

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**«Владимирский государственный университет имени  
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)**

Институт Машиностроения и Автомобильного транспорт

Кафедра Автотранспортная и техносферная безопасность

**Методические указания к выполнению лабораторных работ  
по дисциплине**

**«АНАЛИТИЧЕСКИЕ ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ В ПЛАНИРОВАНИИ  
ЭКСПЕРИМЕНТОВ И ИНЖЕНЕРНОМ АНАЛИЗЕ»**

**Направление подготовки 23.04.01 «Технология транспортных процессов»**

**Программа подготовки: «Организация автомобильных перевозок и безопасность движения»**

**Уровень высшего образования :** магистратура  
**Форма обучения :** очная

Составитель  
Ф.П. Касаткин

Владимир 2016 г.

## Лабораторная работа №1

### НАБЛЮДЕНИЕ И ЭКСПЕРИМЕНТ КАК ОСНОВЫ ФУНКЦИОНАЛЬНОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ В ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Во всех отраслях производства и науки менеджерам приходится решать те или иные проблемы. Они проходят при своем разрешении некоторым циклом: от постановки проблемы к процессу ее решения и далее от результата решения к воплощению его в практике. Часто они вновь возникают на качественно более высоком уровне развития и вновь решаются с использованием уже накопленного опыта (рис. 1.1).

Цель метод. указаний— показать, как на основе идей современной математики и кибернетики изменяется такой важный элемент исследования, как **эксперимент**, и каковы Преимущества существенно нового подхода к познанию на **эмпирическом** уровне, т. е. на 'уровне накопления И непосредственного обобщения наблюдаемых фактов [158]. Из определения эмпирического уровня познания ясно, что на этом уровне решение любой задачи всегда опирается на **информацию** о конкретной технико-экономической ситуации. Эта информация может быть получена при наблюдении (изучение объекта без **вмешательства** в его нормальное функционирование) и эксперименте (изучение объекта при **целенаправленном воздействии** на его параметры), а также при изучении опыта других исследователей и производственного опыта ( $I_1$ ). Накопленная к началу новых работ информация, получаемая из печатных, актовых, рукописных или недокументальных источников, позволяет также до постановки собственных наблюдений и экспериментов ответить на ряд важных вопросов, в частности:

- на каких исходных методических предпосылках (методы сбора и обработки информации, обеспечение точности измерений, инструменты, организация работ и т. д.) строить дальнейшее эмпирическое исследование; как учесть достоинства и недостатки предыдущих работ в данной отрасли; что можно использовать в исследовании из методик «смежных» (а может быть, и «далеких») областей и т. д.; каковы общие совпадающие выводы в ранее выполненных исследованиях и каковы (что наиболее важно) противоречия в этих выводах и у разных авторов; в чем возможные причины таких противоречий; каковы теоретические взгляды на решение поставленной технико-экономической задачи; какие «смежные» теории можно привлечь к объяснению ее (результатов и т. д).

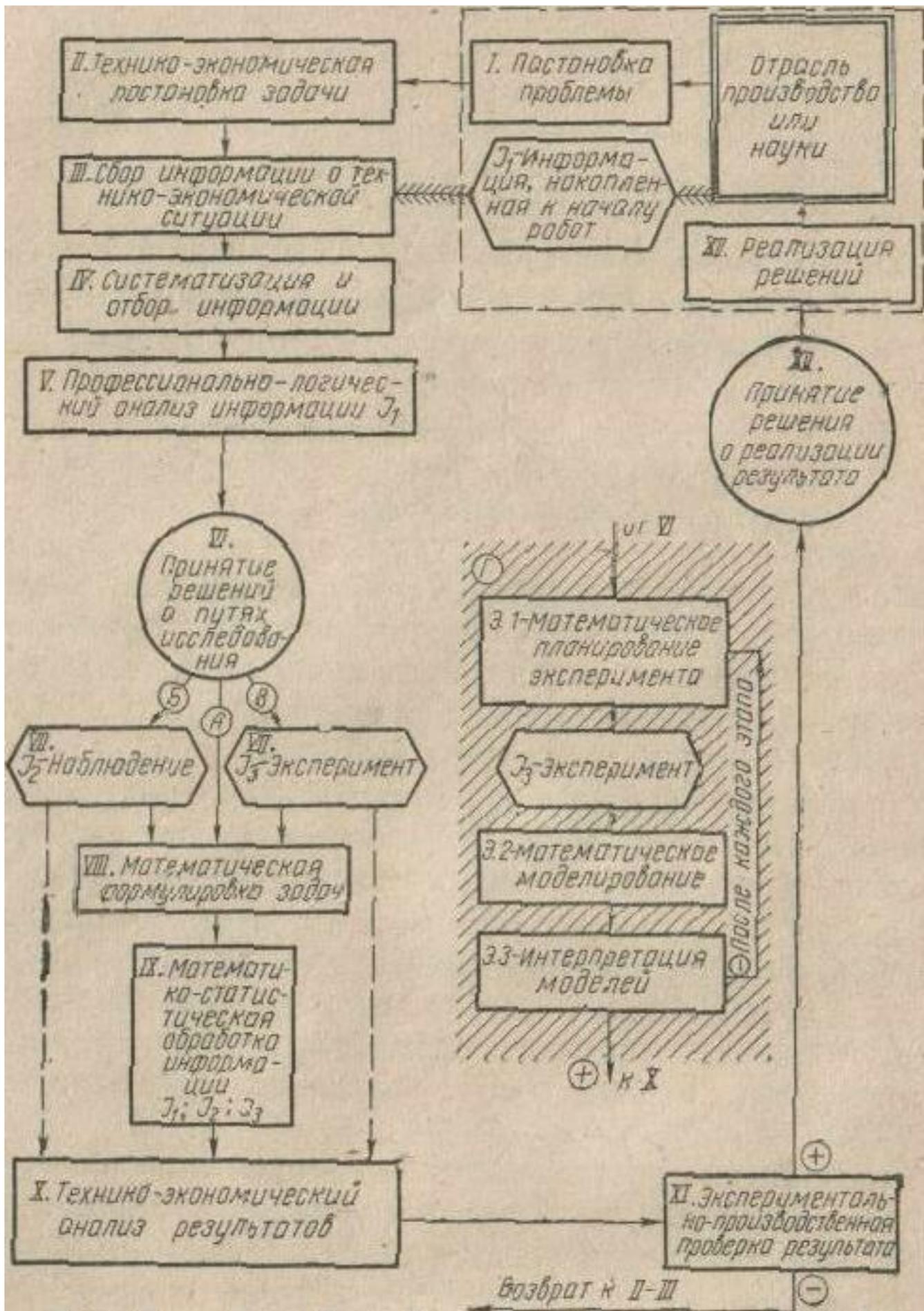


Рис. 1.1. Блок-схема решения технико-экономических задач на эмпирическом уровне

На основе анализа информации ( $I_1$ ), исследователь выбирает один из возможных путей исследования (А—Г на рис. 1.1).

Путь А. Если исходной информации ( $I_1$ ) достаточно, то нужно сформулировать технико-экономические гипотезы и проверить их вероятностно-статистическими методами (этапы VIII—IX).

Эти методы объединяются единой философской концепцией, основанной на материалистической категории случайности. Фундаментом исследований является теория вероятностей, в частности, ее аксиомы и теоремы, законы распределения вероятностей, теория зависимости между случайными величинами, случайные процессы и функции.

Математическая статистика объединяет методы, которые позволяют по результатам испытаний, содержащихся в информации (в частности, в  $I_1$ ) делать технико-экономические **выводы с определенной достоверностью**. Наиболее часто применяются такие ее ветви, как описательная статистика и выборочный метод, распределение выборочных характеристик и теория эффективных оценок, проверка гипотез и непараметрические методы, последовательный анализ, корреляционный и регрессионный анализы, анализ временных рядов и случайных процессов.

Пути Б и В. Если исходной информации недостаточно, то необходимо провести наблюдение за объектом или эксперимент над ним. Как видно из рис. 1.1, результаты наблюдений ( $I_2$ ) и экспериментов ( $I_3$ ) также должны проходить математико-статистическую обработку. К сожалению, построение исследований по принципу «гипотеза — информация (наблюдение, эксперимент) — статистическая обработка (проверка гипотез на основе вероятностной концепции)» осуществляется далеко не всегда. Причина, конечно, не в том, что такая обработка затрудняет процесс принятия технико-экономического решения (тем более при наличии быстродействующих ЭВМ). Пока еще часто исследователь от этапов V и VII сразу переходит к анализу результатов (этап X), потому что:

вопросы современной прикладной математики как универсального языка экспериментатора (инженера, экономиста, социолога, естествоиспытателя и т. д.) преподаются нематематикам недостаточно полно и без органической связи с задачами основной специальности;

значительная часть исследователей, получивших математическую подготовку в то время, когда не было ЭВМ и основным камнем преткновения считалась сложность и длительность вычислительных операций, не готовы по уровню знаний и психологическому стереотипу к использованию новых путей, прокладываемых современной прикладной математикой к познанию явлений на эмпирическом уровне; некоторые исследователи сознательно избегают глубокой математической обработки данных, потому что вероятностно-статистическая концепция требует проверки гипотез с определенной степенью риска, что резко ограничивает «свободу» в формулировке желательных для этих исследователей выводов.

Как бы ни было построено исследование до принятия решения о реализации его результатов (этап XII) в практике данной отрасли производства или науки (этап XIII), ему нужно пройти технико-экономический анализ этих результатов (этап X) и экспериментально-производственную проверку (этап XI).

Этап X является обязательным, поскольку на нем производится обратный **перевод** математических символов (числовых результатов, моделей и т. д.) в термины данной отрасли с расшифровкой полученных выводов и их тщательной профессионально-логической проверкой. Математический результат служит для того, чтобы исследователь на его основании воссоздал в своем мышлении необходимые технико-экономические понятия и принял правильное решение, отвечающее на поставленные в исходной проблеме задачи.

Путь Г. Проведение и анализ экспериментов будут существенно оптимизироваться, если привлечь **математическую теорию эксперимента** [17]. Следует сразу обратить внимание на три особенности такого пути (заштрихованное поле на рис. 1.1):

математический аппарат используется не только на обычном этапе после проведения эксперимента (Э.2), но и на новом этапе — предшествующем (Э.1); исследователь планирует эксперимент исходя из целей данного этапа работ (выбор наиболее существенных факторов, поиск оптимума, получение интерполяционной зависимости, описание явления и т. д.) так, чтобы будущая математическая модель заранее обладала некоторым набором свойств, оптимальным с точки зрения этих целей (минимум экспериментальных точек для ее построения или независимость оценок коэффициентов модели, или максимальная точность оценки координат оптимума, или нечувствительность результатов к грубым ошибкам в опытах и др. [19]);

все экспериментальное исследование **разделяется на этапы**, на каждом из которых проводится специфическое планирование: эксперимент — построение модели — интерпретация модели и принятие решения о дальнейшем направлении исследования; после каждого шага можно принять строго обоснованное решение о том, что делать дальше; систематическое применение в исследованиях такой последовательной-поп шаговой процедуры способствует значительному уменьшению общего объема экспериментальных работ;

математическое планирование экспериментов дает нам набор четких, заранее составленных **алгоритмов**, которые могут быть применены к широкому классу объектов (от управления технологическими процессами до поиска лучших форм лечения); математическое многофакторное моделирование на основе таких планов может быть осуществлено и без ЭВМ (например, при расчете на специальных бланках [18] с помощью арифмометров, см. гл. 3).

**I.** Внедрение методов математической теории эксперимента При решении технико-экономических задач поднимает (как показывает более чем десятилетний опыт в различных отраслях) эмпирические исследования на качественно новый, более высокий уровень познания.

## **1.2. СИСТЕМНЫЙ ПОДХОД КАК МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЙ ПРИНЦИП ИССЛЕДОВАНИЯ**

Современное технико-экономическое исследование предусматривает системный подход к изучению технических и экономических явлений. Роль такого подхода особенно возрастает в случае применения математических методов планирования эксперимента, при математическом моделировании и интерпретации таких моделей.

Понятие **система** — одно из основных в кибернетике. Поскольку единообразное и удовлетворительное с позиций всех отраслей науки определение этого понятия дать пока затруднительно, мы согласимся с тем, что говорит акад. Н. М. Амосов: «Всякая система представляет собой некоторое количество разнородных либо одинаковых элементов, объединенных связями таким образом, что обеспечивается целостная функция. Сложная система отличается от простой количеством элементов и разнообразием их отношений, вместе определяющих сложную функцию. Все эти понятия условны» [32, с. 4].

Система определяется заданием системных объектов, их свойств и связей между ними. К системным объектам, по определению акад. Н. П. Федоренко [51], относятся цель, вход, процесс, выход, ограничения, обратная связь. Рассмотрим эти понятия на примере технологии материалов [7, К) как системы.

Цель такой системы можно определить, в частности, как достижение материалом оптимального качества и поддержание его на этом уровне с максимальной стабильностью (до тех пор пока не изменится комплекс требований к оптимальному качеству). Этой цели нужно **достигнуть** хотя бы при двух **ограничениях**: количество материала не должно быть меньше заданного уровня, а расходы на функционирование всей системы не должны превышать определенных величин.

**Входами системы** ( $X_u$ ) в частном случае является качество исходных компонентов материала, характеризуемое набором свойств каждого из них. **Процессом** является собственно технология, т. е. определение соотношения между компонентами, проведение химических реакций спекания, литья и других процессов по определенным режимам. Процесс (технология) характеризуется набором параметров  $X_u$ , которые вместе с входами  $X_u$  образуют комплекс **факторов**  $X$ , определяющих **выходы** системы ( $Y$ ), в данном случае качество материала, характеризуемое набором его свойств (а иногда и удельными затратами, если рассматривается так называемое интегральное качество). Каждый из факторов  $X$  и каждый из выходов  $Y$  также имеет **ограничения** от величины  $X^{\wedge}$  или  $Y^{\wedge}$  (в частном случае 0 или даже  $-\infty$ ) до  $X^{\wedge}$  или  $G_u$ , (вплоть до  $T-\infty$ ).

В системе целесообразно выделить три **подсистемы: технологического процесса, контроля и управления**. Для целенаправленного изменения выходов  $Y$  необходимо менять значения факторов  $X$ , т. е. управлять технологией. Это и осуществляется подсистемой управления (человек-оператор, управляющая машина), в которую поступает через подсистему контроля (человек-оператор, отдельные КИП или их комплекс) необходимая для принятия решений **информация** о состоянии входов ( $X_u$ ), процесса ( $X_u$ ) и выходов, ( $Y$ ) системы. Так как выбор управляющих воздействий (значений  $X_u$  и  $X_u$ ) связан с состоянием выходов (со значениями  $Y$  как результатом изменения  $X$ ) системы, то такая связь является обратной [51].

Рассмотрим, какие типовые технико-экономические задачи могут быть поставлены и решены в такой системе:

**по входу системы** ( $X_u$ ) при сохранении  $Y$  постоянным — минимизация расхода сырьевых компонентов на единицу выпускаемой продукции, замена дорогостоящих компонентов на недорогостоящие или дефицитных на распространенные; введение микродобавок — регуляторов  $X_u$  и  $Y$ ;

**по процессу** ( $X_u$ ) при сохранении  $Y$  постоянным — сокращение времени режимов переработки в целом или на отдельных переделах, перевод отдельных параметров режимов в не критические зоны, улучшение условий труда и техники безопасности, повышение производительности труда или снижение трудовых затрат на единицу продукции и т. д.;

**по выходу системы** ( $Y$ ) — улучшение частных показателей свойств и общего количества готовой продукции, повышение однородности качества и надежности изделий, снижение себестоимости готовой продукции, повышение рентабельности производства, увеличение валового продукта и расширение его номенклатуры;

**по подсистемам управления и контроля** — увеличение надежности и быстродействия управления, снижение уровня ошибок контроля входов, процесса и выхода системы за счет внедрения новых методов и аппаратуры, совершенствование нормативной документации и др.

При изучении конкретной системы всегда приходится **абстрагироваться** от ряда происходящих в ней явлений. Такая научная абстракция позволяет выделять и анализировать наиболее важные

для данного исследования характеристики системы (структуру, взаимосвязи между элементами, свойства, черты поведения и т. д.) из множества реально существующих у данной системы. Особой формой абстрагирования является модель, которая характеризуется [63] как мысленно представляемая или материально-реализуемая система, которая, отображая или воспроизводя объект исследования, способна давать новую информацию об этом объекте. Модель и оригиналы не тождественны во

всем, а лишь **аналогичны**, хотя бы в **одном** определенном смысле.

Наиболее существенной с технико-экономической точки зрения является классификация моделей в зависимости от того, какие стороны объекта представлены в модели. По такой классификации модели могут быть **субстанциональными, структурными и функциональными** (7, 63]. В современной науке резко возросла роль функциональных моделей, имитирующих **способы поведения** оригинала. Функция как некоторый стабильный, характерный для данной системы способ воздействия является одной из важнейших сторон сущности системы. «Характерной чертой кибернетики, — ука-зыи;и"г акад. Л. И. Берг, — является поведенческий подход к исследованию любых явлений» (33, с. 10]. Функциональный подход характеризуется как бы двойной абстракцией: абстрагированием сначала от вещественного состава системы с вычленением ее внутренней структуры и последующим абстрагированием от последней с выделением функциональных связей системы со средой. Сложная материальная система рассматривается как единство трех объективных начал вещества, структуры внутренних отношений и функциональных связей со средой. Функциональный подход к системам не исчерпывает полностью сущности последних, но позволяет приблизиться к раскрытию их природы.

Обобщенным абстрактным образом функциональной модели является получивший широкое распространение и теоретическую разработку в кибернетике метод **«черного ящика»**. Под этим понимается система, внутреннее устройство которой не известно наблюдателю, но он может исследовать входы ( $X$ ) и выходы ( $Y$ ) этой системы. Функциональная модель «черного ящика» должна ему соответствовать по входам ( $X$ ) и выходам ( $Y$ ), т. е. при тех же входных воздействиях обнаруживать аналогичную с объектом реакцию на выходах (51]. Такой кибернетический подход позволяет временно отвлечься от некоторых сложных явлений (физико-химических, технико-экономических, психологических и др.), происходящих в исследуемой системе, что позволяет значительно ускорить решение ряда практических задач (управления, оптимизации и т. д.). Конечно, этот подход не отрицает необходимости дальнейших исследований причин явлений, структуры и субстанции системы; более того, такие исследования стимулируются конкретными (нередко выдающимися) результатами изучения материальных систем по модели «черного ящика».

Как и модели других классов, функциональные модели могут быть физическими и абстрактно-знаковыми. К числу последних относятся функциональные **математические модели**, которыми можно назвать формальные описания системы (в виде набора чисел, графиков, уравнений, неравенств, логических выражений, блок-схем алгоритмов и т. п.), позволяющие выводить суждение о некоторых чертах поведения этой системы с помощью формальных процедур над ее описаниями. В общем виде математическая модель системы для каждого выхода  $Y$  записывается как функция (1.2), включающая группу случайно изменяющихся факторов.

То, что математические модели являются не предметно-физическими, а абстрактно-знаковыми, не умаляет их **объективности** при условии, что они с достаточной точностью описывают поведение системы. «Мы не можем объявить драматурга идеалистом только за то, что он выразил объективное содержание произведения искусства в форме печатных знаков, отнюдь не сходных с отражаемыми предметами и отношениями, так нельзя объявить идеалистом ученого, изображавшего ту или иную символику, ту или иную знаковую систему для отражения изучаемых им отношений, связей... и закономерностей объективного мира»<sup>1</sup>.

## Лабораторная работа №2

### МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА В ОБЩЕМ ЦИКЛЕ РЕШЕНИЯ ТЕХНИКО-ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Пример решения задач

Исходные данные

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	
1	<b>Вариант 1</b>	Составить матрицу планирования, математическую модель.										
2	1. Условия планирования эксперимента											
3	Факторы											
4	условия		X1		X2		X3		X4			
5			физич.	код	физич.	код	физич.	код	физич.	код		
6	верхний уровень $X_{iв}$		500	1	190	1	132	1	60	1		
7	нижний уровень $X_{iн}$		230	-1	60	-1	40	-1	12	-1		
8	основной уровень $X_{i0}$			0		0		0		0		
9	шаг варьирования			-		-		-		-		
10												
11			Y <sub>n1</sub>	Y <sub>n2</sub>	Y <sub>n3</sub>	Y <sub>n4</sub>						
12			1	36	32,1	36	31,3					
13			2	41	43,2	44	42,4					
14			3	44,6	43,2	45	43					
15			4	38,92	38	39	39,7					
16			5	45,78	46,9	45	44,6					
17			6	30,01	33	32,7	31					
18			7	31	32	30,98	30,8					
19			8	29	29,8	30	32					
20			9	34	35,4	32	35					
21			10	41	43,2	40	36,9					
22			11	44,6	43,2	44,8	40,8					
23			12	38,92	38	39	41					
24			13	45,78	46,9	45	42,4					
25			14	30,01	33,12	32,7	32					
26			15	31	32	26,9	31					
27			16	25,7	23,8	24	24,6					
28												



61	14	1	1	-1	1	1	30,01	33,12	32,7	32	31,958	1,89
62	15	1	-1	1	1	1	31	32	26,9	31	30,235	5,1
63	16	1	1	1	1	1	25,7	23,8	24	24,6	24,525	0,72
64		16	0	0	0	0						40,0
65												
66	3. Определение равнозначности результатов по критерию Кохрена: $\text{Max}\{\text{Дисп.}\}/\text{оценку дисперсии}$											
67	Максимальная дисперсия	6,8492										
68	Табличное значение критерия	0,26										
69	Расчетное значение	0,171										
70	Вывод: результаты равнозначны											
71	4. Определим ошибку эксперимента: $S_y = 0,79$ $S^2_y = 0,625$											
72	5. Вычисление коэффициентов уравнения регрессии:											
73	5.2 Вычисление коэффициентов уравнения по методу Йетса											
74		№	Вектор	цикл 1	цикл 2	цикл 3	цикл 4	Коэффициенты				
75		опыта	выхода									
76	$b_0 =$	36,7	1	33,85	76,5	159,4	297,99	586,69	$b_0 = 37$			
77	$b_1 =$	-1,74	2	42,65	82,855	138,6	288,7	-27,845	$b_1 = -1,7$			
78	$b_2 =$	-1,47	3	43,95	77,248	157	-11,12	-23,535	$b_2 = -1,5$			
79	$b_3 =$	-2,87	4	38,905	61,385	131,7	-16,72	-3,865	$b_{12} = -0,2$			
80	$b_4 =$	-0,58	5	45,57	74,385	3,755	-9,507	-45,945	$b_3 = -2,9$			
81	$b_{12} =$	-0,24	6	31,678	82,575	-14,9	-14,03	-39,455	$b_{13} = -2,5$			
82	$b_{13} =$	-2,47	7	31,185	76,978	2,05	-0,938	-52,625	$b_{23} = -3,3$			
83	$b_{14} =$	-0,35	8	30,2	54,76	-18,8	-2,928	44,385	$b_{123} = 2,8$			
84	$b_{23} =$	-3,29	9	34,11	8,8	6,355	-20,72	-9,29	$b_4 = -0,6$			
85	$b_{24} =$	-0,28	10	40,275	-5,045	-15,9	-25,22	-5,6	$b_{14} = -0,4$			
86	$b_{34} =$	-0,28	11	43,345	-13,89	8,19	-18,63	-4,52	$b_{24} = -0,3$			
87	$b_{123} =$	2,77	12	39,23	-0,985	-22,2	-20,82	-1,99	$b_{124} = -0,1$			
88	$b_{124} =$	-0,12	13	45,02	6,165	-13,8	-22,22	-4,5	$b_{34} = -0,3$			
89	$b_{134} =$	-0,14	14	31,958	-4,115	12,91	-30,41	-2,19	$b_{134} = -0,1$			
90	$b_{234} =$	-0,51	15	30,235	-13,06	-10,3	26,753	-8,19	$b_{234} = -0,5$			
91	$b_{1234} =$	-0,57	16	24,525	-5,71	7,353	17,633	-9,12	$b_{1234} = -0,6$			

определение коэффициентов уравнения регрессии. Коэффициенты уравнения регрессии

определяются по следующим формулам:  $b_i = \frac{\sum a_i \bar{y}_n}{N}$ ;  $b_{ij} = \frac{\sum a_{ij} \bar{y}_n}{N}$ ;  $b_{ijk} = \frac{\sum a_{ijk} \bar{y}_n}{N}$  где  $a_i$  и  $a_{ij} = \pm 1$  берутся из матриц планирования эксперимента.

Схема вычисления коэффициентов регрессии для ПФЭ типа  $2^3$  методом Йетса.

№ опыта	Вектор выхода	Цикл 1	Цикл 2	Цикл 3	Коэффициенты b
1	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \bar{y}'_1$	$\bar{y}'_1 + \bar{y}'_2 = y''_1$	$\bar{y}''_1 + \bar{y}''_2 = y'''_1$	$b_0 = \frac{1}{2^3} y'''_1$
2	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3 + \bar{y}_4 = \bar{y}'_2$	$\bar{y}'_3 + \bar{y}'_4 = y''_2$	$\bar{y}''_3 + \bar{y}''_4 = y'''_2$	$b_1 = \frac{1}{2^3} y'''_2$
3	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_5 + \bar{y}_6 = \bar{y}'_3$	$\bar{y}'_5 + \bar{y}'_6 = y''_3$	$\bar{y}''_5 + \bar{y}''_6 = y'''_3$	$b_2 = \frac{1}{2^3} y'''_3$
4	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_7 + \bar{y}_8 = \bar{y}'_4$	$\bar{y}'_7 + \bar{y}'_8 = y''_4$	$\bar{y}''_7 + \bar{y}''_8 = y'''_4$	$b_{12} = \frac{1}{2^3} y'''_4$

5	$\bar{y}_5$	$\bar{y}_2 - \bar{y}_1 = \bar{y}'_5$	$\bar{y}'_2 - \bar{y}'_1 = y''_5$	$\bar{y}''_2 - \bar{y}''_1 = y'''_5$	$b_3 = \frac{1}{2^3} y'''_5$
6	$\bar{y}_6$	$\bar{y}_4 - \bar{y}_3 = \bar{y}'_6$	$\bar{y}'_4 - \bar{y}'_3 = y''_6$	$\bar{y}''_4 - \bar{y}''_3 = y'''_6$	$b_{13} = \frac{1}{2^3} y'''_6$
7	$\bar{y}_7$	$\bar{y}_6 - \bar{y}_5 = \bar{y}'_7$	$\bar{y}'_6 - \bar{y}'_5 = \bar{y}''_7$	$\bar{y}''_6 - \bar{y}''_5 = \bar{y}'''_7$	$b_{23} = \frac{1}{2^3} y'''_7$
8	$\bar{y}_8$	$\bar{y}_8 - \bar{y}_7 = \bar{y}'_8$	$\bar{y}'_8 - \bar{y}'_7 = \bar{y}''_8$	$\bar{y}''_8 - \bar{y}''_7 = \bar{y}'''_8$	$b_{123} = \frac{1}{2^3} y'''_8$

Проверку значимости коэффициентов уравнения регрессии проводят по  $\bar{t}$  критерию

Стьюдента. Для каждого коэффициента определяют  $t^\ominus$  критерий по формуле:  $t_n^\ominus = \frac{|b_n| \sqrt{N}}{S_{\bar{y}}}$  и

сравнивают с табличным значением  $t_{\alpha, f}^T$  выбранного для заданного

91	b1234 = -0,57		16	24,525	-5,71	7,353	17,633	-9,12	b1234 = -0,6
92									
93	6. Анализ уравнения регрессии.								
94	Определение ошибки при вычислении коэффициентов регрессии.								
95	Определим значимость коэффициентов уравнения регрессии:								
96	Число степеней свободы: $f = N(y-1) = 16(4-1) = 48$ , $tr = 2,02$ 2,02								
97					b0 =		36,668	1344,5	
98	t1 =	-8,804	8,8037	значим		1 b1 =	-1,74	3,0287	
99	t2 =	-7,441	7,441	значим		1 b2 =	-1,471	2,1637	
100	t3 =	-14,53	14,526	значим		1 b3 =	-2,872	8,2459	
101	t4 =	-2,937	2,9372	значим		1 b4 =	-0,581	0,3371	
102	t12 =	-1,222	1,222	не значим		0 b12 =	-0,242	0	
103	t13 =	-12,47	12,474	значим		1 b13 =	-2,466	6,0808	
104	t14 =	-1,771	1,7705	не значим		0 b14 =	-0,35	0	
105	t23 =	-16,64	16,638	значим		1 b23 =	-3,289	10,818	
106	t24 =	-1,429	1,4291	не значим		0 b24 =	-0,282	0	
107	t34 =	-1,423	1,4228	не значим		0 b34 =	-0,281	0	
108	t123 =	14,03	14,033	значим		1 b123 =	2,7741	7,6954	
109	t124 =	-0,629	0,6292	не значим		0 b124 =	-0,124	0	
110	t134 =	-0,692	0,6924	не значим		0 b134 =	-0,137	0	
111	t234 =	-2,589	2,5894	значим		1 b234 =	-0,512	0,262	
112	t1234 =	-2,883	2,8835	значим		1 b1234 =	-0,57	0,3249	
113					9		1383,5		
114	Проверка гипотезы об адекватности полученного уравнения действительному процессу								

можно проверить гипотезу об адекватности полученного уравнения действительному процессу двумя способами используя  $F$  критерий Фишера:

по формуле вычисляют экспериментальное значение статистики:

$$F^\ominus = \frac{S_{yag}^2}{S_{\bar{y}}^2}; S_{yag}^2 = \frac{\sum \bar{y}_n^2 - N \sum b_n}{N - (k + 1)}; F_{f_1, f_2}^T$$



### Лабораторная работа №3

## МЕТОДИКА ПЛАНИРОВАНИЯ ПОЛНОГО ФАКТОРНОГО ЭКСПЕРИМЕНТА ПРИ ВЫБОРЕ ТИПА АВТОМОБИЛЕЙ ДЛЯ ПЕРЕВОЗКИ СЫПУЧИХ ГРУЗОВ

В качестве критерия выбора берем производительность автомобиля – это планируемый или выполненный объем перевозок в единицу времени (более часто используют т/ч). Задача – выбрать из имеющихся в АТП тот автомобиль, который обеспечивает наибольшую производительность.

Величину производительности можно определить по формуле:

$$W_Q = \frac{q_n \cdot \gamma_{ст}}{\frac{l_n}{V_T \cdot \beta} + t_{пр}} = \frac{q_n \cdot \gamma_{ст} \cdot V_T \cdot \beta}{l_{ге} + t_{пр} \cdot V_T \cdot \beta} \quad (1)$$

где  $q_n$  - номинальная грузоподъемность автомобиля, т;  $\gamma_{ст}$  - коэффициент статического использования грузоподъемности;  $V_T$  - техническая скорость автомобиля, км/ч.,  $\beta$  - коэффициент использования пробега;  $l_{ге}$  - расстояние перевозки, км.,  $t_{пр}$  - время выполнения погрузо-разгрузочных работ, час.

Величину производительности можно также определить, разделив суточный объем перевозок  $Q_c$  на время работы автомобиля в течение суток .

$$W_Q = Q_c / t_{пр} \quad (2)$$

Из приведенных рассуждений видно, что на величину производительности влияют следующие параметры:  $q_n$ ;  $\gamma_{ст}$ ;  $V_T$ ;  $t_{пр}$ ;  $l_{ге}$ ;  $\beta$ . При планировании эксперимента принимаем:  $\beta = 0,5$  - автомобиль-самосвал в одну сторону едет с грузом – в другую – без груза;  $\gamma_{ст} = 1$  – загрузка автомобиля соответствует его грузоподъемности. Остальные переменные выбираем, исходя из технических характеристик имеющихся на предприятии автомобилей. Расстояния перевозки могут быть самыми различными, поэтому для разных расстояний перевозки проводим свой эксперимент (например, берем  $l_{ге} = 10$  км.). Следовательно, проводим планирование полного трехфакторного эксперимента – оценка влияния на производительность следующих факторов:  $q_n$ ;  $\gamma_{ст}$ ;  $t_{пр}$ .

Для каждого из выбранных факторов, влияющих на производительность автомобиля, выбираем основной (нулевой) уровень  $X_i^0$ , который является исходной точкой для построения плана эксперимента. Обычно это оптимальное (наилучшее) значение параметра.

Минимальное значение параметра принимаем за нижний уровень  $X_i^0$ ; разница между основным и нижним уровнями – шаг варьирования  $\lambda$ ; сумма основного уровня и шага варьирования – верхний уровень  $X_i^0$ . Проводим кодирование факторов: верхний уровень обозначаем (1), нижний – (-1), основной - (0). Значения условий планирования для выбранных факторов представлены в табл. 1

Для постановки реального эксперимента берем перевозку песка автомобилями-самосвалами из песчаного карьера на стройку. Значение переменных факторов ( $q_n$ ;  $V_T$ ;  $t_{пр}$ ) берем из табл.1.

Таблица 1 Условия планирования эксперимента

Уровни \ Факторы	$X_1$ ( $q_n$ , т/ч)		$X_2$ ( $V_T$ , км/ч)		$X_3$ ( $t_n$ , час)	
	Физ. значение	код	Физ. значение	код	Физ. значение	код
Верхний	25	1	30	1	0,37	1
Нижний	5	-1	10	-1	0,13	-1

Основной $X_i^0$	15	0	20	0	0,25	0
Шаг варьирования $\lambda$	10	-	10	-	0,12	-

Определяем количество опытов в эксперименте – оно равно  $2^n$ , где  $n$  – число факторов. У нас  $n = 3$ , следовательно количество опытов  $N = 8$ . Определяем значение производительности автомобиля за восьмичасовой рабочий день по формуле (2) при изменении значения одного из факторов с (-1) на (1) в соответствии с матрицей планирования эксперимента табл. 2.

Таблица 2. Матрица планирования и результаты эксперимента

№ опыта	Планирование				Выход				оценка дисп.
	X0	X1	X2	X3	Yn1	Yn2	Yn3	Y=Y <sub>ср.</sub>	
1	1	-1	-1	-1	2,374	3,272	4,465	3,3703333	1,1003
2	1	1	-1	-1	11,74	11,25	13,2	12,063333	1,029
3	1	-1	1	-1	6,27	4,95	6,56	5,9266667	0,7364
4	1	1	1	-1	29,38	29,85	30,84	30,023333	0,5554
5	1	-1	-1	1	2,2	3,97	2,35	2,84	0,9633
6	1	1	-1	1	10,548	9,64	11,09	10,426	0,5368
7	1	-1	1	1	7,03	5,67	7,4	6,7	0,8299
8	1	1	1	1	24,1157	23,06	25,37	24,1819	1,3373
Сумма									<b>7,089</b>

Для повышения точности эксперимента каждый опыт проводим 3-4 раза (у нас  $\gamma = 3$ ), фиксируя значение суточной производительности; затем проводим дисперсионный анализ результатов эксперимента для чего:

1) Определяем среднее значение производительности из 3-х повторов опыта  $\bar{Y}_i$ ; проводим оценку дисперсий  $S_y^2$ , проводим проверку измерений на равнозначность или однородность полученного ряда оценок дисперсии  $S_{y1}^2; S_{y2}^2 \dots S_{yN}^2$ , по критерию Кохрена.

$$S_{yn}^2 = \frac{\sum (\bar{y}_{ni} - y_{ni})^2}{\gamma - 1}; \bar{y}_{ni} = \frac{\sum y_{ni}}{\gamma}; G^{\text{Э}} = \frac{\max\{S_{yn}^2\}}{\sum S_{yn}^2}$$

Экспериментальный критерий Кохрена сравнивается  $G^{\text{Э}}$  сравнивается с табличным значением  $G_{f_1 f_2}^T$ , если при выбранном уровне значимости ( $\alpha = 0,95$ ) имеет место неравенство

$$G^{\text{Э}} \leq G_{f_1 f_2}^T, \text{ то измерения во всех } N \text{ опытах равнозначны; если же } G^{\text{Э}} > G_{f_1 f_2}^T, \text{ то измерения}$$

при выбранном уровне значимости не равнозначны и дальнейшие расчеты продолжать не имеет смысла. Тогда необходимо опыт, оценка дисперсии которого наибольшая, повторить более тщательно и скорректировать исходные данные, либо увеличить число параллельных измерений  $\gamma$  в каждом опыте.

Число степеней свободы критерия Кохрена определяется по формулам:

$$\tilde{f}_1 \text{ число степеней свободы числителя } f_1 \square \tilde{\gamma}_1, \tilde{f}_2 \text{ число степеней свободы знаменателя } f_2 \square N.$$

Оценка по критерию Кохрена:  $G^{\text{Э}} 1,3373 / 7,089 = 0,1886$ ;

$G_t = 0,51$ , следовательно, эксперимент равнозначен.

2) Определение ошибки эксперимента. Ошибка вычисляется по формуле:

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum S_{yn}^2}{N \cdot \gamma}}$$

$$S_y = 0,543 \quad S^2_y = 0,295$$

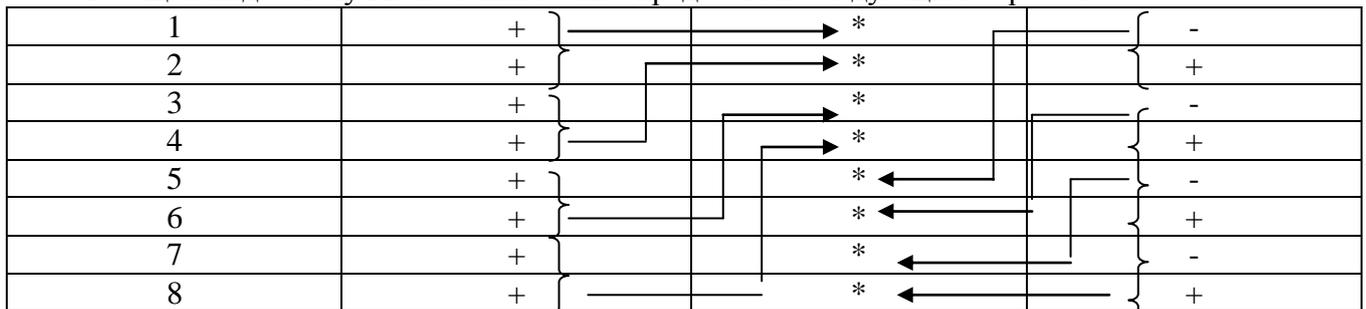
3). Определение коэффициентов уравнения регрессии. Коэффициенты уравнения регрессии определяются по следующим формулам:  $b_i = \frac{\sum a_i \bar{y}_n}{N}$ ;  $b_{ij} = \frac{\sum a_{ij} \bar{y}_n}{N}$ ;  $b_{ijk} = \frac{\sum a_{ijk} \bar{y}_n}{N}$ , где  $a_i$  и  $a_{ij} = \pm 1$  берутся из матриц планирования эксперимента. В результате получаем уравнение регрессии:

Значения коэффициентов уравнения регрессии:

$$\begin{aligned} b_0 &= 11,94 & b_{12} &= 3,162 \\ b_1 &= 7,232 & b_{13} &= -0,965 \\ b_2 &= 4,767 & b_{23} &= -0,363 \\ b_3 &= -0,904 & b_{123} &= -0,688 \end{aligned}$$

Вычислять коэффициенты регрессии можно по методу, предложенному Йетсом. Процедура состоит в попарном сложении и вычитании компонент вектора-выхода. Число циклов равно числу факторов, участвующих в эксперименте.

В общем виде схему вычисления можно представить следующим образом:



Рассмотрим правила вычисления для полного факторного эксперимента ПФЭ типа  $2^2$  и  $2^3$ .

№ опыта	Вектор выхода	Цикл 1	Цикл 2	Коэффициенты b
1	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \bar{y}'_1$	$\bar{y}'_1 + y'_2 = y''_1$	$b_0 = \frac{1}{2^2} y''_1$
2	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3 + \bar{y}_4 = \bar{y}'_2$	$\bar{y}'_3 + y'_4 = y''_2$	$b_1 = \frac{1}{2^2} y''_2$
3	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_2 - \bar{y}_1 = \bar{y}'_3$	$\bar{y}'_2 - y'_1 = y''_3$	$b_2 = \frac{1}{2^2} y''_3$
4	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_4 - \bar{y}_3 = \bar{y}'_4$	$\bar{y}'_4 - y'_3 = y''_4$	$b_{12} = \frac{1}{2^2} y''_4$

Схема вычисления коэффициентов регрессии для ПФЭ типа  $2^3$  методом Йетса.

№ опыта	Вектор выхода	Цикл 1	Цикл 2	Цикл 3	Коэффициенты b
1	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \bar{y}'_1$	$\bar{y}'_1 + y'_2 = y''_1$	$\bar{y}''_1 + y''_2 = y'''_1$	$b_0 = \frac{1}{2^3} y'''_1$
2	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3 + \bar{y}_4 = \bar{y}'_2$	$\bar{y}'_3 + y'_4 = y''_2$	$\bar{y}''_3 + y''_4 = y'''_2$	$b_1 = \frac{1}{2^3} y'''_2$

3	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_5 + \bar{y}_6 = \bar{y}'_3$	$\bar{y}'_5 + y'_6 = y''_3$	$\bar{y}''_5 + y''_6 = y'''_3$	$b_2 = \frac{1}{2^3} y'''_3$
4	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_7 + \bar{y}_8 = \bar{y}'_4$	$\bar{y}'_7 + y'_8 = y''_4$	$\bar{y}''_7 + y''_8 = y'''_4$	$b_{12} = \frac{1}{2^3} y'''_4$
5	$\bar{y}_5$	$\bar{y}_2 - \bar{y}_1 = \bar{y}'_5$	$\bar{y}'_2 - y'_1 = y''_5$	$\bar{y}''_2 - y''_1 = y'''_5$	$b_3 = \frac{1}{2^3} y'''_5$
6	$\bar{y}_6$	$\bar{y}_4 - \bar{y}_3 = \bar{y}'_6$	$\bar{y}'_4 - y'_3 = y''_6$	$\bar{y}''_4 - y''_3 = y'''_6$	$b_{13} = \frac{1}{2^3} y'''_6$
7	$\bar{y}_7$	$\bar{y}_6 - \bar{y}_5 = \bar{y}'_7$	$\bar{y}'_6 - \bar{y}'_5 = \bar{y}''_7$	$\bar{y}''_6 - \bar{y}''_5 = \bar{y}'''_7$	$b_{23} = \frac{1}{2^3} y'''_7$
8	$\bar{y}_8$	$\bar{y}_8 - \bar{y}_7 = \bar{y}'_8$	$\bar{y}'_8 - \bar{y}'_7 = \bar{y}''_8$	$\bar{y}''_8 - \bar{y}''_7 = \bar{y}'''_8$	$b_{123} = \frac{1}{2^3} y'''_8$

4) Дисперсионный анализ уравнения регрессии:

а) определение ошибки при вычислении коэффициентов уравнения регрессии.

Ошибки при вычислении коэффициентов для полного факторного эксперимента типа  $2^n$  одинаковы и определяются по формуле:

$$S^2 = \{b_n\} = S_y^2 \frac{1}{N}; \text{ или } S = \{b_n\} = S_y \frac{1}{\sqrt{N}};$$

б) проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии. Проверку значимости коэффициентов уравнения регрессии проводят по  $t$  критерию Стьюдента. Для каждого коэффициента определяют экспериментальный  $t^\ominus$  критерий по формуле:  $t_n^\ominus = \frac{|b_n| \sqrt{N}}{S_y}$  и

сравнивают с табличным значением  $t_{\alpha, f}^T$ , выбранного для заданного уровня значимости и числа степеней свободы  $f = N(\gamma - 1)$ . Значение  $t_{\alpha, f}^T = 2,12$ . Если для данного коэффициента выполняется неравенство  $t^\ominus \geq t_{\alpha, f}^T$ , то при выбранном уровне значимости соответствующий коэффициент уравнения регрессии значим, если неравенство не выполняется, то коэффициент не значим и членом уравнения регрессии с этим коэффициентом можно пренебречь.

Получаем:  $t^\ominus = 37,639$  зн;  $24,807$ зн;  $16,459$ зн;  $4,7073$ зн;  $1,8869$ не зн;  $3,5831$ зн.

Уравнение регрессии:

(3)

Значения коэффициентов в уравнении регрессии характеризуют степень влияния переменных на конечный результат (производительность автомобиля), знак (-) перед переменной показывает, что ее увеличение снижает производительность).

в) проверка гипотезы об адекватности полученного уравнения действительному процессу можно рассчитать, используя  $F$  критерий Фишера:

по формуле вычисляют экспериментальное значение статистики:

$$F^\ominus = \frac{S_{yag}^2}{S_y^2}; S_{yag}^2 = \frac{\sum \bar{y}_n^2 - N \sum b_n^2}{N - (k + 1)}; F_{f_1, f_2}^T$$

где  $k$  число значимых коэффициентов регрессии, не считая свободного члена, и сравнивают с табличным значением  $F_{f_1, f_2}^T$ , где  $\tilde{f}_1$  число степеней свободы числителя,  $f_1 \square \tilde{N} (k+1)$ ;  $\tilde{f}_2$  число степеней свободы знаменателя  $f_2 \square N(\gamma_1)$ .

Если при выбранном уровне значимости выполняется неравенство  $F^{\mathcal{E}} \leq F_{f_1, f_2}^T$  то полученное уравнение регрессии адекватно действительному уравнению, если неравенство не выполняется, то полученное уравнение регрессии неадекватно описывает рассматриваемый процесс.

г) определение границ доверительных интервалов для коэффициентов регрессии. Границы доверительных интервалов, в которых с заданной вероятностью  $P = 1 - \alpha$  находятся коэффициенты уравнения регрессии  $\{\beta\}$  определяются по формуле:  $b_n - t_{\alpha, f}^T S\{b_n\} \leq \beta_n \leq b_n + t_{\alpha, f}^T S\{b_n\}$  где

$t_{\alpha, f}^T$  табличное значение t - критерия Стьюдента при заданном уровне значимости и числе степеней свободы  $f = n - 1$

Как видно из уравнения (3), наибольшее влияние на производительность оказывает фактор - грузоподъемность автомобиля - 56,3 % от суммарного положительного эффекта; влияние фактора - скорость автомобиля - примерно в 2 раза ниже фактора ; влияние фактора - время выполнения погрузо-разгрузочных работ – 5 – 6 % от суммарного положительного эффекта.