрицанием нечеткого высказывания $\widetilde{A}$ является высказывание $\rceil\widetilde{A}$, степень истинности которого определяется выражением $d(\rceil\widetilde{A}) = 1 - d(\widetilde{A})$. Из этого определения следует, что степень ложности $\rceil\widetilde{A}$ совпадает со степенью истинности для $\widetilde{A}$.

Определение. Конъюнкцией нечетких высказываний $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, называется нечеткое высказывание $\widetilde{A} \& \widetilde{B}$, степень истинности которого совпадает со степенью истинности менее истинного высказывания. $d(\widetilde{A} \& \widetilde{B}) = min(d(\widetilde{A}), d(\widetilde{B}))$.

Определение. Дизъюнкцией нечетких высказываний $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, называется нечеткое высказывание $\widetilde{A} \vee \widetilde{B}$, степень истинности которого совпадает со степенью истинности более истинного высказывания $d(\widetilde{A} \vee \widetilde{B}) = max(d(\widetilde{A}), d(\widetilde{B}))$. .

Определение. Импликацией нечетких высказываний $\widetilde{A}$ и $\widetilde{B}$, называется нечеткое высказывание $\widetilde{A} \rightarrow \widetilde{B}$, степень истинности которого $d(\widetilde{A} \rightarrow \widetilde{B}) =$ $= \max(1 - d(\widetilde{A}),\ d(\widetilde{B}))$. Истинность импликации не меньше чем степень ложности ее посылки или степень истинности ее следствия.

Пример.

Пусть нечеткое высказывание $\widetilde{A}$ имеет степень истинности 0,3; нечеткое высказывание $\widetilde{B}$ – 0,6. Импликация этих высказываний $\widetilde{A} \rightarrow \widetilde{B}$ будет иметь степень истинности $d(\widetilde{A} \rightarrow \widetilde{B}) = max(0{,}7; 0{,}6) = 0{,}7$.

Степень импликации тем выше, чем меньше степень истинности посылки или больше степень истинности следствия.

Определение. Эквивалентностью нечетких высказываний $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$, называется нечеткое высказывание $\tilde{A} \leftrightarrow \tilde{B}$.

$d(\tilde{A} \leftrightarrow \tilde{B}) = \min\big((\max(1 - d(\tilde{A}), d(\tilde{B})), (\max(1 - d(\tilde{B}), d(\tilde{A}))\big)$.

Истинность эквивалентности совпадает со степенью истинности менее истинной из импликаций $\tilde{A} \to \tilde{B}$ и $\tilde{B} \to \tilde{A}$.

Если степень истинности высказываний 0 или 1, то все определения соответствуют логическим операциям над четкими высказываниями.

Определение. Два высказывания $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называются нечетко близкими, если степень истинности $\tilde{A} \leftrightarrow \tilde{B}$ больше или равна 0,5. В последнем случае будем называть $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ взаимно нечетко индифферентными.

Порядок выполнения операций над нечеткими высказываниями

- Скобки.
- Отрицание.
- Конъюнкция.
- Дизъюнкция.
- Импликация.
- Эквивалентность.

Пример.

Вычислим степень истинности составного нечеткого высказывания

$\tilde{D} = (\tilde{A} \,\&\, \rceil\tilde{B} \vee \rceil\, \tilde{A} \,\&\, \tilde{B}) \to \rceil(\tilde{A} \,\&\, \tilde{C})$; если $\tilde{A} = 0{,}7$; $\tilde{B} = 0{,}4$; $\tilde{C} = 0{,}9$.

$\tilde{D} = \max\big((1- d(\tilde{A} \,\&\, \rceil\, \tilde{B} \vee \rceil\, \tilde{A} \,\&\, \tilde{B})), d(\rceil(\tilde{A} \,\&\, \tilde{C}))\big) =$

$= \max\big((1 - \max(d(\tilde{A} \,\&\, \rceil\, \tilde{B}), d(\rceil\, \tilde{A} \,\&\, \tilde{B})), d(1-(\tilde{A} \,\&\, \tilde{C}))\big) =$

$= \max\ \big((1 - \max(\min(d(\tilde{A}),\ 1 - d(\tilde{B})),\ \min\ (1 - d(\tilde{A}),\ d(\tilde{B})))\big),$

$1 - \min\ (d(\tilde{A}), d(\tilde{C}))\big) =$

$= \max\big((1 - \max(\min\ 0{,}7;\ 0{,}6),\ \min\ (0{,}3;\ 0{,}4))),\ 1 - \min\ (0{,}7;\ 0{,}9)\big) =$

$= \max\ \big((1 - \max(0{,}6;\ 0{,}3)),\ 0{,}3\big) = \max\ (0{,}4; 0{,}3) = 0{,}4$.

Нечеткие логические формулы и их свойства

Определение. Нечеткая высказывательная переменная $\tilde{x}_i$ – это нечеткое высказывание, степень истинности которого может принимать произвольное значение из отрезка [0; 1].

Определение. Нечеткой логической формулой $\tilde{A}\ (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, ..., \tilde{x}_n)$, $n \geq 1$ называется:

а) любая нечеткая высказывательная переменная или константа из [0; 1],

б) выражение $\tilde{A}\ (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, ..., \tilde{x}_n)$, полученное из нечетких логических формул $\tilde{A}_1\ (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, ..., \tilde{x}_n)$ и $\tilde{A}_2\ (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \tilde{x}_3, ..., \tilde{x}_n)$ применением к ним любого конечного числа логических операций.

В частности составные нечеткие высказывания также являются нечеткими логическими формулами, если рассмотреть образующие их простые нечеткие высказывания как нечеткие высказывательные переменные.

Определение. Степень равносильности формул $\widetilde{A}_1\left(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n\right)$ и $\widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$ обозначается $\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2)$ и определяется $\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2)$ $= \underset{\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, ..., \widetilde{x}_n}{\&} (\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n) \leftrightarrow \widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$).

Если степень равносильности нечетких логических формул $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$ и $\widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$ на всех определенных наборах степеней истинности высказывательных переменных больше или равна 0,5, то такие формулы будем называть нечетко близкими на этих наборах и обозначать $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n) \approx \widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$.

Если $\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2) \leq 0{,}5$, то формулы не являются нечетко близкими: $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n) \not\approx \widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$.

Заметим, что при $\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2) = 0{,}5$ формулы $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$ и $\widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$ одновременно являются и не являются нечетко близкими. Их называют взаимно индифферентными и обозначают $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n) \sim \widetilde{A}_2(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$.

Равносильность четких логических формул является частным случаем нечеткой близости.

Если $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ на одних и тех же наборах степеней истинности переменных принимают одни и те же значения степени истинности, то значение степени их равносильности всегда больше или равно 0,5, что является частным случаем нечеткой близости. То есть, нечеткие логические формулы, имеющие на одних и тех же наборах переменных одинаковые степени истинности не равносильны, а имеют некоторую степень равносильности ≥ 0,5, но всегда ≥ 1.

Пример.

Определить степень равносильности формул $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}, \widetilde{y})$ и $\widetilde{A}_2(\widetilde{x}, \widetilde{y})$, где $\widetilde{A}_1(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \rceil\widetilde{x} \rightarrow \widetilde{y}$, $\widetilde{A}_2(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \widetilde{x} \& \neg\widetilde{y}$, $\widetilde{x}$ принимает значение степени истинности из множества дискретных значений {0,8; 0,6; 0,7}, а $\widetilde{y}$ из {0,3; 0,4}.

Решение.

$\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2) = \underset{\widetilde{x}, \widetilde{y}}{\&} (\rceil\widetilde{x} \rightarrow \widetilde{y}) \leftrightarrow (\widetilde{x} \& \rceil\widetilde{y})$). Выбирая все возможные наборы степеней истинности $\widetilde{x}$ и $\widetilde{y}$, запишем

$\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2) = ((\rceil 0{,}8 \rightarrow 0{,}3) \leftrightarrow (0{,}8 \,\&\, \rceil 0{,}3)) \,\&\, (\rceil 0{,}8 \rightarrow 0{,}4) \leftrightarrow (0{,}8 \,\&\, \rceil 0{,}4)) \,\&\, (\rceil 0{,}6 \rightarrow 0{,}3) \leftrightarrow (0{,}6 \,\&\, \rceil 0{,}3)) \,\&\, (\rceil 0{,}6 \rightarrow 0{,}4) \leftrightarrow (0{,}6 \,\&\, \rceil 0{,}4)) \,\&\, (\rceil 0{,}7 \rightarrow 0{,}3) \leftrightarrow (0{,}7 \,\&\, \rceil 0{,}3)) \,\&\, (\rceil 0{,}7 \rightarrow 0{,}4) \leftrightarrow (0{,}7 \,\&\, \rceil 0{,}4)) \,\& = (0{,}8 \leftrightarrow 0{,}7) \,\&\, (0{,}8 \leftrightarrow 0{,}6) \,\&\, (0{,}6 \leftrightarrow 0{,}6) \,\&\, (0{,}6 \leftrightarrow 0{,}6) \,\&\, (0{,}7 \leftrightarrow 0{,}7) \,\&\, (0{,}7 \leftrightarrow 0{,}6) = 0{,}7 \,\&\, 0{,}6 \,\&\, 0{,}6 \,\&\, 0{,}6 \,\&\, 0{,}7 \,\&\, 0{,}6 = 0{,}6.$

Откуда следует, формулы $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$ нечетко близки при заданных наборах степеней истинности.

Если сделать такую же проверку, полагая, что $\widetilde{x}$ принимает значение из набора {0,2; 0,4}, а $\widetilde{y}$ из {0,6; 0,7; 0,8}, то $\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2) = 0{,}2$. И в этом случае формулы не являются нечетко близкими.

Определение. Если при всех определенных значениях степени истинности нечетких переменных $\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n$, значение степени истинности нечеткой логической формулы $\widetilde{A}\,(\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \widetilde{x}_3, ..., \widetilde{x}_n)$ больше или равно 0,5, то формула является нечетко истинной на данных наборах переменных и обозначается через $\widetilde{И}$. Если значение степени истинности меньше или равно *0,5*, то такую формулу будем называть нечетко ложной на данных наборах переменных и обозначим $\widetilde{Л}$.

Пусть $\widetilde{И}_1$, $\widetilde{И}_2$, $\widetilde{Л}_1$, $\widetilde{Л}_2$ – некоторые нечетко истинные и нечетко ложные формулы на одних и тех же наборах переменных, тогда справедливы следующие соотношения.

$$\widetilde{И}_1 \vee \widetilde{И}_2 \approx \widetilde{И}_1 \approx \widetilde{И}_2 \approx \widetilde{И}_1 \,\&\, \widetilde{И}_2$$

$$\widetilde{Л}_1 \vee \widetilde{Л}_2 \approx \widetilde{Л}_1 \approx \widetilde{Л}_2 \approx \widetilde{Л}_1 \,\&\, \widetilde{Л}_2$$

$$\widetilde{И}_1 \,\&\, \widetilde{Л}_1 \approx \widetilde{Л}_1$$

$$\widetilde{И}_1 \vee \widetilde{Л}_1 \approx \widetilde{И}_1.$$

Если $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$ – произвольные нечеткие логические формулы, то справедливы соотношения:

$$\widetilde{A}_1 \vee \widetilde{И}_1 \approx \widetilde{A}_2 \vee \widetilde{И}_2$$

$$\widetilde{A}_1 \,\&\, \widetilde{Л}_1 \approx \widetilde{A}_2 \,\&\, \widetilde{Л}_2,$$

где $\widetilde{A}_1, \widetilde{A}_2$, $\widetilde{И}_1$, $\widetilde{И}_2$, $\widetilde{Л}_1$, $\widetilde{Л}_2$ определены на одних и тех же наборах переменных.

Пример.

Приведем простейший пример нечетко истинных и нечетко ложных формул.

$$\tilde{Л} = \tilde{x} \& \rceil \tilde{x}$$

$$\tilde{И} = \tilde{x} \vee \rceil \tilde{x} \ .$$

Это следует из определения операций отрицания, конъюнкции и дизъюнкции, т.к. $\tilde{x} \& \rceil \tilde{x} \ \leq 0{,}5$, $\tilde{x} \vee \rceil \tilde{x} \ \geq 0{,}5$.

Тождества позволяют определить класс нечетко близких формул, не имеющих аналогов в нечеткой логике.

Соотношения, справедливые для любых наборов значений истинности нечетких переменных.

Пусть $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$ – нечеткие логические формулы.

$$\rceil(\rceil \tilde{x}) \approx \tilde{x} \ ; \tag{1}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x} \,\&\, \tilde{x} \approx \tilde{x} \\ &\tilde{x} \vee \tilde{x} \approx \tilde{x} \end{aligned}\right. \ ; \tag{2}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x} \,\&\, \tilde{y} \approx \tilde{y} \,\&\, \tilde{x} \\ &\tilde{x} \vee \tilde{y} \approx \tilde{y} \vee \tilde{x} \end{aligned}\right. \ ; \tag{3}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x} \,\&\, (\tilde{y} \,\&\, \tilde{z}) \approx (\tilde{x} \,\&\, \tilde{y}) \,\&\, \tilde{z} \approx \tilde{x} \,\&\, \tilde{y} \,\&\, \tilde{z} \\ &\tilde{x} \vee (\tilde{y} \vee \tilde{z}) \approx (\tilde{x} \vee \tilde{y}) \vee \tilde{z} \approx \tilde{x} \vee \tilde{y} \vee \tilde{z} \end{aligned}\right. \ ; \tag{4}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x} \,\&\, (\tilde{y} \vee \tilde{z}) \approx (\tilde{x} \,\&\, \tilde{y}) \vee (\tilde{x} \,\&\, \tilde{z}) \\ &\tilde{x} \vee (\tilde{y} \,\&\, \tilde{z}) \approx (\tilde{x} \vee \tilde{y}) \,\&\, (\tilde{x} \vee \tilde{z}) \end{aligned}\right. \ ; \tag{5}$$

$$\left.\begin{aligned} &\rceil(\tilde{x} \,\&\, \tilde{y}) \approx \rceil \tilde{x} \vee \rceil \tilde{y} \\ &\rceil(\tilde{x} \vee \tilde{y}) \approx \rceil \tilde{x} \,\&\, \rceil \tilde{y} \end{aligned}\right. \ ; \tag{6}$$

$$\left.\begin{aligned} &\tilde{x} \,\&\, (\tilde{x} \vee \tilde{y}) \approx \tilde{x} \\ &\tilde{x} \vee (\tilde{x} \,\&\, \tilde{y}) \approx \tilde{x} \end{aligned}\right. \ ; \tag{7}$$

$$(\tilde{x} \vee \tilde{y}) \vee (\tilde{x} \,\&\, \tilde{y}) \approx \tilde{x} \vee \tilde{y} \ ; \tag{8}$$

$$(\tilde{x} \vee \tilde{y}) \,\&\, (\tilde{x} \,\&\, \tilde{y}) \approx \tilde{x} \,\&\, \tilde{y} \ ; \tag{9}$$

$$\tilde{x} \& \rceil \tilde{x} \approx \tilde{y} \& \rceil \tilde{y} \ ; \tag{10}$$

$$\tilde{x} \vee \rceil \tilde{x} \vee \tilde{y} \approx \tilde{y} \vee \rceil \tilde{y} \vee \tilde{x} \ ; \tag{11}$$

$$\left.\begin{aligned} &(\tilde{x} \& \rceil \tilde{x}) \,\&\, (\tilde{y} \vee \rceil \tilde{y}) \approx \tilde{x} \& \rceil \tilde{x} \\ &(\tilde{x} \vee \rceil \tilde{x}) \vee (\tilde{y} \& \rceil \tilde{y}) \approx \tilde{x} \vee \rceil \tilde{x} \end{aligned}\right. \ ; \tag{12}$$

$$\tilde{x} \to \tilde{y} \approx \rceil \tilde{y} \to \rceil \tilde{x} \ ; \tag{13}$$

$$\rceil \tilde{x} \to \tilde{y} \approx \rceil \tilde{y} \to \tilde{x} \approx \tilde{x} \vee \tilde{y} \ ; \tag{14}$$

$$\tilde{x} \to (\tilde{y} \vee \rceil \tilde{y}) \approx (\tilde{x} \& \rceil \tilde{x}) \to \tilde{y} \ ; \tag{15}$$

$$(\tilde{x}\&\rceil\tilde{x})\to(\tilde{y}\vee\tilde{z})\approx(\tilde{y}\&\rceil\tilde{y})\to\tilde{x}\vee\tilde{z}\,. \qquad (16)$$

Кроме того, пусть 0, c, 1 – константы и $0 < c < 1$, тогда

$$\tilde{x}\,\&\,0\approx 0,\;\; \tilde{x}\,\&\,1\approx\tilde{x}$$
$$\tilde{x}\vee 0\approx\tilde{x},\;\; \tilde{x}\vee 1\approx 1\,.$$
$$\tilde{x}\,\&\,c\approx\begin{cases}\tilde{x},\ если\ \tilde{x}\le c,\\ c,\ если\ \tilde{x}\ge c.\end{cases}$$
$$\tilde{x}\vee c\approx\begin{cases}c,\ если\ \tilde{x}\le c,\\ \tilde{x},\ если\ \tilde{x}\ge c.\end{cases}$$

Для доказательства каждого из выражений необходимо показать, что степень равносильности $\mu(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)$ образующих его формул $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2$ больше или равно 0,5.

Это возможно тогда, когда формулы $\tilde{A}_1,\tilde{A}_2$ принимают одни и те же значения степени истинности на одинаковых наборах переменных либо имеют степень истинности одновременно меньше или равно 0,5 или больше или равно 0,5 на одинаковых наборах переменных.

Докажем формулу (6) $\rceil(\tilde{x}\,\&\,\tilde{y})\approx\rceil\tilde{x}\vee\rceil\tilde{y}$, обозначим $\tilde{A}_1\ (\tilde{x},\tilde{y})=\rceil(\tilde{x}\,\&\,\tilde{y})$, $\tilde{A}_2\ (\tilde{x},\tilde{y})=\rceil\tilde{x}\vee\rceil\tilde{y}$.

$d(\tilde{A}_1(\tilde{x},\tilde{y}))=1-min(d(\tilde{x}),d(\tilde{y}))$, $d(\tilde{A}_2(\tilde{x},\tilde{y}))=max(1-d(\tilde{x}),1-d(\tilde{y}))$. Если $d(\tilde{x})<d(\tilde{y})$, тогда $d(\tilde{A}_1\ (\tilde{x},\tilde{y}))=1-d(\tilde{x})$ и $d(\tilde{A}_2\ (\tilde{x},\tilde{y}))=1-d(\tilde{x})$, т.е. при всех $\tilde{x}$ степени истинности формул $\tilde{A}_1\ (\tilde{x},\tilde{y})$ и $\tilde{A}_2\ (\tilde{x},\tilde{y})$ совпадают, откуда следует $\mu(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)\ \ge 0{,}5$.

Если $d(\tilde{x})>d(\tilde{y})$, то $d(\tilde{A}_1\ (\tilde{x},\tilde{y}))=1-d(\tilde{y})$, $d(\tilde{A}_2\ (\tilde{x},\tilde{y}))=1-d(\tilde{y})$, откуда следует $\mu(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)\ \ge 0{,}5$.

Если $d(\tilde{x})=d(\tilde{y})$, то $d(\tilde{A}_1\ (\tilde{x},\tilde{y}))=1-d(\tilde{x})$, $d(\tilde{A}_2\ (\tilde{x},\tilde{y}))=1-d(\tilde{y})$, откуда следует $\mu(\tilde{A}_1,\tilde{A}_2)\ \ge 0{,}5$.

Нечеткие предикаты и кванторы

Определение. Нечеткие логические формулы, которые определены на каком-либо множестве X и принимают свои значения из замкнутого интервала [0, 1] называют нечетким предикатом.

Например, μ_A – функция принадлежности является одноместным нечетким предикатом.

Пример.

$X = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$, тогда нечеткий предикат «быть небольшим числом» принимает следующие значения: $\tilde{A}(1) = 1$, $\tilde{A}(2) = 0{,}9$, $\tilde{A}(3) = 0{,}7$, $\tilde{A}(4) = 0{,}5$, $\tilde{A}(5) = 0{,}1$, $\tilde{A}(6) = 0$, $\tilde{A}(7) = 0$, $\tilde{A}(8) = 0$, $\tilde{A}(9) = 0$, $\tilde{A}(10) = 0$ и фактически задает нечеткое множество $\tilde{A} = \{(1; 1), (2; 0{,}9), (3; 0{,}7), (4; 0{,}3), (5; 0{,}1)\}$ в множестве X.

Пусть область определения нечеткого предиката $\tilde{A}$ является множество $X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$, тогда для каждого $x \in X$ может быть вычислено значение $\mu_A(\text{x})$ предиката $\tilde{A}(\text{x})$.

Определение. Величина $\mu(\tilde{A}) = \mu_A(x_1) \& \mu_A(x_2) \& \mu_A(x_3) \& \ldots \& \mu_A(x_n) = = \underset{x \in X}{\&} \mu_A(x)$ называется степенью общности свойств $\tilde{A}(x)$ для элементов множества X.

Если $\mu(\tilde{A}) \geq 0{,}5$, то на логическую формулу $\tilde{A}(\text{x})$ может быть навешан квантор нечеткой общности $\tilde{\forall}$, который читается «для всех» или «для любого».

Определение. Величина $\nu(\tilde{A}) = \mu_A(x_1) \vee \mu_A(x_2) \vee \mu_A(x_3) \vee \ldots \vee \mu_A(x_n) = = \underset{x \in X}{\vee} \mu_A(x)$ называется степенью существования свойства $\tilde{A}(x)$ для элементов множества X.

Если $\nu(\tilde{A}) \geq 0{,}5$, то на логическую формулу $\tilde{A}(x)$ может быть навешан квантор нечеткого существования $\tilde{\exists}$, который читается «существует такой» или «имеется такой».

Пусть $\tilde{A}(x)$ – нечеткая логическая формула от одной переменной, принимающей значения из X. Выражение $(\tilde{\forall}\, \text{x} \in \text{X})\ \tilde{A}(x)$ является нечетко истинной формулой и читается «для любого $x \in X$ степень истинности $\tilde{A}(x)$ больше или равно 0,5».

Операции над нечеткими множествами. Нечеткое включение и нечеткое равенство множеств

Также как над четкими множествами определяются логические операции включения, равенства, объединения, пересечения, дополнения и т.д., определяются они и над нечеткими множествами, только делается это при помощи функции принадлежности.

Определение. Пусть заданы нечеткие подмножества $\tilde{A}, \tilde{B}$ множества X. Степень включения $\nu(\tilde{A}, \tilde{B})$ нечеткого множества $\tilde{A}$ в нечеткое множество

$\widetilde{B}$ находится по формуле $\nu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = \underset{x\in X}{\&}(\mu_A(x) \to \mu_B(x))$, где $\mu_A(x)$, $\mu_B(x)$ понимаются как нечеткие высказывательные переменные, $\to$ – импликация, $\&$ – операция конъюнкции, которая берется по всем $x \in X$.

Если $\nu(\widetilde{A},\widetilde{B}) \geq 0,5$, то $\widetilde{A}$ нечетко включается в множество $\widetilde{B}$ и обозначается $\widetilde{A} \subsetsim \widetilde{B}$. Если $\nu(\widetilde{A},\widetilde{B}) \leq 0,5$, то $\widetilde{A}$ нечетко не включается в множество $\widetilde{B}$ и обозначается $\widetilde{A} \not\subsetsim \widetilde{B}$. Это понятие является обобщением понятия включения для четких множеств. Действительно, пусть A и B – четкие множества и $A \subseteq B$, отсюда следует $\nu(A,B) = 1$. Если же $A \not\subseteq B$, то $\nu(A,B) = 0$.

Пример.

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.

$\widetilde{A} = \{(x_2;0,3), (x_3;0,6), (x_5;0,4)\}$, $\widetilde{B} = \{(x_1;0,8), (x_2;0,5), (x_3;0,7), (x_5;0,6)\}$, тогда $\nu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = (0 \to 0,8) \& (0,3 \to 0,5) \& (0,6 \to 0,7) \& (0 \to 0) \& (0,4 \to 0,6) =$ $= 1 \& 0,7 \& 0,7 \& 1 \& 0,6 = 0,6$.

Аналогично можно вычислить $\nu(\widetilde{B},\widetilde{A}) = 0,2$, откуда следует $\widetilde{A} \subsetsim \widetilde{B}$, но $\widetilde{B} \not\subsetsim \widetilde{A}$.

Определение. Множество $\widetilde{A}$ включается во множество $\widetilde{B}$ – $\widetilde{A} \subset \widetilde{B}$ если $\forall x \in X$, $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$.

Справедливо следующее утверждение: если нечеткое множество $\widetilde{A}$ включается в нечеткое множество $\widetilde{B}$, то выполняется и нечеткое включение $\widetilde{A} \subsetsim \widetilde{B}$.

Действительно, пусть выполняется $\forall x \in X$, $\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$, докажем, что $\nu(\widetilde{A},\widetilde{B}) \geq 0,5$.

Если

$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \leq 0,5$, то $\nu(\widetilde{A},\widetilde{B}) = (\mu_A(x_1) \to \mu_B(x_1)) \& (\mu_A(x_2) \to \mu_B(x_2)) \& \ldots$ $(\mu_A(x_n) \to \mu_B(x_n)) = (\max(1 - \mu_A(x_1), \mu_B(x_1))) \& (\max(1 - \mu_A(x_2), \mu_B(x_2))) \& \ldots$ $\& (\max(1 - \mu_A(x_n), \mu_B(x_n))) = (1 - \mu_A(x_1)) \& (1 - \mu_A(x_2)) \& \ldots \& (1 - \mu_A(x_n))$. Из определения операции конъюнкции следует, что результат будет минимальным из всех $(1 - \mu_A(x_i))$, $i = 1 \ldots n$. А поскольку для $\forall x \in X$ $\mu_A(x) \leq 0,5$, то $\nu(\widetilde{A},\widetilde{B}) \geq 0,5$.

Если $0{,}5 < \mu_A(x) \le \mu_B(x)$, то $\nu(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\mu_A(x_1) \to \mu_B(x_1))\&$ $\& (\mu_A(x_2) \to \mu_B(x_2))\& \ldots (\mu_A(x_n) \to \mu_B(x_n)) = (\max(1-\mu_A(x_1), \mu_B(x_1)))\&$ $(\max(1-\mu_A(x_2), \mu_B(x_2)))\& \ldots \&(\max(1-\mu_A(x_n), \mu_B(x_n))) = (\mu_B(x_1))\& (\mu_B(x_2))$ $\& \ldots \& (\mu_B(x_n))$. Так как для $\forall x \in X$ $\mu_B(x) > 0{,}5$, то $\nu(\tilde{A}, \tilde{B}) > 0{,}5$.

То есть, для любых $\nu(\tilde{A}, \tilde{B}) \ge 0{,}5$ для любых значений функций принадлежности $\mu_A(x)$ и $\mu_B(x)$, $\forall x \in X$.

Если же выполняется $\nu(\tilde{A}, \tilde{B}) \ge 0{,}5$, то из этого не следует, что $\forall x \in X$, $\mu_A(x) \le \mu_B(x)$. Действительно, $\nu(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\mu_A(x_1) \to \mu_B(x_1))\&$ $(\mu_A(x_2) \to \mu_B(x_2))\& \ldots (\mu_A(x_n) \to \mu_B(x_n)) = (\max(1 - \mu_A(x_1), \mu_B(x_1)))\&$ $(\max(1 - \mu_A(x_2), \mu_B(x_2)))\&\ldots \&(\max(1 - \mu_A(x_n), \mu_B(x_n)))$, так как $\nu(\tilde{A}, \tilde{B}) \ge 0{,}5$, то по определению операции конъюнкции минимальное, а значит и все остальные значения выражений $\max(1 - \mu_A(x_i), \mu_B(x_i)) \ge 0{,}5$. Однако заметим, если, например $\mu_A(x_i) = 0{,}3$, а $\mu_B(x_i) = 0{,}2$, то $\max(1 - \mu_A(x_i), \mu_B(x_i)) \ge 0{,}5$, но $\mu_A(x_i) \ge \mu_B(x_i)$. То есть, включение множества $\tilde{A}$ во множество $\tilde{B}$ не гарантирует нечеткого включения, а является лишь достаточным условием нечеткого включения.

Определение. Степень равенства двух нечетких подмножеств $\tilde{A}, \tilde{B}$ множества X определяется как $\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) = \underset{x \in X}{\&} (\mu_A(x) \leftrightarrow \mu_B(x))$. Если $\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) \ge 0{,}5$, то множества нечетко равны $\tilde{A} \approx \tilde{B}$. Если $\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) \le 0{,}5$, то множества нечетко не равны $\tilde{A} \not\approx \tilde{B}$. Если $\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) = 0{,}5$, то множества взаимно индифферентны $\tilde{A} \sim \tilde{B}$.

Понятия нечеткого равенства и неравенства, индифферентности являются обобщением понятий равенства и неравенства для четких множеств. Действительно, пусть A и B – четкие множества, тогда в случае $A = B$, $\mu(A, B) = 1$, если же $A \ne B$ и $\mu(A, B) = 0$.

Пример.

$X = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_5\}$,

$\tilde{A} = \{(x_2; 0{,}8), (x_3; 0{,}6), (x_5; 0{,}1)\}$,

$\tilde{B} = \{(x_1; 0{,}3), (x_2; 0{,}6), (x_3; 0{,}7), (x_4; 0{,}2), (x_5; 0{,}3)\}$.

$\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) = (0 \leftrightarrow 0{,}3) \& (0{,}8 \leftrightarrow 0{,}6) \& (0{,}6 \leftrightarrow 0{,}7) \& (0 \leftrightarrow 0{,}2) \& (0{,}1 \leftrightarrow 0{,}3) =$
$= 0{,}7 \& 0{,}6 \& 0{,}6 \& 0{,}8 \& 0{,}7 = 0{,}6$, откуда следует $\tilde{A} \approx \tilde{B}$.

Преобразуем степень равенства $\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) = \underset{x \in X}{\&} (\mu_A(x) \leftrightarrow \mu_B(x)) =$ $= \underset{x \in X}{\&} ((\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(x)) \& (\mu_B(x) \rightarrow \mu_A(x)))$, в виду коммутативности конъюнкции $\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) = (\underset{x \in X}{\&} (\mu_A(x) \rightarrow \mu_B(x))) \& (\underset{x \in X}{\&} (\mu_B(x) \rightarrow \mu_A(x)))$, отсюда следует $\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) = \nu(\tilde{A}, \tilde{B}) \& \nu(\tilde{B}, \tilde{A})$, т.е. степень равенства нечетких множеств равна минимальной из степеней их взаимного включения.
Если $\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0{,}5$, т.е. множества $\tilde{A}, \tilde{B}$ нечетко равны, то $\nu(\tilde{A}, \tilde{B}) \geq 0{,}5$ и $\nu(\tilde{B}, \tilde{A}) \geq 0{,}5$, $\Rightarrow$ $\tilde{A} \underset{\sim}{\subseteq} \tilde{B}$ и $\tilde{B} \underset{\sim}{\subseteq} \tilde{A}$. Отсюда следует метод доказательства нечеткого равенства нечетких множеств, основанный на доказательстве взаимного нечеткого включения.

Определение. Нечеткое множество $\tilde{A}$ равно нечеткому множеству $\tilde{B}$
$\tilde{A} = \tilde{B}$, если $\forall x \in X$, $\mu_B(x) = \mu_A(x)$.

Нетрудно заметить, если выполняется равенство множеств $\tilde{A} = \tilde{B}$, то эти множества являются и нечетко равными $\tilde{A} \approx \tilde{B}$. Действительно, если $\mu_B(x) =$ $= \mu_A(x)$ $\forall x \in X$, то $\mu(\tilde{A}, \tilde{B}) = \underset{x \in X}{\&} (\mu_A(x) \leftrightarrow \mu_B(x)) = \nu(\tilde{A}, \tilde{B}) \& \nu(\tilde{B}, \tilde{A}) \geq 0{,}5$.

Теоретико-множественные операции

Пусть заданы нечеткие подмножества $\tilde{A}, \tilde{B}$ множества X.

$\tilde{A} = \{<x, \mu_A(x)>\}$, $\tilde{B} = \{<x, \mu_B(x)>\}$, $x \in X$.

Определение. Объединением нечетких множеств $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ является множество $\tilde{A} \cup \tilde{B} = \{x, \mu_{A \cup в}(x)\}$, $x \in X$, функция принадлежности элементов к которому определяется как $\mu_{A \cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \vee \mu_B(x)$ (рис. 2.5).

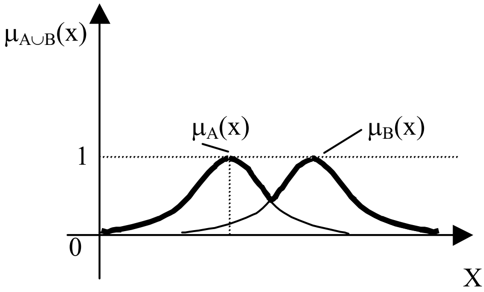


Рис. 2.5. Объединение нечетких множеств

Т.е. $\tilde{A} \cup \tilde{B}$ – это нечеткое множество, такое, что $\tilde{A} \tilde{\subseteq} \tilde{A} \cup \tilde{B}$ и $\tilde{B} \tilde{\subseteq} \tilde{A} \cup \tilde{B}$.

Определение. Пересечением нечетких множеств $A \cap B$ называется множество $\tilde{A} \cap \tilde{B} = \{x, \mu_{A \cap B}(x)\}$, $x \in X$, функция принадлежности элементов к которому определяется как $\mu_{A\cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \mu_A(x) \& \mu_B(x)$ (рис. 2.6).

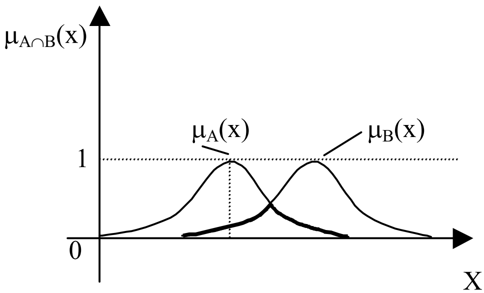


Рис. 2.6. Пересечение нечетких множеств

Т.е. $\tilde{A} \cap \tilde{B}$ – это нечеткое множество, такое, что $\tilde{A} \cap \tilde{B} \tilde{\subseteq} \tilde{A}$ и $\tilde{A} \cap \tilde{B} \tilde{\subseteq} \tilde{B}$.

Определение. Дополнением нечеткого множества $\tilde{A}$ называется множество $\urcorner\tilde{A} = \{<x, \mu_{\urcorner A}(x)>\}$, $x \in X$, такое, что $\mu_{\urcorner A}(x) = 1 - \mu_A(x)$, $x \in X$.

Пример.

Рассмотрим нечеткое множество $\tilde{B}$ чисел, гораздо больших нуля. Дополнением к этому множеству будет являться множество $\tilde{A}$ чисел, гораздо меньших нуля (рис. 2.7.).

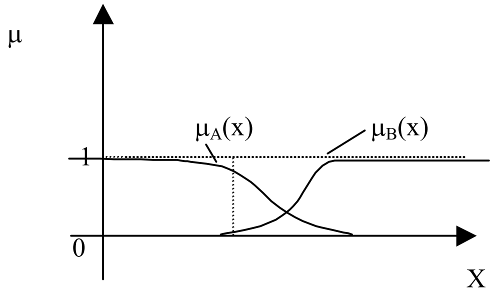


Рис. 2.7. Дополнение нечеткого множества

Определение. Разностью нечетких множеств называется множество $\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \{x, \mu_{A\setminus B}(x)\}$, $x \in X$, функция принадлежности элементов к которому определяется как $\mu_{A\setminus B}(x) = \mu_A \,\&\, \rceil \mu_B(x)$.

Определение. Симметрической разностью $\tilde{A} \ominus \tilde{B}$ называется множество $\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \{<x; \mu_{A \ominus в}(x)\}$, где $\mu_{A \ominus в}(x) = \mu_{A\setminus B}(x) \vee \mu_{B\setminus A}(x)$.

Пример.

$\tilde{A} = \{(x_1;\ 0,3),\ (x_3;\ 0,8),\ (x_6;\ 0,4)\}$

$\tilde{B} = \{(x_1;\ 0,9),\ (x_2;\ 0,2),\ (x_3;\ 0,4),\ (x_4;\ 0,5)\}$.

$\tilde{A} \vee \tilde{B} = \{(x_1;\ 0,9),\ (x_2;\ 0,2),\ (x_3;\ 0,4),\ (x_4;\ 0,5),\ (x_6;\ 0,4),\}$.

$\tilde{A} \wedge \tilde{B} = \{(x_1;\ 0,3),\ (x_3;\ 0,4)\}$.

$\rceil\tilde{A} = \{(x_1;\ 0,7),\ (x_2;\ 1),\ (x_3;\ 0,2),\ (x_4;\ 1),\ (x_5;\ 1),\ (x_6;\ 0,6),\ (x_7;\ 1)\}$.

$\tilde{A} \setminus \tilde{B} = \{(x_1;\ 0,1),\ (x_3;\ 0,6),\ (x_6;\ 0,4)\}$.

$\tilde{A} \ominus \tilde{B} = \{(x_1;\ 0,7),\ (x_2;\ 0,2),\ (x_3;\ 0,2),\ (x_4;\ 0,5),\ (x_6;\ 0,6)\}$.

Определение. Выпуклой комбинацией множеств $A_1, A_2, \ldots A_n$ называется нечеткое множество A с функцией принадлежности

$\mu_A(x) = \sum\lambda_i\, \mu_i(x)$, где $\lambda_i \geq 0$, $i=1, 2, 3, \ldots.\ n$, и $\sum\lambda_i = 1$.

Определение. Множеством уровня α нечеткого множества $\tilde{A}$ в X, называется множество в обычном смысле, составленное из элементов $x \in X$, степени принадлежности которых нечеткому множеству A больше или равны α. $A\alpha = \{x \mid x \in X, \mu_A(x) \geq \alpha\}$.

Определение. Прямым произведением нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется и через $\tilde{A}$ x $\tilde{B}$ обозначается нечеткое подмножество XxY, которое определяется выражением $\tilde{A} \text{ x } \tilde{B} = \{<(x,y), \mu_{AxB}(x,y)>\}$, $x \in X, y \in Y$, где $\mu_{AxB}(x,y) = \mu_A(x) \& \mu_B(y)$.

Определение. Композицией нечетких множеств $\tilde{A}$ и $\tilde{B}$ называется множество

$$\tilde{F} \circ \tilde{P} = \{<(x,z), \mu_{F \circ P}(x,z)>\}, (x \times z) \in X \times Z,$$

$$\mu_{F \circ P}(x,z) = \vee_{y \in Y}(\mu_F(x,y) \& \mu_P(y,z)).$$

Основные свойства нечетких множеств:

1. $\neg(\neg\tilde{A}) \approx \tilde{A}$ инволюция.

2. $\tilde{A} \vee \tilde{A} \approx \tilde{A}$,
$\tilde{A} \wedge \tilde{A} \approx \tilde{A}$ идемпотентность.

3. $\tilde{A} \vee \tilde{B} \approx \tilde{B} \vee \tilde{A}$,
$\tilde{A} \wedge \tilde{B} \approx \tilde{B} \wedge \tilde{A}$ коммутативность.

4. $\tilde{A} \vee (\tilde{B} \vee \tilde{C}) \approx (\tilde{A} \vee \tilde{B}) \vee \tilde{C} \approx \tilde{A} \vee \tilde{B} \vee \tilde{C}$,
$\tilde{A} \wedge (\tilde{B} \wedge \tilde{C}) \approx (\tilde{A} \wedge \tilde{B}) \wedge \tilde{C} \approx \tilde{A} \wedge \tilde{B} \wedge \tilde{C}$ ассоциативность.

5. $\tilde{A} \vee (\tilde{B} \wedge \tilde{C}) \approx (\tilde{A} \vee \tilde{B}) \wedge (\tilde{A} \vee \tilde{C})$,
$\tilde{A} \wedge (\tilde{B} \vee \tilde{C}) \approx (\tilde{A} \wedge \tilde{B}) \vee (\tilde{A} \wedge \tilde{C})$ дистрибутивность.

6. $\neg(\tilde{A} \vee \tilde{B}) \approx \neg\tilde{A} \wedge \neg\tilde{B}$,
$\neg(\tilde{A} \wedge \tilde{B}) \approx \neg\tilde{A} \vee \neg\tilde{B}$ законы де Моргана.

7. $\tilde{A} \vee \neg\tilde{A} \approx \tilde{B} \vee \neg\tilde{B}$,
$\tilde{A} \wedge \neg\tilde{A} \approx \tilde{B} \wedge \neg\tilde{B}$.

8. $\tilde{A} \vee \neg\tilde{A} \vee \tilde{B} \approx \tilde{B} \vee \neg\tilde{B} \vee \tilde{A}$,
$\tilde{A} \wedge \neg\tilde{A} \wedge \tilde{B} \approx \tilde{B} \wedge \neg\tilde{B} \wedge \tilde{A}$.

9. $(\tilde{A} \vee \neg\tilde{A}) \vee (\tilde{B} \wedge \neg\tilde{B}) \approx \tilde{A} \vee \neg\tilde{A}$,
$(\tilde{A} \wedge \neg\tilde{A}) \wedge (\tilde{B} \vee \neg\tilde{B}) \approx \tilde{A} \wedge \neg\tilde{A}$.

10. $\tilde{A} \setminus \tilde{B} \approx \tilde{A} \wedge \neg\tilde{B}$.

11. $\tilde{A} \ominus \tilde{B} \approx \tilde{B} \ominus \tilde{A}$.

12. $\tilde{A} \ominus (\tilde{B} \ominus \tilde{C}) \approx (\tilde{A} \ominus \tilde{B}) \ominus \tilde{C} \approx \tilde{A} \ominus \tilde{B} \ominus \tilde{C}$.

13. $\tilde{A} \ominus \tilde{B} \approx (\tilde{A} \setminus \tilde{B}) \vee (\tilde{B} \setminus \tilde{A})$.

14. $(\tilde{A} \underset{\sim}{\subsetneq} \tilde{B}) \approx (\rceil \tilde{B} \underset{\sim}{\subsetneq} \rceil \tilde{A})$.

15. $(\rceil \tilde{A} \underset{\sim}{\subsetneq} \tilde{B}) \approx (\rceil \tilde{B} \underset{\sim}{\subsetneq} \tilde{A})$.

16. $(\tilde{A} \underset{\sim}{\subsetneq} (\tilde{B} \vee \rceil \tilde{B})) \approx ((\tilde{A} \wedge \rceil \tilde{A}) \underset{\sim}{\subsetneq} \tilde{B})$.

17. $((\tilde{A} \wedge \rceil \tilde{A}) \underset{\sim}{\subsetneq} (\tilde{B} \vee \tilde{C})) \approx ((\tilde{B} \wedge \rceil \tilde{B}) \underset{\sim}{\subsetneq} (\tilde{A} \vee \tilde{C})$.

18. $\tilde{A} \vee \varnothing \approx \tilde{A}$, $\quad \tilde{A} \wedge \varnothing \approx \varnothing$.

19. $\tilde{A} \vee \mathrm{X} \approx \mathrm{X}$, $\quad \tilde{A} \wedge \mathrm{X} \approx \tilde{A}$.

Перечисленные выше основные свойства нечетких множеств еще не являются системой аксиом. Строгая же система аксиом, адекватная, в частности, алгебре нечетких множеств была сформулирована за 7 лет до их возникновения. Соответствующая алгебраическая структура определяется на множестве X с двумя системами операций: $<X, +, *, \rceil, 0,1>$ или $<X, \vee, \wedge, \rceil, 0,1>$, где $x \wedge y = (x + \rceil y) * y$, $x \vee y = (x * \rceil y) + y$ (символы операций выбраны для простоты формулировок, их не следует воспринимать буквально, как соответствующие арифметические или логические операции).

Система аксиом

1. $x + y = y + x$
2. $x + (y + z) = (x + y) + z$
3. $x + \rceil x = 1$
4. $x + 1 = 1$
5. $x + 0 = x$
6. $(x + y) = \rceil x * \rceil y$
7. $x = \rceil(\rceil x)$
8. $\overline{0} = 1$
9. $x \vee y = y \vee x$
10. $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$
11. $x + (y \wedge z) = (x + y) \wedge (x + z)$

1'. $x * y = y * x$
2'. $x * (y * z) = (x * y) * z$
3'. $x * \rceil x = 0$
4'. $x * 0 = 0$
5'. $x * 1 = x$
6'. $(x * y) = \rceil x + \rceil y$
9'. $x \wedge y = y \wedge x$
10'. $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$
11'. $x * (y \vee z) = (x * y) \vee (x * z)$

Эта система аксиом полна. Подалгебра ВХ тех элементов из X, для которых $x + x = x$ (или, что равносильно $x * x = x$), является булевой алгеброй, в которой $x + y = x \vee y$, $x * y = x \wedge y$.

Связь с нечеткими множествами становится ясной после рассмотрения класса примеров таких алгебр, образованного множествами S действительных чисел между 0 и 1, удовлетворяющими условиям (двойные ++, -- обо-

значают обычные арифметические операции):
1. $0 \in S$ и $1 \in S$;
2. Если $x, y \in S$, то $min(1, x{+}{+}y) \in S$;
3. Если $x, y \in S$, то $max(0, x{+}{+}y - 1) \in S$;
4. Если $x \in S$, то $1 - - x \in S$.

Операции в S определяются следующим образом:

$$x + y = min(1, x{+}{+}y),\ x{*}y = max(0, x{+}{+}y - 1),\ \rceil x = 1 - x,$$
$$x \vee y = max(x,y),\ x \wedge y = min(x,y).$$

Без труда проверяется, что так определенная структура удовлетворяет приведенным аксиомам, но не аксиомам булевой алгебры. Сформулированным условиям 1-4 удовлетворяют различные конкретные множества, например, $S = \{0,1\}$; $S = [0,1]$; $S = \{$все рациональные числа между 0 и 1$\}$; $S(m) =$ $= \{$все рациональные числа вида n/m для некоторого фиксированного натурального m и целых $0 \le n \le m\}$, с операциями $\rceil$, +, *.

Нечеткое подмножество A универсального множества U может быть определено функцией принадлежности $\mu_A(x) \in X$, где X удовлетворяет требуемым аксиомам (традиционно $X = S = [0,1]$); $\mu_U(u) = 1$. Операции над нечеткими множествами определяются в терминах их функций принадлежности и сводятся («поточечно») к операциям над значениями последних, то есть к операциям в X.

Операции $\rceil$, +, * в случае $X = S = [0,1]$ и являются известными в теории нечетких множеств дополнением, граничными суммой и произведением, менее популярными, чем $\vee$, $\wedge$, но находящими свое обоснование в новом контексте. Вне этого контекста (в частности, в рамках булевой алгебры) непосредственную связь между операциями $\wedge$, $\vee$ и $\rceil$ над нечеткими множествами установить затруднительно.

Нечеткие соответствия и отношения

В методе принятия решений при нечеткой исходной информации [81] и в качественных методах принятия решений [64] существенно используются понятия соответствий, отношений, нечетких соответствий и отношений, операций над ними.

Нечетким соответствием между множествами X и Y называется и через $\widetilde{\Gamma} = (X, Y, \widetilde{F})$ обозначается тройка множеств, в которой X, Y – произвольные четкие множества, $\widetilde{F}$ – нечеткое множество в $X \text{x} Y$. Подобно названиям элементов четкого соответствия множество X называют областью отправления, множество Y – областью прибытия, а $\widetilde{F}$ – нечетким графиком нечеткого соответствия.

Назовем носителем нечеткого соответствия $\widetilde{\Gamma} = (X, Y, \widetilde{F})$ соответствие $\Gamma = (X, Y, F)$, у которого график F является носителем нечеткого графика $\widetilde{F}$.

Нечеткое соответствие может быть задано теоретико-множественно, графически и в матричном виде.

Для теоретико-множественного задания нечеткого соответствия необходимо перечислить элементы множеств X и Y и задать нечеткое множество $\widetilde{F}$ в XхY.

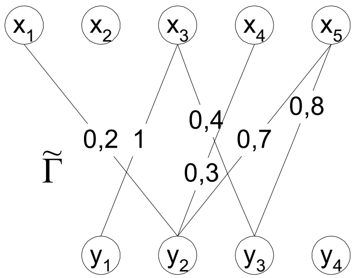
В матричном виде нечеткое соответствие $\widetilde{\Gamma} = (X,\ Y,\ \widetilde{F})$ задается с помощью матрицы инциденций R_Γ , строки которой помечены элементами $x_i \in X\,(i \in I = \{1,\ 2,\ \ldots,\ n\})$, столбцы – элементами $y_i \in Y\ (j \in J = \{1,\ 2,\ \ldots,m\})$, а на пересечении строки x_i и столбца y_j ставится элемент $r_{ij} = m_F < x_i,\ y_j >$, где m_F – функция принадлежности элементов из XхY нечеткому графику.

Нечеткое соответствие можно задать в виде ориентированного графа с множеством вершин $X \cup Y$, каждой дуге $<x_i,\ y_j>$ которого приписано значение $\mu_F <x_i\,,\ y_j>$ функции принадлежности.

Пример.

Зададим некоторое нечеткое соответствие $\widetilde{\Gamma} = (X,\ Y,\ \widetilde{F})$, определив X и Y как $X = \{x_1,\ x_2, \ldots, x_5\}$, $Y = \{y_1,\ y_2,\ y_3,\ y_4\}$, $\widetilde{F} = \{<(x_1,\ y_2);\ 0{,}2>,\ <(x_3,\ y_1);\ 1>,\ <(x_3,\ y_3);\ 0{,}4>,\ <(x_4,\ y_2);\ 0{,}3>,\ <(x_5,\ y_2);\ 0{,}7>,\ <(x_5,\ y_3);\ 0{,}8>\}$.

Матрица инциденций Rг и граф нечеткого соответствия изображены на рис. 2.8.



$$R_\Gamma = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \end{array} \\ \begin{Vmatrix} 0 & 0{,}2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0{,}4 & 0 \\ 0 & 0{,}3 & 0 & 0 \\ 0 & 0{,}7 & 0{,}8 & 0 \end{Vmatrix} \end{array}$$

Рис. 2.8. Графическое и матричное задание нечеткого соответствия $\widetilde{\Gamma} = (X, Y, \widetilde{F})$

Нечетким отношением на непустом множестве X называется и через $\widetilde{\varphi}(X, \widetilde{F})$ обозначается пара множеств, в которой $\widetilde{F}$ является нечетким подмножеством X^2.

Множество X называется областью задания, а $\widetilde{F}$ -нечетким графиком отношения. Нечеткие отношения можно задавать теоретико-множественно, графически и в матричном виде. В методе принятия решений используется матричное задание нечетких отношений: отношение $\widetilde{\varphi}(X, \widetilde{F})$ задается с помощью матрицы смежности R_φ, на пересечении каждой *i-ой* строки и *j-го* столбца ставится элемент $r_{ij} = \mu_F < x_i, x_j >$, где μ_F – функция принадлежности элементов из X^2 нечеткому графику $\widetilde{F}$.

Свойства нечетких отношений [64, 81].

Рефлексивность. Нечеткое отношение *R* на множестве *X* называется рефлексивным, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $\mu_R(x, X) = 1$.

Антирефлексивность. Нечеткое отношение *R* на множестве *X* называется антирефлексивным, если для любого $x \in X$ выполняется равенство $\mu_R(x, X) = 0$.

Связность. Нечеткое отношение *R* на множестве *X* называется связным, если для любого $x, y \in X$ выполняется неравенство $\mu_R(x, y) > 0$ или $\mu_R(y, x) > 0$.

Симметричность. Нечеткое отношение *R* на множестве *X* называется симметричным, если для любого $x, y \in X$ из $\mu_R(x, y) > 0 \Rightarrow \mu_R(y, x) > 0$.

Антисимметричность. Если для любых $x, y \in X$ $\mu_R(x, y) > 0$ $\Rightarrow \mu_R(y, x) = 0$, то такое отношение будет являться антисимметричным.

Транзитивность. Если для любых $x, y \in X$ функция принадлежности нечеткого отношения *R* на множестве *X* удовлетворяет неравенству $\mu_R(x, y) \geq \sup\limits_{z \in X} \min\{\mu_R(x, z), \mu_R(z, y)\}$, то такое отношение называется транзитивным.

Отношение *R* называется транзитивным, если $\forall y_i, y_j, y_k \in Y$ таких, что $(y_i, y_j) \in R$ и $(y_j, y_k) \in R$, следует $(y_i, y_k) \in R$.

Квазипорядок. Отношение *R* называют квазипорядком, если оно рефлексивно и транзитивно.

Отношение *R* называют *отношением строгого предпочтения*, если оно антисимметрично и транзитивно.

Отношение *R* называют *отношением безразличия*, если оно симметрично и транзитивно.

Для получения матрицы композиции отношений используется максминное произведение соответствующих матриц. Если *T* и *S* – нечеткие отношения, то их максминное произведение

$$M = T \circ S = [m_{ki}][m_{ij}] = \max_i\{\min(m_{ki}, m_{ij})\}.$$

2.4. Полные алгебраические решетки

Общие свойства решеток рассматриваются в работах Л.А. Скорнякова, С.К. Сагнаевой, М.Ш. Цаленко, Yi-Jia Tan [79, 95, 110, 124].

Частично упорядоченное множество L называется *нижней* [*верхней*] *полурешеткой*, если каждое двухэлементное его подмножество имеет точную нижнюю [верхнюю] грань. Если частично упорядоченное множество является нижней и верхней полурешеткой одновременно, то оно называется *решеткой*.

Если L – решетка, то для любых элементов a и b можно ввести операции $ab = inf\{a,b\}, a + b = sup\{a,b\}$.

Решетка называется *полной*, если в ней существуют объединения и пересечения любых множеств элементов. Всякая конечная решетка полна.

Отображение φ решетки L в решетку L' называется *верхним* [*нижним*] *гомоморфизмом*, если $\varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$ [$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$] для любых a, b $\in L$. *Гомоморфизм* решетки L в решетку L' определяется как отображение, являющееся верхним и нижним гомоморфизмом одновременно. Взаимно-однозначный гомоморфизм называется *изоморфизмом*. Верхние и нижние гомоморфизмы являются изотонными отображениями.

Непустое подмножество H решетки L называется *подрешеткой*, если из $a,b \in H$ следует $a+b \in H$, $ab \in H$.

Пусть L – решетка. $a,b \in L$. Наибольший элемент $x \in L$, такой, что $ax \le b$, называется *относительным псевдодополнением* элемента a относительно элемента b в решетке L. Если такой элемент существует, он определяется однозначно заданием a и b и обозначается через $a \uplus b$. Решетка, в которой для любых $a,b \in L$ определена операция $a \uplus b$, называется *решеткой с относительными псевдодополнениями* (или *брауэровой решеткой*).

Наименьший элемент $x \in L$, такой, что $a + x \ge b$, называется *дуальным относительным псевдодополнением элемента a* относительно элемента b. Решетка, в которой для любых $a,b \in L$ определена операция $a \Cap b$, называется *дуальной решеткой с относительными псевдодополнениями* (или *дуальной брауэровой решеткой*).

Решетка L называется *дистрибутивной решеткой*, если в ней выполняются тождества: $x(y + z) = xy + xz$, $x + yz = (x + y)(x + z)$, называемые дистрибутивными законами. Решетка дистрибутивна уже тогда, когда в ней имеет место уже один из указанных законов.

Решетка L называется *бесконечно дистрибутивной* решеткой, если для любого $x \in L$ и любых семейств элементов $\{y_i \mid i \in I\}$, где I – множество индексов элементов, выполняется:

$$x \wedge \left(\bigvee_{i\in I} y_i\right) = \bigvee_{i\in I}\left(x \wedge y_i\right), \tag{17}$$

$$x \vee \left(\bigwedge_{i\in I} y_i\right) = \bigwedge_{i\in I}\left(x \vee y_i\right). \tag{18}$$

Полная решетка является *брауэровой*, если она бесконечно $\cap$-дистрибутивна, т.е. выполняется (17). Полная решетка является дуальной брауэровой решеткой, если она бесконечно $\cup$-дистрибутивна, т.е. выполняется (18). Следовательно, полная решетка L – это брауэрова решетка и дуальная брауэрова решетка, если L – бесконечно дистрибутивна бесконечно $\cap$-дистрибутивной, а значит, и брауэровой, решетки является любая конечная дистрибутивная решетка, отрезок $[0;1]$.

Решетка L называется *решеткой с относительными дополнениями*, если для всякого элемента x из любого ее интервала $[a;b]$ найдется такой элемент d, что $c + d = b$ и $cd = a$, при этом $d \in [a;b]$. Решетка L с нулем 0 и единицей 1 называется решеткой с дополнениями, если каждый ее элемент имеет дополнение в интервале $[0;1]$. Дополнения в интервале $[0;1]$ называются просто дополнениями.

Булевой решеткой называется дистрибутивная решетка с дополнениями, т.е. дистрибутивная решетка с 0 и 1. В булевой решетке В каждый элемент x имеет в точности одно дополнение x', такое, что $x \to x'$.

3. Модели и методы принятия решений, основанные на парном сравнении альтернатив

При принятии управленческих решений руководитель предприятия должен не только полагаться на свой опыт и интуицию, но и обращаться к хорошо разработанным в настоящее время математическим моделям поддержки принятия решений, позволяющих корректно выбирать наиболее лучшие альтернативы из имеющихся. От того, насколько грамотно, квалифицированно осуществляется поддержка принятия управленческих решений, зависит успешность развития всего предприятия в целом [36, 39, 56, 65, 66, 75, 80, 84, 113].

Многочисленные исследования показывают, что лица, принимающие решения без дополнительной аналитической поддержки, используют упрощенные, а иногда и противоречивые решающие правила [1, 2, 12, 14, 29, 53, 59, 67, 74, 92]. Поддержка принятия решения требуется во всех без исключения областях прикладной деятельности человека [4, 13, 15, 19, 50, 56, 58, 59, 62, 64, 65, 68, 74, 85, 91, 101, 108, 115, 118], что связано с увеличивающимся объемом информации, необходимостью учитывать большое количество противоречивых факторов, объективных и субъективных составляющих при принятии решений.

3.1. Классификация моделей и методов принятия решений

Приведем классификацию моделей и методов принятия решений. Модель задачи принятия решений в [25] представляется в виде: $<t, X, R, A, F, G, D>$, где t – постановка задачи (например, выбрать одну наилучшую в некотором смысле альтернативу или упорядочить всё множество альтернатив); X – множество допустимых альтернатив; R – множество критериев оценки степени достижения поставленных целей; A – множество шкал измерения по критериям (шкалы наименований, порядковые, интервальные, отношений); F – отображение множества допустимых альтернатив в множество критериальных оценок; G – система предпочтений решающего элемента; D – решающее правило, отражающее систему предпочтений. Классификация моделей задач принятия решений в [25] проводится в соответствии со следующими признаками:

1) по виду отображения F – детерминированное, вероятностное или неопределенное, можно выделить соответственно: ЗПР в условиях определенности, ЗПР в условиях риска, ЗПР в условиях неопределенности. Аналогичным образом, по полноте описания исследуемого объекта классифицируются и ЗПР в [80];

2) по мощности множества R – одноэлементное множество или состоящее из нескольких критериев, выделяются соответственно: ЗПР со скалярным критерием, ЗПР с векторным критерием (многокритериальные задачи);

3) по типу системы G – отражает предпочтения одного лица или коллекти-

ва в целом, выделяются задачи индивидуального ПР, задачи группового ПР.

В [27] под моделью выбора понимается пара (X, R), состоящая из множества альтернатив X и бинарного отношения R на нем. В [8] при определении модели ПР предполагается, что рассматривается некоторое множество исходных структур предпочтений и исследуется определенная ЗПР, процесс решения которой понимается как оптимальный выбор метода обработки исходной структуры из некоторого базового класса методов. При этом можно считать, что на множестве исходных структур задана модель решения поставленной ЗПР, если указан некий принцип или правило, согласно которому произвольному отношению ставится в соответствие некоторый набор методов. Конкретные модели ориентированы на соответствие тех или иных методов принятия решений определенным базовым структурам.

В [25] приведена классификация методов ПР по таким признакам, как содержание экспертной информации, тип получаемой информации, на основе которой можно определить группу методов ПР в условиях неопределенности (рис. 3.1).

В монографии рассматривается возможность анализа различных вопросов управления методами принятия решений в условиях неопределенности. Это связано с тем, что при исследовании экономических, социальных и других систем, в функционировании которых участвует человек, значительное количество информации может быть получено от людей, имеющих опыт работы с данной системой и знающих ее особенности, от людей, имеющих представление о целях функционирования системы. Эта информация носит субъективный характер, и ее представление в естественном языке содержит неопределенности, которые не имеют аналогов в языке традиционной математики. В этом случае лучше рассматривать задачи оптимального управления с позиций методов, учитывающих неопределенность описания модели исследуемого объекта.

Таким образом, возникающие в процессе управления предприятием проблемы, которые обладают признаками неструктурированных задач ПР, возможно всесторонне проанализировать методами, учитывающими неопределенность [10, 25, 26, 31, 36, 37, 49, 51, 56, 57, 58, 68, 70, 77, 78, 81, 86, 89, 96, 113].

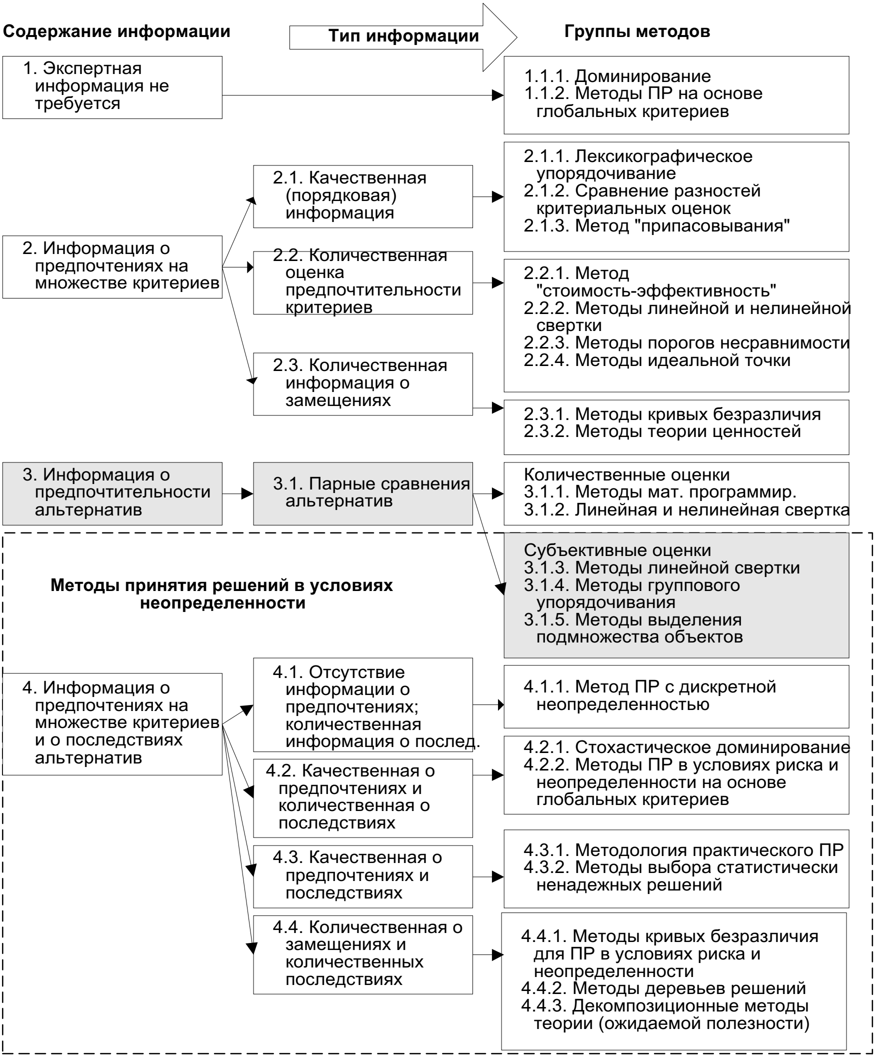


Рис 3.1. Классификация методов ПР
на основе содержания экспертной информации

При этом под неопределенностью будем понимать явления, не поддающиеся анализу и измерению со сколь угодно большой точностью [78]. В [80] приводится классификация неопределенностей, в которой, в частности, выделяются «неопределенности, связанные с ближайшим окружением фирмы, менеджер которой занимается прогнозированием: неопределенности, связанные с деятельностью участников экономической жизни (прежде всего партнеров и конкурентов фирмы), в частности, с их деловой активностью, финансовым положением, соблюдением обязательств; неопределенности, связанные с социальными и административными факторами в конкретных регионах, в которых фирма имеет деловые интересы».

3.2. Модели линейного упорядочивания

Используемые в практике модели линейного упорядочивания традиционно разделяются на две большие группы, различающиеся своим подходом к решению задачи упорядочивания объектов [8].

В *моделях первой группы*, использующих *статистические методы*, каждому объекту x_i сопоставляется определенный интегральный показатель π_i, оценивающий итоги его сравнений с остальными объектами, а далее объекты просто упорядочиваются по убыванию значений этого ранжирующего фактора. В *моделях второй группы*, использующих *комбинаторно-логические и теоретико-графовые методы*, оцениваются показатели не отдельных объектов, а всего упорядочивания в целом и выбирается упорядочивание, максимизирующее некоторый функционал качества. Оценок важности при этом не делается. Рассмотрим некоторые модели первой группы.

Пусть задано некоторое фиксированное множество объектов $X=\{x_1, x_2, ..., x_n\}$, которые сравниваются попарно с точки зрения их предпочтительности, желательности, важности и т.п., а результаты записываются в виде матрицы парных сравнений $A = \|a_{ij}\|_{nxn}$, отражающей возникающее бинарное отношение предпочтения/безразличия на множестве X. Симметричные элементы матрицы парных сравнений a_{ij} и a_{ji} должны выбираться равными, если соответствующие объекты равноценны или несравнимы ($x_i \sim x_j$); если же $x_i > x_j$, то должно быть $a_{ij} > a_{ji}$. Кроме того, на элементы матрицы A обычно накладываются дополнительные калибровочные ограничения, однозначно связывающие попарно симметричные элементы a_{ij}, a_{ji}. Приведем основные типы калибровок.

1) Простая структура (ПС).

$$\forall i, j, i \neq j \quad a_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } x_i > x_j; \\ 0, \text{если } x_j > x_i; \\ 1/2, \text{если } x_i \sim x_j. \end{cases} \qquad (19)$$

Интерпретация: a_{ij} – индикатор факта превосходства одного объекта над другим или их равноценности (несравнимости).

2) Турнирная калибровка (Т).

$$\forall i, j \;\; a_{ij} \geq 0; a_{ij} + a_{ji} = c. \qquad (20)$$

Интерпретация: a_{ij} – число очков, набранных игроком x_i во всех встречах с игроком x_j; число c = const при этом может интерпретироваться как количество таких встреч. Нередко дополнительно постулируется целочисленность матрицы.

3) Кососимметрическая калибровка (К).

$$\forall i, j \;\; a_{ij} + a_{ji} = 0. \qquad (21)$$

Интерпретация: объект x_i превосходит в парном сравнении объект x_j на a_{ij}.

4) Степенная калибровка (С).

$$\forall i, j \quad a_{ij} > 0; a_{ij} \cdot a_{ji} = 1. \qquad (22)$$

Интерпретация: объект x_i превосходит в парном сравнении объект x_j в a_{ij} раз.

5) Вероятностная калибровка (В).

$$\forall i, j \quad 0 \le a_{ij} \le 1; a_{ij} + a_{ji} = 1 \qquad (23)$$

Интерпретация: a_{ij} – вероятность превосходства x_i над x_j.

Помимо калибровок (19)-(23) для полноты анализа можно ввести еще и произвольную взвешенную структуру (ВС), в рамках которой предполагается обычно только неотрицательность матрицы A, сами же ее элементы могут интерпретироваться по-разному.

Переход от матрицы A, заданной в некоторой калибровке, к откалиброванной по-иному матрице B возможен не всегда, но лишь при соблюдении некоторых дополнительных содержательных условий и нередко сопряжен с потерей важной информации. Вопрос о возможности перехода к матрице с другой калибровкой и о путях такого перехода всякий раз должен рассматриваться с учетом содержательных особенностей задачи. Схемы и направления подобных переходов приведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

Реализация преобразований калибровки

Тип перехода	Возможные способы реализации
ВС → Т	$b_{ij} = a_{ij} + (\max_{i,j} s_{ij} - s_{ij})/2$; $b_{ij} = (a_{ij} \cdot \max_{i,j} s_{ij})/s_{ij}$; $s_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$;
Т → К	$b_{ij} = a_{ij} - a_{ji}$; $b_{ij} = (a_{ij} - a_{ji})/2$;
К → Т	$b_{ij} = a_{ij}(\mathrm{sign} a_{ij} + 1)/2 + (\max_{i,j} a_{ij} - \lvert a_{ij} \rvert)/2$; $b_{ij} = c(a_{ij} + \max_{i,j} a_{ij}); c > 0$;
К → С	$b_{ij} = r^{a_{ij}}; r > 1$;
С → К	$b_{ij} = \log_r a_{ij}; \quad r > 1$;
В, Т → С	$b_{ij} = a_{ij} / a_{ji}$;
С → В, Т	$b_{ij} = a_{ij} /(1 + a_{ji})$;
Т → В	$b_{ij} = a_{ij} /(a_{ij} + a_{ji})$;
В → Т	$b_{ij} = c \cdot a_{ij}; \; c > 0$;
ВС, Т, В, К, С → ПС	$b_{ij} = [\mathrm{sign}(a_{ij} - a_{ji}) + 1]/2$.

Каждая из моделей линейного упорядочивания требует для матриц парных сравнений определенных калибровочных ограничений.

1) *Модели спортивного типа:* $\forall i = \overline{1,n} \quad s_i = \sum_{i \neq j} a_{ij}$.

Такое название исторически укоренилось за целой группой сходных моделей, в которых в качестве ранжирующего фактора используется набранная объектом «сумма очков». Обрабатываемая матрица A может иметь калибровку типа Т, ПС или К.

Название модели ПР	Математическая модель	Положительные характеристики	Недостатки модели
Турнирная модель	Объекты упорядочиваются по убыванию s_i .	Простота получения результата. Выполняются свойства «Инвариантность к сдвигу» (ИС**), «Инвариантность к растяжению» (ИР), «Положительная реакция» (ПР).	Вычисление количественных оценок модель не предполагает.
Модель последовательного вычленения лидеров	В качестве лучшего (лидера) выбирается объект с $\max_i s_i$, вычеркивается *i-я* строка и *i-й* столбец, вновь выбирается лидер и т.д.		
Модель последовательной дихотомии	Множество X разбивается на два слоя – слой с большими s_i и слой с меньшими s_i и т.д. делится каждый слой.	Простота получения результата.	Не обладает свойствами «Устойчивость в малом» (УМ), ПР.

2) *Модель интегральной степени превосходства* является близкой к моделям спортивного типа; применяется для кососимметрических матриц.

Вводится понятие интегральной степени превосходства $\widetilde{\Phi}(x_i, x_j) \stackrel{\Delta}{=} \sum_{t=1}^{n} \lambda_t (a_{it} - a_{jt})$, оценивающей превосходство x_i над x_j в сравнении с прочими объектами. Когда интегральная степень превосходства задана, ее можно представить в виде $\widetilde{\Phi}(x_i, x_j) = f(x_i) - f(x_j)$, при этом $\forall i \quad f(x_i) = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \widetilde{\Phi}(x_i, x_j)$, где f – функция полезности на X, и объекты предлагается упорядочивать по убыванию ее значений.

К недостаткам модели можно отнести введение коэффициентов λ_t – весов объектов, однако таких весов заранее задано быть не может. Модель сводится к турнирной и самостоятельного интереса не имеет.

3) *Модель функции доминируемости* ориентирована на обработку нечетких отношений предпочтения, т.е. $a_{ij} \in [0;1]$. Применяется для калибровок Т, К.

Функция доминируемости $l(x_i) = \max\limits_{j \neq i} a_{ji}$ характеризует максимальную силу, с которой объект x_i доминируется остальными объектами множества X. При $l(x_i) = 0$ – абсолютно не доминируется, при $l(x_i) = 1$ – абсолютно доминируется, при $0 < l(x_i) < 1$ – слабо доминируется. Объекты упорядочиваются по убыванию соответствующих значений функции $m(x_i) = 1 - l(x_i)$. В [81] используются другие способы получения $l(x_i)$.

Возможно использование значений $m(x_i)$ *в качестве количественных оценок важности объектов.* Модель обладает свойствами УМ, ПР, ИС**, ИР.

4) *Модель Брэдли-Терри* пригодна для простых структур без равноценных элементов и целочисленных турнирных матриц.

Каждому объекту сопоставляется его «сила» π_i, причем предполагается, что вероятность превосходства в парном сравнении $P(x_i > x_j)$ прямо пропорциональна π_i: $P(x_i > x_j) = \pi_i / (\pi_i + \pi_j) = 1 - P(x_j > x_i)$. Для каждой пары (i,j) проводится k независимых актов парных сравнений. Окончательно получается:
$$\begin{cases} s_i / \pi_i = k \sum\limits_{j=1}^{n} (\pi_i + \pi_j)^{-1}; i = \overline{1,n}; \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \pi_i = 1. \end{cases}$$

Система может быть решена итерационно. После вычисления всех π_i объекты упорядочиваются по их убыванию.

Получаемые компоненты нормализованного вектора π могут служить количественными оценками важности объектов. Выполняются свойства ИС**, ИР.

5) *Модель Бэржа-Брука-Буркова* применяется для обработки простых структур, матриц с турнирной и степенной калибровками.

Каждому объекту x_i ставится в соответствие цепочка так называемых интегрированных сил, в которой сила k-го порядка p_i^k определяется как сумма элементов i-й строки в матрице A^k:
$$\forall i = \overline{1,n} \quad p_i^k \overset{\Delta}{=} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}^{\ k}; \quad \left\| a_{ij}^{\ k} \right\|_{nxn} = A^k; \;\; k = 1,2,... \; .$$

При $k \to \infty$ имеет место $\lim_{k\to\infty}(p_i^k / \sum_i p_i^k) = \pi,\quad i = \overline{1,n}$, где нормализованный собственный вектор $\pi = (\pi_1,...,\pi_n)$ матрицы A отвечает максимальному по модулю собственному числу теоремы Перрона-Фробениуса.

Модель обладает свойствами ИР, УМ; Т* (при $a_{ii} = 1$). *Получаемые значения компонент собственного вектора могут служить оценкой важности объектов*.

6) *Стохастическая модель Ушакова* предложена для обработки матриц, заданных в степенной и вероятностной калибровках.

Матрица A преобразуется в вероятностную матрицу P, где p_{ij} – вероятность превосходства x_j над x_i.

При калибровке (23) $P = A^T$.

При калибровке (22) $p_{ij} = a_{ji} /(1 + a_{ji})^{-1}, \quad i \neq j.$

Строится стохастическая матрица $\tilde{P} = \|\tilde{p}_{ij}\|_{nxn}$.

$$\tilde{p}_{ii} = 1 - \sum_{i\neq j} \tilde{p}_{ij},\ i, j = \overline{1,n}, \qquad \tilde{p}_{ij} = p_{ij} /(n-1), \quad i \neq j;$$

$$p_i = \Delta_{ii} / \sum_{j=1}^{n} \Delta_{jj},\ i = \overline{1,n}\ ,$$

где Δ_{ii} – минор получаемый из $det(E - \tilde{P})$ вычеркиванием i-го столбца и i-той строки.

Упорядочивание x_i производится по p_i.

Обладает свойствами УМ, ПР. Получаемые компоненты финального распределения могут использоваться в качестве количественных оценок важности объектов.

Не обладает свойствами ИС**, ИР.

7) *Модель равномерного сглаживания* применяется для положительных матриц с калибровкой Т или С.

По аксиоме Льюса для калибровки Т имеет место: $\forall i, j\ \pi_i / \pi_j = a_{ij} / a_{ji}$ (*) и при этом $\pi_i = \pi_i / \sum_{j=1}^{n} \pi_j = (\sum_{j=1}^{n} \pi_j / \pi_i)^{-1} = (\sum_{j=1}^{n} b_{ji})^{-1}$.

Обозначая $\forall i, j\quad z_{ij} = ln\, b_{ij}$, получаем $\forall i, j\ z_{ij} = z_{ik} + z_{kj} = -z_{ki} + z_{kj}$, так что матрица $Z = \|z_{ij}\|_{nxn}$ может быть восстановлена по любой строке.

В данной модели от исходной матрицы A необходимо перейти к матрице Z и построить n различных матриц $Z^{(1)}$, …, $Z^{(n)}$, полагая, что матрица $Z^{(k)}$, $k = \overline{1,n}$ порождается *k-ой* строкой матрицы Z по формуле (*). $\overline{Z} = (1/n) \sum_i Z_i^{(i)}$, причем $\forall i, j\ z_{ij} = (1/n) \sum_{k=1}^{n} (z_{ik} + z_{kj})$. Проделав преобразования $\forall i, j\ \overline{b}_{ij} = exp\, \overline{z}_{ij}$, $\overline{a}_{ij} = c\overline{b}_{ij} (1 + \overline{b}_{ij})^{-1}$, в итоге получим $\pi_i = (\sum_{j=1}^{n} \overline{b}_{ji})^{-1}$.

Обладает свойствами ИР, Т, УМ, ПР. Получаемые коэффициенты можно использовать для количественной оценки важности объектов.

Выбор модели упорядочивания с теми свойствами, которые особенно желательны в данном конкретном случае, представляется весьма полезным в системах поддержки принятия решений [8]. Модели типа: модель функции доминируемости, Брэдли-Терри, Бержа-Брука-Буркова, стохастическая модель Ушакова, модель равномерного сглаживания предлагают гораздо более убедительные доводы в пользу соответствующих оптимальных упорядочиваний. Модель Брэдли-Терри пригодна для простых структур и целочисленных турнирных матриц, которые не учитывают неточность, неопределенность в оценках экспертов. Стохастическая модель Ушакова скорее ориентирована на вероятностный класс неопределенностей, в отличие от нее модель Бержа-Брука-Буркова и модель функции доминируемости позволяют учитывать неопределенность явлений, не поддающихся измерению со сколь угодно большой точностью и с учетом нечеткости соответственно. Модель равномерного сглаживания не обладает свойством ИС**, что не позволяет экспертам производить неполные сравнения. В [8] утверждается, что модель Бержа-Брука-Буркова также не обладает свойством ИС**, однако в [93] указан подход к выявлению приоритетов для неполной матрицы на основе данной модели. Таким образом, для линейного упорядочивания в условиях неопределенности предпочтительнее пользоваться моделями функции доминируемости и Бержа-Брука-Буркова. Рассмотрим методы ПР, ориентированные на выделенные модели. Кроме них, в монографии рассматриваются также качественные методы ПР, процедуры сравнения объектов в которых ориентированы на качественные оценки экспертов, что облегчает опрос экспертов, позволяя оперировать терминами, свойственными конкретной предметной области (рис. 3.2).

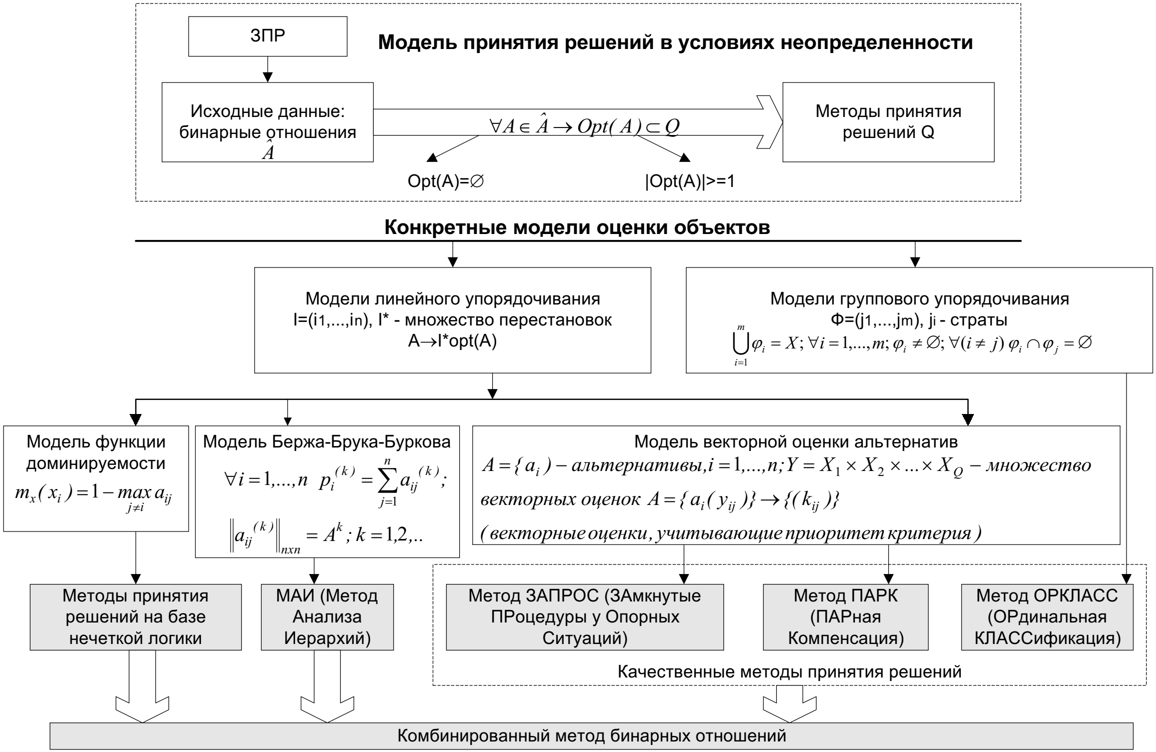


Рис. 3.2. Классификация моделей и методов приятия решений в условиях неопределенности

Метод анализа иерархий [93, 94]

При принятии управленческих решений и прогнозировании возможных результатов лицо, принимающее решение, обычно сталкивается со сложной системой взаимозависимых компонент (ресурсы, желаемые исходы или цели, лица или группа лиц и т.д.), которую нужно проанализировать [93, 94]. МАИ развивает модель Бержа-Брука-Буркова [8].

Принимая решение, группа экспертов производит декомпозицию сложной проблемы – определяет ее компоненты и отношения между ними. Получается модель реальной действительности, построенная в виде иерархии. Вершина иерархии – общая цель, далее располагаются подцели, затем силы, которые влияют на эти подцели, люди, их цели, политики, стратегии, и, наконец, исходы, являющиеся результатами стратегий. На следующем этапе решения сравниваются уже отдельные компоненты иерархии между собой. В результате может быть выражена относительная степень интенсивности взаимодействия элементов в иерархии. Затем эти суждения выражаются численно. В завершении анализа проблемы МАИ включает процедуры синтеза множественных суждений, получения приоритетности критериев и нахождения альтернативных решений. Таким образом, основные этапы принятия решения с помощью МАИ следующие:

– построение иерархии рассматриваемой проблемы;
– парное сравнение компонент иерархии;
– математическая обработка полученных суждений.

В наиболее элементарном виде иерархия строится с вершины (целей – с точки зрения управления), через промежуточные уровни (критерии, от которых зависят последующие уровни) к самому низкому уровню (который обычно является перечнем альтернатив). Существуют несколько видов иерархий: доминантные, холлархии, китайский ящик и т.д. Наиболее часто применяется первый тип иерархий.

Парные сравнения проводятся в терминах доминирования одного из элементов над другим. Эти суждения затем выражаются в целых числах. Если элемент А доминирует над элементом Б, то ячейка матрицы, соответствующая строке А и столбцу Б, заполняется целым числом, а ячейка, соответствующая строке Б и столбцу А, заполняется обратным к нему числом (дробью). В МАИ предложена шкала относительной важности элементов иерархии (табл. 3.2).

Все матрицы в МАИ должны быть обратно симметричны, т.е. $a_{ij} = 1/a_{ji}$. По главной диагонали матрицы заранее ставятся единицы, т.к. альтернатива равноценна самой себе. Для заполнения каждой матрицы размером nxn достаточно произвести только $n(n-1)/2$ суждения.

Составление таких матриц проводится для всех уровней и групп в иерархии. Причем полученные матрицы должны быть согласованы для достоверного решения. Согласованность проявляется в числовой (кардинальной согласованности $a_{ij} \cdot a_{jk} = a_{ik}$) и транзитивной (порядковой согласованности). Согласованность матрицы можно проверить.

Таблица 3.2

Шкала относительной важности

Интенсивность относительной важности	Определение
1	равная важность
3	умеренное превосходство одного над другим
5	существенное или сильное превосходство
7	значительное превосходство
9	очень сильное превосходство
2, 4, 6, 8	промежуточные решения между двумя соседними суждениями
Обратные величины приведенных выше чисел	если при сравнении одного параметра с другим получено одно из вышеуказанных чисел, то при сравнении второго параметра с первым получим обратную величину

Вычислять вектор приоритета (собственный вектор) для каждой матрицы парных сравнений можно разными способами [94]. В зависимости от выбранного способа в задаче может наблюдаться большая или меньшая погрешность. Наиболее обоснованный результат получается при применении теоремы Перрона-Фробениуса.

На последнем этапе обработки полученные векторы приоритетов синтезируются, начиная со второго уровня вниз. Локальные приоритеты перемножаются на приоритет соответствующего критерия на вышестоящем уровне и суммируются по каждому элементу в соответствии с критериями, на которые воздействует этот элемент (каждый элемент второго уровня умножается на единицу, т.е. на вес единственной цели самого верхнего уровня.) Это дает составной, или глобальный, приоритет того элемента, который затем используется для взвешивания локальных приоритетов элементов, сравниваемых по отношению к нему как к критерию и расположенных уровнем ниже. Процедура продолжается до самого нижнего уровня.

Методы принятия решений при нечеткой исходной информации [81, 8, 48]

В работе С.А. Орловского [81] рассматриваются методы принятия решений, основанные на парных сравнениях альтернатив, которые выражаются в виде нечетких отношений. Методы используются в модели функции недоминируемости [8]. В работе [48] произведена структуризация данных методов, в результате которой выделим следующие методы теории принятия решений при нечеткой исходной информации:

- методы принятия решений с одним экспертом;
- методы принятия решений с группой экспертов, характеризуемых весовыми коэффициентами;
- методы принятия решений с группой экспертов, характеризуемых нечетким отношением нестрогого предпочтения.

Задача принятия решения с одним экспертом

Задано множество возможных решений или альтернатив $U = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ и нечеткое отношение нестрогого предпочтения (н.о.п.) R на множестве U с функцией принадлежности $\mu_R(u_i, u_j) \in [0, 1]$ – любое рефлексивное нечеткое отношение на U, так что $\mu_R(u_i, u_i) = 1$, $u_i \in U$.

Н.о.п. задается обычно ЛПР в результате опроса экспертов, обладающих знаниями или представлениями о содержании или существе задачи, которые не были формализованы в силу чрезмерной сложности такой формализации или по другим причинам.

Для любой пары альтернатив $u_i, u_j \in U$ значение $\mu_R(u_i, u_j)$ понимается как степень предпочтения «u_i, не хуже u_j» в записи $u_i \geq u_j$. Равенство $\mu_R(u_i, u_j) = 0$ может означать как то, что $\mu_R(u_j, u_i) > 0$, то есть с положительной степенью выполнено «обратное» предпочтение $u_j \geq u_i$, так и то, что и $\mu_R(u_j, u_i) = 0$, то есть альтернативы u_j и u_i несравнимы. Рефлексивность н.о.п. отражает тот естественный факт, что любая альтернатива не хуже самой себя.

Задача принятия решения заключается в рациональном выборе наиболее предпочтительных альтернатив из множества U, на котором задано нечеткое отношение предпочтения R.

Алгоритм решения задачи

1. Строится нечеткое отношение строгого предпочтения R^S, ассоциированное с R, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_R^5(u_i, u_j) = \begin{cases} \mu_R(u_i, u_j) - \mu_R(u_j, u_i), \ \mu_R(u_i, u_j) > \mu_R(u_j, u_i), \\ 0, \ \mu_R(u_i, u_j) \leq \mu_R(u_j, u_i). \end{cases}$$

Это отношение может быть представлено в виде $R^S = R \backslash R^T$, где R^T – «обратное» отношение (матрица отношений R^T получается транспонированием матрицы отношений R).

2. Строится нечеткое подмножество $U_R^{nd} \subset U$ недоминируемых альтернатив, ассоциированное с R и включающее те альтернативы, которые

не доминируются никакими другими, определяемое функцией принадлежности

$$\mu_R^{nd}(u_i) = \min_{u_j \in U}\{1-\mu_R^S(u_j,u_i)\} = 1-\max_{u_j \in U}\{\mu_R^S(u_j,u_i)\},\ u_i \in U.$$

Для любой альтернативы $u_j \in U$ значение $\mu_R^{nd}(u_i)$ понимается как степень недоминируемости этой альтернативы, то есть степень, с которой u_i не доминируется ни одной из альтернатив множества U; $\mu_R^{nd}(u_i) = \alpha$ означает, что никакая альтернатива u_j не может быть лучше u_i со степенью доминирования большей α; иначе говоря, u_i может доминироваться другими альтернативами, но со степенью не выше 1 - α. Рациональным естественно считать выбор альтернатив, имеющих по возможности большую степень принадлежности множеству U_R^{nd} .

3. Выбирается та альтернатива u^*, для которой значение μ_R^{nd} (u^*), максимально:

$$u^* = \arg\max_{u_i \in U} \mu_R^{nd}(u_i).$$

Она и дает решение задачи. Если наибольшую степень недоминируемости имеет не одна, а несколько альтернатив, то ЛПР может либо сам выбрать одну из них, исходя из каких-либо дополнительных соображений, либо расширить круг экспертов при формировании исходных данных задачи и повторить ее решение.

Задача принятия решения с группой экспертов, характеризуемых весовыми коэффициентами

На множестве всевозможных решений (альтернатив) $U = \{u_1, u_2 ,...,u_n\}$ задано несколько н.о.п. Нечеткие отношения нестрогого предпочтения R_k получены в результате опроса каждого эксперта и заполнении матрицы нечеткого отношения нестрогого предпочтения (н.о.п.) R_k, каждый элемент которой есть значение функции принадлежности $\mu_R(u_i, u_j)$, выражающее степень предпочтительности альтернативы u_i по сравнению с u_j. При $\mu_R(u_i, u_j) > 0$ u_i предпочтительнее, чем u_j; если же $\mu_R(u_i, u_j) = 0$, то либо первая альтернатива хуже второй, либо они несравнимы. Лицо, принимающее решение, по-разному относится к экспертам, что находит отражение в весовых коэффициентах λ_k, (где $0 \le \lambda_k \le 1$, $\sum \lambda_k = 1$), соответствующих каждому из них.

Целью данной задачи является упорядочение совокупности альтернатив $U = \{u_1, ..., u_n\}$.

Алгоритм решения задачи

1. Строится свертка P отношений как пересечение нечетких отношений нестрогого предпочтения экспертов $P = \cap R_k (u_i, u_j) = \min \{\mu_{Rk}(u_i, u_j)\}$;

таким образом, получается новое нечеткое отношение нестрогого предпочтения. Далее с н.о.п. ассоциируется отношение строгого предпочтения $P^S = P \backslash P^T$ с функцией принадлежности $\mu_P{}^S$.

$$\mu_P^S(u_i, u_j) = \begin{cases} \mu_P(u_i, u_j) - \mu_{P^T}(u_i, u_j), \ \textit{если} \ \mu_P(u_i, u_j) > \mu_{P^T}(u_i, u_j); \\ 0, \textit{если} \ \ \mu_P(u_i, u_j) \le \mu_{P^T}(u_i, u_j). \end{cases}$$

Далее определяется множество недоминируемых альтернатив U_P^{nd} с функцией принадлежности

$$\mu_P^{nd}(u_i) = 1 - \max_{u_j \in P} \left\{ \mu_P^S(u_j, u_i) \right\}, \ u_i \in U.$$

2. Строится выпуклая свертка Q отношений R_k, которая определяется как $Q = \sum \lambda_k R_k$, $\mu_Q(u_i, u_j) = \sum_k \lambda_k \mu_k(u_i, u_j)$. Она является новым н.о.п., с которым ассоциируются его отношение строгого предпочтения Q^S и множество недоминируемых альтернатив U_Q^{nd}. Множества U_P^{nd} и U_Q^{nd} несут дополняющую друг друга информацию о недоминируемости альтернатив.

3. Рассматривается пересечение полученных множеств $U_P{}^{nd}$ и $U_Q{}^{nd}$: $U^{nd} = U_P{}^{nd} \cap U_Q{}^{nd}$ с функцией принадлежности $\mu^{nd}(u_i) = min\{\mu_P{}^{nd}(u_i), \mu_Q{}^{nd}(u_i)\}$.

4. Выбирается та альтернатива u^*, для которой значение $\mu^{nd}(u^*)$ максимально: $u^* = arg\ max\ \mu^{nd}(u_i)$, $u_i \in U$.

Задача принятия решения с группой экспертов, характеризуемых нечетким отношением нестрого предпочтения между ними.

Можно рассмотреть задачу принятия решений с группой экспертов, характеризуемых не весовыми коэффициентами, а при помощи еще одного н.о.п. N, заданного на множестве E экспертов с функцией принадлежности $\mu_N(e_k, e_l)$, $e_k, e_l \in E$, значения которой означают степень предпочтения эксперта e_k по сравнению с экспертом e_l.

Алгоритм решения задачи

1. С каждым R_k ассоциируются $R_k{}^S$ и U_k^{nd}, вводится обозначение $\mu_k^{nd}(u_i) = \mu_\Phi(e_k, u_i)$, $i = 1, ..., n$, $k = 1, ..., m$. Тем самым задается нечеткое соответствие Φ между множествами E и U.

2. Строится свертка Γ в виде композиции соответствий $\Gamma = \Phi^T N \Phi$. Причем, результирующее отношение Γ определяется как максминное произведение матриц Φ^T, N, Φ. То есть, получается единое результирующее отношение, полученное с учетом информации об относительной важности н.о.п. R_k. С отношением Γ ассоциируется отношение Γ^S и множество U_Γ^{nd}.

3. Корректируется множество $U_{Г}^{nd}$ до множества $U_{Г}'^{nd}$ с функцией принадлежности $\mu_{Г}'^{nd}(u_i) = min\ \{ \mu_{Г}^{nd}(u_i),\ \mu_{Г}(u_i,\ u_i)\}$.

4. Выбирается та альтернатива, для которой значение функции принадлежности скорректированного нечеткого подмножества $U_{Г}'^{nd}$ недоминируемых альтернатив максимально.

Качественные методы принятия решений [61-64]

Качественные методы принятия решений разработаны О.И. Ларичевым и описываются в работе [64]. Методы могут использоваться в моделях линейного упорядочивания объектов на основе их векторов предпочтений. В качественных методах принятия решений используются только такие способы получения информации от экспертов и логические процедуры для построения выводов, которые, согласно данным психологических исследований, соответствуют возможностям человеческой системы переработки информации. Одним из таких способов, который может быть с успехом применен для решения неструктурированных проблем с качественными переменными – планирования научных исследований, конкурсного отбора проектов, проблем личного выбора – является метод упорядочивания многокритериальных альтернатив ЗАПРОС (замкнутые процедуры у опорных ситуаций).

Рассмотрим применение этого метода на примере ранжирования железобетонных изделий, а именно, некоторых видов тротуарных плиток, с точки зрения потребительского спроса. Предположим, что число видов изделий – три: П1 (плитка «Лепесток»), П2 (плитка «Катушка»), П3 (Плитка «Бабочка»). Выделим критерии их оценивания: внешний вид, стоимость, удобность укладки (количество альтернатив и критериев в общем случае может быть произвольным). Критериальное описание альтернативных изделий может быть сведено в таблицу:

Тротуарная плитка	Внешний вид	Стоимость	Удобность укладки
П1	привлекательный внешний вид	дороже, чем хотелось бы	трудна в укладке
П2	отсутствует оригинальность изд.	слишком дорого	оптимальна для укладки
П3	привлекательный внешний вид	слишком дорого	не совсем оптимальна для укладки

В соответствии с критериальными оценками вербальная шкала каждого критерия сопоставляется с базовой (количественной) шкалой, при этом самая высокая оценка критерия условно принимается за единицу, следующая за ней оценивается как 2 и т.д. Например, по критерию «стоимость» базовая шкала может быть представлена в виде:

1	2	3
приемлемая стоимость изделия	дороже, чем хотелось бы	слишком дорого

Исходя из этих данных, нам нужно сравнить векторы $a_1 = (1,\ 2,\ 3)$, $a_2 = (2,\ 3,\ 1)$, $a_3 = (1,\ 3,\ 2)$, которые соответствуют П1, П2, П3.

1. Сформируем список векторных оценок у первой опорной ситуации L_1. Опорные ситуации – это векторные оценки, имеющие только лучшие или худшие значения по всем критериям (соответственно первая и вторая опорная ситуации). Список векторных оценок у опорных ситуации – подмножество векторных оценок, имеющих по всем критериям, кроме одного, те же значения, что и у данной опорной ситуации. $L_1 = \{211,\ 311,\ 121,\ 131,\ 112,\ 113\}$.

2. Сравним полученные векторные оценки первой опорной ситуации между собой. Для этого составим матрицу парных сравнений $A_{n\text{x}n}=//\alpha_{ij}//$, где n – количество векторов опорной ситуации, $\alpha_{ij} = \mu(x_i, x_j)$ – степень предпочтения x_i оценки перед x_j . Если α_{ij} =1, то элемент x_i предпочтительнее элемента x_j, $\alpha_{ij} =2 - x_i$ равноценен x_j, $\alpha_{ij} = 3 - x_j$ предпочтительнее x_i, при α_{ij} = 0 элементы в строке и столбце не сравнены.

В исходной матрице в некоторых ячейках уже имеются единицы, поставленные там на основе базовой шкалы (табл. 3.3). Далее в таблице приведена та же матрица, но после того, как было указано, что оценка (211) лучше, чем (121). Заметим, что сравнение (211) с (131) сделано на основе транзитивности ((211) лучше (121), а (121) лучше, чем (131) в исходной матрице). Полностью заполненная экспертами матрица приведена в таблице третьей.

Таблица 3.3

	211	*311*	*121*	*131*	*112*	*113*
211	2	1	0	0	0	0
311		2	0	0	0	0
121			2	1	0	0
131				2	0	0
112					2	1
113						2

	211	*311*	*121*	*131*	*112*	*113*
211	2	1	1	**1**	0	0
311		2	0	0	0	0
121			2	1	0	0
131				2	0	0
112					2	1
113						2

	211	*311*	*121*	*131*	*112*	*113*
211	2	1	1	**1**	1	**1**
311		2	1	**1**	3	1
121			2	1	1	**1**
131				2	3	1
112					2	1
113						2

	211	*311*	*121*	*131*	*112*	*113*
211	2	1	1	**1**	1	**1**
311	3	2	1	**1**	3	1
121	3	3	2	1	1	**1**
131	3	3	3	2	3	1
112	3	1	3	1	2	1
113	3	3	3	3	3	2

По ней становится возможным восстановить все значения элементов (табл. 3.3, четвертая матрица).

3. В соответствии с последней матрицей в табл. 3.3. упорядочим векторные оценки из списка L_1: (211), (311), (121), (112), (131), (113). Если по некоторым векторам имеются равные оценки, то лицу, принимающему решение, задаются дополнительные вопросы для сравнения спорных оценок опорной ситуации.

4. Используя единую порядковую шкалу (ЕПШ) (211), (311), (121), (112), (131), (113), упорядочим П1, П2, П3 по следующему принципу: первое значение по любому критерию имеет ранг 1, второе значение по первому критерию (211) – ранг 2 и т.д.

Тротуарная плитка	Внешний вид	Стоимость	Удобность укладки	Векторная оценка по ЕПШ	Векторная оценка по возрастанию рангов
П1	1	2	3	147	147
П2	2	3	1	261	126
П3	1	3	2	165	156

5. На основе таблицы сделаем вывод: векторная оценка, описывающая П2, лучше, чем оценки П1 и П3, далее можно предположить, что П1 лучше П3. Мы упорядочили изделия П2, П1, П3 и определили, что наиболее предпочтительным из них является П2. В конце процедуры экспертам необходимо предоставить соответствующие объяснения.

Таким образом, метод ЗАПРОС позволяет ранжировать альтернативы по субъективным вербальным оценкам с учетом значимости критериев, что особенно важно для многокритериальных задач. Кроме предложенного метода, возможно применение и других, соответствующих данному классу задач [64]: ПАРК (ПАРная Компенсация), ОРКЛАСС (ОРдинальная КЛАССификация).

4. Сравнительное исследование методов принятия решений в условиях неопределенности

Модели принятия решений широко используются в информационно-управляющих системах, в интеллектуальных системах обработки информации, в системах искусственного интеллекта. В работах [8, 25, 42, 45, 63, 100] производится классификация различных моделей и методов принятия решений, изложение их основ, намечаются подходы теоретического сравнения, но анализ моделей и методов с точки зрения практических результатов, как правило, не рассматривается. В главе 4 произведем сравнение практических результатов анализа проблемных ситуаций на основе модели функции доминируемости (методами ПР при нечеткой исходной информации) и модели Бержа-Брука-Буркова (методом анализа иерархий), модели линейного упорядочивания на основе векторных оценок альтернатив (качественными методами принятия решений) с целью выявления наиболее оптимальных и эффективных подходов каждого из методов к такому анализу.

В разделе 4.1 рассматриваются основные теоретические свойства объектов выделенных моделей. Используя данные свойства, производится вычисление приоритетов объектов, парное сравнение которых осуществляется на основе количественной шкалы и по правилам формирования отношений в МАИ, методом принятия решений на базе нечеткой логики, и наоборот.

Рассматривается вопрос восстановления отношений по вектору приоритетов альтернатив. Такая возможность реализована для вектора недоминируемых альтернатив, по которому, как показано, можно восстановить обратносимметричную матрицу МАИ. Восстановление же нечеткого отношения нестрогого предпочтения по вектору приоритетов МАИ с точностью до постоянной осуществить невозможно.

Как известно, при осуществлении оптимального выбора вначале необходимо выявить факторы, оказывающие влияние на ход исследуемого процесса или его результаты. Некоторые факторы при этом поддаются формализованному представлению (т.е. могут быть выражены количественно), а некоторые нет, и могут быть выражены только при помощи субъективных оценок экспертов. Ввиду этого важной характеристикой методов принятия решений является их возможность учитывать объективную составляющую многокритериальной проблемы, выраженную в виде количественных характеристик. В разделе 4.2 количественные данные были включены в процессы принятия решений с целью проверки достоверности линейного упорядочивания альтернатив на основе различных моделей принятия решений.

Как отмечается в [91], одним из научных направлений развития МАИ является оценка метода собственного вектора в ряду методов построения по заданной матрице парных сравнений объектов оптимального линейного их упорядочивания. В разделе 4.3 нами было проведено исследование, цель которого заключалась в определении наиболее предпочтительных методов принятия решений в условиях неопределенности. Сравнение производилось участниками процесса принятия решений по многим критериям, предложенным на основе результатов практического применения методов и теоретического изучения их основ. В качестве средства анализа был выбран МАИ.

4.1. Сравнение результатов ранжирования альтернатив различными методами принятия решений в условиях неопределенности

Модели принятия решений в условиях неопределенности применяются для выбора наиболее оптимальных альтернатив из имеющихся в ситуациях, характеризуемых неточностью, неполнотой информации. Осуществление ранжирования альтернатив в этом случае возможно производить различными прямыми методами. Для ЛПР важно, чтобы результаты применения методов предоставляли одинаковое ранжирование альтернатив. Возможны различные приоритеты альтернатив, определяемые разными методами, но упорядочивание их должно быть одинаковым. Проведем сравнение результатов ранжирования альтернатив МАИ и методом принятия решений при нечеткой исходной информации.

Пусть имеется множество $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$ – альтернатив, XxX – бинарное отношение на множестве альтернатив. Требуется для каждой альтернативы определить ее оценку – $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$. В МАИ (в ходе дальнейшего изложения – (1)) $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – вектор приоритетов, в методах принятия решений при нечеткой исходной информации (способ (2)) $(\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ – вектор степеней недоминируемости альтернатив. Причем, в (1) $0 < \alpha_i \le 1$, в (2) $0 \le \alpha_i \le 1$.

Бинарное отношение предпочтения альтернатив и в (1), и в (2) задается в виде квадратной матрицы $A_{nxn} = // \alpha_{ij} //$, где $\alpha_{ij} = \mu(x_i, x_j)$ – степень предпочтения x_i альтернативы перед x_j. Матрицы $A_{nxn} = // \alpha_{ij} //$, сформированные в каждом способе в соответствии со шкалами (шкалой функции принадлежности (2) или шкалой относительной важности (1)) и правилами формирования отношений в каждом из методов, будут обладать рядом общих и «индивидуальных» свойств.

В способе (2) A_{nxn} представляет собой нечеткое отношение нестрогого предпочтения альтернатив: $XxX \to [0;1]$, т.е. $\alpha_{ij} = \mu(x_i, x_j) \in [0;1]$ – значения функции принадлежности н.о.п. Матрицы $// \alpha_{ij} //$ неотрицательны, т.к. $0 \le \alpha_{ij} \le 1$. $\alpha_{ij} = 1$, где $i = j$, т.е. н.о.п. рефлексивно.

Базовая шкала способа (2) представлена на рис. 4.1. Функция принадлежности $\mu(x_i, x_j)$ обладает следующими свойствами:

– $\mu(x_i , x_j)$ возрастает с возрастанием степени превосходства (силы, интенсивности) оценки превосходства альтернативы;

– $\mu(x_i , x_j) = 1$ означает безусловное превосходство альтернативы x_i над x_j;

– $\mu(x_i , x_j) = 0$ означает либо полное отсутствие превосходства альтернативы x_i над x_j, либо то, что *i-тая* альтернатива хуже *j-той*.

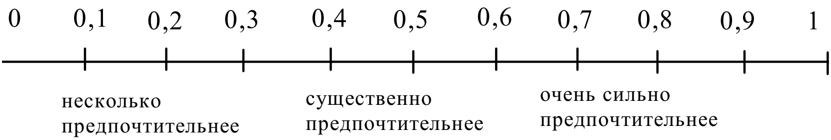


Рис. 4.1. Базовая шкала метода ПР при нечеткой исходной информации

В способе (1) $A_{n\times n}$ представляет собой положительную обратносимметричную матрицу, которую можно считать отношением предпочтения альтернатив. $X\text{x}X \rightarrow [1/9;9]$, т.е. $\alpha_{ij} = \mu(x_i , x_j) \in [1/9;9]$ – значения функции принадлежности отношению предпочтения альтернатив, при этом $\mu(x_i , x_j)$ принимает значения в соответствии с базовой шкалой относительной важности, представленной на рис. 4.2.

В (1) $//\alpha_{ij}//$ являются:

– положительными;
– обратносимметричными (если $\alpha_{ij} = a$, то $\alpha_{ji} = 1/a$);
– неприводимыми;
– импримитивными;
– так же, как и в (2), бинарные отношения (1) являются рефлексивными, т.к. $\alpha_{ij} = 1$, где $i = j$.

Рис. 4.2. Базовая шкала МАИ

Функция принадлежности $\mu(x_i, x_j)$ обладает следующими свойствами:

– $\mu(x_i, x_j)$ возрастает с возрастанием надежности оценки превосходства альтернативы;

– $\mu(x_i, x_j) = 1$ означает равную важность альтернатив.

Сравнение результатов ранжирования альтернатив можно произвести несколькими способами.

1). *Соотнесение оценочных шкал*. Чтобы сравнить результаты ранжирования альтернатив $X = \{x_1, x_2,..., x_n\}$, полученные в результате применения методов (1) и (2), необходимо вначале сформировать соответствующие этим способам н.о.п. для (2) и матрицу парных сравнений для (1) в соответствии с их базовыми шкалами. Очевидно, что эксперт не сможет заполнить для одной и той же группы альтернатив две матрицы, соответствующие способам (1) и (2), согласованные между собой, так, чтобы элементы матриц удовлетворяли перечисленным выше свойствам. Таким образом, процедуре сравнения результатов (1) и (2) должна предшествовать процедура соотнесения шкал (1) и (2). Процедура соотнесения шкал позволит по каждому «весу» критерия шкалы (1) получить «вес» критерия шкалы (2). Для соотнесения шкал рассматриваемых методов необходимо определить элементы шкал как гомоморфные алгебраические структуры, что будет сделано в главе 5.

2). *Применение алгоритмов (1) и (2) к сформированным бинарным отношениям для одних и тех же альтернатив на основе базовых шкал данных методов*. ЛПР формирует отношения на множестве одних и тех же альтернатив и для метода (1), и для метода (2), субъективно (имеется в виду, что он не ставит целью точное соотнесение оценок методов). Затем к каждому отношению применяется алгоритм (1) и (2).

Рассмотрим возможность применения МАИ к н.о.п. (2), т.е. возможность применить к н.о.п. теорему Перрона-Фробениуса: для примитивной матрицы A $\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{A^k e}{\|A^k\|} = cw,\ \|A^k\| = e^T A^k e$, где c – постоянная, а w – собственный вектор, соответствующий $\lambda_{max} = \lambda_1$.

Матрицы н.о.п. $A_{nxn} = // \alpha_{ij} //$ (2) являются неотрицательными ($\alpha_{ij} \geq 0$), как и матрицы парных сравнений в МАИ (1). Если на компоненты α_{ij} наложить дополнительное условие $\alpha_{ij} \neq 0$ (с точки зрения сравнения альтернатив это означает, что альтернативы не могут быть безразличны по отношению друг к другу), или, иначе, потребовать толерантности н.о.п. (нечеткое отношение толерантно, если оно рефлексивно и симметрично), то матрицы R заведомо удовлетворяют условиям теоремы Перрона-Фробениуса – являются примитивными. В этом случае возможна обработка матриц нечеткого отношения нестрогого предпочтения не только методом (2), но и на основе теоремы Перрона-Фробениуса (методом (1)). Однако, даже самый простой пример убеждает нас в различных результатах применяемых методов. Например, на основе матрицы н.о.п.

1	0,2	0,5
0,3	1	0,9
0,4	0,6	1

с использованием метода (2) получим вектор μ_R^{nd} = (0,9; 0,9; 0,7), тогда как применив теорему Перрона – w = (0,268; 0,373; 0,358).

Проверим вывод о несовпадении w и μ_R^{nd} в общем случае на выборке случайных н.о.п. при помощи вычислительного эксперимента. Для этого для матриц всех размерностей до 9 создадим по 50 выборок (каждая выборка состоит из 400 матриц) и заполним случайными образом их элементы числами из шкалы ($0;1$] так, что $\alpha_{ij} = 1$ при $i = j$. Применим к каждому из полученных отношений алгоритмы (2) и (1) и подсчитаем количество отношений каждой размерности, для которых вектор приоритетов и функция недоминируемости предоставляют одинаковое ранжирование альтернатив (табл. 4.1). Из приведенной таблицы видно, что с увеличением размерности матрицы количество случаев одинакового упорядочивания альтернатив заметно уменьшается.

Таблица 4.1

Результаты соответствия упорядочивания альтернатив методами (1) и (2) по н.о.п.

Размерность матрицы	Средний % одинакового упорядочивания по всем выборкам
A_{3x3}	51,90
A_{4x4}	20,94
A_{5x5}	6,25
A_{6x6}	1,59
A_{7x7}	0,36
A_{8x8}	0,07
A_{9x9}	0,01

Рассмотрим возможность применения метода принятия решения при нечеткой исходной информации с одним экспертом к обратносимметричным матрицам метода (1).

Матрицу $A_{nxn}= // \alpha_{ij} //$, $\alpha_{ij} \in [1/9;\ 9]$ (1) можем представить в виде н.о.п. (2). Для этого от отношения $A_{nxn}= // \alpha_{ij} //$ перейдем к отношению $B_{nxn}= // \beta_{ij} //$, где $\beta_{ij} = \alpha_{ij} / \max\limits_{i,j} \alpha_{ij}$. Таким образом, мы получаем нечеткое отношение $X\text{x}X \to [0,1]$.

Утверждение. Деление каждого элемента матрицы (1) на максимальный элемент (умножение на любое положительное число в общем виде) не меняет ее вектора приоритета (главного собственного вектора). Действительно, по теореме Перрона-Фробениуса для примитивной матрицы A

$\lim\limits_{k\to\infty}\dfrac{A^k e}{\left\|A^k\right\|}=cw,\ \left\|A^k\right\|=e^T A^k e$, где c - постоянная, а w – собственный вектор, соответствующий $\lambda_{max}(A)$. Получаем

$$\lim_{k\to\infty}\frac{B^k e}{\left\|B^k\right\|}=\lim_{k\to\infty}\frac{(mA)^k e}{\left\|(mA)^k\right\|}=\lim_{k\to\infty}\frac{m^k A^k e}{\left\|m^k A^k\right\|}=\lim_{k\to\infty}\frac{m^k A^k e}{m^k\left\|A^k\right\|}=\lim_{k\to\infty}\frac{A^k e}{\left\|A^k\right\|}=cw,$$

где $m=\max\limits_{i,j}\alpha_{ij}$.

Отсюда следует, что для одного набора значений вектора приоритетов альтернатив в (1) существует бесконечно много отношений $A_{n\text{x}n}$, отличающихся друг от друга на постоянную.

Аналогичное утверждение можно сформулировать и для н.о.п.

Утверждение. Умножение отношения (2) на $c = const$, $c > 0$, не меняет его вектор степеней недоминируемости альтернатив.

Действительно, пусть имеется отношение R. Рассмотрим отношение $R' - \mu_{R'} : X\text{x}X \to [0,m]$, где $\mu_{R'} = m\,\mu_R$.

При построении нечеткого отношения строгого предпочтения R^s по н.о.п. μ_R –

$$\mu_R^S(x_i,x_j)=\begin{cases}\mu(x_i,x_j)-\mu(x_j,x_i), если\ \mu(x_i,x_j)>\mu(x_j,x_i);\\ 0, если\ \ \mu(x_i,x_j)\le\mu(x_j,x_i).\end{cases}$$

При построении нечеткого отношения строгого предпочтения R'_S по н.о.п. $\mu_{R'}$ –

$$\mu_{R'}^S(x_i,x_j)=\begin{cases}\mu(x_i,x_j)-\mu(x_j,x_i), если\ \mu(x_i,x_j)>\mu(x_j,x_i);\\ 0, если\ \ \mu(x_i,x_j)\le\mu(x_j,x_i).\end{cases}$$

Если $\mu(x_i,x_j)>(\le)\mu(x_j,x_i)$, то и $m\mu(x_i,x_j)>(\le)m\mu(x_j,x_i)$, т.е., если $(x_i,x_j)\in R_S$, то и $(x_i,x_j)\in R'_S$.

Вторым этапом в алгоритме (2) формируется множество недоминируемых альтернатив $\mu_R^{nd}(x_i) = 1 - \max\limits_j\{\mu_R^s(x_i, x_j)\}$. Для R'_S сформируем его следующим образом: $\mu_{R'}^{nd}(x_i) = m - \max\limits_j\{\mu_{R'}^S(x_i, x_j)\}$. Из определения μ_R^{nd} следует, что и для отношения μ_R , и для $\mu_{R'}$ будет произведено одинаковое ранжирование альтернатив. Кроме того, если $\mu_R^{nd}(x_i)$ нормализуется (что в методе (2) в принципе не требуется), то и для μ_R, и для $\mu_{R'}$ векторы степеней недоминируемости альтернатив будут совпадать.

Отсюда следует, что фиксированному нормализованному вектору

$\mu_R^{nd}(x_i)$, $i = 1,...,n$ в (2) соответствует бесконечно много н.о.п. $\mu_R : X$xX, с точностью до постоянной. По данному утверждению, применяя алгоритм (2) к обратносимметричной матрице $A_{n\text{x}n} = // \alpha_{ij} //$, переход к отношению $B_{n\text{x}n} = // \beta_{ij} //$, где $\beta_{ij} = \alpha_{ij} / \max_{i,j} \alpha_{ij}$, в принципе необязателен.

Но применение метода (2) к матрицам (1) не приводит к результату, который получается в МАИ.

Например, для обратносимметричной матрицы

$$\begin{matrix} 1 & 1/3 & 1/6 \\ 3 & 1 & 6 \\ 6 & 1/6 & 1 \end{matrix}$$

по теореме Перрона-Фробениуса будет сформирован вектор приоритетов (0,095; 0,654; 0,249).

Если применить к данной матрице способ (2), то будет получен вектор степеней недоминируемости альтернатив (0,045; 0,909; 0,045), который представляет ранжирование альтернатив, отличное от метода (1).

Аналогично, как и в первом случае, проверим вывод о несовпадении w и μ_R^{nd} на выборке случайных обратносимметричных матриц при помощи вычислительного эксперимента. Для этого для матриц всех размерностей до 9 создадим по 50 выборок (каждая выборка состоит из 400 матриц) и заполним случайными образом их элементы числами из шкалы МАИ так, что $\alpha_{ij} = 1,\ при\ i = j$ и $\alpha_{ij} = 1/\alpha_{ji}$. Применим к каждому из полученных отношений алгоритмы (2) и (1) и подсчитаем количество отношений каждой размерности, для которых вектор приоритетов и функция недоминируемости предоставляют одинаковое ранжирование альтернатив (табл. 4.2). Из приведенной таблицы видно, что с увеличением размерности матрицы количество случаев одинакового упорядочивания альтернатив заметно уменьшается.

Таблица 4.2

Результаты соответствия упорядочивания альтернатив методами (1) и (2) по обратносимметричной матрице

Размерность матрицы	Средний % одинакового упорядочивания по всем выборкам
$A_{3\text{x}3}$	61,12
$A_{4\text{x}4}$	29,14
$A_{5\text{x}5}$	8,11
$A_{6\text{x}6}$	2,51
$A_{7\text{x}7}$	0,20
$A_{8\text{x}8}$	0,06
$A_{9\text{x}9}$	0,00

То есть, отношения сравнения альтернатив при наложении некоторых дополнительных ограничений удовлетворяют свойствам, необходимым для применения другого метода, но попытки применения этих методов показали несостоятельность такого подхода (рис. 4.3).

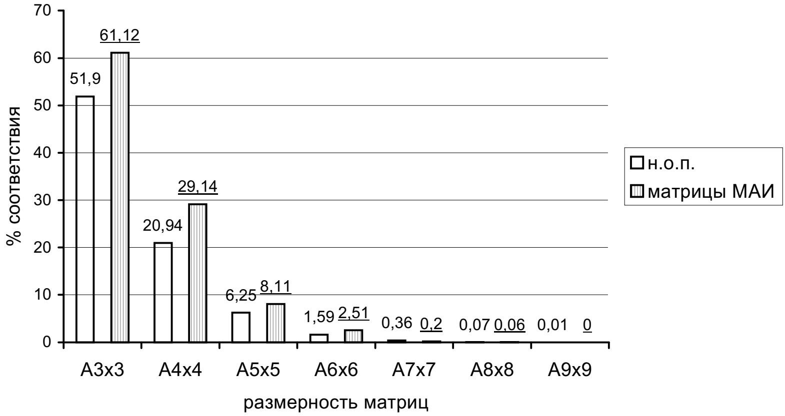


Рис. 4.3. Зависимость одинаковых упорядочиваний альтернатив разными методами от размерностей матриц

На основе проведенных рассуждений можно сформулировать следующие свойства рассмотренных моделей линейного упорядочивания:

Свойство 1. Умножение бинарного отношения *А* на положительную постоянную не изменяет линейного упорядочивания модели.

Свойство 2. Ранжирование альтернатив на основе бинарных отношений одной модели методами других моделей в общем случае различно, причем с увеличением размерности матрицы степень различного ранжирования возрастает.

Свойство 3. Модели линейного упорядочивания допускают вычисление вектора приоритетов по различным бинарным рефлексивным отношениям при наложении на них ряда дополнительных условий.

3). *Восстановление отношения* (*1*) *на основе вектора степеней недоминируемости альтернатив, вычисленного для отношения* (*2*). Рассмотрим н.о.п. μ_R: $XxX \to [0,1]$ на множестве альтернатив $X = \{x_1, x_2, ..., x_n\}$. Методом (2) получим множество недоминируемых альтернатив $S = \{<x_i;\ \mu_R^{nd}(x_i)>\}$, где $\mu_R^{nd}(x_i)$ представляет собой «вес», или оценку, каждой альтернативы. При этом для дальнейших рассуждений необходимо, чтобы выполнялось условие $\forall x_i,\ \ i = 1,...,n \mid \mu_S(x_i) \neq 0$ (в противном случае, при получении обратносимметричной матрицы будет выполняться деление на нуль). Потребуем, чтобы $\sum_i \mu_S(x_i)=1$ (нормализуем полученный вектор). Степень принадлежности элементов отношению $A_{nxn}= //\alpha_{ij}//$ (1) будем определять посредством парных сравнений $\alpha_{ij}=\mu_S(x_i)/\mu_S(x_j)$ (в виду этого условие $\sum_i \mu_S(x_i)=1$ можно считать избыточным). В результате получим примитивную обратносимметричную матрицу, обладающую свойством рефлексивности ($\alpha_{ij} = 1$, при $i = j$), которая удовлетворяет условиям теоремы Перрона-Фробениуса. Вычислим для данной матрицы вектор приоритетов $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ и убедимся в том, что он совпадает с нормализованным вектором степеней недоминируемости альтернатив.

Действительно, пусть дан вектор степеней недоминируемости альтернатив как результат метода (2) $\mu_S=(\mu_S(x_1),\mu_S(x_2),\ldots,\mu_S(x_n))$, такой, что $\sum_i \mu_S(x_i)=1$.

Обозначим через α_{ij} число, соответствующее значимости альтернативы x_i по сравнению с x_j. Матрицу, состоящую из этих чисел, обозначим через $A = (\alpha_{ij})$. В нашем случае $\alpha_{ij}= \mu_S(x_i)/\mu_S(x_j)$, $i, j = 1, \ldots, n$.

Поэтому $\alpha_{ji}= \mu_S(x_j)/\mu_S(x_i)= 1/\alpha_{ij}$. Тогда $\alpha_{ij}\dfrac{\mu_S(x_j)}{\mu_S(x_i)}=1, \quad i,j=1,\ldots,n.$

Следовательно, $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\mu_S(x_j)\dfrac{1}{\mu_S(x_i)}=n, \quad i=1,\ldots,n.$

Получаем $\sum_{j=1}^{n}\alpha_{ij}\mu_S(x_j)=n\mu_S(x_i),\ i=1,\ldots,n.$ Или $A\mu_S=n\mu_S$. То есть, μ_S – собственный вектор матрицы A с собственным значением n. С другой стороны, по теореме Перрона-Фробениуса (в методе МАИ) по матрице A будет вычислен вектор приоритетов $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$, который, как показано, и будет являться вектором степеней недоминируемости альтернатив $\mu_S=(\mu_S(x_1),\mu_S(x_2),\ldots,\mu_S(x_n))$.

Например, для ранее рассмотренного н.о.п.

н.о.п.			μ_R^{nd} =	w =
1	0,2	0,5	0,9 (0,36)	0,268
0,3	1	0,9	0,9 (0,36)	0,373
0,4	0,6	1	0,7 (0,28)	0,358

соответствующая данным результатам μ_R^{nd} = матрица МАИ будет иметь вид:

			Главный соб. вектор	Вектор приор. w
0,9/0,9 = 1	0,9/0,9 = 1	0,9/0,7 ≈ 1,29	1,09	0,360
0,9/0,9 = 1	0,9/0,9 = 1	0,9/0,7 = 1,29	1,09	0,360
0,7/0, 9≈ 0,78	0,7/0,9 ≈ 0,78	0,7/0,7 = 1	0,85	0,280

Восстановление по вектору приоритетов (1) н.о.п. (2) с точностью до постоянной невозможно, так как одному w могут соответствовать несколько различных н.о.п.

Таким образом, в разделе 4.1 показано, что применение к произвольному н.о.п. модели функции доминируемости способа обработки данных (1) предоставляет результаты, отличные от тех, которые могут быть получены на основе модели (2). Такой же вывод был сделан и для обратносимметричных матриц (1).

В этом случае представляет интерес вопрос о том, как по вектору приоритетов, полученному при помощи одного из методов, восстановить бинарное отношение, удовлетворяющее условиям другого метода. Нами предложен способ восстановления матрицы (1) по вектору степеней недоминируемости альтернатив (2).

4.2. Применение методов принятия решений для анализа количественных данных

Для сравнения результатов различных методов принятия решений с целью выявления их достоверности и объективности необходимо воспользоваться каждым из них при анализе одной и той же проблемной ситуации. В качестве такой задачи будем рассматривать задачу ранжирования объектов на основе их отношения предпочтения, сформированного ЛПР. Если при этом использовать субъективные оценки экспертов при парных сравнениях объектов, то результаты, зависящие от исходных данных каждого метода, заведомо будут различны, так как в каждом методе используется свой принцип парных сравнений объектов и количественная шкала. Поэтому в роли «эталонной» задачи может выступать только та задача, исходными данными которой являются парные сравнения объектов, основанные на их количественных характеристиках (а не на оценках экспертов).

Такой подход был реализован в [91] для иллюстрации адекватности МАИ реальному линейному упорядочиванию объектов.

В монографии рассматривается линейное упорядочивание объектов при помощи различных моделей принятия решений на основе количественных данных с целью выявления модели и метода, результаты которого наиболее точно соответствуют исходному ранжированию объектов и их количественным характеристикам.

Упорядочивание объектов на основе отношения предпочтения по одному критерию

Пусть имеет множество $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ объектов.

$W = \{w_1, \ldots, w_n\}$ – количественные оценки объектов по критерию q.

Необходимо сформировать нечеткие подмножества $\widetilde{A}_i$, соответствующие различному упорядочиванию наиболее предпочтительных по критерию q объектов различными методами ПР.

В качестве реальных объектов и их количественных характеристик рассмотрим фактическую среднегодовую себестоимость основных видов продукции ОАО «КЗ ЖБИ» за 1998 г. (табл. 4.3). На основе моделей принятия решений необходимо в этом случае осуществить ранжирование изделий по возрастанию фактических затрат на их производство.

Таблица 4.3

Среднегодовая фактическая себестоимость ж/б продукции за 1998 г. по «КЗ ЖБИ»

Название	Среднегод. фактич. себестоим. (млн. руб.)
Сборный железобетон	17489
Стеновые материалы	4042
Керамзит товарный	1132
Бетон товарный	4387
Раствор товарный	1321

Составим отношение предпочтения объектов $A = \left\| \alpha_{ij} \right\|$, $i, j = 1, \ldots, 5$.

При этом, если w_i – абсолютная характеристика (вес) *i-го* объекта, то

$\alpha_{ij} = \dfrac{w_i}{w_j}$ выражает степень предпочтения *i-го* объекта перед *j-м* (табл. 4.4).

Так составленное отношение соответствует логике построения отношений в методе анализа иерархий (1) и в методах принятия решений при нечеткой исходной информации (2) и удовлетворяет степенной калибровке, приемлемой как для модели Бэржа-Брука-Буркова, так и модели функции доминируемости. Качественные методы принятия решений позволяют сравнивать объекты лишь по нескольким критериям; сравнение объектов на основе их предпочтения относительно какой-либо одной цели в этих методах не применяется (в этом случае будет получен простейший случай – модель спортивного типа), поэтому на их основе линейное упорядочивание объектов по одному критерию не производилось.

Таблица 4.4

Отношение предпочтения $A = \left\|\alpha_{ij}\right\|$, соответствующее табл. 4.3

Продукция	Сб. жел/б	Стен. мат.	Керамзит тов.	Бетон тов.	Раствор тов.
Сб. жел/б	1	17489/4042	17489/1132	17489/4387	17489/1321
Стен. мат.	4042/17489	1	4042/1132	4042/4387	4042/1321
Керамзит тов.	1132/17489	1132/4042	1	1132/4387	1132/1321
Бетон тов.	4387/17489	4387/4042	4387/1132	4387/4387	4387/1321
Раствор тов.	1321/17489	1321/4042	1321/1132	1321/4387	1

Полученное отношение предпочтения является положительной обратносимметричной матрицей, к которой можно применить любой из способов вычисления главного собственного вектора *w*. В данном примере применялся способ, дающий наиболее точное приближение $y_i = \sqrt[n]{\alpha_{ij}}$, $j = 1,...,n$. Вектор приоритетов получаем нормализацией главного собственного вектора. Матрица $A = \left\|\alpha_{ij}\right\|$ и ее вектор приоритетов имеют вид:

1,000	4,327	15,450	3,987	13,239	$y_1=$	0,616
0,231	1,000	3,571	0,921	3,060	$y_2=$	0,142
0,065	0,280	1,000	0,258	0,857	$y_3=$	0,040
0,251	1,085	3,875	1,000	3,321	$y_4=$	0,155
0,076	0,327	1,167	0,301	1,000	$y_5=$	0,047

Чтобы сравнить результаты, полученные МАИ, и реальные «веса» объектов, произведем нормализацию исходных количественных данных. Нормализованные количественные характеристики объектов, как убеждаемся, совпадают с вектором приоритетов:

Объект	Количеств. характеристика	Нормализованные количеств. характиристики	Значения вектора приоритетов
Сб. жел/б	17489	0,616	0,616
Стен. мат.	4042	0,142	0,142
Керамзит тов.	1132	0,040	0,040
Бетон тов.	4387	0,155	0,155
Раствор тов.	1321	0,047	0,047

Получим приоритеты объектов методом ПР на базе нечеткой логики.

Исходное бинарное отношение нестрогого предпочтения имеет вид:

$R =$

1,000	4,327	15,450	3,987	13,239
0,231	1,000	3,571	0,921	3,060
0,065	0,280	1,000	0,258	0,857
0,251	1,085	3,875	1,000	3,321
0,076	0,327	1,167	0,301	1,000

Максимальный элемент отношения $\max\limits_R = 15{,}450$. В дальнейшем это значение будет использовано как «единица» (наибольшее значение) отношения.

Бинарное отношение строгого предпочтения, ассоциированное с R, $R^S = R \setminus R^T$:

$R^S=$

0,000	4,096	15,385	3,736	13,164
0,000	0,000	3,291	0,000	2,733
0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
0,000	0,164	3,617	0,000	3,020
0,000	0,000	0,310	0,000	0,000

Множество недоминируемых альтернатив строится в данном случае по правилу $\mu_R^{nd}(u_i) = \max\limits_R - \max\limits_{u_j \in U}\{\mu_R^S(u_j; u_i)\}$.

Например, $\mu_R^{nd}(u_1) = 15{,}450 - 0 = 15{,}450$.

В итоге получим вектор степеней недоминируемости альтернатив

$$\mu_R^{nd} = \{15{,}450;\ \ 11{,}354;\ \ 0{,}065;\ \ 11{,}714;\ \ 2{,}286\}.$$

Нормализованные значения μ_R^{nd} не совпадают с вектором приоритетов, полученным нормализацией главного собственного вектора матрицы A, но предоставляют такое же ранжирование альтернатив. Несовпадение значений объясняется тем, что МАИ определяет в результате исходный «вес» каждого объекта, а метод (2) – степень недоминируемости. Действительно, фактическая себестоимость сборного железобетона не доминируется никакими другими изделиями со степенью недоминируемости $\mu_R^{nd}(u_1) = 15{,}450$, которая семантически выражает то, что объект может доминироваться другими, но со степенью доминирования не выше, чем $\max\limits_R - \mu_R^{nd}(u_1) = 0$. Для стеновых материалов $\mu_R^{nd}(u_2) = 11{,}354$, т.е. степень доминируемости

$$\mu_R^{nd}(u_2) \le \max\limits_R - \mu_R^{nd}(u_2) = 4{,}096$$

(по бинарному отношению нестрогого предпочтения в этом легко убедиться).

Сравним полученные приоритеты (степень недоминируемости в методе (2) можно рассматривать как приоритет объекта, так как на основе вектора степеней недоминируемости делается вывод о ранжировании объектов) (табл. 4.5).

Таблица 4.5

Приоритеты объектов,
полученные разными методами принятия решений

Значения вектора приоритетов, полученных способом (2)	0,378	0,278	0,002	0,287	0,056
Значения вектора приоритетов, полученных способом (1)	0,616	0,142	0,040	0,155	0,047

Полученные нормализованные приоритеты объектов каждого метода можно рассматривать как нечеткие подмножества $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ множества X, соответствующие методам (1) и (2) соответственно, где

$$\widetilde{A}_1 = \{< x, y(x) >\}, x \in X\ ,\quad \widetilde{A}_2 = \{< x, \mu_R^{nd}(x) >\}, x \in X\ .$$

Нормализованные количественные характеристики объектов будем интерпретировать как нечеткое подмножество $\widetilde{A} = \{< x, w(x) >\}, x \in X$.

В этом случае становится возможным определить степень равенства нечетких подмножеств $\widetilde{A}_1$ и $\widetilde{A}_2$ «эталонному» множеству $\widetilde{A}$. Степень равенства определим различными способами.

Степень равенства двух нечетких подмножеств, рассматриваемая А.Н. Мелиховым [69], определяется по формуле

$$\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}) = \mathop{\&}_{x \in X}(y(x) \leftrightarrow w(x)) = \mathop{\&}_{x \in X}(max(1 - y(x), w(x)); max(1 - w(x), y(x))).$$

$$\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}) = (0{,}616 \leftrightarrow 0{,}616)\,\&\,(0{,}142 \leftrightarrow 0{,}142)\,\&$$
$$\&\,(0{,}040 \leftrightarrow 0{,}040)\,\&\,(0{,}155 \leftrightarrow 0{,}155)\,\&\,(0{,}047 \leftrightarrow 0{,}047) =$$
$$= 0{,}616\,\&\,0{,}858\,\&\,0{,}96\,\&\,0{,}845\,\&\,0{,}953 = 0{,}616.$$

$$\mu(\widetilde{A}_2, \widetilde{A}) = \mathop{\&}_{x \in X}(\mu_R^{nd}(x) \leftrightarrow w(x)).$$

$$\mu(\widetilde{A}_2, \widetilde{A}) = (0{,}378 \leftrightarrow 0{,}616)\,\&\,(0{,}278 \leftrightarrow 0{,}142)\,\&$$
$$\&\,(0{,}002 \leftrightarrow 0{,}040)\,\&\,(0{,}287 \leftrightarrow 0{,}155)\,\&\,(0{,}056 \leftrightarrow 0{,}047) =$$
$$= 0{,}384\,\&\,0{,}722\,\&\,0{,}960\,\&\,0{,}713\,\&\,0{,}944 = 0{,}384.$$

Так как $\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}) \geq 0{,}5$, то $\widetilde{A} \approx \widetilde{A}_1$ (сравниваемые множества нечетко равны).

Так как $\mu(\widetilde{A}_2, \widetilde{A}) \leq 0{,}5$, то сравниваемые множества нечетко не равны – $\overline{\widetilde{A} \approx \widetilde{A}_2}$. Степень равенства $\mu(\widetilde{A}_1, \widetilde{A}) > \mu(\widetilde{A}_2, \widetilde{A})$, что свидетельствует о предпочтительности результатов метода (1), рассматриваемых как количественные оценки важности объектов.

Хэммингово расстояние.

$$R(\widetilde{A},\widetilde{A}_1)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|w(x_i)-y(x_i)\right|,\quad x_i\in X\ .$$

В этом случае $R(\widetilde{A},\widetilde{A}_1)=0$.

$$R(\widetilde{A},\widetilde{A}_2)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left|w(x_i)-\mu_R^{nd}(x_i)\right|,\quad x_i\in X\ ,\quad R(\widetilde{A},\widetilde{A}_2)=\frac{1}{5}(0{,}553)=0{,}11\ .$$

Евклидово расстояние

$$R_E(\widetilde{A},\widetilde{A}_1)=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(w(x_i)-y(x_i)\right)^2}\ ,\quad x_i\in X\ .$$

При этом $R_E(\widetilde{A},\widetilde{A}_1)=0$.

$$R_E(\widetilde{A},\widetilde{A}_2)=\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left(w(x_i)-\mu_R^{nd}(x_i)\right)^2}\ ,\quad x_i\in X\ ,\quad R_E(\widetilde{A},\widetilde{A}_2)=0{,}02.$$

Таким образом, приоритеты, получаемые в МАИ, практически совпадают с «эталонными» значениями объектов по выбранному критерию. Метод (2) дает близкие значения к «эталону», но менее предпочтительные с точки зрения равенства исходным количественным характеристикам.

В отличие от разделе 4.1., результаты двух рассмотренных методов для количественных данных предоставляют как одинаковое ранжирование альтернатив, так и близость результатов к исходным данным. Такое достоверное упорядочивание методом (2) количественных данных и расхождение его результатов с результатами метода (1) в разделе 4.1. может быть объяснено несогласованностью произвольно выбранных матриц. Чем согласованнее матрица (1), тем ближе будут результаты методов (1) и (2) по ее обработке. Такое утверждение иллюстрирует следующий вычислительный эксперимент: случайным образом формируются 50 выборок по 100 обратносимметричных матриц A_{4x4} каждая (все элементы матрицы – случайные числа, соответствующие шкале МАИ), причем главное собственное значение каждой матрицы отличается от 4 (главного собственного значения полностью согласованной матрицы A_{4x4}) на ε. С уменьшением ε процент одинакового упорядочивания альтернатив различными методами возрастает (табл. 4.6, рис. 4.4).

Таблица 4.6

Результаты упорядочивания альтернатив методами (1) и (2) по обратносимметричным матрицам A_{4x4}, для которых $\lambda_{max}-n<\varepsilon,\ n=4$

ε	0,1	0,05	0,04	0,03	0,02	0,01	0,009	0,000001
% одинакового упорядочивания	58,2	62,4	63,00	64,8	64,1	68,6	71,3	100

Рис 4.4. Зависимость одинакового упорядочивания альтернатив различными методами по обратносимметричным матрицам от главного собственного значения матрицы

Причем, как показывает анализ случаев неодинакового упорядочивания, все они характеризуются тем, что вектор степеней недомируемости альтернатив имеет несколько равных значений, в то время как вектор приоритетов таких значений не имеет.

Упорядочивание объектов на основе отношения предпочтения по нескольким критериям

Все рассмотренные методы принятия решений позволяют производить упорядочивание объектов на основе экспертных оценок по нескольким критериям. Произведем сравнение полученных при этом результатов. Для «эталонной» задачи используем задачу, которая может, с одной стороны, решена классическими методами оптимизации, с другой стороны, методами принятия решений в условиях неопределенности.

Рассмотрим планирование производства бетонных смесей различных видов несколькими бетоносмесителями, принадлежащим двум бетоносмесительным узлам одного завода ЖБИ. Информация о плане производства железобетонных изделий и нормах расхода бетонной смеси на железобетонные изделия представлена в следующих таблицах:

План производства ж/б изделий по формовочному цеху № 1 завода ЖБИ на февраль

Технологическая линия	Марка ЖБИ	Код	План производства мес., по периодам, шт.		
			1	2	3
Стендовая	СК 2-1А		16	10	12
	СК 2-15Н		15	13	11
	СК 3-3 Г		16	14	13
	СК 6-1		15	12	11
Агрегатно-поточная	СВ 2-59		10	10	10
	СВ 3-6		10	10	10
	СВ 3-8		10	10	10
	СВ 11-6А		10	10	10
	СВ 11-20		10	10	10

План производства ж/б изделий по формовочному цеху №2 завода ЖБИ на февраль

Технологическая линия	Марка ЖБИ	Код	План производства мес., по периодам, шт.		
			1	2	3
Стендовая	Н-115		5	6	8
	Н-148		5	2	4
	Н-159		3	3	3
	Н-163		4	3	3

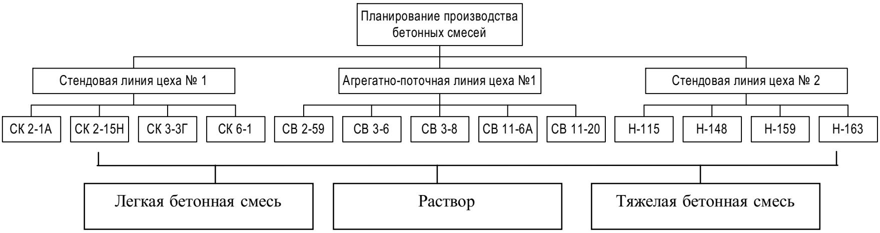
Ведомость норм расхода бетонной смеси на железобетонные изделия

Марка ЖБИ	Бетонная смесь, норма расхода			Марка ЖБИ	Бетонная смесь, норма расхода		
	Л	Р	Т		Л	Р	Т
СК 2-1А	1,3	0,55		СВ 11-6А		0,8	2,1
СК 2-15Н	1,9	0,50		СВ 11-20		0,44	0,9
СК 3-3 Г	1,575	0,55		Н-115	4,12	0,8	
СК 6-1	1,9	0,66		Н-148	3,24	0,72	
СВ 2-59		0,57	0,9	Н-159	5	1,04	
СВ 3-6		0,84	1,67	Н-163	3,3	0,57	
СВ 3-8		0,79	1,35				

Необходимо определить потребность завода в различных видах бетонной смеси на первую декаду месяца.

Результатом обычного расчета будут следующие показатели: стендовая линия цеха № 1 – 103 м^3 (легкая бетонная смесь) и 35 м^3 (раствор); агрегатно-поточная линия цеха № 1 – 69 м^3 (тяжелая бетонная смесь), 34,40 м^3 (раствор); стендовая линия цеха № 2 – 65 м^3 (легкая бетонная смесь), 13 м^3 (раствор). Всего необходимо выпустить легкой бетонной смеси 168 м^3, раствора 82,4 м^3, тяжелой бетонной смеси – 69 м^3.

Применяя МАИ к поставленной задаче, проблему можно представить в виде четырехуровневой иерархии:



На каждом из уровней формируются матрицы парных сравнений объектов по отношению к каждому из объектов вышестоящего уровня, как это делалось для задачи ранжирования объектов по одному критерию.

По каждой из полученных матриц вычисляется вектор приоритетов. Как было показано в первом примере, нормализованный главный собственный вектор каждой из матриц будет состоять из нормализованных количественных значений объектов. Для вычисления обобщенных приоритетов объектов применяется процедура взвешивания, в процессе которой матрица весов видов бетонной смеси относительно изделий умножается на вектор приоритетов изделий: матрица

	СК 2-1А	СК 2-15Н	СК 3-3 Г	СК 6-1	СВ 2-59	СВ 3-6	СВ 3-8	СВ 11-6А	СВ 11-20	Н-115	Н-148	Н-159	Н-163
Л	0,703	0,792	1,000	0,742	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,837	0,818	0,828	0,853
Р	0,297	0,208	0,000	0,258	0,388	0,335	0,369	0,276	0,328	0,163	0,182	0,172	0,147
Т	0,000	0,000	0,000	0,000	0,612	0,665	0,631	0,724	0,672	0,000	0,000	0,000	0,000

умножается на вектор-столбец весов изделий

СК 2-1А	СК 2-15Н	СК 3-3 Г	СК 6-1	СВ 2-59	СВ 3-6	СВ 3-8	СВ 11-6А	СВ 11-20	Н-115	Н-148	Н-159	Н-163
0,124	0,116	0,124	0,116	0,078	0,078	0,078	0,078	0,078	0,039	0,039	0,023	0,031

В результате получим обобщенные (глобальные) веса видов бетонной смеси:

Вид бетонной смеси	Приоритет МАИ	Нормализованные количеств. оценки
Л	0,467 (1)	0,526 (1)
Р	0,277 (2)	0,258 (2)
Т	0,256 (3)	0,217 (3)

Ранжирование объектов нижнего уровня иерархии оказалось таким же, как и при обычном способе вычисления.

Применяя к вычислению приоритетов объектов метод принятия решений при нечеткой информации, будем рассматривать проблему как задачу с несколькими заданными бинарными отношениями количественного превосходства видов бетонной смеси R_1, …, R_{13} по отношению к изделиям и еще одним бинарным отношением N количественного превосходства изделий.

Для каждого отношения R_1, …, R_{13} вычисляем функцию принадлежности $\mu_1^{nd},...,\mu_{13}^{nd}$ (которую будем рассматривать как нормализованные исходные количественные значения), по которым формируем матрицу Φ.

Свертку Γ определяем как максминное произведение матриц $\Gamma = \Phi^T N \Phi$.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1,00 & 0,39 & 0,72 \\ 0,39 & 0,39 & 0,39 \\ 0,72 & 0,39 & 0,72 \end{pmatrix}.$$

Множество недоминируемых альтернатив U_Γ^{nd} определяется вектором: v_Γ^{nd} = {5,39; 5,39; 5,39}, а скорректированное множество $\widetilde{U}_\Gamma^{nd}$ = {1,00; 0,39; 0,72}, которое представляет ранжирование альтернатив, не соответствующее действительному.

Можно проанализировать задачу и методом принятия решений при нечеткой исходной информации в случае, когда критерии характеризуются весовыми коэффициентами. Составим отношения количественного превосходства изделий по группам, которые соответствуют используемым материалам. В первую группу включим изделия: СК 2-1А, СК 2-15Н, СК 3-3 Г, СК 6-1, Н-115, Н-148, Н-159, Н-163, для изготовления которых используется легкая бетонная смесь и раствор. Для каждого из них составим отношение количественного превосходства видов используемой бетонной смеси. В качестве весов изделий будем использовать их нормализованные количества: $\lambda_1 = 0{,}203$; $\lambda_2 = 0{,}190$; $\lambda_3 = 0{,}203$; $\lambda_4 = 0{,}190$; $\lambda_5 = 0{,}063$; $\lambda_6 = 0{,}063$; $\lambda_7 = 0{,}038$; $\lambda_8 = 0{,}051$.

Свертки P и Q отношений R_1, … ,R_8 определяются матрицами:

$$P = \begin{pmatrix} 1,00 & 2,36 \\ 0,17 & 1,00 \end{pmatrix} \qquad Q = \begin{pmatrix} 5,39 & 22,34 \\ 1,42 & 5,40 \end{pmatrix}.$$

Множества U_P^{nd}, U_Q^{nd} определяются векторами:

Легкая бет. смесь Раствор

$$v_P^{nd} = \{22,34\ ;\ 20,14\}$$

$$v_Q^{nd} = \{22,34\ ;\ 1,42\}$$

Откуда μ_{nd} = {22,335; 1,416}.

Во вторую группу включим изделия: СВ 2-59, СВ 3-6, СВ 3-8, СВ 11-6, СВ 11-20, для изготовления которых используется тяжелая бетонная смесь и раствор. В этом случае $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 0{,}2$. Произведя аналогичные вычисления, как и для первой группы изделий, получим: $\mu_{nd} = \{1{,}427;\ 2{,}625\}$. Обобщая полученные результаты, получим: легкая бетонная смесь – 22,335; раствор – 2,843; тяжелая бетонная смесь – 2,625. После нормализации: легкая бетонная смесь – 0,803; раствор – 0,102; тяжелая бетонная смесь – 0,094.

При таком способе вычисления линейное упорядочивание объектов соответствует реальному.

Применить качественные методы принятия решений для анализа количественных данных не представляется возможным по целому ряду причин.

Например, при использовании в этих целях метода ЗАПРОС задача будет поставлена следующим образом:

Дано: $K = \{q_i\}$, $i = 1,\ldots,Q$ ($Q = 13$) – множество критериев (в данной задаче изделий). K = {И1, …, И13}.

n_q – число оценок по критерию q для каждого объекта (вида бетонной смеси), $n_1 = n_2 = n_3 = 3$.

$X_q = \{x_{iq}\}$ – шкала критерия q. Например $X_1 = \{1{,}3;\ 0{,}55;\ 0\}$.

$|X_q| = n_q$, $|X_1| = |X_2| = |X_3| = 3$.

$Y = X_1 \text{x} X_2 \text{x} X_3$ – множество векторных оценок $y_i \in Y$. $N = |Y| = \prod_{q=1}^{Q} n_q$.

В случае рассмотренной задачи $N = 3^{13}$.

В методе ЗАПРОС ЛПР производит сравнение векторных оценок из опорных ситуаций; такие векторные оценки будут являться подмножеством множества Y. Вначале формируется список оценок у первой опорной ситуации L_1, состоящий из всевозможных векторных оценок альтернатив, среди которых все, кроме одной, наилучшие. То есть, эксперту необходимо будет сравнивать векторные оценки, что намного психологически труднее, как показывает наш опыт применения данного метода, чем сравнивать непосредственно объекты (при таком сравнении эксперту приходится неявно еще и сравнивать сами критерии).

Кроме того, метод ориентирован на качественные оценки и качественные операции сравнения, которые к формальным количественным критериям могут и не быть правильно применены.

4.3. Оценка предпочтительности методов принятия решений с точки зрения участников процесса принятия решений

Уже сам факт наличия чрезвычайно большого количества методов ПР указывает на значимость правильного выбора метода для решения конкретной задачи ПР. При этом проблема соответствия метода решаемой задаче должна рассматриваться в двух плоскостях:

– с одной стороны, должно быть достигнуто соответствие метода объективным характеристикам решаемой задачи, к которым могут быть отнесены условия выбора (определенность, риск, неопределенность), тип множества альтернатив (дискретное или непрерывное), количество критериев ПР, тип постановки задачи и т.п.;

– с другой стороны, на выбор метода существенное влияние оказывают субъективные характеристики задачи, обусловленные возможностями и даже привычками совершенно конкретного лица, отвечающего за ПР. К таким характеристикам могут быть отнесены: желание или нежелание ЛПР пользоваться субъективными критериями, имеющими в большинстве случаев порядковые шкалы измерений; временные ограничения ЛПР; его способность давать только качественные оценки или как качественные, так и количественные.

Поэтому представляют интерес мнения экспертов по предпочтительности различных методов ПР. Нами было проведено сравнение рассматриваемых в данной книге методов, осуществленное при помощи МАИ.

К участникам процесса принятия решений относятся: владелец проблемы, лицо, принимающее решение, акторы (или активные группы) – заинтересованные в решении проблемы и влияющие на ее решение лица, эксперты – компетентные специалисты, профессионально владеющие вопросами, связанными с решением проблемы. Если рассматривать перечисленных лиц с точки зрения проведения процедуры принятия решений, то их можно разделить на тех, кто участвует в структуризации информации, характеризующей проблему, и субъективной оценке ее параметров (будем считать, что ими являются эксперты) и тех, кто занимается вопросами обработки полученной информации с целью классификации, упорядочивания или оптимального выбора вариантов (группа специалистов по принятию решений). Так определенные две группы участников процесса принятия решений могут оценить его с разных точек зрения, отражающих специфику их деятельности в решении многокритериальных задач. В проведенном исследовании по выявлению наиболее предпочтительного метода ПР приняли участие и специалисты по принятию решений, и эксперты. В роли специалистов выступали студенты физико-математического факультета, выполнявшие курсовые работы по информатике, связанные с разработкой программных продуктов принятия решений. В роли экспертов – члены лаборатории «Мониторинг качества управления педагогическими системами» УМЦ г. Липецка и служащие ОАО «КЗ ЖБИ» г. Курска, принимавшие участие в применении методов принятия решений к анализу деятельности этих структур.

Всем участникам исследования было предложено сформировать критерии оценок прямых методов принятия решений.

Эксперты.

1. Возможность оценивания альтернатив по критериям вербально.
2. Сравнительно небольшое количество требуемых сравнений.
3. Возможность производить неполные парные сравнения в случаях, когда определить наилучший объект из двух затруднительно или невозможно.

Специалисты по принятию решений.

1. Учет структуры системы в процессе принятия решения.

2. Предоставление достоверных результатов.

3. Возможность учитывать нечеткость, неясность, неточность в параметрах, характеризующих объект исследования.

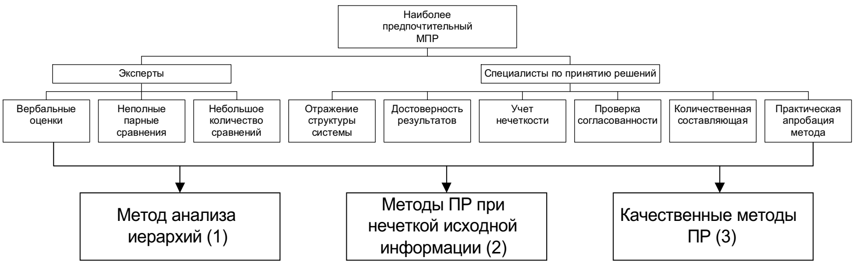
4. Предоставление методом средств, позволяющих проверять согласованность экспертных оценок.

5. Возможность включать в исследование количественные оценки объектов.

6. Метод подтвержден его практическим применением к анализу реальных проблем, теоретические основы метода научно развиваются.

Анализ методов принятия решений с точки зрения сформированных критериев проводился нами с помощью МАИ.

При этом была сформирована четырехуровневая иерархия процесса принятия решения:



Договоримся, что эксперты и специалисты по принятию решений получают равную значимость ($\lambda_1 = 0{,}5$; $\lambda_2 = 0{,}5$), так как для определения наиболее предпочтительного метода важна и его адаптированность для практического использования, и его теоретическая обоснованность, и дополнительные услуги, им предоставляемые.

Для подтверждения объективности оценок экспертов приведем известные нам сведения по каждому критерию для рассматриваемых методов.

Возможность оценивания альтернатив по критериям вербально

(1) Количественная шкала относительной важности иллюстрируется соответствующей вербальной шкалой; эксперты ориентированы на количественные оценки.

(2) Степень предпочтения $\mu_R(u_i, u_j)$ выражается численно.

(3) Используется только качественное описание основных факторов и качественное выражение решающих правил для оценки вариантов решений.

Сравнительно небольшое количество требуемых сравнений

(1) При формировании отношения предпочтения для n объектов требуется $n(n - 1)/2$ сравнений, остальные оценки являются обратносимметричными к полученным и заполняются формально. Шкала дискретна. От количества оценок дискретной шкалы количество сравнений не зависит.

(2) При формировании отношения предпочтения для n объектов требуется $n(n - 1)$ сравнений. Заранее известными являются только диагональные элементы, в виду рефлексивности отношения. Шкала непрерывна. От выбранного количества оценок шкалы количество сравнений не зависит.

(3) При сравнении векторных оценок у опорных ситуаций требуется заполнить матрицу парных сравнений A размерности NxN, где $N = \sum_{q=1}^{Q}(n_q - 1)$, $n_q = m$ – количество оценок по критерию q. В целом, как отмечают авторы метода, число обращений к ЛПР в худшем случае будет равно $C = 0,25Q(Q - 1)m(m - 1)$. (Дополнительные вопросы появляются при нетранзитивности элементов матрицы). Для каждого критерия своя дискретная оценочная шкала. Количество сравнений зависит и от количества критериев, и от количества оценок шкалы по критериям, но не зависит от количества рассматриваемых объектов.

Возможность производить неполные парные сравнения в случаях, когда определить наилучший объект из двух затруднительно или невозможно

(1) Оценки формируются только в терминах «лучше-хуже». Неполные сравнения непредусмотрены.

(2) Может быть использована оценка $\mu_R(u_i, u_j) = 0$ в случае, если *i-тая* альтернатива хуже чем *j-тая* альтернатива или они несравнимы.

(3) Словесные оценки «Не знаю», «Затрудняюсь ответить» теоретически предусмотрены, но в приведенных примерах при сравнении векторных оценок используется только трехбалльная шкала, где $o(i, j) = 1$ – *i-тый* элемент предпочтительнее, $o(i, j) = 3$ – *j-тый* элемент предпочтительнее, $o(i,j) = 2$ – *i-тый* элемент и *j-тый* равноценны.

Учет структуры системы в процессе принятия решения

(1) Структуризация проблемы в виде иерархии – один из главных этапов в процессе принятия решения. Иерархия может иметь от двух уровней до любого их количества.

(2) Возможна структуризация системы в виде двух- и трехуровневой иерархии.

(3) Структуризация системы возможна только в виде трехуровневой иерархии.

Предоставление достоверных результатов

(1) Применение метода для анализа количественных данных показало практически полное совпадение результатов с исходными характеристиками объектов в случае двухуровневой иерархии и близость к исходным характеристикам в случае трехуровневой иерархии.

(2) Метод принятия решений с несколькими экспертами (критериями), характеризуемыми весовыми коэффициентами, предоставляет результаты, соответствующие реальному линейному упорядочиванию объектов.

(3) Проверить методы не представляется возможным, так как они ориентированы исключительно на качественные оценки объектов.

Возможность учитывать нечеткость, неясность, неточность в параметрах, характеризующих объект исследования

(1) Оценки экспертов не могут отражать неточность параметров в виде нечетких чисел.

(2) Исходными данными являются нечеткие оценки экспертов. Операции введены таким образом, чтобы наиболее корректно перерабатывать нечеткую информацию.

(3) Неточность данных находит выражение в словесных оценках экспертов.

Предоставление методом средств, позволяющих проверять согласованность экспертных оценок

(1) Согласованность проверяется на основе количественных операций. При этом вычисляется ОС (отношение согласованности), по значению которого можно судить о желательности или нежелательности пересмотреть суждения.

(2) Проверка на согласованность не предусмотрена.

(3) Имеется возможность выявления возможных ошибок (нарушение транзитивности) в ответах экспертов и исправления их на основе повторного предъявления ЛПР. Согласованность, таким образом, проверяется качественно.

Возможность включать в исследование количественные оценки объектов

(1) Как показано в разделе 4.2., такая возможность имеется и может быть с успехом использована при необходимости (например, наряду с субъективными оценками изделий по отношению к возможности их освоения для выпуска предприятием, можно включить в качестве оценок реальную себестоимость изделий).

(2) Метод не предусматривает обработку объективных данных, но, как следует из разделе 4.2., включить количественную составляющую в анализ возможно.

(3) Количественные оценки могут быть интерпретированы сначала качественно (каждой оценке присваивается определенный балл по качественной шкале), а затем уже производится сравнение векторных оце-

нок. При этом объективные характеристики критериев невозможно учесть ни качественно, ни количественно (сравнивание критериев происходит неявно при сравнении векторных оценок).

Метод подтвержден практическим применением его к анализу реальных проблем, теоретические основы метода научно развиваются

Данная характеристика едва ли не является самой главной, так как именно она зачастую определяет выбор метода ПР в случае, если к математической поддержке принятия решений обращаются впервые. В этом случае владельца проблемы для каждого из возможных методов ПР интересует круг задач и те области прикладной деятельности, которые могут быть наиболее эффективно им проанализированы. Изложим основные сведения о конкретных (уже осуществлявшихся и хорошо зарекомендовавших себя) применениях каждого метода (табл. 4.7). В таблице под качественными методами ПР подразумеваются методы ЗАПРОС, ПАРК и ОРКЛАСС.

Метод ПАРК (ПАРная Компенсация) рассматривается авторами как метод принятия решений в задачах стратегического выбора, позволяющий структурировать проблему выбора и обеспечить требуемый анализ и оценку возможных вариантов альтернатив для решения поставленной задачи. Метод основан на парном сравнении альтернатив: сначала сравниваются две альтернативы, из них выбирается наилучшая, затем выбранная сравнивается со следующей и т.д. Такое сравнение без компьютерной поддержки очень длительно и трудоемко. В этом методе от эксперта требуется осуществлять ранжирование плохих, с точки зрения эксперта, оценок каждого критерия по каждому из двух рассматриваемых объектов. При дальнейшем сравнении предложенных гипотетических вариантов, выбирая один из них как лучший, эксперт неявно вынужден оценивать критерии, т.е. составлять отношение предпочтения критериев, но без дополнительной помощи метода.

Метод ОРКЛАСС (ОРдинальная КЛАССификация) предназначен для классификации рассматриваемых объектов, т.е. определения принадлежности объекта тому или иному классу.

Таблица 4.7

Виды задач ПР в различных предметных областях, которые были проанализированы сравниваемыми методами ПР

Предметная область – **Экономика**	
МАИ	1. Перспективы использования синтетического топлива для транспорта [92]. 2. Экономическое планирование развития Судана [91].
Использование нечеткой логики	1. Микроэкономический процесс инвестиций [55].
Качественные методы принятия решений	1. Разработка СППР в кредитной деятельности коммерческого банка, которая осуществляет классификацию потенциальных ссудозаемщиков по их кредитоспособности на основе показателей фин.-эконом. деятельности ссудозаемщика (ОРКЛАСС) [63].
Производство	
МАИ	1. Оптимальный выбор энергоустановки, использующей уголь. 2. Планирование развития фирмы-производителя потребительской продукции.
Использование нечеткой логики	1. Всесторонний анализ деятельности предприятия: составление бюджета, оценка состояния и т.п. [55].
Политика	
МАИ	1. Определение кандидата, наиболее популярного среди избирателей в преддверии выборов [92, 115].
Образование	
МАИ	1. Анализ развития высшего образования США , в ходе которого был определен наиболее вероятный сценарий его развития на период 1985-2000 гг. [91, 92]. 2. Аттестация преподавателей в высшей школе (ЛГТУ). 3. Определение уровня развития коллектива [118].
Качественные методы принятия решений	1. Оценка конкурсных письменных работ по математике (оценивались школьные олимпиадные работы); способ позволил выделять лучшие работы из тех, которые набрали одинаковое количество баллов, учитывая качественные критерии, предъявляемые экспертами к олимп. работам [117]. 2. Оценка НИР [63].
Медицина	
МАИ	1. Оценка эффективности лекарственных средств [91]. 2. Управление мед.обслуживанием [91] (определение факторов, влияющих на сдерживание роста стоим. содержания в больнице).
Использование нечеткой логики	1. Диалоговые системы медицинской диагностики [69]. 2. Принятие решений при оценке функционального состояния человека.
Качественные методы принятия решений	1. Формирование баз знаний для медицинских диагностических систем [62].

Дальнейшее научное развитие методов предполагается в следующих направлениях.

1) – Учет неопределенностей в суждениях экспертов в виде нечетких чисел.

– Исследования по непрерывным, а не дискретным шкалам. Экспертные суждения в виде интервальных чисел.

– Оценка метода собственного вектора в ряду методов построения по заданной матрице парных сравнений объектов оптимального линейного их упорядочивания.

– Разработка теоретических основ моделирования проблем принятия решений в виде иерархии.

– Возможность неполного сравнения экспертами объектов, заключающегося в допустимости оценки $\alpha_{ij} = 0$. При таком допущении необходимо модифицировать метод получения главного собственного вектора матрицы.

Известна работа [123] по выполнению теоремы типа Перрона-Фробениуса на бесконечно-дистрибутивных решетках (что позволяет в качестве количественной шкалы при принятии решений использовать произвольную алгебраическую структуру, являющуюся брауэровой решеткой).

Применение метода автором ограничилось учебными примерами.

2) Известна работа [122] по применению методов Орловского для нечеткого выбора. В целом направление, связанное с обработкой нечеткой информации, широко представлено разными авторами, но именно применение с этой целью методов Орловского нам неизвестно.

3) Развитие метода связано с использованием шкал, позволяющих оценивать объекты как по качественным, так и по количественным критериям в пределах одной шкалы (часть составляющих вектора оценки – качественные утверждения, часть – количественные).

По оценкам критериев методов принятия решений с точки зрения экспертов было сформировано отношение предпочтения R_1 и вычислен вектор приоритетов:

Критерии МПР	Вербальные шкалы	Кол-во сравнений	Неполные сравн.	Вектор приоритетов
Вербальные шкалы	1	2	4	0,5584
Кол-во сравнений	1/2	1	3	0,3196
Неполные сравн.	1/4	1/3	1	0,1220

Из полученных приоритетов становится очевидным, что для экспертов наиболее предпочтительной характеристикой анкет (вопросов) является наличие вербальных шкал, позволяющих давать ответы в словесных оценках.

Специалистами по принятию решений было сформировано аналогичное отношение R_2, по которому вычислен вектор приоритетов:

Критерии МПР	Структура	Достоверность	Нечеткость	Согласов.	Объект. составл.	Практич. внедр.	Вектор приорит.
Структура	1	1/5	7	1/3	1/4	1/4	0,0731
Достоверность	5	1	7	5	4	5	0,4532
Нечеткость	1/7	1/7	1	1/7	1/3	1/6	0,0311
Согласованность	3	1/5	4	1	1/3	1/3	0,0942
Объект. составл	4	1/4	3	3	1	1/2	0,1508
Практич. внедрение	4	1/5	6	3	2	1	0,1976

Для специалистов по принятию решений, как убеждаемся, наиболее важна достоверность результатов методов, проверенная количественными данными, далее следует практическое апробирование методов и возможность использовать количественную составляющую.

Методы принятия решений с точки зрения сформированных критериев можно достаточно объективно сравнить на основе ранее сделанных характеристик.

Приведем сразу векторы приоритетов методов по отношению к каждой из названных характеристик:

Эксперты			
Критерий	Методы принятия решений		
	(1)	(2)	(3)
Вербальные шкалы	0,1669	0,0634	0,7697
Минимально возможное количество вопросов	0,8000	0,1333	0,0667
Возможность неполных сравнений	0,1085	0,6300	0,2614
Специалисты по принятию решений			
Критерий	Методы принятия решений		
	(1)	(2)	(3)
Отражение структуры системы	0,7838	0,1349	0,0813
Достоверность результатов	0,5470	0,3445	0,1085
Учет неточности в виде нечетких чисел	0,0752	0,7418	0,1830
Проверка на согласованность	0,6939	0,0528	0,2533
Количественная составляющая	0,7504	0,1713	0,0782
Практическая апробация	0,7223	0,0727	0,2050

Обобщенные (глобальные) приоритеты методов принятия решений вычисляются при помощи процедуры иерархического взвешивания, начиная со второго уровня вниз:

МАИ = (0,5584x0,5)x0,1669+(0,3196x0,5)x0,8000+(0,1220x0,5)x0,1085 +
+ (0,0731x0,5)x0,7838+(0,4532x0,5)x0,5470 + (0,0311x0,5)x0,0752+
+ (0,0942x0,5)x0,6939 + (0,1508x0,5)x0,7504 + (0,1976x0,5)x0,7223 = 0,4955.

Аналогично вычисляем обобщенные приоритеты других МПР:

– качественные методы принятия решений – 0,3100,
– методы принятия решений на базе нечеткой логики – 0,1945.

Таким образом, с точки зрения участников процесса принятия решений, наиболее предпочтительным для анализа неструктурированных многокритериальных проблем оказывается метод анализа иерархий, вторыми по предпочтительности – качественные методы принятия решений.

5. Комбинированный алгоритм поддержки принятия решений

Современный период развития систем управления производством характеризуется высоким ростом объема информационных потоков, причем наибольший объем информации наблюдается в промышленности, торговле, финансово-банковской деятельности. В промышленности рост объема информации обусловлен увеличением объема производства, усложнением выпускаемой продукции, используемых материалов, технологического оборудования, расширением в результате концентрации и специализации производства внешних и внутренних связей экономических объектов. Только на основе своевременного пополнения, накопления, переработки информационного ресурса, т.е. владения достоверной информацией, возможно рациональное управление любой деятельностью и *эффективное принятие решений*. В таких условиях для квалифицированного выбора оптимальных управляющих решений требуется самая разнообразная информация, в том числе, и экспертно-советующего характера.

В главе 5 рассматриваются аспекты разработки комбинированного алгоритма принятия решений в условиях неопределенности, призванного помочь специалисту в комплексном анализе многофакторной проблемной ситуации различными базовыми методами принятия решений. Такой комбинированный алгоритм обеспечит обоснованность оптимального выбора, позволит специалисту не только полагаться на какой-то один вариант решения (как это часто бывает в поддержке принятия решений), а самому оценить всевозможные варианты, предоставляемые разными методами, и сделать на их основе полновесный грамотный вывод.

При разработке комбинированного алгоритма принятия решений особое внимание уделялось учету специфики управленческих решений, которая проявилась в следующих вопросах:

– как отразить в процессе принятия решений все взаимодействующие элементы системы, для которой принимается решение;

– как составить вопросы экспертам, чтобы ответы можно было формулировать в вербальных, а не количественных категориях, учитывая психологические особенности человека;

– каким образом можно проверить согласованность суждений экспертов;

– какие методы лучше использовать при вычислении приоритетов рассматриваемых объектов.

Известно, что использование любых методов и вычислительных процедур в процессе управления, сколь бы полезны они ни были, как правило, не находит должного применения специалистами, если не осуществлена их компьютерная реализация. В разделе 5.4. описывается СППР "Выбор", предназначенная для анализа и планирования деятельности промышленного предприятия, базовым методом которой является комбинированный алгоритм бинарных отношений.

5.1. Гомоморфизм шкал МАИ и метода принятия решений при нечеткой исходной информации

Базовая шкала метода анализа иерархий (1) может быть формализована в виде множества $S(m)=\{1/n,...,1,n,...,$ где $n=1,...,m\}$. При $m=1$ $S(1)=\{1\}$, при $m=2$ $S(2)=\{1/2,\ 1,\ 2\}$ и т.д. В частности, в МАИ $m=9$, $S(m)=\{1/9,\ 1/8,\ 1/7,\ 1/6,\ 1/5,\ 1/4,\ 1/3,\ 1/2,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$.

Базовая шкала метода принятия решений при нечеткой исходной информации (2) представляет собой отрезок действительных чисел $S=[0;1]$.

В качественных методах принятия решений (3) для нумерации оценок на порядковой шкале X_q критерия q используется ряд натуральных чисел. Количественную шкалу, в этом случае, можно формализовать как комплект $Z(m)=\{$все целые числа $0\ \leq N \leq M\}$.

Отрезок $[0;1]$, множество $\{1/9,\ 1/8,\ 1/7,\ 1/6,\ 1/5,\ 1/4,\ 1/3,\ 1/2\ 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7{,}8,\ 9\}$, комплект (базовые шкалы методов (1), (2), (3)) являются решетками и, в частности, цепями. Во множествах S и $S(m)$ имеют место операции $a+b=\sup_S\{a;b\}$ $[\ a+b=\sup_{S(m)}\{a;b\}\ ]$, $ab=\inf_S\{a;b\}$ $[\ ab=\inf_{S(m)}\{a;b\}\ ]$.

Множество $S(m)$ является дискретным и состоит из $2m-1$ элементов.

Множество S – множество мощности континиум (как непрерывный отрезок действительных чисел).

Решетка является полной, если любое множество ее элементов имеет как точную верхнюю, так и точную нижнюю грани. Отрезок действительных чисел $[0;1]$ является полной решеткой.

Так как всякая конечная решетка полна, то множество $S(m)$ как конечная решетка является полной решеткой.

Для возможности формирования количественных шкал, соответствующих различным методам принятия решений, необходимо установить правило перехода от одной из них к другой. В этом случае эксперту будет достаточно один раз вербально оценить предпочтительность объектов; при этом количественные шкалы, соответствующие каждому из методов принятия решений, будут сформированы автоматически.

Переход между шкалами возможен на основе их гомоморфного отображения друг в друга. Такой гомоморфизм возможно установить несколькими способами. Не каждый гомоморфизм позволит получать корректные результаты другим методом на основе полученной шкалы. Приведем некоторые из таких случаев.

Установим гомоморфизм решетки S в решетку $S(m)$ и наоборот. Отображение φ решетки L в решетку L' называется *верхним* [*нижним*] *гомоморфизмом*, если $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$ $[\ \varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)\ ]$ для любых $a,\ b\ \in L$. Гомоморфизм решетки L в решетку L' определяется как отображение, являющееся верхним и нижним гомоморфизмом одновременно.

Определим отображение $\varphi : S(m) \rightarrow S$ таким образом, что

$$\varphi(a)=\begin{cases}\dfrac{m+1-n}{2m-1}, \text{если } a<1,\\ \dfrac{2m-(m+1-n)}{2m-1}, \text{если } a>=1.\end{cases}, \text{ или } \varphi(a)=\begin{cases}\dfrac{m+1-n}{2m-1}, \text{если } a<1,\\ \dfrac{m+n-1}{2m-1}, \text{если } a>=1.\end{cases}.$$

Пример. Пусть $a \in S(m)$, $m=9$, тогда

$$\varphi(1/9)=\frac{9+1-9}{2\cdot 9-1}=\frac{1}{17}, \quad \varphi(1/2)=\frac{9+1-2}{2\cdot 9-1}=\frac{8}{17}, \quad \varphi(1)=\frac{9+1-1}{2\cdot 9-1}=\frac{9}{17},$$

$$\varphi(2)=\frac{9+2-1}{2\cdot 9-1}=\frac{10}{17}, \quad \varphi(9)=\frac{9+9-1}{2\cdot 9-1}=\frac{17}{17}=1.$$

Докажем, что так определенное отображение $\varphi: S(m)\to S$ является верхним гомоморфизмом.

Пусть $a, b \in S(m)$, тогда $\varphi(a)=\begin{cases}\dfrac{m+1-n}{2m-1}, \text{если } a<1,\\ \dfrac{m+n-1}{2m-1}, \text{если } a>=1.\end{cases}$,

$$\varphi(b)=\begin{cases}\dfrac{m+1-n'}{2m-1}, \text{если } a<1,\\ \dfrac{m+n'-1}{2m-1}, \text{если } a>=1.\end{cases}$$

, где n и n' соответствуют представлению чисел a и b в виде $1/n$ или n, где $n=1,\dots,m$ (для элемента a), $1/n'$, n', где $n'=1,\dots,m$ (для элемента b).

Требуется доказать, что $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$.

Действительно, по определению операции + в решетке $S(m)$ $\varphi(a+b)=\varphi(\sup_{S(m)}\{a;b\})$

Пусть $a<=b<1$ ($a=1/n$, $b=1/n'$, $n>=n'$), тогда $\varphi(a+b)=\varphi(\sup_{S(m)}\{a;b\})=\varphi(b)$.

$\varphi(a)=\dfrac{m+1-n}{2m-1}$, $\varphi(b)=\dfrac{m+1-n'}{2m-1}$. Так как $n>=n'$, то $\varphi(a)<=\varphi(b)$, т.е. $\sup_{S(}\{\varphi(a);\varphi(b)\}=\varphi(b) \Rightarrow \varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$.

Пусть $1<a<=b$ ($a=n$, $b=n'$, $n<=n'$), тогда $\varphi(a+b)=\varphi(\sup_{S(m)}\{a;b\})=\varphi(b)$.

$\varphi(a)=\dfrac{m+n-1}{2m-1}$, $\varphi(b)=\dfrac{m+n'-1}{2m-1}$. Так как $n<=n'$, то $\varphi(a)<=\varphi(b)$, т.е. $\sup_S\{\varphi(a);\varphi(b)\}=\varphi(b) \Rightarrow \varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$.

Пусть $a<=b$, где $a<=1$, $b>=1$ ($a=1/n$, $b=n'$).

В этом случае $\varphi(a+b)=\varphi(\sup_{S(m)}\{a;b\})=\varphi(b)$,

$\varphi(a) = \dfrac{m+1-n}{2m-1}$, $\varphi(b) = \dfrac{m+n'-1}{2m-1}$, т.к. $1-n <= n'-1$ при любых $n=1,\ldots,m$, $n'=1,\ldots,m$, то $\varphi(a) <= \varphi(b)$, т.е. $\sup_S\{\varphi(a);\varphi(b)\} = \varphi(b) \Rightarrow \varphi(a+b) = \varphi(a) + \varphi(b)$.

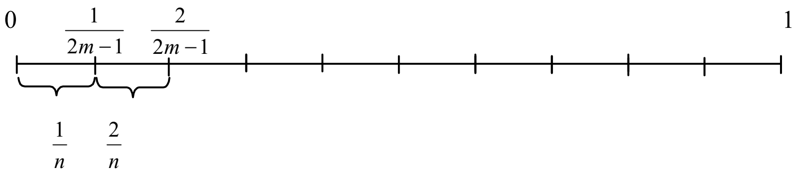
То есть отображение $\varphi: S(m) \to S$ является верхним гомоморфизмом.

Аналогично можно доказать, что для всех a и b выполняется $\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$. Таким образом, отображение φ решетки $S(m)$ в решетку S является и верхним, и нижним гомоморфизмом одновременно, т.е. решетка $S(m)$ гомоморфна решетке S.

Определить отображение $\varphi': S \to S(m)$ можно различными способами. Например, отрезок $[0;1]$ разбить на $2m-1$ интервалов, каждому интервалу поставить в соответствие элемент множества $S(m)$ по следующему правилу:

Если $0 \le x < \dfrac{1}{2m-1}$, то $x \to \dfrac{1}{n}$, если $\dfrac{1}{2m-1} \le x < \dfrac{2}{2m-1}$, то $x \to \dfrac{1}{n-1}$ и т.д.

Для множества $S(m)$, где $m=9$, отображение φ': $S \to S(m)$ представлено на рисунке:



В этом случае отображение $\varphi': S \to S(m)$ определим так:

$\forall a$ такого, что $\dfrac{1}{2m-1}k \le a < \dfrac{1}{2m-1}(k+1)$, где $0 \le k \le 2m-2$

$$\varphi'(a) = \begin{cases} 1/(m-k), \text{если } k < m, \\ (k+2-m), \text{ если } k \ge m. \end{cases}$$

Например, в случае $S \to S(9)$:

при $k=0$, $a \in [0;1/17) \to 1/9$;

при $k=8$, $a \in [8/17;9/17) \to 1$.

Договоримся при $k=2m-1$ включать правый конец отрезка в промежуток, тогда при $k=16$, $a \in [16/17;\ 1] \to 9$.

Очевидно, что изотонное отображение $\varphi': S \to S(m)$ является гомоморфизмом.

Проверим, действительно ли установленный гомоморфизм шкал позволят получать одинаковые результаты ранжирования альтернатив при переходе от одной шкалы к другой.

Пример. Обратносимметричная матрица МАИ имеет нормализованный главный собственный вектор (0,095; 0,654; 0,249).

1	1/3	1/6
3	1	6
6	1/6	1

Пользуясь установленным гомоморфизмом $\varphi: S(m) \to S$, определим для каждого элемента матрицы соответствующий ему элемент в S.

Так как $\varphi(a) = \begin{cases} \dfrac{m+1-n}{2m-1}, \text{ если } a < 1, \\ \dfrac{m+n-1}{2m-1}, \text{ если } a >= 1. \end{cases}$, то $\varphi(1) = \dfrac{9+1-1}{17} = \dfrac{9}{17}$,

$\varphi(3) = \dfrac{9+3-1}{17} = \dfrac{11}{17}$, $\varphi(1/3) = \dfrac{9+1-3}{17} = \dfrac{7}{17}$, $\varphi(6) = \dfrac{9+6-1}{17} = \dfrac{14}{17}$,

$\varphi(1/6) = \dfrac{9+1-6}{17} = \dfrac{4}{17}$.

В результате преобразований матрица будет иметь вид

$$\begin{pmatrix} 9/17 & 7/17 & 4/17 \\ 11/17 & 9/17 & 14/17 \\ 14/17 & 4/17 & 9/17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0{,}5294 & 0{,}4118 & 0{,}2353 \\ 0{,}6471 & 0{,}5294 & 0{,}8235 \\ 0{,}8235 & 0{,}2353 & 0{,}5294 \end{pmatrix}$$

Применяя к полученный матрице метод принятия решений при нечеткой исходной информации, получим вектор степеней недоминируемости альтернатив

(0,4118; 1,0000; 0,4118).

Нормализуя этот вектор, получим

(0,2258; 0,5484; 0,2258)

Получаем отличный от исходного результат.

Применим к матрице теорему Перрона-Фробениуса. Получим нормализованный собственный вектор, не совпадающий с исходным.

(0,3716; 0,6559; 0,4681)

Значит, что при так установленном гомоморфизме матрица теряет свои свойства с точки зрения достоверности имеющейся в ней информации относительно исходных оценок.

Пример. Нестрогое отношение нечеткого предпочтения имеет вид:

1	0,2	0,5
0,3	1	0,9
0,4	0,6	1

Вектор недоминируемых альтернатив, соответствующий н.о.п., μ_R^{nd} = (0,9; 0,9; 0,7) (или, с учетом нормализации, (0,36;0,36;0,28)). Преобразуем на основе установленного гомоморфизма матрицу к виду

9	1/6	1
1/4	9	8
1/3	3	9

Применяя к такой матрице теорему Перрона-Фробениуса, получим вектор приоритетов:

(0,1958; 0,4483; 0,3558),

не совпадающий с вектором степеней недоминируемости альтернатив.

Если произвести вычисление вектора степеней недоминируемости альтернатив по данной матрице, то получим вектор, также не совпадающий с исходным –

(0,4958; 0,5042; 0).

Таким образом, так установленные гомоморфизмы не позволяют получать одинаковые результаты ранжирования альтернатив при переводе одной количественной шкалы в другую.

В комбинированном алгоритме поддержки принятия решений предлагается использовать для сравнения объектов качественную шкалу, вербальные оценки которой зависят от конкретного критерия, по которому происходит сравнение. Из двух предложенных объектов u_i, u_j сначала выбирается тот, который, с точки зрения эксперта, имеет большую значимость. Затем оценивается его предпочтительность по вербальной шкале. Шкала ориентирована на 8 дискретных оценок предпочтительности по аналогии со шкалой МАИ и методом принятия решений на базе нечеткой логики. В методах принятия решений при нечеткой исходной информации, хотя С.А.Орловским и предлагается непрерывная шкала [*0;1*], но фактически в рассмотренных примерах осуществляется прием дискретизации и используются 9 оценок предпочтительности – 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9.

Пример возможной вербальной шкалы приведен на рис.5.1.

равная важность	слабое превосходство		умеренное		значительное		очень сильное	полное превосходство
	1	2	1	2	1	2		

Рис 5.1. Вербальная шкала сравнений объектов

Для слабого превосходства, умеренного и значительного указывается степень такого превосходства.

По выбранному значению лексической переменной из вербальной шкалы в соответствие ему ставится оценка МАИ – 1,…,9 соответственно. Если $\mu_R(u_i,u_j)=\alpha$, то $\mu_R(u_j,u_i)=1/\alpha$.

Гомоморфизм $\varphi : S(m) \to S$ устанавливается следующим образом: $\varphi(a) = a / m$.

В этом случае $\varphi\,(max(S(m))) = \varphi(m) = 1$, $\varphi\,(min\; S(m)) = \varphi(1/m) = 1/m^2 > 0$, то есть $\left[\frac{1}{m};m\right] \xrightarrow{\varphi} (0;1]$.

Так определенный гомоморфизм лишен самых существенных недостатков ранее приводившихся отображений – несовпадения результатов ранжирования по отношению предпочтения до гомоморфного отображения и после него одним и тем же способом вычисления вектора приоритетов. Это следует из того, что, умножение матрицы на постоянную не меняет ее нормализованного главного собственного вектора.

При так определенном гомоморфизме обратносимметричная матрица $A = \|\alpha_{ij}\|$ отображается в нечеткое отношение $R(\mu_R)$. Такое нечеткое отношение удовлетворяет методу принятия решений на базе нечеткой логики, хотя и не является рефлексивным.

Рефлексивность в определении С.А.Орловского – $\mu_R(u_i,u_i) = 1$; такому условию полученные нечеткие отношения не удовлетворяют. Но, как следует из метода принятия решения на базе нечеткой логики, $R^S = R \setminus R^T$. В этом случае $\mu_R{}^S(u_i,u_i) = \mu_R(u_i,u_i) - \mu_R(u_i,u_i) = 0$ при любом $\mu_R(u_i,u_i)$, т.е. полученное отношение является корректным для вычисления по нему вектора недоминируемых альтернатив.

Обратносимметричная матрица при таком отображении станет толерантным нечетким отношением нестрогого предпочтения. Недостатком такого гомоморфизма является лишь невозможность осуществления неполных сравнений, что, впрочем, следует уже из ранее определенной вербальной шкалы.

Следует отметить, что полученное н.о.п. $\frac{1}{m^2}$-линейное, так как его функция принадлежности удовлетворяет условию $\max\{\mu_R(u_i,u_j),\mu_R(u_j,u_i)\} > 1/m^2$ для любых u_i, u_j.

5.2. Отражение структуры сложной распределенной системы в методах принятия решений для этой системы

Структура процесса принятия решения включает в себя структуру сложной распределенной системы, для которой принимается решение. Под сложной системой понимается иерархически организованная и целенаправленно функционирующая совокупность большого числа информационно связанных и взаимодействующих элементов. Примером сложной системы является система управления производством. От того, насколько полно и точно будет описана модель системы на определенном уровне ее функционирования, зависит качество принимаемых решений, а значит, и эффективность управления системой. В процессе функционирования сложных систем управления проблема принятия решения реализуется как проблема выбора управления, переводящего систему из заданного состояния в желаемое.

Проблема оптимального выбора в этом случае может быть решена методами принятия решений, позволяющими из имеющихся альтернатив $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ определить наиболее предпочтительные. Одной из проблем функционирования сложных систем является неопределенность ее состояния. Такая неопределенность проявляется в следующем:

– невозможность точно и полно описать текущее состояние системы;
– невозможность точного учета реакций системы на управляющие воздействия;
– необходимость учета большого количества факторов функционирования системы;
– оценка ряда параметров системы носит качественный (вербальный) характер.

В таких условиях принимать решение необходимо более адекватными реальности методами, учитывающими нечеткость в описании проблемы. В этом случае, из имеющихся методов принятия решений наиболее предпочтительными будут методы принятия решений на базе нечеткой логики и методы принятия решений в условиях неопределенности, предоставляющие возможность оперирования субъективными оценками экспертов.

Особенностью организации любых сложных систем управления является иерархичность. Иерархия является некоторой абстракцией структуры системы, предназначенной для изучения функциональных взаимодействий ее компонент и их воздействия на систему в целом. Очевидно, что иерархия структуры сложной системы должна найти отражение в процессе принятия решения. В различных методах принятия решений на базе неопределенности это достигается по-разному.

В МАИ (1) построение многоуровневой иерархии любой сложности является первым этапом процедуры принятия решения. В методе принятия решения при нечеткой исходной информации на множестве альтернатив $U=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ может быть задано несколько нечетких отношений нестрогого предпочтения (н.о.п.) различных экспертов R_k, $k=1,\ldots,m$, где m – количество экспертов. Предпочтительность самих экспертов определяется при помощи еще одного н.о.п. N, заданного на множестве E экспертов с функцией принадлежности $\mu_N(e_k, e_l),\ e_k, e_l \in E$, значения которой означают степень предпочтения эксперта e_k по сравнению с экспертом e_l. Таким образом, в данном методе неявно присутствует трехуровневая иерархия «цель – эксперты – альтернативы», которую можно рассматривать как иерархию «цель – критерии оценки альтернатив – альтернативы». В качественных методах принятия решений, в частности, в методе ЗАПРОС, на первом этапе формируются таблица качественных оценок альтернатив по критериям, где O_{ij} – ij-качественная оценка экспертом *i-й* альтернативы по *j-у* критерию, где $i=1,...,n, j=1,...,m$.

Альтернативы	*Критерии*			
	S_1	S_2	….	S_m
u_1	o_{11}	o_{12}		o_{1m}
u_2				
			o_{ij}	
u_n	o_{n1}			o_{nm}

Как видим, в методе ЗАПРОС также в неявном виде присутствует трехуровневая иерархия "цель – критерии (эксперты) – альтернативы".

Таким образом, структура сложной системы обязательно находит свое отражение в процессе принятия решения. В методах (2) и (3) используются простейшие иерархии, которые, кроме цели и альтернатив, могут отображать либо критерии, либо экспертов, участвующих в процессе принятия решения. Сложность же системы характеризуется большим числом взаимодействий между многими субъективными и объективными факторами различного типа и степени важности, а также группами людей с различными целями и противоположными интересами. Все названные факторы влияют на возможность или невозможность выбора лучшей альтернативы. Для отражения такой сложности чаще всего необходимо использовать количество уровней, большее трех.

Наиболее распространенными видами иерархий являются доминантные иерархии, вершины которых содержат один элемент – цель процесса принятия решения, а нижележащие уровни включают в себя различные факторы, от которых зависит достижение цели. Доминантные иерархии подразделяются на два типа:

– иерархии прямого процесса, проецирующие существующее состояние на наиболее вероятное будущее;

– иерархии обратного процесса, определяющие политики управления для достижения желаемого будущего.

Иерархия прямого процесса состоит из следующих уровней: цель (фокус иерархии); параметры, характеризующие цель; акторы (действующие силы); цели акторов; возможные альтернативы, из которых выбирается наилучшая.

Иерархия обратного процесса состоит из таких уровней, как сценарий желаемого будущего; проблемы, противодействующие его достижению; акторы; цели акторов; меры, которые необходимо предпринять для решения проблем.

Иерархии прямого и обратного процесса можно использовать и в других методах принятия решений. Рассмотрим это на примере метода принятия решения при нечеткой исходной информации.

Рассмотрим доминантную иерархию H с k уровнями: $L_1,...,L_k$.

Каждый *i-й* уровень включает в себя m_i объектов (см. рис. 5.2).

$L_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \dots ,a_{i(mi)}\}$ – *i-й* уровень иерархии, $i=1,...,k$.

Для первого уровня $m_1=1$, $L=\{b\}$.

Иерархию H можно рассматривать как совокупность уровней L_i:

$$H=\bigcup_{i=1}^{k} L_i=\bigcup_{i=1}^{k}\bigcup_{j=1}^{m_i} a_{ij} \ .$$

На втором уровне иерархии задано нечеткое отношение нестрогого предпочтения R_{21} (н.о.п. объектов второго уровня по отношению к первому объекту вышестоящего уровня) на множестве $L_2=\{a_{21}, a_{22}, ..., a_{2m2}\}$ с функцией принадлежности $\mu_{R_{21}}(a_{2i},a_{2j})$.

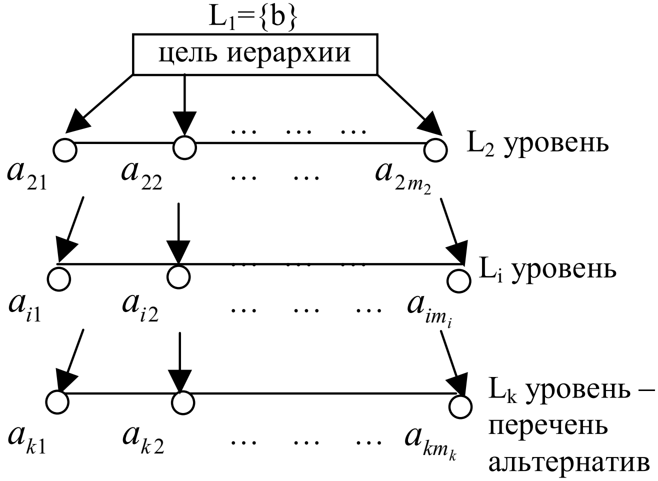


Рис 5.2. Доминантная иерархия процесса принятия решения

На каждом *i-ом* уровне $L_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \dots ,a_{i(mi)}\}$ задается столько н.о.п., сколько элементов на вышестоящем уровне – $m_{(i-1)}$, где $i= 2,...,k$.

$R_{i1}, R_{i2},\dots,R_{im(i-1)}$ – н.о.п. объектов *i-го* уровня по отношению к каждому объекту вышестоящего *i-1* уровня.

$$R_{ij}=\begin{vmatrix} 1 & \mu(a_{i1},a_{i2}) & \cdots & \mu(a_{i1},a_{im(i)}) \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ & & 1 & \\ \mu(a_{im(i)},a_{i1}) & \cdots & & 1 \end{vmatrix},$$

где $\mu_{R_{ij}}(a_{il},a_{ir}) \in \left[0;1\right]$, $i=2,...,k, j=1,...,m(i-1), l,r=1,...,m(i)$.

Основная цель задачи принятия решений – получение вектора приоритетов элементов нижнего уровня иерархии по отношению к цели – элементу первого уровня. Решение основной задачи возможно несколькими способами.

1 способ. (На основе процедуры взвешивания МАИ).

Для каждого н.о.п. R_{ik}, где $i=2,...,h$, $k=1,...,m_{(i-1)}$, определяется нечеткое подмножество недоминируемых объектов L_{ik}^{nd} относительно k-*го* элемента (i-1) уровня.

Каждый объект при этом характеризуется функцией принадлежности

$\mu_{R_{ik}}^{nd}(a_{ij}) \in [0;1]$, $i=2,...,h$, $k=1,...,m_{(i-1)}$, $j=1,..., m_i$.

$$\mu_{R_{ik}}^{nd}(a_{ij}) = \inf_{y\in L_i}(1-\mu_{R_{ik}}^{S}(y,a_{ij})),\ a_{ij}\in L_i, \text{ или}$$

$$\mu_{R_{ik}}^{nd}(a_{ij}) = 1-\sup_{y\in L_i}\mu_{R_{ik}}^{S}(y,a_{ij}),\ a_{ij}\in L_i\ .$$

В этом случае иерархия H представлена в виде совокупности нечетких подмножеств, где векторы приоритетов бинарных отношений – функции принадлежности нечетким подмножествам элементов иерархии.

2 уровень $\mu_{211},..., \mu_{21i},..., \mu_{21(m2)}$, где μ_{21i} – приоритет i-*го* объекта 2-го уровня по отношению к 1-*у* объекту вышестоящего уровня.

3 уровень

$\mu_{311},..., \mu_{31i},..., \mu_{31(m3)}$

$\mu_{321},..., \mu_{32i},..., \mu_{32(m3)}$

…….

$\mu_{3(m2)1},..., \mu_{3(m2)i},..., \mu_{3(m2)(m3)}$

Векторы приоритетов объектов третьего уровня по отношению ко всем объектам второго уровня.

k-уровень

$\mu_{k11},..., \mu_{k1i},..., \mu_{k1(mk)}$

$\mu_{k21},..., \mu_{k2i},..., \mu_{k2(mk)}$

… …

$\mu_{k(mk-1)1},..., \mu_{k(mk-1)i},..., \mu_{k(mk-1)(mk)}$

Векторы приоритетов объектов k-уровня по отношению ко всем объектам (k-1)- уровня

Таким образом, связь соседних уровней иерархии $L_{i-1}=X$, $L_i=Y$ определяется нечетким соответствием $X\circ Y\to \left[0;1\right]$, которое можно представить в виде матрицы функций принадлежности элементов X относительно каждого из объектов $y\in Y$.

$$Wy(X) = \begin{vmatrix} \mu_{(i+1)11} & \mu_{(i+1)21} & \cdots & \mu_{(i+1)(mi)1} \\ \mu_{(i+1)12} & \mu_{(i+1)22} & \cdots & \mu_{(i+1)(mi)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu_{(i+1)1(m_{i+1})} & \mu_{(i+1)2(m_{i+1})} & \cdots & \mu_{(i+1)(mi)(m_{i+1})} \end{vmatrix}.$$

Для L_2 $W_b(L_2) = \mu_b(L_2) = \{\mu_{211},..., \mu_{21i},..., \mu_{21(m2)}\}$.

К так определенной иерархии, элементы которой являются нечеткими подмножествами, применима теорема, доказанная в работе [37] и представляющая собой применение иерархического синтеза к матрицам $Wy(x)$: функция принадлежности элементов нижнего *k-го* уровня иерархии относительно цели b определяется следующим образом:

$$\mu_b(L_k) = B_k * B_{k-1} * ... * B_3 * \mu_b(L_2) .$$

Теорема доказывает справедливость решения МАИ многокритериальных задач с нечетко выраженными альтернативами и критериями с получением функции полезности. При этом функция полезности рассматривается как функция принадлежности глобальной цели на множестве альтернатив.

2 способ. Так как исходными данными в способе принятия решений на базе нечеткой логики являются нечеткие отношения, то к ним корректнее применить алгоритмы свертки нечетких отношений. Как было показано наиболее достоверным из них является алгоритм свертки н.о.п., каждое из которых характеризуется весовыми коэффициентами.

На основе н.о.п. $R_{21} = \begin{vmatrix} 1 & \mu(a_{21}, a_{22}) & \cdots & \mu(a_{21}, a_{2m(2)}) \\ \vdots & 1 & & \vdots \\ & & 1 & \\ \mu(a_{2m(2)}, a_{21}) & \cdots & & 1 \end{vmatrix}$ методом принятия решений на базе нечеткой логики с одним экспертом сформируем множество недоминируемых альтернатив $L^{nd}{}_{21}$ второго уровня по отношению к цели иерархии.

Соответствующий вектор степеней недоминируемости альтернатив $\mu_{R_{21}}{}^{nd}(a_{2j}) \in [0;1]$, $j=1,...,m_{(2)}$ нормализуем, в результате чего будут получены веса объектов второго уровня относительно цели иерархии: $\{\lambda_1, ..., \lambda_{m2}\}$.

На третьем уровне иерархии сформированы н.о.п. $R_1, R_2, \ldots, R_{(m2)}$ (их количество совпадает с количеством элементов на втором уровне – m_2) предпочтительности объектов третьего уровня по отношению к каждому из элементов второго уровня:

$$R_1 = \begin{vmatrix} \mu(u_1, u_1) & \cdots & \mu(u_1, u_{(m3)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu(u_{(m3)}, u_1) & \cdots & \mu(u_{(m3)}, u_{(m3)}) \end{vmatrix}, \ldots, R_{(m2)} = \begin{vmatrix} \mu(u_1, u_1) & \cdots & \mu(u_1, u_{(m3)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mu(u_{(m3)}, u_1) & \cdots & \mu(u_{(m3)}, u_{(m3)}) \end{vmatrix}.$$

Строим свертку P н.о.п. $R_1, ..., R_{(m2)}$ в виде

$P = \cap R_l(u_i, u_j) = \min\{\mu(u_i, u_j)\}$, $l=1,...,m_2$.

С полученным н.о.п. ассоциируется $P^S = P \setminus P^T$.

Определяется множество недоминируемых альтернатив U_P^{nd}.

Строится выпуклая свертка $Q = \sum \lambda_l R_l$, $l=1,...,m_2$.

Для свертки определяется множество недоминируемых альтернатив U_Q^{nd}. Рассматриваем пересечение множеств $U_Q^{nd} \cap U_P^{nd}$, $\mu^{nd}(u_i) = \min\{\mu_P^{nd}(u_i); \mu_Q^{nd}(u_i)\}$.

Полученный вектор степеней недоминируемости альтернатив нормализуем, в результате чего получим обобщенные веса объектов $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{m3}\}$ третьего уровня по отношению к цели первого уровня (при этом уже оказывается учтенным второй промежуточный уровень). Далее к $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_{m2}\}$ и н.о.п. нижележащего уровня применяем тот же алгоритм, получая обобщенные веса 4-го уровня и т.д. В конечном итоге будет получен вектор степеней недоминируемости альтернатив самого последнего уровня иерархии: $\mu_k^{nd} = \{\mu_k(u_1), \ldots \mu_k(u_{mk})\}$. Вектор глобальных приоритетов рассматриваемых альтернатив $W=\{w_1, \ldots, w_{(mk)}\}$ будет получен нормализацией вектора $\mu_k^{nd} = \{\mu_k(u_1), \ldots \mu_k(u_{mk})\}$. Таким образом, можно сформулировать следующую теорему.

Теорема.

∇ Пусть H – полная иерархия. L_{i-1}, L_i, L_{i+1} – $(i-1)$*-й*, i*-й*, $(i+1)$*-й* уровни иерархии соответственно, $i=3, \ldots, k-1$.

$W_{(i-1)} = \left\{\lambda_{(i-1)1}, \ldots, \lambda_{(i-1)(m(i-1))}\right\}$ – вектор приоритетов объектов $(i-1)$*-го* уровня относительно цели $L_1=\{b\}$, $i=3,\ldots,k-1$. При $i=3$ $W_{(i-1)}= W_2= \left\{\lambda_{21}, \ldots, \lambda_{2(m2)}\right\}$ – нормализованные степени недоминируемости альтернатив отношения $\varphi_{R_2} : L_2 x L_2 \to [0;1]$.

$\varphi_{R_{ij}} : L_i x L_i \to [0;1]$, $i=3,\ldots,k-1$, $j=1,\ldots,m(i-1)$ – отношения объектов i*-го* уровня по отношению к j*-му* объекту $(i-1)$ уровня.

$\varphi_{R_{(i+1)j}} : L_{i+1} x L_{i+1} \to [0;1]$, $i=3,\ldots,k-1$, $j=1,\ldots,m(i)$ – отношения объектов $(i+1)$*-го* уровня по отношению к j*-му* объекту i*-го* уровня.

Вектор приоритетов $\left\{\lambda_{(i+1)1}, \ldots, \lambda_{(i+1)(m(i+1))}\right\}$ объектов L_{i+1} уровня относительно цели $\{b\}$ определяется следующим образом:

1. $\lambda_{ij} = \min\left\{\mu^{nd}{}_{Pi}(u_j); \mu^{nd}{}_{Qi}(u_j)\right\} / \sum\limits_j \min\left\{\mu^{nd}{}_{P_i}(u_j); \mu^{nd}{}_{Q_i}(u_j)\right\}$, $j=1,\ldots,m(i)$.

2. $\lambda_{(i+1)j} = \min\left\{\mu^{nd}{}_{P_{i+1}}(u_j); \mu^{nd}{}_{Q_{i+1}}(u_j)\right\} / \sum\limits_j \min\left\{\mu^{nd}{}_{Pi+1}(u_j); \mu^{nd}{}_{Qi+1}(u_j)\right\}$,

$j=1,\ldots,m(i+1)$.∇

Таким образом, в методы принятия решения на базе нечеткой логики в качестве первого этапа целесообразно включать построение иерархии процесса выбора альтернатив. Сравнение объектов на каждом уровне можно проводить любым из методов. Путем дальнейшей нормализации полученных оценок альтернатив каждого уровня, применяя процедуру взвешивания

МАИ или алгоритм "свертки" других методов, можно получить приоритет альтернатив нижнего уровня по отношению к цели первого уровня.

5.3. Выявление несогласованности суждений экспертов

Проверка на согласованность (непротиворечие) ответов экспертов – неотъемлемая часть почти всех методов принятия решений. Ошибки в ответах могут быть как случайными, так и из-за некорректно поставленных вопросов (например, при сравнении очень близких по важности объектов или трудно сравниваемых между собой). При сложных иерархиях своевременно выявленная несогласованность оценок экспертов позволит избежать некорректных результатов ранжирования альтернатив, обеспечив высокий уровень достоверности анализа проблемной ситуации.

Согласованность отношения, в общем случае, понимается как численная (кардинальная $a_{ij}a_{jk} = a_{ik}$) и транзитивная (порядковая согласованность). Совершенной согласованности достичь трудно, поэтому существуют различные подходы к оценке степени несогласованности.

В методе анализа иерархий определяется только кардинальная согласованность. Доказывается, что положительная обратносимметричная матрица согласованна тогда и только тогда, когда $\lambda_{\max}=n$. $\lambda_{\max}$ вычисляется из равенства $Aw=\lambda_{\max} w$, где w – главный собственный вектор. В [94] предлагается следующий алгоритм для вычисления $\lambda_{\max}$: $c = Aw$; $c_i = c_i / w_i$, $i = 1,...,n$; $\lambda_{\max} \approx \left(\sum_i c_i \right) / n$ (умножить матрицу A на вектор w, затем полученный вектор поделить на соответствующие компоненты w. Среднее арифметическое полученных значений и даст приблизительно $\lambda_{\max}$).

В общем случае $\lambda_{\max}$ <>n. Для оценки согласованности вычисляется отклонение от согласованности – ИС* (индекс согласованности). ИС*=$(\lambda_{\max} - n)/(n-1)$, где $\lambda_{\max}$ – главное собственное значение обратносимметричной матрицы. Индекс согласованности, сгенерированный случайным образом, называют случайным индексом (СИ). Отношение ИС*/СИ, где СИ – средний случайный индекс матрицы того же порядка, что и исходная, называют отношением согласованности ОС. Значение ОС, меньшее 10% (в практическом применении допускается значение, не превышающее 20%) считается приемлемым.

В [93, 94] утверждается, что нетранзитивность предпочтений может быть естественным явлением, а не следствием ошибки в суждениях или заблуждениях. В ряде случаев нетранзитивности не удается избежать.

Следует отметить, что отношение согласованности хотя и позволяет выявить противоречивость в суждениях экспертов, но является лишь количественным показателем такой противоречивости. В методе анализа иерархий при ОС>20% рекомендуется пересмотреть суждения. Существенным недостатком МАИ является в этом плане невозможность обратить внимание экспертов на те вопросы, которые вызвали такую несогласованность.

В комбинированном методе принятия решений вычисляется ОС, и если оно неудовлетворительно с точки зрения ЛПР, то предлагается помощь в построении отношения как транзитивно, так и кардинально согласованного.

В [81] отношение R называется транзитивным, если $R \circ R \subseteq R$. В зависимости от введенной операции произведения нечетких отношений выделяется минмаксная транзитивность, максминная, максмультипликативная. Под транзитивностью в методах принятия решений на базе нечеткой логики подразумевается максминная транзитивность. Максминнная транзитивность накладывает следующее условие на функцию принадлежности нечеткого отношения R: $\mu_R(x,y) >= \sup\limits_{z \in X} \min\{\mu_R(x,z), \mu_R(z,y)\}$. Как видно, данное условие равнозначно тому, что каждый элемент нечеткого отношения не меньше соответствующего ему элемента максминного произведения нечеткого отношения самого на себя.

Если рассматривать такое определение на конкретном примере нечеткого отношения: $\begin{pmatrix} 1 & 0{,}33 & 0{,}25 \\ 0{,}1 & 1 & 0{,}77 \\ 0{,}95 & 0{,}2 & 1 \end{pmatrix}$, то логика его достаточно очевидна.

Например,

2-й элемент предпочтительнее 1-го со степенью a_{21}= *0,1*.	1-й элемент предпочтительнее 3-го со степенью a_{13}=*0,25*.

Значит, 2-й элемент должен быть предпочтительнее 3-го хотя бы с наименьшей степенью из a_{21}= *0,1* и a_{13}=*0,25*, т.е. со степенью, не меньшей, чем *0,1*.

2-й элемент предпочтительнее 2-го со степенью a_{22}= *1*.	2-й элемент предпочтительнее 3-го со степенью a_{23}=*0,77*.

Значит, 2-й элемент должен быть предпочтительнее 3-го хотя бы с наименьшей степенью из a_{22}=*1* и a_{23}=*0,77*, т.е. со степенью, не меньшей, чем *0,77*.

2-й элемент предпочтительнее 3-го со степенью a_{23}= *0,77*.	3-й элемент предпочтительнее 3-го со степенью a_{33}=*1*.

Значит, 2-й элемент должен быть предпочтительнее 3-го хотя бы с наименьшей степенью из a_{23}=*0,77* и a_{33}=*1*, т.е. со степенью, не меньшей, чем *0,77*.

Так как все перечисленные условия должны выполняться одновременно, то a_{23} должно быть не меньше, чем наибольшее из {0,1; 0,77; 0,77}, т.е. $a_{23} \geq 0{,}77$. Такое соотношение выполняется для a_{23}. Аналогичная проверка производится для всех $a_{ij}, i, j = 1,..,n$.

Для приведенной матрицы ее максминное произведение A^2 равно

1	0,33	0,33
0,77	1	0,77
0,95	0,33	1

Серым цветом выделены те элементы, которые не меньше им соответствующих в исходной матрице. Таким образом, в этом случае наблюдаем три нарушения транзитивности бинарного отношения.

Но такой способ проверки порядковой согласованности не является приемлемым. Так, бинарное отношение предпочтения, составленное на основе количественных данных, оказалось нетранзитивным согласно рассмотренному определению с шестью нарушениями транзитивности.

В качественных методах принятия решений рассматриваются некоторые подходы к получению транзитивных отношений. Один из них представляет собой процедуру проверки и корректировки ответов эксперта в процессе проведения парных сравнений. После каждого проведенного экспертом сравнения пары объектов проводится распространение полученной информации о сравнении объектов по транзитивности (транзитивное замыкание).

Если эксперту предъявляются объекты $x_i \in X$, $x_j \in X$ и эксперт отвечает, что x_i предпочтительнее x_j, т.е. $(x_i, x_j) \in P$ (связаны отношением предпочтения), тогда для $\forall x_k$ таких, что $(x_j, x_k) \in P$ или $(x_j, x_k) \in I$ (связаны отношением безразличия, т.е. имеют равную важность), следует $(x_i, x_k) \in P$.

Если эксперт отвечает, что x_i равноценна x_j, т.е. $(x_i, x_j) \in I$, тогда для $\forall x_k$ таких, что $(x_j, x_k) \in I$ следует $(x_i, x_k) \in I$, а для $\forall x_k$ таких, что $(x_j, x_k) \in P$ следует $(x_i, x_k) \in P$.

Далее эксперту предъявляется следующая пара объектов, для которых отношение еще не определено. После получения ответа строится транзитивное замыкание и т.д. до тех пор, пока отношение не будет установлено для всех пар объектов из X. При такой процедуре опроса нарушений транзитивности в ответах не возникает.

В качественных методах принятия решений при этом (как следует из приведенных примеров) количественная шкала натуральных чисел состоит всего из трех возможных оценок сравнения альтернатив "лучше", "хуже", "равнозначны". Поэтому в данных методах проверяется только транзитивная согласованность. В комбинированном методе принятия решений будем считать, что $(x_i, x_j) \in P$, если $a_{ij} \in \{2,...,9\}$, если $a_{ij} \in \left\{\frac{1}{9},...,\frac{1}{2}\right\}$, то $(x_j, x_i) \in P$, если $a_{ij}=1$, то $(x_i, x_j) \in I$. Так определенные отношения предпочтения и безразличия объектов, конечно, не обеспечат кардинальную согласованность отношений с базовой количественной шкалой $S(m)$, но помогут эксперту избежать порядковых противоречий в оценках. Для обеспечения кардинальной согласованности процедуру проверки транзитивности можно модифицировать таким образом, чтобы одновременно с транзитивностью проверять и численную согласованность, т.е. осуществлять проверку $a_{ij}*a_{jk}=a_{ik}$.

Приведем пример процедуры помощи эксперту при формировании бинарного отношения сравнения объектов. Для определенности в качестве объектов $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$ рассмотрим декоративные стеновые материалы (см. приложение 1-А, изделия 20, 22, 24, 26).

Исходная матрица рефлексивна ($a_{ii}=1$).

Сначала эксперту (например, потребителю) предлагается для сравнения произвольная пара объектов. Например:

1) Какое изделие для вас более предпочтительно. Определите по предложенной шкале степень предпочтения.

Предположим, что эксперт ответил на вопрос следующим образом:

Камень стеновой № 20 Камень облицовочный № 22

<table>
<tr><td rowspan="2">равная важность</td><td colspan="2">слабое превосходство</td><td colspan="2">умеренное</td><td colspan="2">значительное</td><td rowspan="2">очень сильное</td><td rowspan="2">полное превосход-ство</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td>1 ✓</td><td>2</td><td>1</td><td>2</td></tr>
</table>

Такая оценка по количественной шкале $S(m)$ соответствует 4. Т.е. $a_{12}=4$ $\Rightarrow a_{21}=1/4$. Таким образом, $(x_1, x_2) \in P$.

Для построения транзитивного замыкания необходима еще одна оценка эксперта. Желательно, чтобы такая оценка связывала бы второй объект с каким-либо другим, отношением предпочтения или безразличия $(x_2, x_k) \in P$ или $(x_2, x_k) \in I$.

Таблица 5.1

Исходная матрица сравнений объектов

	Камень № 20	Камень № 22	Камень № 24	Камень № 26
Камень стен. № 20	1	4		
Камень облиц. № 22	1/4	1	5	
Камень облиц. № 24		1/5	1	
Камень облиц. № 26				1

Поэтому следующий вопрос эксперту формируется таким образом, чтобы установить предпочтительность второго объекта по отношению к 3-му или 4-му.

2) Какое из изделий предпочтительнее – x_2 или x_3.

Затем предлагается оценить степень такого предпочтения, как это было сделано в 1-ом вопросе.

Предположим, эксперт определил $(x_2, x_3) \in P$ и по его ответу $a_{23}=5$ (оценка a_{23} и соответствующая ей a_{32} выделены серым цветом в табл. 3.1.).

В этом случае можно установить транзитивное замыкание: из $(x_1, x_2) \in P$ и $(x_2, x_3) \in P$ следует $(x_1, x_3) \in P$. Причем, для кардинальной согласованности $a_{12}*a_{23}$ должно быть равно a_{13}. Так как $a_{12}=4$, $a_{23}=5$, то a_{13} должно быть равно 20, но так как шкала 9-балльная, то от эксперта для хорошей согласованности следует ожидать оценку хотя бы близкую к 9. Формально распространение информации происходить не должно, так как оно предопределяло бы отсутствие ошибок в ответах эксперта, в связи с чем возникали бы затруднения в оценке предпочтительности. В качественных методах затруднений в количественных оценках при транзитивном замыкании не происходит, так как их всего используется три.

Для избежания формального транзитивного замыкания эксперту предлагается вопрос: какое из изделий предпочтительнее – x_1 или x_3.

Если полученный ответ совпадает с транзитивным замыканием $(x_1, x_3) \in P$, то считается, что проверка подтвердила правильность полученной от эксперта информации. Если имеется расхождение, то рекомендуется пересмотреть предыдущие ответы или исправить только что полученный.

Приведем дальнейший опрос эксперта с указанием оценки по количественной шкале.

3) Какое из изделий предпочтительнее – x_1 или x_3. Ответ: x_1, $a_{13}=6$. (Серым цветом в таблице 3.2. помечены транзитивные тройки оценок). Такая оценка удовлетворяет как транзитивной согласованности, так и кардинальной.

Чтобы определить a_{14}, перебираются все возможные уже включенные в отношение пары объектов, из оценки сравнения которых можно заранее сделать вывод об оценке a_{14} – (a_{12} ; a_{24}), (a_{13}; a_{34}). Как убеждаемся, такие оценки еще полностью не сформированы, т.е. для ответа a_{14} предыдущие ответы еще не предопределили какое-либо отношение. Поэтому ответ предлагается самостоятельно выбрать самому эксперту.

Таблица 5.2

Заполненное бинарное отношение сравнения альтернатив

	Камень № 20	Камень № 22	Камень № 24	Камень № 26
Камень № 20	1	4	6	7
Камень № 22	1/4	1	5	3
Камень № 24	1/6	1/5	1	3
Камень № 26	1/7	1/3	1/3	1

4) Какое из изделий предпочтительнее – x_1 или x_4. Ответ: x_1, $a_{14}=7$.

5) Какое из изделий предпочтительнее – x_2 или x_4.

Для определения элемента a_{24} необходимо рассмотреть пары элементов a_{21} и a_{14}, a_{23} и a_{34}. Так как элемент a_{34} еще не определен, то учитываем только $a_{21}=1/4$ и $a_{14}=7$. По данным значениям транзитивное замыкание осуществить невозможно, но приблизительно, учитывая стремление к кардинальной согласованности, можно определить значение $a_{24}=a_{21}*a_{14}=7/4$, т.е. $1<a_{24}<2$.

Предположим, что эксперт ответил $a_{24}=3$; такая оценка близка к той, которая ожидалась.

6) Какое из изделий предпочтительнее – x_3 или x_4.

Определить элемент a_{34} возможно из комбинаций элементов: (a_{31}; a_{14}), (a_{32}; a_{24}). Обе комбинации не помогают определить порядковую согласованность, но относительно кардинальной согласованности можно сделать вывод о приблизительном равенстве элемента a_{34} среднему арифметическому $(a_{31}*a_{14}+a_{32}*a_{24})/2=((1/6)*7+0,5*3)/2 \approx 1,91$.

Ответ эксперта $a_{34}=3$ является приемлемым.

Отношение согласованности данной матрицы равно 12%. Чтобы его уменьшить следует более строго придерживаться советов по формированию согласованного отношения.

Проведем такую процедуру еще раз с целью получения более согласованного отношения.

Пусть $a_{12}=4$, $a_{23}=5$. Тогда a_{13} должно быть близко к 9. Рекомендуется оценка 8, 9. Предположим эксперт не считает нужным определять предпочтительность оценкой 9 и придерживается мнения, что $a_{13}=8$. Далее $a_{14}=9$ заполняется самим экспертом. Для оптимального определения a_{24} установим все возможные комбинации, влияющие на данную оценку: (a_{21}; a_{14}), (a_{23}; a_{34}). $a_{21}*a_{14}=1/4*9<2$. Если эксперт предлагает оценку 3, как это было в первый раз, то ему будет рекомендовано оценить $a_{24}=2$. Для определения a_{34} рассмотрим (a_{31};a_{14}), (a_{32}; a_{24}). $a_{34}=1/8*9+1/5*2<2$. Эксперту рекомендуется выбрать оценку 1 или 2. Предположим, что эксперт оценивает преимущество x_3 по сравнению с x_4 оценкой 2. Так заполненная матрица имеет отношение согласованности ОС=9%.

	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	1	4	8	9
x_2	1/4	1	5	2
x_3	1/8	1/5	1	2
x_4	1/9	½	1/2	1

Формализуем процедуру построения согласованного отношения с учетом порядковой и транзитивной согласованности и оптимальной организацией заполнения бинарного отношения оценками экспертов.

Требуется сформировать бинарное отношение R такое, что $\mu_R : XxX \to S(m)$. $X=\{x_1,...,x_n\}$. $a_{ij}=\mu_R(x_i,x_j)$ – оценка предпочтительности объекта x_i по отношению к объекту x_j.

Исходная матрица для построения такого отношения – A_{nxn} такая, что $a_{ii}=1, \forall i=1,..,n$.

1. Экспертом сравниваются x_1 и x_2; делается вывод о предпочтительно-

сти объектов и формируется оценка a_{12}: $(x_1,x_2)\in P$ (a_{12}>1), или $(x_2,x_1)\in P$ (a_{12}<1), или $(x_1,x_2)\in I$ (a_{12}=1).

2. Аналогично п.1. экспертом сравниваются x_2 и x_3 .

3. Предопределяется оценка a'_{13}.

Если возможно, то выполняется транзитивное замыкание (см. (1), (2)) – делается вывод о том, что $(x_1,x_3)\in P$ или $(x_1,x_3)\in I$.

Определяется оценка a'_{13} согласно требованиям кардинальной согласованности: $a'_{13}=a_{12}*a_{23}$.

4. Экспертом сравниваются x_1 и x_3; делается вывод о предпочтительности объектов и формируется оценка a_{13}: $(x_1,x_2)\in P$ (a_{13}>1), или $(x_2,x_1)\in P$ (a_{13}<1), или $(x_1,x_3)\in I$ (a_{13}=1).

При этом сравнивается предпочтительность объектов x_1 и x_3, построенная на основе транзитивного замыкания и определенная экспертом. Затем сравнивается a'_{13} и a_{13}. В случае нарушения транзитивной или кардинальной согласованности эксперту предъявляется требование пересмотра суждений. При этом, если a'_{13} >9 или a'_{13} <1/9, то эксперту предлагается оценить предпочтительность объекта x_1 относительно x_3 таким образом, чтобы a_{13} было близко к 9 или 1/9 соответственно.

5. Экспертом сравниваются x_3 и x_4 (см. п.1).

6. Если возможно, то выполняется транзитивное замыкание относительно пары (x_2, x_4) и пары (x_1, x_4). Определяется оценка $a'_{24} = a_{23} * a_{34}$ (см. п.3) и оценка $a'_{14} = (a_{12} * a_{24} + a_{13} * a_{34}) / 2$. И т.д., аналогично п.4.

Схематично последовательность опроса эксперта можно представить на рис. 5.3. Стрелками на схеме указана последовательность предъявления эксперту вопросов парного сравнения. Серым цветом помечены ячейки, оценки в которых формирует эксперт. В других ячейках оценки могут быть сформированы на основе транзитивного замыкания (стрелки с подписью Тр.). Такая последовательность опроса является наиболее оптимальной по количеству возможных проверок ответов экспертов на основе транзитивного замыкания.

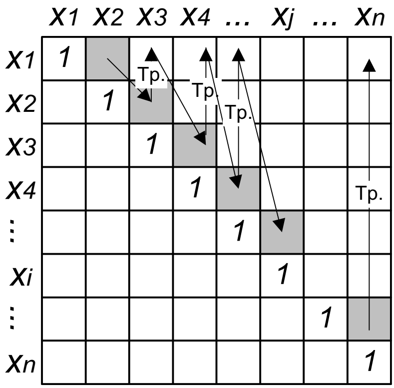


Рис 5.3. Схема последовательности предъявления парных сравнений эксперту

Таким образом, эксперт самостоятельно формирует оценки (они не могут быть предопределены) a_{ij}, где $j = i + 1 \;\; \forall i = 1,...,n.$

После каждой оценки a_{ij} проводится транзитивное замыкание – распространение информации о предпочтительности объектов на оценки $a_{ls}, l = i-1, i-2,...,1;\; s = j$. На основе стремления к кардинальной согласованности a_{ls} определяется по формуле $a_{ls} = \dfrac{\sum_{p=1}^{n} a_{lp} * a_{ps}}{m}$ $p < s, p \neq l$, где m – количество суммируемых пар оценок (учитываются только те пары a_{lp}, a_{ps}, которые уже сформированы – $a_{lp}, a_{ps} \neq 0$). Условие $p<s$ определено последовательностью опроса эксперта.

Далее информация о предпочтительности и сформированные оценки сравниваются с полученными от эксперта, и при необходимости снова происходит обращение к эксперту для пересмотра оценок.

Алгоритм построения согласованного отношения приведен на рис. 5.4.

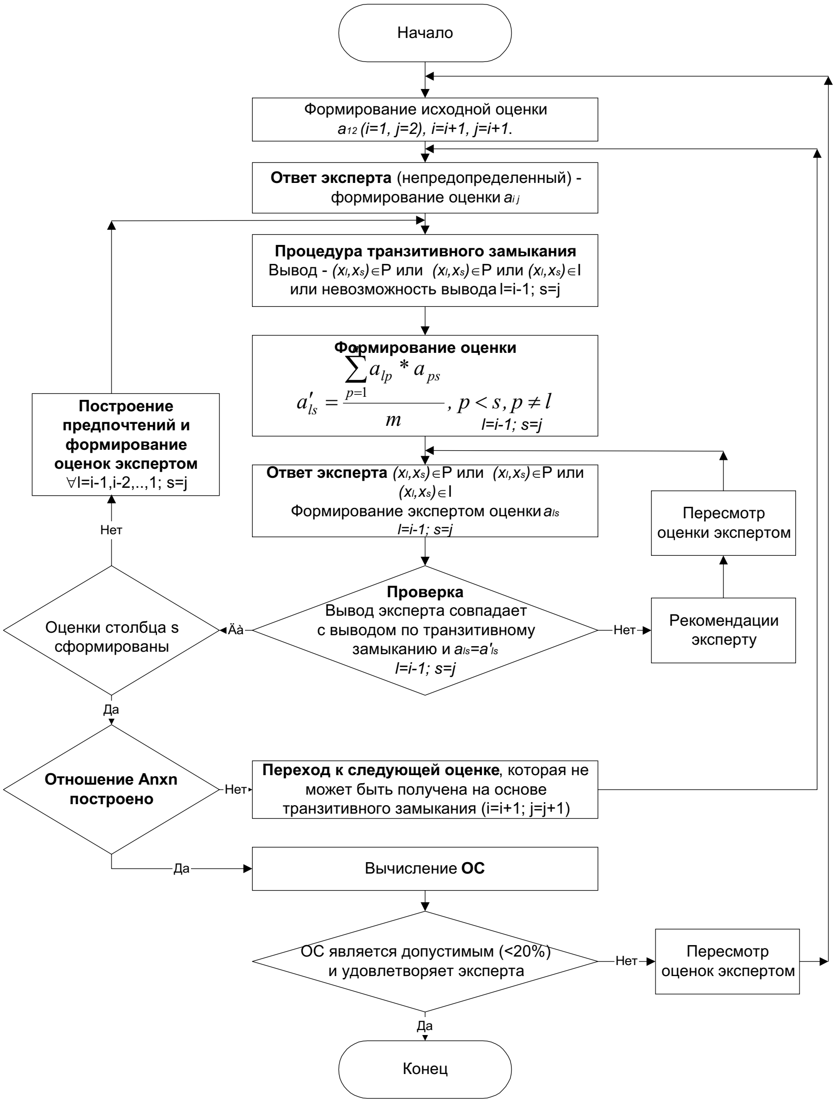


Рис 5.4. Алгоритм построения согласованного отношения

5.4. Разработка СППР "Выбор" на основе комбинированного метода бинарных отношений

СППР "Выбор" позволяет на основе информации, получаемой от экспертов и ЛПР, получить количественные характеристики предпочтительности рассматриваемых альтернатив и определить среди них наиболее оптимальные с учетом большого числа критериев, по которым они сравниваются.

Математическое обеспечение СППР "Выбор"

Выбор наиболее предпочтительных альтернатив на основе комбинированного метода бинарных отношений производится по алгоритму, изображенному на рис.5.5.

Первый этап принятия решения – построение иерархии. Наиболее распространенный вид иерархий в принятии управленческих решений – доминантные. *Исходными данными* в комбинированном методе принятия решений для такого вида иерархий являются:

- n – количество уровней в иерархии (самый верхний уровень будем считать 1-м);
- $l[i]$ – количество объектов i-го уровня, $i=1,...,n$; причем $l[1]=1$– цель иерархии;
- $nas[i;j]$ – название j-го объекта i-го уровня, $i=1,...,n$, $j=1,...,l[i]$;
- $a[i; j; k; m]$ – степень предпочтения k-го элемента i-го уровня перед m-м элементом этого же уровня по отношению к j-му элементу вышестоящего уровня, $i=2,..,.n-1; j=1,...,l[i-1]$, $k=1,...,l[i]$, $m=1,...,l[i]$. Из элементов $a[i; j; k; m]$ формируются квадратные матрицы, количество которых на каждом уровне определяется количеством альтернатив на вышестоящем уровне, а количество строк и столбцов – количеством альтернатив на текущем уровне. Всего таких матриц будет сформировано $\sum_{i=1}^{n-1} l[i]$.

Матрицы формируются на основе парных сравнений экспертом объектов каждого уровня иерархии по отношению к каждому объекту вышестоящего уровня. Оценки производятся по вербальной шкале (см. рис. 5.1). Вербальные оценки заменяются количественными на основе шкалы $S(m)$, при этом будут получены обратносимметричные матрицы.

Осуществляется проверка согласованности суждений экспертов (вычисляется ОС), и при неудовлетворительном значении ОС производится, по желанию эксперта пошаговое построение согласованного отношения на основе алгоритма, описанного в разделе 5.2. (см. рис. 5.4.)

По окончательно сформированной обратносимметричной матрице A_{nxn} происходит формирование нечеткого отношения нестрогого предпочтения на основе гомоморфного отображения решетки S(m) в решетку S, которое описано в разделе 5.1. Процедура происходит без участия эксперта.

Дальнейшая задача заключается в обработке полученных данных двумя методами: МАИ и методом принятия решений на базе нечеткой логики при нескольких н.о.п., характеризуемых весовыми коэффициентами.

Алгоритм обработки н.о.п. приведен в разделе 5.2.

Алгоритм обработки обратносимметричных матриц осуществляется на основе модели Бэржа-Брука-Буркова и метода анализа иерархий, описанных в главе 3.

Результатом комбинированного метода ПР является:

1) Вектор обобщенных (глобальных) приоритетов альтернатив самого нижнего n-го уровня, указывающий на степень предпочтения сравниваемых объектов $W=(w_1,\ldots,w_{l(n)})$.

2) Вектор степеней недоминируемости альтернатив n-го уровня, учитывающий все промежуточные уровни $\mu^{nd}(u_1,\ldots,u_{l(n)})$.

Эксперту предлагается самому сравнить результаты упорядочивания и количественные показатели важности рассматриваемых вариантов решений.

Если все бинарные отношения, формируемые экспертом, имели высокий уровень согласованности, то и первым методом, и вторым будет предложена одна и та же альтернатива в качестве наиболее оптимальной.

Если некоторые отношения имели невысокую степень согласованности, то оптимальные альтернативы, рекомендуемые первым и вторым методами, будут различны, и в этом случае эксперту рекомендуется воспользоваться дополнительным методом ПР – ПАРК, алгоритм которого приводится в [63].

Метод ПАРК позволит ЛПР осуществить стратегический выбор одной из двух (или нескольких) альтернатив на основе всестороннего качественного их анализа по любому количеству критериев, определенных ЛПР.

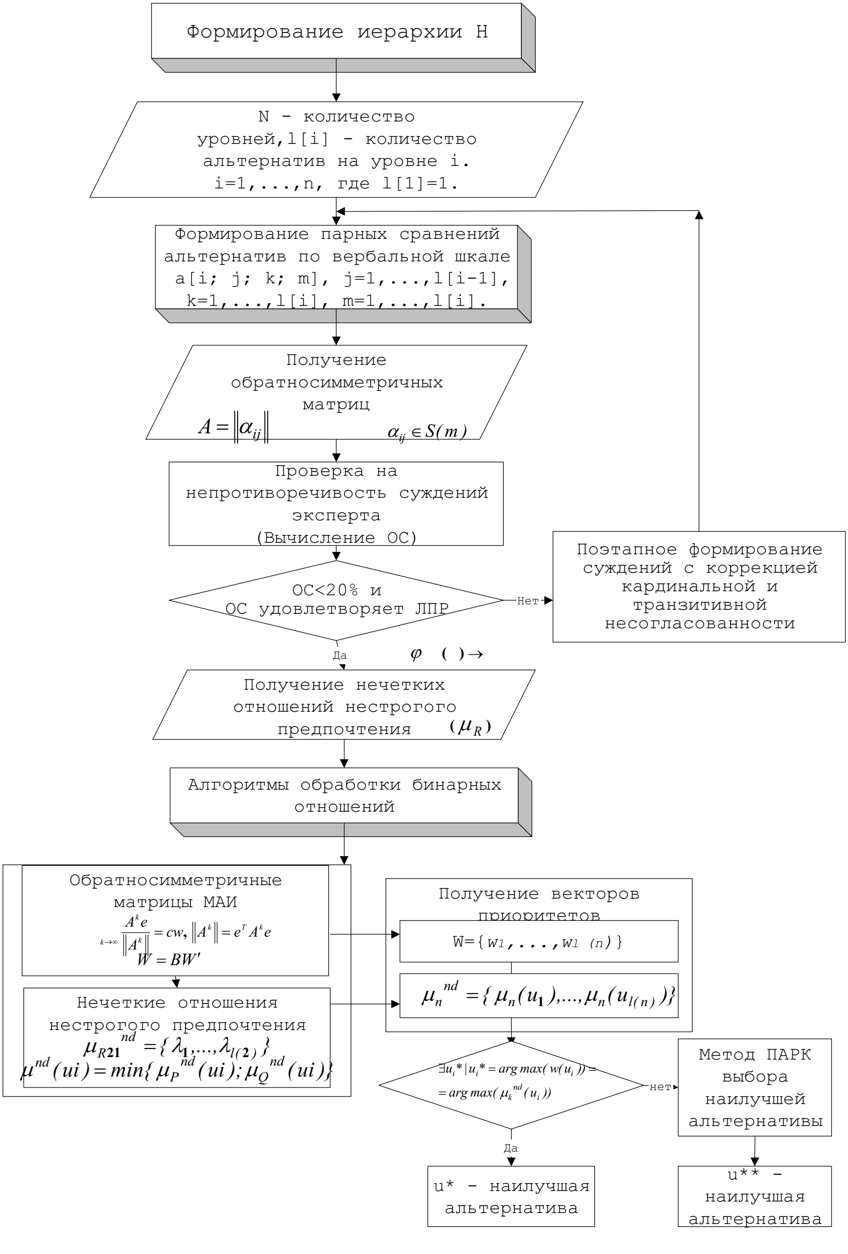


Рис 5.5. Схема комбинированного алгоритма бинарных отношений

Назначение и основные функции СППР "Выбор"

СППР "Выбор" предназначена для решения широкого класса задач, возникающих в процессе планирования и управления промышленным предприятием.

Система позволяет решить, например, следующие задачи:

Анализ рынка сбыта продукции

Осуществляется анализ ценовой ситуации на рынке профильной продукции предприятия, определяется ее влияние на объемы ввоза аналогичной продукции в регионы конкурирующими предприятиями.

Задача включает в себя прогноз поставок продукции предприятия в целевые регионы и доли предприятия на местных рынках, а также прогноз цен на продукты на основе отпускных цен предприятия и действующих тарифов. Кроме того, предусматривается формирование произвольных отчетов по текущим фактическим показателям: поставка продукции в регионы, сравнительная характеристика цен по регионам, динамика изменения отпускных и региональных цен.

Оценка привлекательности покупателей. Рейтинг покупателей

Оценка привлекательности покупателей позволяет более обоснованно составлять текущий и перспективный план поставок профильной продукции. Кроме того, использование характеристик привлекательности покупателей (платежная дисциплина, финансовое положение) повышает достоверность прогнозирования объемов поступления финансовых ресурсов в различных формах (денежные средства, векселя, взаимозачеты и т.д.).

Определение оптимальной производственной программы и ценовой политики

На основе информации, получаемой из задачи “Анализ рынка сбыта”, характеристик производственных мощностей и возможных технологических схем, объемов планируемого к переработке сырья на данном этапе, формируются рекомендации по производственной программе и ценовой политике. В качестве целевой установки принимается максимизация доходов предприятия (возможны другие целевые установки).

Финансово-экономическая оценка инвестиционных проектов

На основе задачи можно производить вариантные расчеты характеристик инвестиционных проектов при различных сочетаниях факторов и управляющих воздействий (цены, рынки, налогообложение и т.д.).

Система обеспечивает:

- доступ к данным оперативной отчетности предприятия;
- решение календарно-повторяющихся ЗПР;
- ввод и хранение экспертной информации, описывающей структуру предпочтений лица, принимающего решение;
- решение задач выбора наилучших вариантов на основе комбинированного метода принятия решений, ориентированного на качественную ин-

формацию экспертов;

– возможность дополнения базы моделей и методов методами ПР;

– оформление результатов расчетов в виде набора разнообразных табличных и графических отчетов, программные средства обеспечивают возможность визуального сравнения результатов, полученных при разных сценариях.

Система обладает свойством универсальности – она может быть адаптирована к решению различных задач управления. Условиями такой адаптации являются обеспечение доступа к данным, а также разработка и ввод в систему методов сравнения альтернатив.

Программный продукт "Выбор" работает под управлением операционной системы Windows95.

Программное обеспечение СППР "Выбор"

Программный продукт включает в себя модули, изображенные на рис. рис.5.6.

База данных состоит из базы данных экспертной информации, базы данных конкретных сценариев задач принятия решений, базы данных результатов.

База данных экспертной информации предназначена для хранения ответов экспертов, полученных при анализе проблемных ситуаций управления и планирования деятельности промышленного предприятия. База данных результатов ЗПР позволяет получать комплексные отчеты об упорядочивании альтернатив за прошедшие периоды времени. База данных сценариев конкретных ЗПР хранит необходимый набор критериев и альтернатив для анализа повторяющихся проблемных ситуаций; такая база сценариев позволяет избежать рутинной работы экспертов по анализу календарно-повторяющихся ЗПР. Возможно взаимодействие базы данных СППР "Выбор" с хранилищем данных оперативной отчетности предприятия. Хранилище данных состоит из данных транзакционных систем, основанных на различных СУБД, данных табличных и текстовых процессоров, бухгалтерских, правовых систем.

Модуль интерактивного взаимодействия с пользователем организовывает работу оператора в диалоговом, советующем режиме. Имеется возможность настройки вербальной шкалы, лингвистические термы которой должны соответствовать специфике решаемой задачи.

Эксперты, отвечающие в процессе диалога на вопросы системы, могут, в силу разных причин, формулировать противоречивые суждения. Помочь экспертам получить согласованные ответы – задача модуля поддержки формирования непротиворечивых суждений.

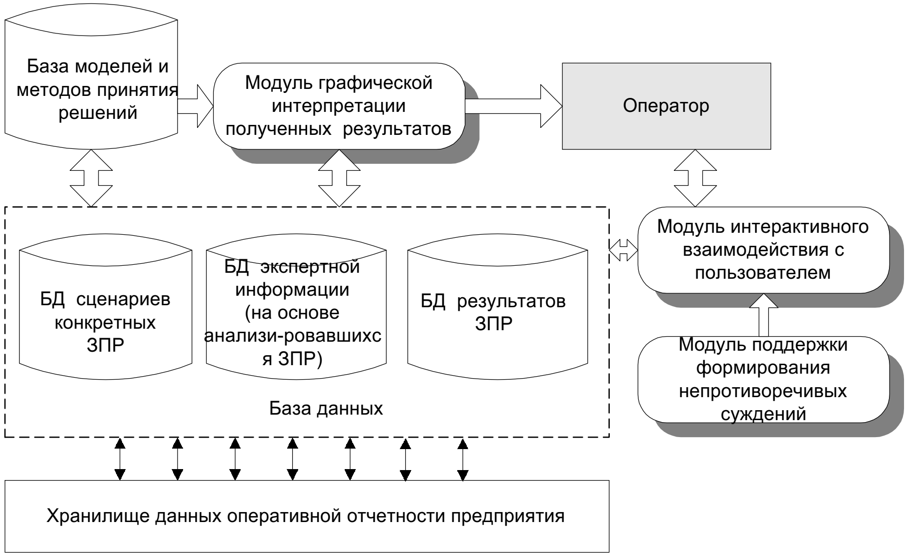


Рис 5.6. Структура программного обеспечения СППР "Выбор"

Обработку полученной информации осуществляют алгоритмы из базы моделей и методов принятия решений. В базу входят составляющие комбинированного алгоритма: алгоритм получения обратносимметричных матриц и н.о.п. по качественным суждениям экспертов, алгоритм вычисления главного собственного вектора положительной матрицы по теореме Перрона-Фробениуса, алгоритм иерархического синтеза, алгоритм вычисления вектора степеней недоминируемости н.о.п., алгоритм свертки н.о.п. в многоуровневой иерархии, алгоритм метода ПАРК.

Результаты, полученные при анализе проблемной ситуации, формируются в виде отчета, а средствами модуля графической интерпретации результатов предоставляются в графическом виде и выдаются оператору. Данные отчета поступают в БД результатов ЗПР.

Указания по использованию системы

Основными этапами работы ЛПР с системой являются:

– определение цели работы с системой (решение новой, еще не структурированной задачи, решение типовой задачи, просмотр отчетов по предыдущим ЗПР);

– определение существенных данных (какие именно данные из хранилища использовать при решении данной задачи);

– определение вариантов решений (альтернатив) и критериев сравнения альтернатив;

– задание качественных шкал показателей (для каждой ЗПР могут быть сформированы качественные шкалы в соответствии со спецификой ЗПР);

– выявление предпочтений экспертами альтернатив на множестве критериев в ходе опроса;

– анализ результатов решения и возможный переход к выполнению одного из предыдущих этапов.

Разделение труда между ЛПР и экспертами. Первые два этапа и определение перечня альтернатив ЛПР проводит самостоятельно, при определении критериев сравнения альтернатив возможно обращение за помощью к экспертам. Формирование качественных шкал производится экспертами и ЛПР совместно. Выявление предпочтений экспертов не должно сопровождаться никакими вмешательствами ЛПР. Анализ результатов решения проводится сначала ЛПР, затем возможно обращение к помощи экспертов за обоснованием полученных результатов.

Взаимодействие пользователя с СППР "Выбор" организовано таким образом, чтобы диалог с оператором проходил в наиболее удобной и понятной форме.

Реализованы следующих возможности:

– контроль входной информации на выявление простейших ошибок;

– переход из диалогового режима в пакетный (возможность работы с файловой входной информацией);

– диалоговое взаимодействие для изменения ограничений (снятия или "сдвига" части ограничений);

– работа с различной информацией о сравниваемых объектах (количественной, качественной);

– сохранение промежуточной информации;

– встроенные средства обучения пользователей работе с системой;

– коррекция перечня альтернатив, критериев, изменения шкалирования и т.д.;

– возврат на необходимое число этапов назад, пересмотр прежних оценок, изменение последовательности отдельных этапов решения и т.д.

Система требует предварительного обучения и адаптации пользователя к системе, зависит от знания пользователя характеристик и специфики проектируемого объекта, а также возможностей системы с учетом заложенных в нее алгоритмов оптимизации.

Описание работы программы.

Рассмотрим последовательность действий оператора при работе с СППР "Выбор" с целью анализа ЗПР, которой нет в БД сценариев. Такой задаче соответствует пункт меню Поиск решения →Сравнение альтернатив.

Работа программы организована в виде мастера, помогающего оператору выполнять этапы комбинированного метода принятия решений в условиях неопределенности в нужной последовательности (см.рис.5.7).

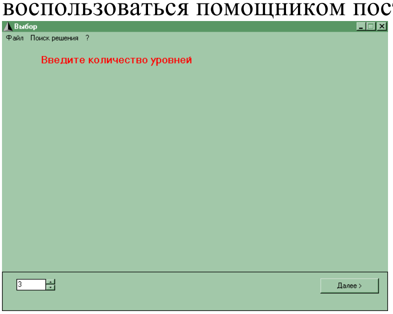
Вначале диалога оператору рекомендуется сохранить файл Файл→Сохранить; в процессе диалога осуществлять промежуточные сохранения файла.

Первый этап – построение иерархии процесса принятия решений, на этом этапе пользователь указывает количество уровней в иерархии (1), количество альтернатив на каждом уровне (2), вводит названия объектов каждого уровня иерархии (3). После этого математическое построение иерархии производится автоматически.

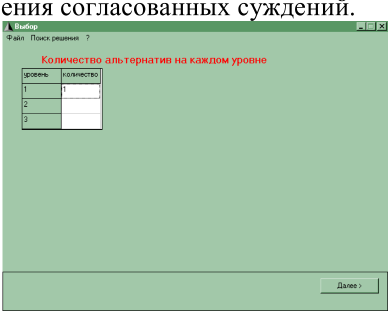
Второй этап – формирование суждений экспертов по качественным шкалам. По каждой паре сравниваемых объектов каждого уровня иерархии предлагается определить степень предпочтительности того или иного объекта (4).

Возможно и непосредственное заполнение матриц парных сравнений количественными данными. Матрицы парных сравнений автоматически формируются как рефлексивные отношения, которые удовлетворяют степенной калибровке (5). Предусмотрена коррекция ответов согласно ограничениям шкалы.

После формирования матрицы парных сравнений (как на основе качественных, так и количественных данных) может быть автоматически вычислено отношение согласованности, индекс согласованности, главное собственное значение (6). Высокое отношение согласованности (более 20%) показывает на необходимость пересмотреть суждения. В этом случае возможно воспользоваться помощником построения согласованных суждений.



(1)



(2)

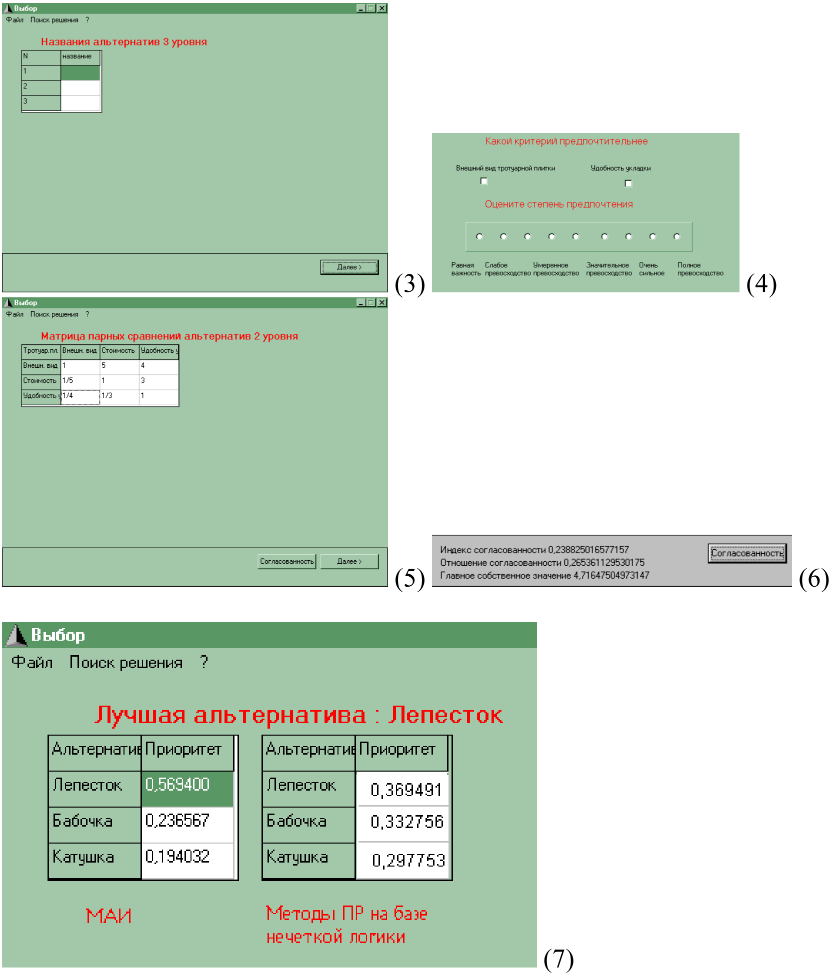


Рис 5.7. Пользовательский интерфейс СППР "Выбор"

По окончании диалога с оператором производится вычисление значений приоритетов рассматриваемых альтернатив и их ранжирование (7) методом МАИ и методом принятия решения на базе нечеткой логики. Результаты работы программы могут быть получены также в виде отчета (текстового файла) и в графической форме. При получении различных результатов ранжирования или неоднозначных для пользователя возможно сравнение двух наиболее предпочтительных альтернатив методом ПАРК (парная компенсация альтернатив).

Практическая работа

Метод анализа иерархий

1. Характеристика МАИ

2. Алгоритм МАИ

3. МАИ в СППР NooTron

Подраздел № 1
Метод анализа иерархий: характеристика метода

В 70-80-е годы американский учёный Т.Л. Саати разработал и развил "иерархический аналитический процесс" (analytic hierarchy process, AHP) – мощный метод сопоставительного анализа и ранжирования объектов, характеризующихся наборами критериев и показателей, количественных и качественных. В литературе этот метод называют также методом анализа иерархий (МАИ). Метод применяется для многих задач. Вот основные:

1. Сравнительный анализ объектов (многокритериальное ранжирование).
2. Многокритериальный выбор лучшего объекта (лучшей альтернативы).
3. Распределение ресурсов между проектами.
4. Проектирование систем по количественным и качественным характеристикам.

Этот метод для успешного применения требует соблюдения следующих условий:

a. в процедуре принимают участие достаточно квалифицированные эксперты, не допускающие существенных погрешностей в оценках, более того, в МАИ требуется, чтобы группа экспертов была консолидированной, т.е. имеющей общие позиции и стремящейся к согласованности своих оценок;

b. для множества сравниваемых объектов ("альтернатив") может быть выстроена общая система критериев;

c. оценки по "негативным" критериям не находятся в опасной близости к ограничениям.

Подраздел № 2
Метод анализа иерархий: алгоритм

Шаги метода анализа иерархий:

1. Представление исходной проблемы в виде иерархической структуры (рис. 3.1.1).

Цель составляет высший уровень иерархии (уровень 1). На этом уровне может находиться лишь один объект. На следующих вниз уровнях находятся критерии. По системе этих критериев оцениваются сравниваемые объекты (называемые «альтернативами»). Альтернативы располагаются на самом нижнем уровне. В задаче могут присутствовать несколько уровней критериев, но обычно применяют иерархии 3- уровневые (цель – критерии – альтернативы) и 4-х уровневые (цель – комплексные критерии – критерии – альтернативы).

Рисунок 3.1.1 – Трёхуровневая иерархия «цель – критерии – альтернативы»

2. Вынесение экспертных суждений на каждом уровне иерархии по парным сравнениям: критерии сравниваются попарно по отношению к цели, альтернативы – попарно по отношению к каждому из критериев.

Соответственно заполняются матрицы парных сравнений (таб. 3.1.1): одна – для критериев, n матриц – для альтернатив; здесь n – количество критериев.

Таблица 3.1.1 – Матрица парных сравнений

	$К_1$	$К_2$	…	$К_N$	Лок. Пр.
$К_1$	1	8	…	3	
$К_2$	1/8	1	…	1/5	
…	…	…	1	…	…
$К_N$	1/3	5	…	1	

Операция парного сравнения: два объекта, находящихся на одном уровне сравниваются по своей относительной значимости для одного объекта высшего уровня. Если критерий имеет определенную числовую меру, например, масса, производительность, цена, то в качестве результата оценки удобно взять отношения соответствующих характеристик (заданных, или рассчитанных) в некоторой шкале отношений. Если критерий не имеет принятой меры, то сравнение в

МАИ проводится с использованием специальной «шкалы относительной важности» (другие названия: «шкала 1-9», «шкала Саати»). Эта шкала имеет 9 степеней предпочтения, выбранные с учетом экспериментально установленных психофизиологических особенностей человека, выполняющего сравнение (таб. 3.1.2).

Таблица 3.1.2 – Шкала Саати

Степень предпо-чтения	Определение	Комментарии
1	**Равная предпочтительность**	**Две альтернативы одинаково предпочтительны с точки зрения цели**
2	Слабая степень предпочтения	Промежуточная градация между равным и средним предпочтением
3	**Средняя степень предпочтения**	**Опыт эксперта позволяет считать одну из альтернатив немного предпочтительнее другой**
4	Предпочтение выше среднего	Промежуточная градация между средним и умеренно сильным предпочтением
5	**Умеренно сильное предпочтение**	**Опыт эксперта позволяет считать одну из альтернатив явно предпочтительнее другой**
6	Сильное предпочтение	Промежуточная градация между умеренно сильным и очень сильным предпочтением
7	**Очень сильное(очевидное) предпочтение**	**Опыт эксперта позволяет считать одну из альтернатив гораздо предпочтительнее другой: доминирование альтернативы подтверждено практикой**
8	Очень, очень сильное предпочтение	Промежуточная градация между очень сильным и абсолютным предпочтением
9	**Абсолютное предпочтение**	**Очевидность подавляющей предпочтительности одной альтернативы над другой имеет неоспоримое подтверждение**

Числа из этой шкалы используются, чтобы показать, во сколько раз элемент с большей оценкой предпочтительности доминирует элемент с меньшей оценкой относительно общего для них критерия или свойства.

В МАИ и МАС доминирование одного объекта над другим бывает а) по предпочтению; б) по важности; в) по вероятности.

При операции парного сравнения используют значения обратных оценок предпочтения: если преимущество i-той альтернативы по сравнению с j-той имеет одно из приведенных выше значений, то оценка предпочтения i-той альтернативы над j-той будет иметь обратное значение. То есть в МАИ все матрицы парных сравнений (МПС) являются обратно симметричными.

3. Математическая обработка матриц парных сравнений для нахождения локальных и глобальных приоритетов.

При точном процессе определения вектора локальных приоритетов задача сводится к нахождению собственного вектора матрицы парных сравнений:

$$A \cdot X = \lambda \cdot X,$$

где A – матрица парных сравнений (МПС), X – n-мерный вектор, составленный из искомых приоритетов, λ - собственное значение МПС;

и последующего нормирования этого вектора:

$$\sum x_i = 1.$$

В рассматриваемой задаче искомым является вектор, соответствующий максимальному собственному значению.

Вектор локальных приоритетов может быть приближенно вычислен упрощенным способом:

1. Для каждой строки матрицы парных сравнений находим среднее геометрическое ее элементов:

$$a_{ij} = (a_{ij}{}^{1} \cdot a_{ij}{}^{2} \cdot \ldots \cdot a_{ij}{}^{s})^{\frac{1}{s}}.$$

2. Находим сумму всех этих средних геометрических.

3. Делим каждое среднее геометрическое на их сумму(«нормировка на единицу»). Результат - вектор локальных приоритетов данной матрицы.

В СППР NooTron определение вектора локальных приоритетов выполняется путем нахождения собственного вектора матрицы парных сравнений. Это трудоемкая задача (если «вручную»), но в состав практически всех математических пакетов включены средства для нахождения собственных значений и векторов матриц – Eigenvalues, Eigenvectors. При разработке МАИ для СППР была использована библиотека Efficient Java Matrix Library (EJML), что позволяет быстро и эффективно проводить матричные расчеты.

В МАИ есть возможность проверки согласованности экспертных оценок, т.е. чисел в каждой матрице парных сравнений. Для контроля согласованности этих оценок вводятся две связанные характеристики - индекс согласованности (CI) и отношение согласованности (CR):

$$C.I. = \frac{\lambda_{max} - n}{n - 1},$$

$$C.R. = \frac{C.I.}{P_n},$$

где P_n – это индекс согласованности для положительной обратно симметричной матрицы случайных оценок размера $n \times n$; элементы этой матрицы получены случайным выбором из множества допустимых оценок, т.е. из чисел ряда {1/9, 1/8, 1/7, 1/6, 1/5, 1/4, 1/3, 1/2, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.

Таблица 3.1.3 – Значения индекса согласованности

N	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
P_n	0	0	0.58	0.90	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49

Допустимым считается отношение согласованности (CR), не превышающее 10 - 20%. Если CR выходит из этих пределов, то экспертам необходимо исследовать задачу и проверить свои оценки.

В результате обработки матриц получаем один вектор локальных приоритетов критериев размерности m (m - число критериев) и m векторов локальных приоритетов альтернатив размерности n (n - число альтернатив). Вектор локальных приоритетов критериев показывает их относительную значимость в задаче.

Вектор глобальных приоритетов альтернатив по отношению к цели вычисляется так: каждый компонент этого m-вектора – это скалярное произведение вектора локальных приоритетов критериев на m-вектор, составленный из локальных приоритетов альтернативы по данным критериям («профиль альтернативы»).

Профили дают в относительном виде достоинства и недостатки каждой из альтернатив и могут использоваться для определения путей улучшения альтернативы, например, для повышения конкурентоспособности.

Вектор глобальных приоритетов – это и есть решение задачи многокритериального ранжирования. На основании его можно, например, решить задачу выбора: альтернатива с максимальным значением глобального приоритета является лучшей по совокупности критериев с учётом относительной важности последних.

Подраздел № 3
Метод анализа иерархий в СППР NooTron

В СППР NooTron методом анализа иерархий можно решить многокритериальную задачу, структура которой представлена в виде трёхуровневой иерархии (см. **рис. 3.8.1**). В следующем релизе будет добавлена возможность решения задачи с четырёхуровневой иерархией.

Входные данные:

- **Цель** – краткое описание задачи; составляет первый уровень иерархии. В МАИ цель чаще всего начинается словами: выбрать, ранжировать, найти и т. п. Например, выбор специальности, ранжировать студентов, найти лучший вариант работы. Максимальная длина – **80** символов.
- **Критерии** – количественная или качественная характеристика, существенная для суждения об объекте; составляют второй уровень иерархии. В СППР NooTron можно задавать от **2** до **10** критериев, причиной такого ограничения является то, что МАИ адекватно работает только с небольшим количеством критериев. Максимальная длина наименования критерия – **20** символов.
- **Альтернативы** – объекты, среди которых необходимо сделать выбор; составляют третий уровень иерархии. В СППР NooTron можно задавать от **2** до **10**альтернатив, т.к. МАИ адекватно работает также и с небольшим количеством альтернатив. Максимальная длина наименования альтернативы – **20**символов.

Пример решения задачи

1. Постановка задачи

Постановка задачи метода анализа иерархий осуществляется на странице «Ввод данных». Здесь необходимо задать входные данные, иначе переход к следующей странице не станет возможным – кнопка «Далее» становится активной лишь после заполнения всех полей.

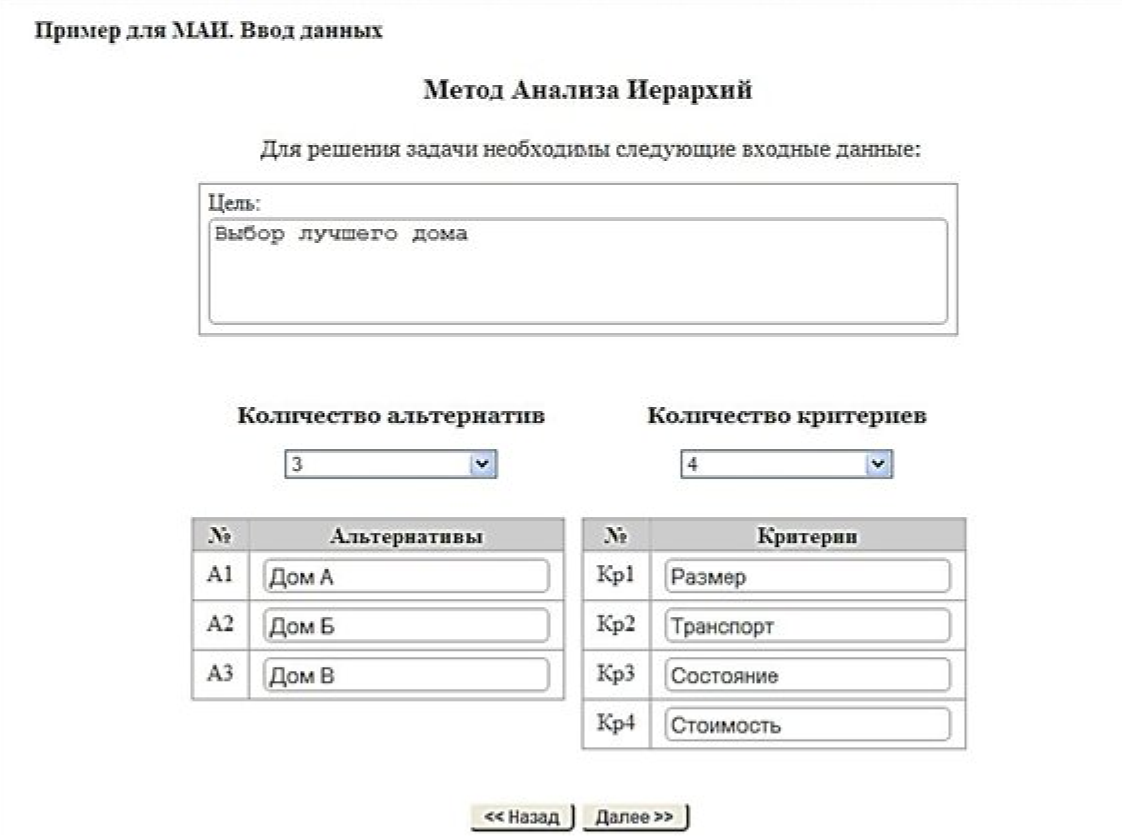


Рисунок 3.1.2 – Пример заполнения страницы «Ввод данных»

После нажатия кнопки «Далее» происходит переход к странице «Решение».

2. Решение задачи

Решение задачи осуществляется при заполнении частей страницы «Решение». Количество частей страницы зависит от количества выбранных критериев – *(количество критериев + 1) частей страницы.*

На каждой из них необходимо заполнить матрицы парных сравнений (МПС).

Заполнение МПС

Для заполнения МПС можно использовать **шкалу Саати**, если объекты сравниваются относительно качественной характеристики (например, удобство, состояние и т. п.), или шкалу отношений, если объекты сравниваются относительно количественной характеристики (например, длина, цена и т. п.).

Для того, чтобы сравнить объекты по шкале отношений необходимо выбрать переключатель «Шкалу отношений (Шк.Отн.)», и в появившуюся строку «Шк.Отн.» ввести количественные значения объектов по характеристике, относительно которой выполняется сравнение (см. **рис. 3.7**).

На этой странице для активации кнопки «Далее» необходимо заполнить корректно все необходимые поля таблицы – те поля, что **НЕ помечены «–»** и нажать кнопку «Вычислить».

После этого, если поля МПС были заполнены корректно, происходит вычисление локальных приоритетов и заполнение таблицы индексов.

Опишем показатели этой таблицы:

- **DIM –** размер МПС;
- **Lam –** максимальное собственное значение МПС;
- **CI –** индекс согласованности МПС;
- **CR –** отношение согласованности МПС.

Первые три показателя используются для нахождения последнего (CR), который показывает, насколько согласованы суждения об объектах. Значение CR считается допустимым, если не превышает 0.10-0.20. Иначе – рекомендуется пересмотреть оценки.

На первой части страницы «Решение» – «ШАГ 1» необходимо сравнить заданные критерии относительно цели. Чаще всего, для этого используют шкалу Саати.

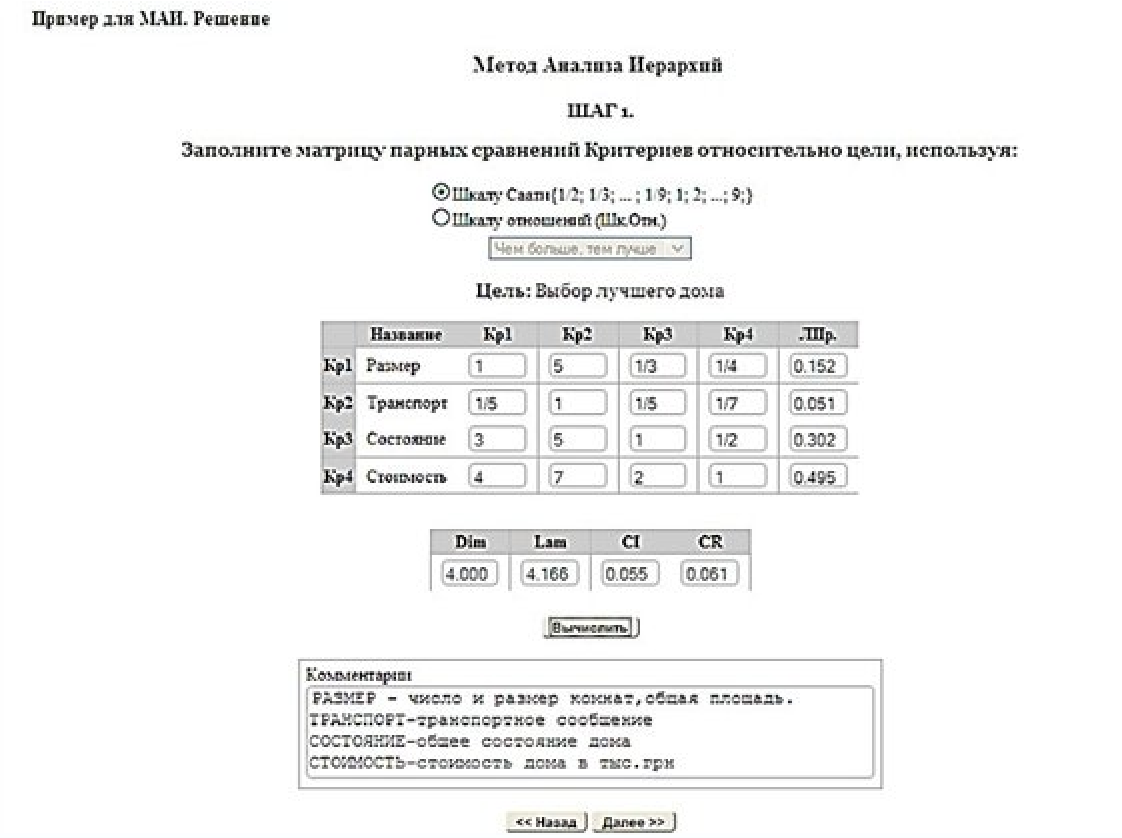


Рисунок 3.1.3 – Пример заполнения страницы «Решение: ШАГ1.»

После нажатия кнопки «Далее» происходит переход к следующей части страницы «Решение: ШАГ 2».

На второй части страницы «Решение» – «ШАГ2» необходимо сравнить заданные альтернативы относительно каждого из заданных критериев.

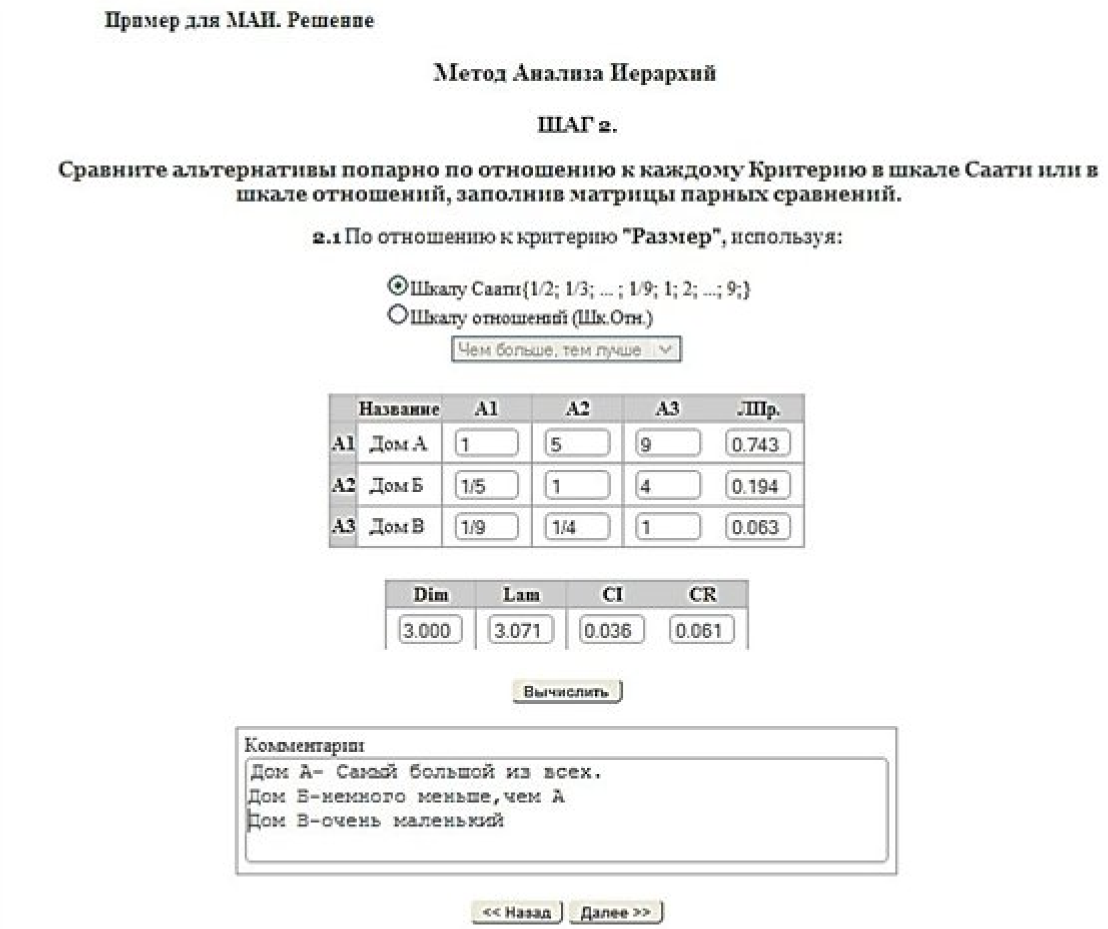


Рисунок 3.1.4 – Пример заполнения страницы «Решение: ШАГ2.1»

После нажатия кнопки «Далее» происходит переход к следующей части страницы «Решение: ШАГ2.2».

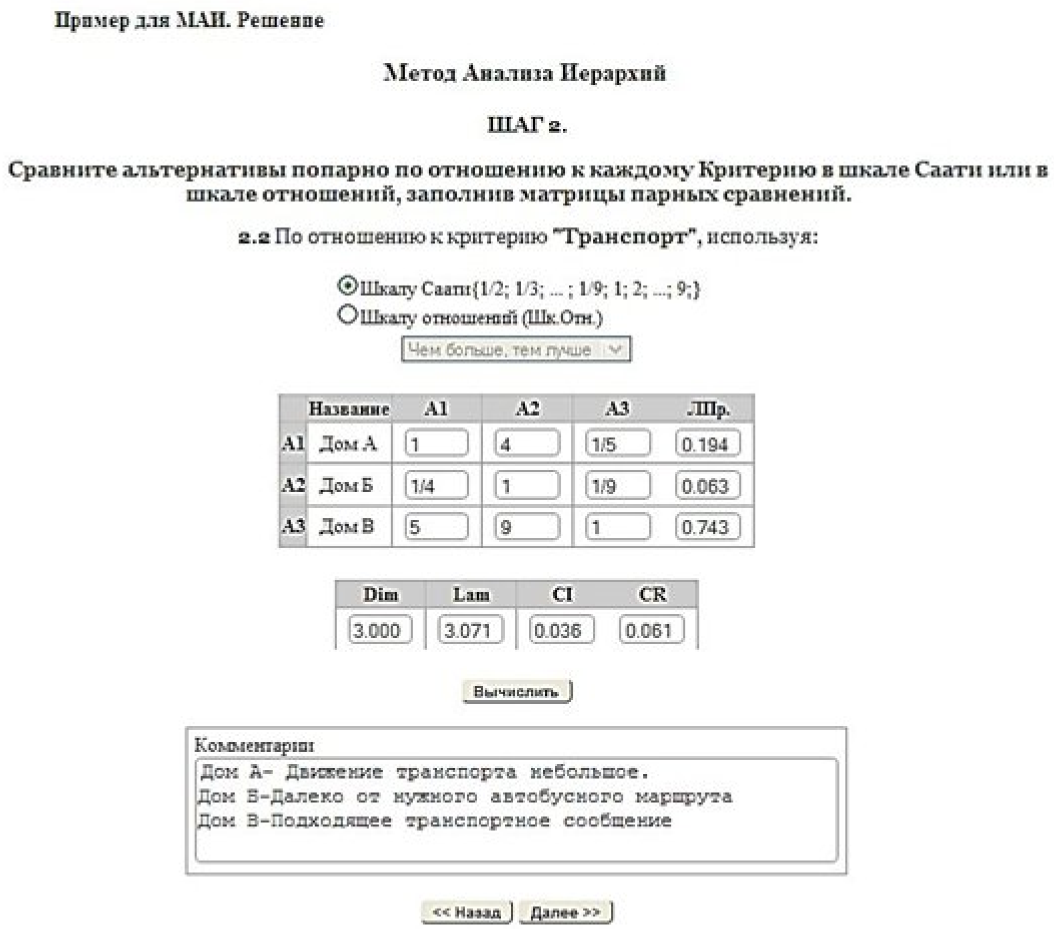


Рисунок 3.1.5 – Пример заполнения страницы «Решение: ШАГ2.2»

После нажатия кнопки «Далее» происходит переход к следующей части страницы «Решение: ШАГ2.3».

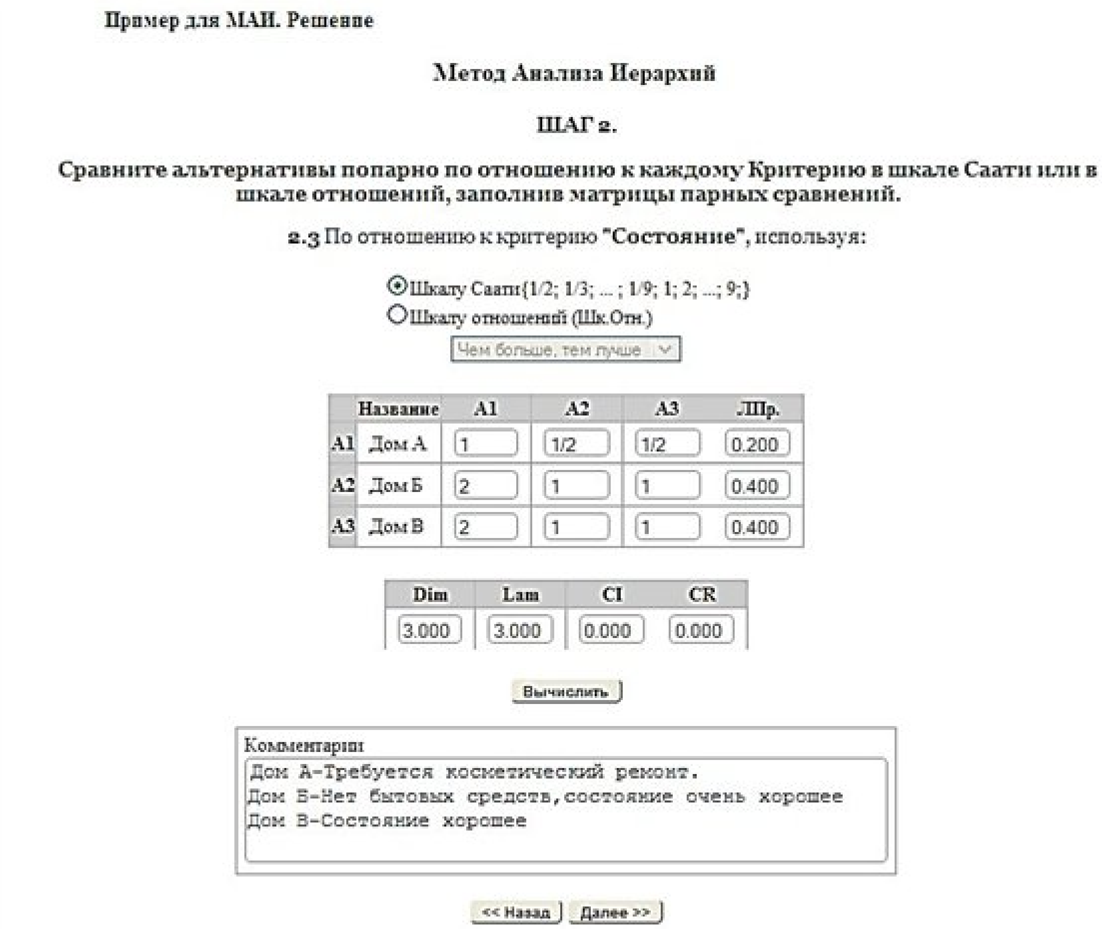


Рисунок 3.1.6 – Пример заполнения страницы «Решение: ШАГ2.3»

После нажатия кнопки «Далее» происходит переход к следующей части страницы «Решение: ШАГ2.4».

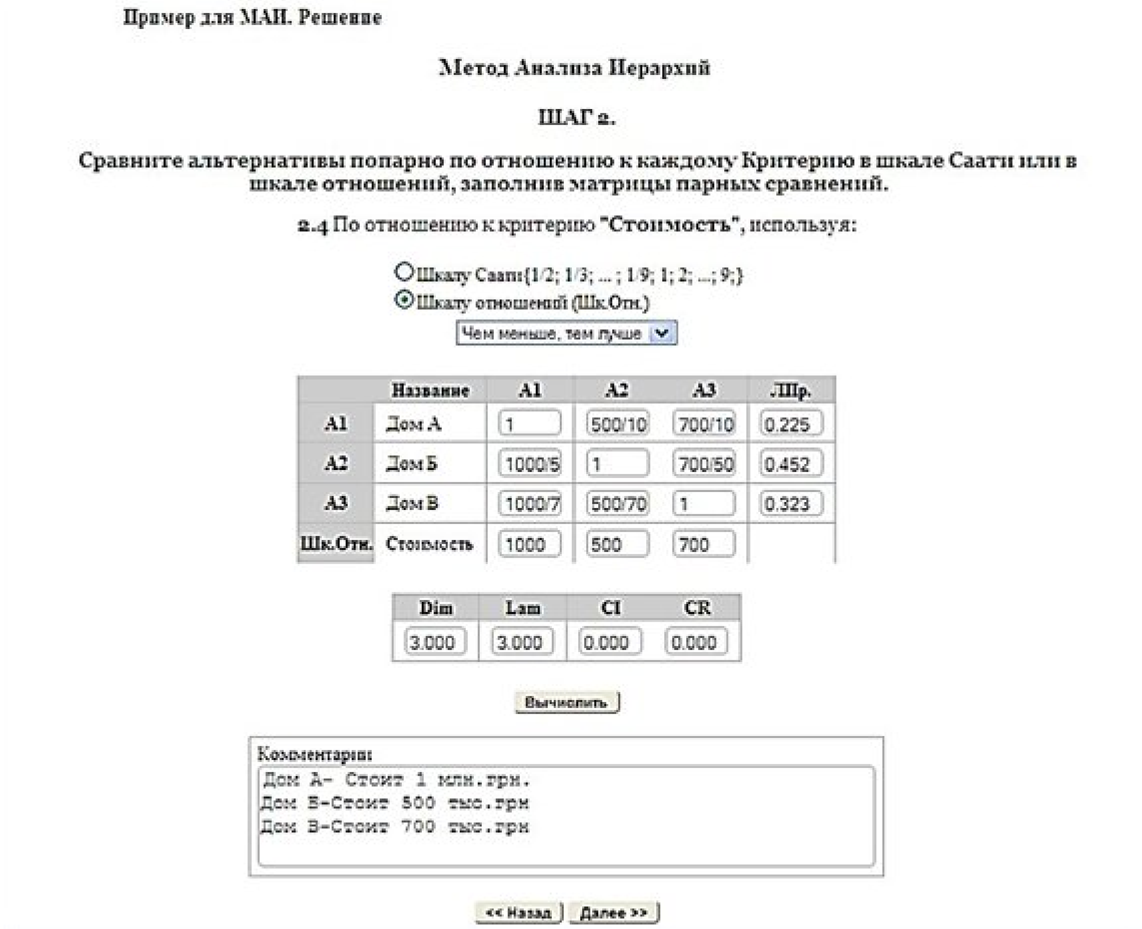


Рисунок 3.1.7 – Пример заполнения страницы «Решение: ШАГ2.4»

После нажатия кнопки «Далее» происходит переход к странице «Результат».

3. Результат

Результат решения задачи методом анализа иерархий представлен на странице «Результат» в виде двух таблиц – таблицы, где указаны все найденные локальные приоритеты и таблицы, где указаны ранжированные глобальные приоритеты альтернатив – и диаграммы глобальных приоритетов альтернатив.

Альтернатива с наибольшим значением глобального приоритета является лучшей для данной цели.

Пример для МАИ. Результат

Метод Анализа Иерархий

1. Матрица приоритетов Критериев относительно цели и Альтернатив относительно каждого из критериев:

	Пр.Кр.	Дом А	Дом Б	Дом В
Размер	0.152	0.743	0.194	0.063
Транспорт	0.051	0.194	0.063	0.743
Состояние	0.302	0.200	0.400	0.400
Стоимость	0.495	0.225	0.452	0.323

2.Глобальные приоритеты Альтернатив:

№	Альтернативы	Гл. Пр.
I	Дом А	0.295
II	Дом Б	0.377
III	Дом В	0.328

<< Назад | Далее >>

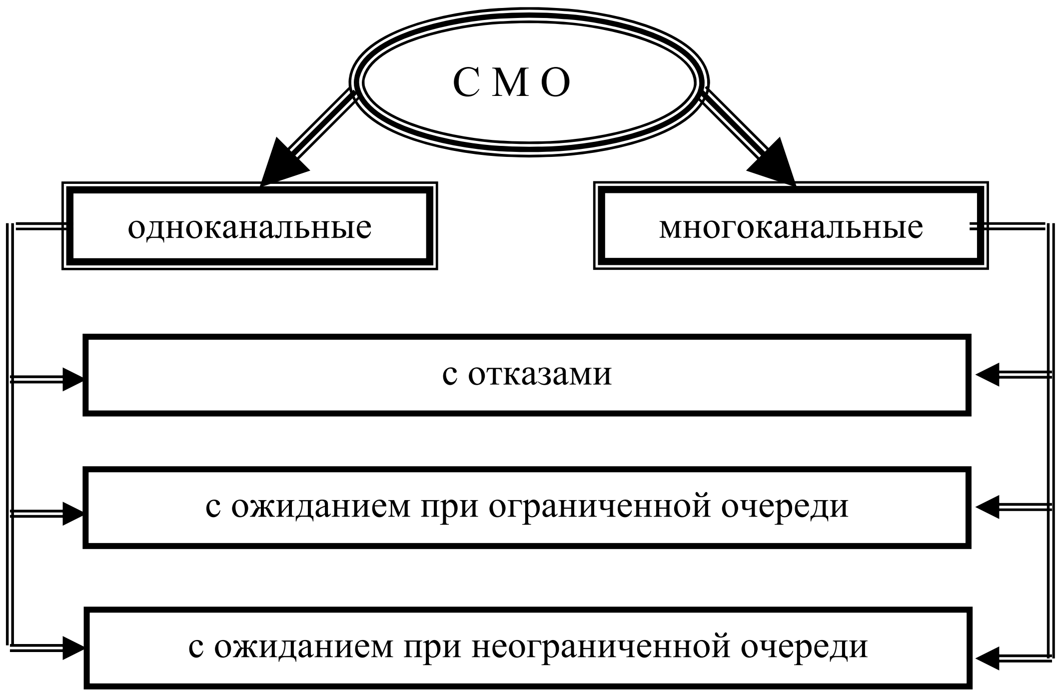
Рисунок 3.1.8 – Пример страницы «Результат»

При помощи кнопок «Назад» и «Далее» можно переходить к тем страницам, где необходимо скорректировать входные данные, значения в матрицах парных сравнений.

1. Классификация систем массового обслуживания и их показатели эффективности

Системы, в которых в случайные моменты времени возникают заявки на обслуживание и имеются устройства для обслуживания этих заявок, называются ***системами массового обслуживания*** **(СМО).**

СМО могут быть классифицированы по признаку организации обслуживания следующим образом:



Системы с отказами не имеют очередей.

Системы с ожиданием имеют очереди.

Заявка, поступившая в момент, когда все каналы обслуживания заняты:

- покидает систему с отказами;
- становится в очередь на обслуживание в системах с ожиданием при неограниченной очереди или на свободное место при ограниченной очереди;
- покидает систему с ожиданием при ограниченной очереди, если в этой очереди нет свободного места.

В качестве меры эффективности экономической СМО рассматривают сумму потерь времени:

- на ожидание в очереди;
- на простои каналов обслуживания.

Для всех видов СМО используются следующие ***показатели эффективности***:

- ***относительная пропускная способность*** - это средняя доля поступающих заявок, обслуживаемых системой;
- ***абсолютная пропускная способность*** - это среднее число заявок, обслуживаемых системой в единицу времени;
- ***вероятность отказа*** - это вероятность того, что заявка покинет систему без обслуживания;
- ***среднее число занятых каналов*** - для многоканальных СМО.

Показатели эффективности СМО рассчитываются по формулам из специальных справочников (таблиц). Исходными данными для таких расчетов являются результаты моделирования СМО.

2. Моделирование системы массового обслуживания: основные параметры, граф состояний

При всем многообразии СМО они имеют ***общие черты***, которые позволяют унифицировать их моделирование ***для нахождения наиболее эффективных вариантов организации таких систем***.

Для моделирования СМО необходимо иметь следующие исходные данные:

- основные параметры;
- граф состояний.

Результатами моделирования СМО являются вероятности ее состояний, через которые выражаются все показатели ее эффективности.

Основные параметры для моделирования СМО включают:

- характеристики входящего потока заявок на обслуживание;
- характеристики механизма обслуживания.

Рассмотрим ***характеристики потока заявок***.

Поток заявок - последовательность заявок, поступающих на обслуживание.

Интенсивность потока заявок λ - среднее число заявок, поступающих в СМО в единицу времени.

Потоки заявок бывают простейшими и отличными от простейших.

Для простейших потоков заявок используются модели СМО.

Простейшим, или ***пуассоновским*** называется поток, являющийся *стационарным*, *одинарным* и в нем *отсутствуют последействия*.

Стационарность означает неизменность интенсивности поступления заявок с течением времени.

Одинарным поток заявок является в том случае, когда за малый промежуток времени вероятность поступления более чем одной заявки близка к нулю.

Отсутствие последействия заключается в том, что число заявок, поступивших в СМО за один интервал времени, не влияет на количество заявок, полученных за другой интервал времени.

Для отличных от простейших потоков заявок используются имитационные модели.

Рассмотрим ***характеристики механизма обслуживания***.

Механизм обслуживания характеризуется:

- ***числом*** n ***каналов обслуживания***;
- производительностью канала, или ***интенсивностью обслуживания*** μ - средним числом заявок, обслуживаемых одним каналом в единицу времени;
- дисциплиной очереди (например, ***объемом очереди*** m, порядком отбора из очереди в механизм обслуживания и т.п.).

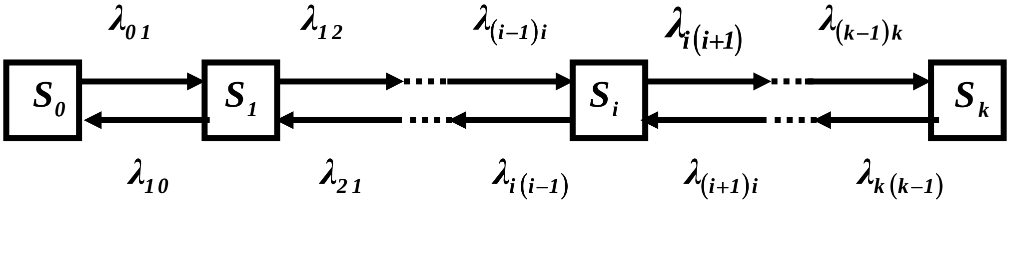
Граф состояний описывает функционирование системы обслуживания как переходы из одного состояния в другое под действием потока заявок и их обслуживания.

Для построения графа состояний СМО необходимо:

- составить перечень всех возможных состояний СМО;
- представить перечисленные состояния графически и отобразить возможные переходы между ними стрелками;
- взвесить отображенные стрелки, т.е. приписать им числовые значения интенсивностей переходов, определяемые интенсивностью потока заявок и интенсивностью их обслуживания.

3. Вычисление вероятностей состояний системы массового обслуживания

Граф состояний СМО со ***схемой "гибели и рождения"*** представляет собой линейную цепочку, где каждое из средних состояний имеет прямую и обратную связь с каждым из соседних состояний, а крайние состояния только с одним соседним:



Число состояний в графе на единицу больше, чем суммарное число каналов обслуживания и мест в очереди.

СМО может быть в любом из своих возможных состояний, поэтому ожидаемая интенсивность выхода из какого-либо состояния равна ожидаемой интенсивности входа системы в это состояние. Отсюда система уравнений для определения вероятностей состояний при простейших потоках будет иметь вид:

$$\begin{cases} \lambda_{01} \cdot P_0 = \lambda_{10} \cdot P_1 , \\ (\lambda_{10} + \lambda_{12}) \cdot P_1 = \lambda_{01} \cdot P_0 + \lambda_{21} \cdot P_2 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ (\lambda_{i(i-1)} + \lambda_{i(i+1)}) \cdot P_i = \lambda_{(i-1)i} \cdot P_{i-1} + \lambda_{(i+1)i} \cdot P_{i+1} , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots , \\ (\lambda_{(k-1)(k-2)} + \lambda_{(k-1)k}) \cdot P_{k-1} = \lambda_{(k-2)(k-1)} \cdot P_{k-2} + \lambda_{k(k-1)} \cdot P_k , \\ \lambda_{k(k-1)} \cdot P_k = \lambda_{(k-1)k} \cdot P_{k-1} ; \end{cases}$$

где P_i - вероятность того, что система находится в состоянии S_i, $i = \overline{0,k}$;

$\lambda_{i(i+1)}$ $(\lambda_{i(i-1)})$ - интенсивность перехода, или среднее число переходов системы в единицу времени из состояния S_i в состояние S_{i+1} (S_{i-1}).

Используя эту систему уравнений, а также уравнение

$$\sum_{i=0}^{k} P_i = 1 ,$$

вероятность P_i любого i-ого состояния $(i = \overline{0,k})$ можно вычислить по следующему ***общему правилу***:

вероятность нулевого состояния рассчитывается как

$$P_0 = \Big(1 + \lambda_{01}/\lambda_{10} + \lambda_{01} \cdot \lambda_{12}/\lambda_{21} \cdot \lambda_{10} + \ldots + \lambda_{01} \cdot \lambda_{12} \cdots \lambda_{(i-1)i}/\lambda_{i(i-1)} \cdots \lambda_{21} \cdot \lambda_{10} + \\ + \ldots + \lambda_{01} \cdot \lambda_{12} \cdots \lambda_{(i-1)i} \cdots \lambda_{(k-1)k}/\lambda_{k(k-1)} \cdots \lambda_{i(i-1)} \cdots \lambda_{21} \cdot \lambda_{10}\Big)^{-1} ,$$

а затем берется дробь, в числителе которой стоит произведение всех интенсивностей потоков по стрелкам, ведущим слева направо от состояния S_0 *до состояния* S_i, *а в знаменателе - произведение всех интенсивностей по стрелкам, идущим справа налево от состояния* S_i *до состояния* S_0, *и эта дробь умножается на рассчитанную вероятность* P_0

$$P_i = \left(\lambda_{01} \cdot \lambda_{12} \cdots \lambda_{(i-1)i}/\lambda_{i(i-1)} \cdots \lambda_{21} \cdot \lambda_{10}\right) \cdot P_0 .$$

Выводы по разделу

Системы массового обслуживания имеют один или несколько каналов обслуживания и могут иметь ограниченную или неограниченную очередь (системы с ожиданием) заявок на обслуживание, не иметь очереди (системы с отказами). Заявки на обслуживание возникают в случайные моменты времени. Системы массового обслуживания характеризуются следующими показателями эффективности: относительная пропускная способность, абсолютная пропускная способность, вероятность отказа, среднее число занятых каналов.

Моделирование систем массового обслуживания осуществляется для нахождения наиболее эффективных вариантов их организации и предполагает следующие исходные данные для этого: основные параметры, граф состояний. К таким данным относятся следующие: интенсивность потока заявок, количество каналов обслуживания, интенсивность обслуживания и объем очереди. Число состояний в графе на единицу больше, чем сумма числа каналов обслуживания и мест в очереди.

Вычисление вероятностей состояний системы массового обслуживания со схемой «гибели и рождения» осуществляется по общему правилу.

Вопросы для самопроверки

- Какие системы называются системами массового обслуживания?
- Как классифицируются системы массового обслуживания по признаку их организации?
- Какие системы массового обслуживания называются системами с отказами, а какие – с ожиданием?
- Что происходит с заявкой, поступившей в момент времени, когда все каналы обслуживания заняты?
- Что рассматривают в качестве меры эффективности экономической системы массового обслуживания?
- Какие используются показатели эффективности системы массового обслуживания?
- Что служит исходными данными для расчетов показателей эффективности систем массового обслуживания?
- Какие исходные данные необходимы для моделирования систем массового обслуживания?
- Через какие результаты моделирования системы массового обслуживания выражают все показатели ее эффективности?
- Что включают основные параметры для моделирования систем массового обслуживания?
- Чем характеризуются потоки заявок на обслуживание?
- Чем характеризуются механизмы обслуживания?
- Что описывает граф состояний системы массового обслуживания

- Что необходимо для построения графа состояний системы массового обслуживания?

- Что представляет собой граф состояний системы массового обслуживания со схемой «гибели и рождения»?

- Чему равно число состояний в графе состояний системы массового обслуживания?

- Какой вид имеет система уравнений для определения вероятностей состояний системы массового обслуживания?

- По какому общему правилу вычисляется вероятность любого состояния системы массового обслуживания?

Примеры решения задач

1. Построить граф состояний системы массового обслуживания и привести основные зависимости ее показателей эффективности.

Решение.

а) n-канальная СМО с отказами (задача Эрланга)

Основные параметры:

- каналов $\boldsymbol{n}$,
- интенсивность потока $\boldsymbol{\lambda}$,
- интенсивность обслуживания $\boldsymbol{\mu}$.

Возможные состояния системы:

$\boldsymbol{S_0}$ - все каналы свободны (ноль заявок в системе);

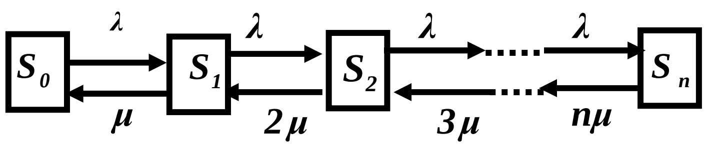
$\boldsymbol{S_1}$ - один канал занят, остальные свободны (одна заявка в системе);

$\boldsymbol{S_2}$ - два канала заняты, остальные свободны (две заявки в системе);

....

$\boldsymbol{S_n}$ - все $\boldsymbol{n}$ каналов заняты ($\boldsymbol{n}$ заявок в системе).

Граф состояний:



Показатели эффективности системы:

- относительная пропускная способность $\boldsymbol{q = 1 - P_n}$,
- абсолютная пропускная способность $\boldsymbol{A = \lambda \cdot q}$,
- вероятность отказа $\boldsymbol{P_{отк} = P_n}$,
- среднее число занятых каналов $\boldsymbol{\bar{z} = \frac{A}{\mu}}$.

б) n-канальная СМО с m-ограниченной очередью

Возможные состояния системы:

S_0 - все каналы свободны (ноль заявок в системе);

S_1 - один канал занят, остальные свободны (одна заявка в системе);

S_2 - два канала заняты, остальные свободны (две заявки в системе);

....

S_n - все n каналов заняты (n заявок в системе), ноль заявок в очереди;

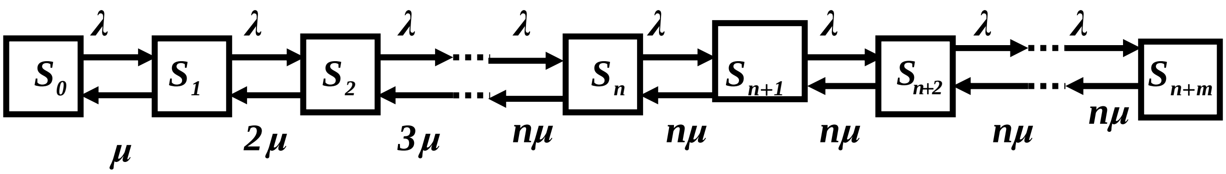
S_{n+1} - все каналы заняты, одна заявка в очереди;

S_{n+2} - все каналы заняты, две заявки в очереди;

....

S_{n+m} - все каналы заняты, m заявок в очереди.

Граф состояний:



в) Одноканальная СМО с неограниченной очередью

Возможные состояния системы:

S_0 - все каналы свободны (ноль заявок в системе);

S_1 - канал занят, ноль заявок в очереди;

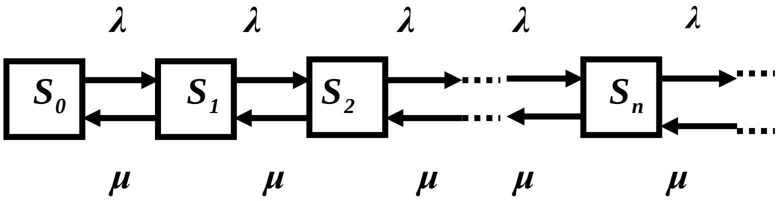
S_2 - канал занят, одна заявка в очереди;

....

S_n - канал занят, $n-1$ заявка в очереди;

....

Граф состояний:



Показатели эффективности системы:

- среднее число заявок в системе $L_{сист} = L_{очер} + 1/\mu$,
- среднее время пребывания заявки в системе $W_{сист} = \left(1/\lambda\right) \cdot L_{сист}$,
- среднее число заявок в очереди $L_{очер} = \dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^2}{1 - \lambda/\mu}$,

- среднее время пребывания заявки в очереди $W_{очер} = \left(1/\lambda\right) \cdot L_{очер}$,
- абсолютная пропускная способность $A = \lambda$,
- относительная пропускная способность $q = 1$.

г) n-канальная СМО с неограниченной очередью

Возможные состояния системы:

S_0 - все каналы свободны (ноль заявок в системе);

S_1 - один канал занят, остальные свободны (одна заявка в системе);

S_2 - два канала заняты, остальные свободны (две заявки в системе);

....

S_n - все n каналов заняты (n заявок в системе), ноль заявок в очереди;

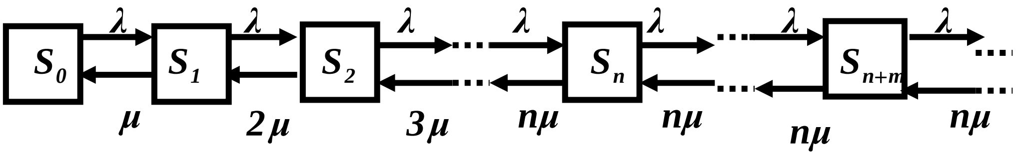
S_{n+1} - все каналы заняты, одна заявка в очереди;

....

S_{n+m} - все каналы заняты, m заявок в очереди;

....

Граф состояний:



Показатели эффективности системы:

- среднее число занятых каналов $\bar{z} = \lambda/\mu$,
- среднее число заявок в системе $L_{сист} = L_{очер} + 1/\mu$,
- среднее число заявок в очереди $L_{очер} = \dfrac{\left(\lambda/\mu\right)^2}{1 - \lambda/\mu}$,
- среднее время пребывания заявки в очереди $W_{очер} = \left(1/\lambda\right) \cdot L_{очер}$.

2. Вычислительный центр имеет три ЭВМ. В центр поступает на решение в среднем четыре задачи в час. Среднее время решения одной задачи - полчаса. Вычислительный центр принимает и ставит в очередь на решение не более трех задач. Необходимо оценить эффективность центра.

РЕШЕНИЕ. Из условия ясно, что имеем многоканальную СМО с ограниченной очередью:

- число каналов $n = 3$;
- интенсивность потока заявок $\lambda = 4$ (задача / час);
- время обслуживания одной заявки $t_{об} = 0.5$ (час / задача), интенсивность обслуживания $\mu = \dfrac{1}{t_{об}} = 2$ (задача / час);
- длина очереди $m = 3$.

Перечень возможных состояний:

S_0 - заявок нет, все каналы свободны;

S_1 - один канал занят, два свободны;

S_2 - два канала заняты, один свободен;

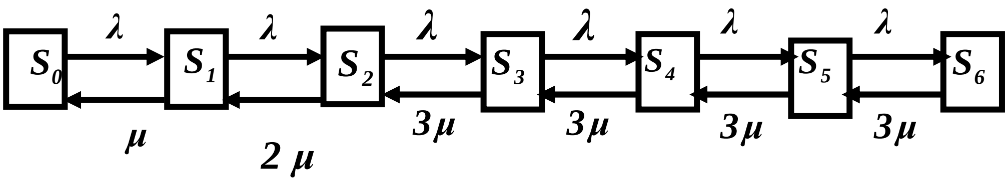
S_3 - три канала заняты;

S_4 - три канала заняты, одна заявка в очереди;

S_5 - три канала заняты, две заявки в очереди;

S_6 - три канала заняты, три заявки в очереди.

Граф состояний:



Рассчитаем вероятность состояния S_0:

$$P_0 = \left(1 + \lambda/\mu + \lambda\cdot\lambda/2\mu\cdot\mu + \lambda\cdot\lambda\cdot\lambda/3\mu\cdot2\mu\cdot\mu + \lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda/3\mu\cdot3\mu\cdot2\mu\cdot\mu + \right.$$
$$+ \lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda/3\mu\cdot3\mu\cdot2\mu\cdot\mu + \lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda/3\mu\cdot3\mu\cdot3\mu\cdot2\mu\cdot\mu +$$
$$\left. + \lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda\cdot\lambda/3\mu\cdot3\mu\cdot3\mu\cdot3\mu\cdot2\mu\cdot\mu\right) = 0.122.$$

Показатели эффективности:

- вероятность отказа (все три ЭВМ заняты и три заявки стоят в очереди)

$$P_{m+n} = \frac{\left(\lambda/\mu\right)^{m+n}}{n^m \cdot n!} \cdot P_0 = 0.048;$$

- относительная пропускная способность

$$q = 1 - P_{m+n} = 0.952;$$

- абсолютная пропускная способность

$$A = \lambda \cdot q = 3.808;$$

- среднее число занятых ЭВМ

$$\bar{z} = \frac{A}{\mu} = 1.904.$$

3. (Задача с использованием СМО с отказами.) В ОТК цеха работают три контролера. Если деталь поступает в ОТК, когда все контролеры заняты обслуживанием ранее поступивших деталей, то она проходит непроверенной. Среднее число деталей, поступающих в ОТК в течение часа, равно 24, среднее время, которое затрачивает один контролер на обслуживание одной детали, равно 5 мин. Определить вероятность того, деталь пройдет ОТК необслуженной, насколько загружены контролеры и сколько их необходимо поставить, чтобы $P^*_{обс} \geq 0,95$ (* - заданное значение $P_{обс}$).

РЕШЕНИЕ. По условию задачи $\lambda = 24 \quad дет./ч = 0,4 \quad дет/мин, \quad t_{обс} = 5 мин$, тогда $\mu = 0,2, \quad p = \lambda / \mu = 2$.

1) Вероятность простоя каналов обслуживания:

$$P_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu} + \frac{\lambda \cdot \lambda \cdot \lambda}{\mu \cdot 2\mu \cdot 3\mu}\right)^{-1} = \left(1 + p + p^2 \big/ 1 \cdot 2 + p^3 \big/ 1 \cdot 2 \cdot 3\right)^{-1} =$$

,

$$= \frac{1}{2^0/0!+2^1/1!+2^2/2!+2^3/3!} = \frac{1}{1+2+2+1,3} = 0,1587$$

где 0!=1.

2) Вероятность отказа в обслуживании:

$P_{отк} = 2^3 \cdot 0,1587 / 3! = 0,21$.

3) Вероятность обслуживания:

$P_{обс} = 1 - 0,21 = 0,79$.

4) Среднее число занятых обслуживанием каналов:

$\overline{n_з} = 2 \cdot 0,79 = 1,58$.

5) Доля каналов, занятых обслуживанием:

$k_з = 1,58 / 3 = 0,526$.

6) Абсолютная пропускная способность:

$A = 0,4 \cdot 0,79 = 0,316$.

При $n = 3 \quad P_{обс} = 0,79 \leq P^*_{обс} = 0,95$. Произведя аналогичные расчеты для $n = 4$, получим

$P_0 = 0,14, \quad P_{отк} = 0,093, \quad P_{обс} = 0,907$.

Так как $P_{обс} = 0,907 \leq P^*_{обс} = 0,95$, то произведя расчеты для $n = 5$, получим

$P_0 = 0,137, \quad P_{отк} = 0,035, \quad P_{обс} = 0,965 \geq P^*_{обс} = 0,95$.

ОТВЕТ. Вероятность того, что при $n = 3$ деталь пройдет ОТК необслуженной, составляет 21%, и контролеры будут заняты обслуживанием на 53%.

Чтобы обеспечить вероятность обслуживания более 95%, необходимо не менее пяти контролеров.

4. (Задача с использованием СМО с неограниченным ожиданием.) Сберкасса имеет трех контролеров-кассиров ($n = 3$) для обслуживания вкладчи-

ков. Поток вкладчиков поступает в сберкассу с интенсивностью $\lambda = 30$ чел./ч. Средняя продолжительность обслуживания контролером-кассиром одного вкладчика $\bar{t}_{\text{обс}} = 3$ мин.

Определить характеристики сберкассы как объекта СМО.

РЕШЕНИЕ. Интенсивность потока обслуживания $\mu = 1 / \bar{t}_{\text{обс}} = 1 / 3 = 0,333$, интенсивность нагрузки $p = \dfrac{\lambda}{\mu} = \dfrac{30 чел./час}{0,333 чел./мин} = \dfrac{30/60 \, чел./мин}{0,333 чел./мин} = 1,5$.

1) Вероятность простоя контролеров-кассиров в течение рабочего дня (см. предыдущую задачу №3):

$$P_0 = \frac{1}{\dfrac{1,5^0}{0!} + \dfrac{1,5^1}{1!} + \dfrac{1,5^2}{2!} + \dfrac{1,5^3}{3!} + \dfrac{1,5^4}{3!(3-1,5)}} = 0,210 .$$

2) Вероятность застать всех контролеров-кассиров занятыми:

$$P_n = \frac{1,5^3}{3!} 0,21 = 0,118 .$$

3) Вероятность очереди:

$$P_{\text{оч}} = \frac{1,5^4}{3!(3-1,5)} 0,21 = 0,118 .$$

4) Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{\text{оч}} = \frac{1,5^4}{(3-1)!(3-1,5)^2} 0,21 = 0,236 .$$

5) Среднее время ожидания заявки в очереди:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{0,236}{0,5} = 0,472 \text{ мин.}$$

6) Среднее время пребывания заявки в СМО:

$$\bar{t}_{\text{смо}} = 0,472 + 3 = 3,472 \text{ мин.}$$

7) Среднее число свободных каналов:

$$\bar{n}_{\text{св}} = 3 - 1,5 = 1,5 .$$

8) Коэффициент занятости каналов обслуживания:

$$k_{\text{з}} = \frac{1,5}{3} = 0,5 .$$

9) Среднее число посетителей в сберкассе:

$$\bar{z} = 0,236 + 1,5 = 1,736 \text{ чел.}$$

ОТВЕТ. Вероятность простоя контролеров-кассиров равна 21% рабочего времени, вероятность посетителю оказаться в очереди составляет 11,8%, среднее число посетителей в очереди 0,236 чел., среднее время ожидания посетителями обслуживания 0,472 мин.

5. (Задача с применением СМО с ожиданием и с ограниченной длиной очереди.) Магазин получает ранние овощи из пригородных теплиц. Автомобили с грузом прибывают в разное время с интенсивностью $\lambda = 6$ машин в день. Подсобные помещения и оборудование для подготовки овощей к продаже позволяют обрабатывать и хранить товар, привезенный двумя автомашинами ($m = 2$). В магазине работают три фасовщика ($n = 3$), каждый из которых в среднем может обрабатывать товар с одной машины в течение $\bar{t}_{\text{обс}} = 4$ ч. Продолжительность рабочего дня при сменной работе составляет 12 ч.

Определить, какова должна быть емкость подсобных помещений, чтобы вероятность полной обработки товаров была $P^*_{\text{обс}} \geq 0,97$.

РЕШЕНИЕ. Определим интенсивность загрузки фасовщиков:

$p = \lambda / \mu = 6 / 3 = 2$, $\mu = 1 / \bar{t}_{\text{обс}} = 1 \cdot 12 / 4 = 3$ авт./дн.

1) Найдем вероятность простоя фасовщиков при отсутствии машин (заявок):

$$P_0 = 1 : \left\{ \frac{2^0}{0!} + \frac{2^1}{1!} + \frac{2^2}{2!} + \frac{2^3}{3!} + \frac{2^{3+1}}{3!(3-2)} \left[1 - \left(\frac{2}{3} \right)^2 \right] \right\} = 0,128,$$

причем 0!=1,0.

2) Вероятность отказа в обслуживании:

$$P_{\text{отк}} = P_{n+m} = 0,128 \frac{2^{3+2}}{3!3^2} = 0,075.$$

3) Вероятность обслуживания:

$P_{\text{обс}} = 1 - 0,075 = 0,925$.

Так как $P_{\text{обс}} = 0,925 < P^*_{\text{обс}} = 0,97$, произведем аналогичные вычисления для $m = 3$, получим

$P_0 = 0,122$, $P_{\text{отк}} = 0,048$, $P_{\text{обс}} = 0,952$.

Так как $P_{\text{обс}} = 0,952 < P^*_{\text{обс}} = 0,97$, примем $m = 4$.

Для этого случая

$P_0 = 0,12$, $P_{\text{отк}} = 0,028$, $P_{\text{обс}} = 0,972$,

$0,972 > 0,97$, емкость подсобных помещений необходимо увеличить до $m = 4$.

Для достижения заданной вероятности обслуживания можно увеличивать число фасовщиков, проводя последовательно вычисления СМО для $n = 4,\ 5$ и т.д. Задачу можно решить, увеличивая емкость подсобных поме-

Найдем остальные параметры СМО для рассчитанного случая при $P_0 = 0,12$, $P_{\text{отк}} = 0,028$, $P_{\text{обс}} = 0,972$,

щений, число фасовщиков, уменьшая время обработки товаров.

4) Абсолютная пропускная способность:

$A = 0,972 \cdot 6 = 5,832$ авт./дн.

5) Среднее число занятых обслуживанием каналов (фасовщиков):

$\bar{n}_{\text{зан}} = 5,832 / 3 = 1,944$.

6) Среднее число заявок в очереди:

$$\bar{L}_{\text{оч}} = \frac{2^4}{3 \cdot 3!} \cdot \frac{1 - (2/3)^4 (4 + 1 - 4 \cdot 2/3)}{(1 - 2/3)^2} \cdot 0,12 = 0,548 .$$

7) Среднее время ожидания обслуживания:

$$\bar{t}_{\text{оч}} = \frac{0,548}{6} = 0,09 \text{ дн.}$$

8) Среднее число машин в магазине:

$\bar{z} = 0,548 + 1,944 = 2,492$ авт.

9) Среднее время пребывания машины в магазине:

$$\bar{t}_{\text{смо}} = \frac{2,492}{6} = 0,415 \text{ дн.}$$

ОТВЕТ. Емкость подсобных помещений магазина должна вмещать товар, привезенный 4 автомашинами ($m = 4$), при этом вероятность полной обработки товара будет $P_{\text{обс}} = 0,972$.

Задания для самостоятельной работы

Для каждой из следующих ситуаций определить:

a) к какому классу относится объект СМО;

b) число каналов n;

c) длину очереди m;

d) интенсивность потока заявок λ;

e) интенсивность обслуживания одним каналом μ ;

f) количество всех состояний объекта СМО.

В ответах указать значения по каждому пункту, используя следующие сокращения и размерности:

a) ОО – одноканальная с отказами; МО – многоканальная с отказами; ОЖО – одноканальная с ожиданием с ограниченной очередью; ОЖН - одноканальная с ожиданием с неограниченной очередью; МЖО – многоканальная с ожиданием с ограниченной очередью; МЖН - многоканальная с ожиданием с неограниченной очередью;

b) n=**…** (единиц);

c) m=**…** (единиц);

d) λ=**xxx/xxx** (единиц /мин);

e) μ=**xxx/xxx** (единиц /мин);

f) (единиц).

1. Дежурный по администрации города имеет пять телефонов. Телефонные звонки поступают с интенсивностью 90 заявок в час, средняя продолжительность разговора составляет 2 мин.

2. На стоянке автомобилей возле магазина имеются 3 места, каждое из которых отводится под один автомобиль. Автомобили прибывают на стоянку с интенсивностью 20 автомобилей в час. Продолжительность пребывания автомобилей на стоянке составляет в среднем 15 мин. Стоянка на проезжей части не разрешается.

3. АТС предприятия обеспечивает не более 5 переговоров одновременно. Средняя продолжительность разговоров составляет 1 мин. На станцию поступает в среднем 10 вызовов в сек.

4. В грузовой речной порт поступает в среднем 6 сухогрузов в сутки. В порту имеются 3 крана, каждый из которых обслуживает 1 сухогруз в среднем за 8 ч. Краны работают круглосуточно. Ожидающие обслуживания сухогрузы стоят на рейде.

5. В службе «Скорой помощи» поселка круглосуточно дежурят 3 диспетчера, обслуживающие 3 телефонных аппарата. Если заявка на вызов врача к больному поступает, когда диспетчеры заняты, то абонент получает отказ. Поток заявок составляет 4 вызова в минуту. Оформление заявки длится в среднем 1,5 мин.

6. Салон-парикмахерская имеет 4 мастера. Входящий поток посетителей имеет интенсивность 5 человек в час. Среднее время обслуживания одного клиента составляет 40 мин. Длина очереди на обслуживание считается неограниченной.

7. На автозаправочной станции установлены 2 колонки для выдачи бензина. Около станции находится площадка на 2 автомашины для ожидания заправки. На станцию прибывает в среднем одна машина в 3 мин. Среднее время обслуживания одной машины составляет 2 мин.

8. На вокзале в мастерской бытового обслуживания работают три мастера. Если клиент заходит в мастерскую, когда все мастера заняты, то он уходит из мастерской, не ожидая обслуживания. Среднее число клиентов, обращающихся в мастерскую за 1 ч, равно 20. Среднее время, которое затрачивает мастер на обслуживание одного клиента, равно 6 мин.

9. АТС поселка обеспечивает не более 5 переговоров одновременно. Время переговоров в среднем составляет около 3 мин. Вызовы на станцию поступают в среднем через 2 мин.

10. На автозаправочной станции (АЗС) имеются 3 колонки. Площадка при станции, на которой машины ожидают заправку, может вместить не более одной машины, и если она занята, то очередная машина, прибывшая к станции, в очередь не становится, а проезжает на соседнюю станцию. В среднем машины прибывают на станцию каждые 2 мин. Процесс заправки одной машины продолжается в среднем 2,5 мин.

11. В небольшом магазине покупателей обслуживают два продавца. Среднее время обслуживания одного покупателя – 4 мин. Интенсивность потока покупателей – 3 человека в минуту. Вместимость магазина такова, что одновременно в нем в очереди могут находиться не более 5 человек. Покупатель, пришедший в переполненный магазин, когда в очереди уже стоят 5 человек, не ждет снаружи и уходит.

12. Железнодорожную станцию дачного поселка обслуживает касса с двумя окнами. В выходные дни, когда население активно пользуется железной дорогой, интенсивность потока пассажиров составляет 0,9 чел./мин. Кассир затрачивает на обслуживание пассажира в среднем 2 мин.

Для каждой из указанных в вариантах СМО интенсивность потока заявок равна λ и интенсивность обслуживания одним каналом μ. Требуется:

- составить перечень возможных состояний;
- построить граф состояний по схеме "гибели и размножения".

В ответе указать для каждой задачи:

- количество состояний системы;
- интенсивность перехода из последнего состояния в предпоследнее.

<u>Вариант № 1</u>

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 1 заявку
2. 2-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 31-канальная СМО с 1-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 31-канальная СМО с неограниченной очередью

<u>Вариант № 2</u>

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 2 заявки
2. 3-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 30-канальная СМО с 2-ограниченной очередью

4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 30-канальная СМО с неограниченной очередью

<u>Вариант № 3</u>

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 3 заявки
2. 4-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 29-канальная СМО с 3-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 29-канальная СМО с неограниченной очередью

<u>Вариант № 4</u>

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 4 заявки
2. 5-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 28-канальная СМО с 4-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 28-канальная СМО с неограниченной очередью

<u>Вариант № 5</u>

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 5 заявок
2. 6-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 27-канальная СМО с 5-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 27-канальная СМО с неограниченной очередью

<u>Вариант № 6</u>

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 6 заявок
2. 7-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 26-канальная СМО с 6-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 26-канальная СМО с неограниченной очередью

<u>Вариант № 7</u>

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 7 заявок
2. 8-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 25-канальная СМО с 7-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 25-канальная СМО с неограниченной очередью

<u>Вариант № 8</u>

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 8 заявок
2. 9-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 24-канальная СМО с 8-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 24-канальная СМО с неограниченной очередью

<u>Вариант № 9</u>

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 9 заявок
2. 10-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 23-канальная СМО с 9-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью

5. 23-канальная СМО с неограниченной очередью

Вариант № 10

1. одноканальная СМО с очередью длиной в 10 заявок
2. 11-канальная СМО с отказами **(задача Эрланга)**
3. 22-канальная СМО с 10-ограниченной очередью
4. Одноканальная СМО с неограниченной очередью
5. 22-канальная СМО с неограниченной очередью