Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)**

Институт «Машиностроения и автомобильного транспорта»

Кафедра «Автотранспортная и техносферная безопасность»

Методические указания к лабораторным работам по дисциплине «Интеллектуальные транспортные системы» для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению 23.04.01 «Технология транспортных процессов»

Составитель: Толков А.В.

Владимир – 2015 г.

Задача 1. Дан ряд $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$, где $a_n = \frac{12}{5(n^2+6n+8)}$

Найти сумму ряда аналитически. Вычислить значения частичных сумм ряда $S(N) = \sum_{n=0}^{N} a_n$ и найти величину погрешности при значениях N=10^2, 10^3, 10^4, 10^5. Определить количество верных цифр результатов.

Порядок решения задачи.

1. Найти сумму ряда S аналитически как предел частичных сумм ряда или с использованием средств Mathcad.

2. Сформировать вектор $N = \{10^2, 10^3, 10^4, 10^5\}$.

3. Вычислить значения частичных сумм $S(N_i)$ ряда при соответствующих значениях N_i.

4. Для каждой величины $S(N_i)$ вычислить абсолютную погрешность Δ, относительную погрешность δ и определить количество верных цифр.

5. Записать численные значения найденных частичных сумм, округлив их до найденного ранее количества верных цифр. Проанализировать результаты.

Определение 1.1. Если a – точное значение некоторой величины и a^* – известное приближение к нему, то абсолютной погрешностью приближенного значения a^* называют некоторую величину $\Delta(a^*)$, про которую известно, что

$$\left|a^* - a\right| \le \Delta(a^*). \qquad (1.2)$$

Определение 1.2. Относительной погрешностью приближенного значения называют некоторую величину $\delta(a^*)$, про которую известно, что

$$\left|\frac{a^* - a}{a^*}\right| \le \delta(a^*). \qquad (1.3)$$

Относительную погрешность часто выражают в процентах.

Определение 1.3. Значащими цифрами числа называют все цифры в его записи, начиная с первой ненулевой слева.

Пример 1.1

$a^* = 0.0\mathit{3045}$ $\qquad a^* = 0.0\mathit{3045000}$[1]

(Здесь цифры, записанные курсивом, значащие)

Определение 1.4. Значащую цифру называют верной, если модуль погрешности числа не превосходит единицы разряда, соответствующего этой цифре.

Пример 1.2

$a^* = 0.0\mathit{3045}$ $\qquad \Delta(a^*) = 0.000003$

$a^* = 0.0\mathit{30450}\ 000$ $\qquad \Delta(a^*) = 0.0000007$

(Здесь цифры, записанные курсивом, верные)

Вычисления в среде Mathcad

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{12}{5\cdot\left(n^2+6\cdot n+8\right)}\rightarrow\frac{7}{10}\qquad S:=0.7$$

$ORIGIN:=1$

$$N:=\begin{pmatrix}10^2\\10^3\\10^4\\10^5\end{pmatrix}$$

$$S1:=\sum_{n=1}^{N_1}\frac{12}{5\cdot\left(n^2+6\cdot n+8\right)}\qquad S1=0.67681105\qquad S2:=\sum_{n=1}^{N_2}\frac{12}{5\cdot\left(n^2+6\cdot n+8\right)}\qquad S2=0.69760837$$

0.69'

$$S3:=\sum_{n=1}^{N_3}\frac{12}{5\cdot\left(n^2+6\cdot n+8\right)}\qquad S3=0.69976008\qquad S4:=\sum_{n=1}^{N_4}\frac{12}{5\cdot\left(n^2+6\cdot n+8\right)}\qquad S4=0.699976$$

$\Delta S1:=|S1-S|\rightarrow .23188946975355e$ $\qquad \Delta S2:=|S2-S|\rightarrow .2391629891203e$

$\Delta S3:=|S3-S|\rightarrow .239916029994e$ $\qquad \Delta S4:=|S4-S|\rightarrow .23999160025e$

$\delta S1:=\frac{\Delta S1}{S1}\rightarrow .3426206896551763511\,2$ $\qquad \delta S2:=\frac{\Delta S2}{S2}\rightarrow .3428327402135396201\,8$

$\delta S3:=\frac{\Delta S3}{S3}\rightarrow .3428546947589019434\,8$ $\qquad \delta S4:=\frac{\Delta S4}{S4}\rightarrow .3428568978965118478\,2$

$S1:=0.67$ $\quad S2:=0.69$ $\quad S3:=0.699$ $\quad S4:=0.6999$

Задача 2. Дана функция $f(a,b,c)=\dfrac{a\cdot b}{c^3}$, a=0.5761, b=3.0, c=1.02.

Значения переменных указаны в вариантах *со всеми верными цифрами*. Оценить погрешность результата, используя:

1) оценки погрешностей для арифметических операций;
2) общую формулу погрешностей.

Порядок решения задачи.

1. Определить абсолютную и относительную погрешность величин a, b и c.
2. Провести оценку погрешности величины f, используя формулы оценки погрешности арифметических операций.
3. Провести оценку погрешности величины f, используя общую формулу погрешностей

$$\Delta\{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta(x_i).$$

4. Сравнить полученные значения погрешностей между собой.

5. Результат вычисления функции $f(a, b, c)$ представить в двух формах записи: с явным указанием погрешностей и с учетом верных цифр.

1) Погрешность суммирования чисел $x \pm e_x$, $y \pm e_y$

Абсолютная погрешность:

$$z = (x \pm e_x) + (y \pm e_y) = (x + y) \pm (e_x + e_y).$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{e_x + e_y}{|x+y|} = \frac{e_x}{|x+y|}\frac{|x|}{|x|} + \frac{e_y}{|x+y|}\frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|x+y|}\delta_x + \frac{|y|}{|x+y|}\delta_y .$$

2) Погрешность вычитания чисел $x \pm e_x$, $y \pm e_y$

Абсолютная погрешность:

$$z = (x \pm e_x) - (y \pm e_y) = (x - y) \pm (e_x + e_y).$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{e_x + e_y}{|x-y|} = \frac{e_x}{|x-y|}\frac{|x|}{|x|} + \frac{e_y}{|x-y|}\frac{|y|}{|y|} = \frac{|x|}{|x-y|}\delta x + \frac{|y|}{|x-y|}\delta y .$$

3) Погрешность умножения чисел $x \pm e_x$, $y \pm e_y$

Абсолютная погрешность:

$$z = (x \pm e_x)\cdot(y \pm e_y) = x \cdot y \pm y \cdot e_x \pm x \cdot e_y + e_x \cdot e_y \approx x \cdot y \pm y \cdot e_x \pm x \cdot e_y .$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{|y|\cdot e_x + |x|\cdot e_y}{|x \cdot y|} = \frac{e_x}{|x|} + \frac{e_y}{|y|} = \delta_x + \delta_y .$$

4) Погрешность деления чисел $x \pm e_x$**,** $y \pm e_y$

Абсолютная погрешность:

$$z = \frac{x \pm e_x}{y \pm e_y} = \frac{(x \pm e_x)\cdot(y \pm e_y)}{(y \pm e_y)\cdot(y \pm e_y)} \approx \frac{x}{y} \pm \frac{y \cdot e_x + x \cdot e_y}{y^2} .$$

Относительная погрешность:

$$\delta_z = \frac{|y|\cdot e_x + |x|\cdot e_y}{\left|\frac{x}{y}\right|} = \frac{|y|\cdot e_x + |x|\cdot e_y}{y^2 \cdot \left|\frac{x}{y}\right|} = \frac{e_x}{|x|} + \frac{e_y}{|y|} = \delta_x + \delta_y .$$

5) Погрешность функции, зависящей от одной переменной

Абсолютная погрешность:

$$f(x \pm e_x) \approx f(x) \pm f'(x)\cdot e_x ,$$

$$\Delta f = f(x \pm e_x) - f(x) = |f'(x)| e_x .$$

Относительная погрешность:

$$\left|\frac{\Delta f}{f}\right| = \frac{|f'(x)|}{|f(x)|} e_x .$$

Аналогично получают формулы для оценки абсолютной и относительной погрешностей для функций, зависящих от n переменных.

Оценка погрешности величины *f*, используя формулы оценки погрешности арифметических операций

$$\Delta(a\cdot b)\approx a\cdot\Delta b+b\cdot\Delta a$$

$$\Delta(c^3)=\Delta(c^2\cdot c)\text{, }\quad \Delta(c^2)=\Delta(c\cdot c)\approx c\cdot\Delta c+c\cdot\Delta c=2\cdot c\cdot\Delta c$$

$$\Delta(c^3)\approx c^2\cdot\Delta c+c\cdot\Delta c^2 = c^2\cdot\Delta c+c\cdot 2\cdot c\cdot\Delta c = 3\cdot c^2\cdot\Delta c$$

$$\Delta f = \Delta(\frac{a\cdot b}{c^3})\approx\frac{c^3\cdot\Delta(a\cdot b)+a\cdot b\cdot\Delta(c^3)}{(c^3)^2}=\frac{c^3\cdot((a\cdot\Delta b+b\cdot\Delta a)+a\cdot b\cdot 3\cdot c^2\cdot\Delta c)}{c^6}=$$

$$\frac{c\cdot(b\cdot\Delta a+a\cdot\Delta b)+3\cdot a\cdot b\cdot\Delta c}{c^4}$$

Оценка погрешности величины *f*, используя общую формулу погрешностей

$$\Delta\{f(x_1,x_2,\ldots,x_n)\}=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}\right|\Delta(x_i)$$

$$\Delta f = \Delta(\frac{a\cdot b}{c^3})\approx\frac{b}{c^3}\cdot\Delta a+\frac{a}{c^3}\cdot\Delta b+\frac{3\cdot a\cdot b}{c^4}\cdot\Delta c=\frac{c\cdot(b\cdot\Delta a+a\cdot\Delta b)+3\cdot a\cdot b\cdot\Delta c}{c^4}$$

Сравнение показывает, что оба способа дают один и тот же результат.

Вычисления в среде Mathcad

$a := 0.5761 \qquad b := 3.0 \qquad c := 1.02$

$\Delta a := 10^{-5} \qquad \Delta b := 10^{-1} \qquad \Delta c := 10^{-3}$

$\delta a := \frac{\Delta a}{a-\Delta a}\rightarrow \qquad \delta b := \frac{\Delta b}{b-\Delta b}\rightarrow$

$\delta c := \frac{\Delta c}{c-\Delta c}\rightarrow$

$\Delta f := \frac{c\cdot(b\cdot\Delta a+a\cdot\Delta b)+3\cdot a\cdot b\cdot\Delta c}{c^4}\rightarrow$

$f := a\cdot\frac{b}{c^3}\rightarrow \qquad f := 1.6 \qquad \Delta f := 0.06$

Задача 3. Дано уравнение $f(x)=x^4-\frac{21}{2}\cdot x^2+5$ Найти с точностью 10^{-5} все корни уравнений, содержащиеся на отрезке [-5, 5]. Для решения задачи использовать численный метод решения алгебраических уравнений, указанный в вашем варианте (табл. 3, столбец «Метод»). Определить погрешность метода, сравнив результат с точным решением.

Порядок решения задачи.

1. Найти аналитическое решение уравнения *f*(*x*) = 0 с помощью конструкции

Given...

Find(...)

или функции **root**, если аналитическое решение с помощью данной конструкции найти затруднительно.

2. Используя пакет Mathcad, локализовать корни $f(x) = 0$ графически.

3. Найти корни уравнения $f(x) = 0$ численно с точностью 10^{-5} с помощью численного метода, указанного для вашего варианта.

4. Вычислить погрешность метода, сравнивая ваш результат с точным решением.

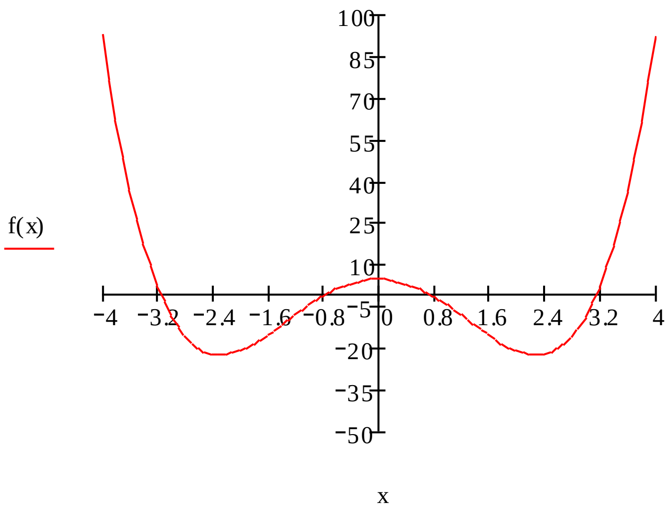
5. Объяснить полученные результаты.

Вычисления в среде Mathcad

Построение графика функции

$f(x) := x^4 - 10.5 \cdot x^2 + 5$

$x := -4, -3.9 .. 4$



Решение уравнения с помощью конструкции **Given...Find(...)** и функции **root**

$x := -4$

$\mathrm{root}\left(x^4 - 10.5 \cdot x^2 + 5, x\right) = -3.162$

2.

$x := -1$

Given

$x^4 - 10.5 \cdot x^2 + 5 = 0$

$\mathrm{Find}(x) = -0.707$

3.

$x := 1$

$\mathrm{root}\left(x^4 - 10.5 \cdot x^2 + 5, x\right) = 0.707$

4.

$x := 4$

Given

$x^4 - 10.5 \cdot x^2 + 5 = 0$

$\mathrm{Find}(x) = 3.162$

Численное решение уравнения методом деления отрезка пополам (методом бисекции)

```
Div2(F, x1, x2, ε) := | L ← x2 − x1
                      | while L > ε
                      |   | c ← (x2 + x1)/2
                      |   | x2 ← c  if F(c)·F(x1) < 0
                      |   | x1 ← c  otherwise
                      |   | L ← x2 − x1
                      | c
```

$q := \mathrm{Div2}\left(f, -4, -3, 10^{-5}\right)$ $\qquad q = -3.162$

$q := \mathrm{Div2}\left(f, -1, 0, 10^{-5}\right)$ $\qquad q = -0.707$

$q := \mathrm{Div2}\left(f, 0, 1, 10^{-5}\right)$ $\qquad q = 0.707$

$q := \mathrm{Div2}\left(f, 1, 4, 10^{-5}\right)$ $\qquad q = 3.162$

Задача 4. Вычислить значение интеграла

$$\int_a^b f(x)dx$$

$$f(x) = x^4 - 10.5 \cdot x^2 + 5; \; a = 0, \; b = 3, \; N = 50.$$

с помощью квадратурных формул средних прямоугольников, трапеций или Симпсона для элементарного отрезка интегрирования. Оценить величину погрешности.

Порядок решения задачи.

1. Задать функцию $f(x)$.
2. Построить график функции на отрезке $[a, b]$.
3. Вычислить значение интеграла аналитически, используя средства Mathcad.
4. Вычислить значение интеграла, используя один из методов численного интегрирования:
   1) метод средних прямоугольников;
   2) метод трапеций;
   3) метод Симпсона.

Количество элементарных отрезков интегрирования ***n*** должно быть *не менее десяти*.

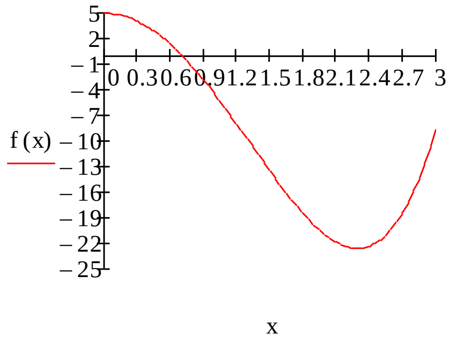
5. Найти абсолютные и относительные погрешности результатов.
6. Результаты оформить в виде таблицы. Сформулировать выводы.

Вычисления в среде Mathcad

IV

$f(x) := x^4 - 10.5 \cdot x^2 + 5$

$x := 0, 0.05 .. 3$



$\text{Integral} := \int_0^3 \left(x^4 - 10.5 \cdot x^2 + 5\right) dx \to -30.9$

ORIGIN := 0

$f(x) := x^4 - 10.5 \cdot x^2 + 5$

$xmin := 0$

$xmax := 3$

$N := 50$

$i := 0..N$

$$\Delta x := \frac{(xmax - xmin)}{N}$$

$\Delta x = 0.06$

$xx_i := xmin + \Delta x \cdot i$

$Y := f(xx)$

$$Integral\_lpr := \left[\sum_{i=1}^{N} (Y_i)\right] \cdot \Delta x$$

$$Integral\_rpr := \left[\sum_{i=0}^{N-1} (Y_i)\right] \cdot \Delta x$$

$Integral\_lpr = -31.292$

$Integral\_rpr = -30.482$

$$Integral\_srpr := \left(\sum_{i=1}^{N} f\left(xx_{i-1} + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) \cdot \Delta x$$

$Integral\_srpr = -30.907$

$$Integral\_trap := \left[\sum_{i=1}^{N-1} Y_i + \frac{(Y_0 + Y_N)}{2}\right] \cdot \Delta x$$

$Integral\_trap = -30.887$

$$Integral\_Simp := \left[Y_0 + Y_N + \sum_{i=1}^{N-1} \left(if\left(i - 2 \cdot ceil\left(\frac{i}{2}\right) = 0, 2, 4\right) \cdot Y_i\right)\right] \cdot \frac{\Delta x}{3}$$

$Integral\_Simp = -30.9$

$\Delta\_lpr := |Integral - Integral\_lpr|$

$\Delta\_lpr = 0.392$

$\Delta\_rpr := |Integral - Integral\_rpr|$

$\Delta\_rpr = 0.418$

$\Delta\_srpr := |Integral - Integral\_srpr|$

$\Delta\_srpr = 6.749 \times 10^{-3}$

$\Delta\_trap := |Integral - Integral\_trap|$

$\Delta\_trap = 0.013$

$\Delta\_Simp := |Integral - Integral\_Simp|$

$\Delta\_Simp = 5.184 \times 10^{-6}$

$\delta\_lpr := \left|\frac{\Delta\_lpr}{Integral}\right|$ $\delta\_lpr = 0.013$

$\delta\_rpr := \left|\frac{\Delta\_rpr}{Integral}\right|$ $\delta\_rpr = 0.014$

$\delta\_srpr := \left|\frac{\Delta\_srpr}{Integral}\right|$ $\delta\_srpr = 2.184 \times 10^{-4}$

$\delta\_trap := \left|\frac{\Delta\_trap}{Integral}\right|$ $\delta\_trap = 4.369 \times 10^{-4}$

$\delta\_Simp := \left|\frac{\Delta\_Simp}{Integral}\right|$ $\delta\_Simp = 1.678 \times 10^{-7}$