

А.Н. Гоц

# ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РАСЧЕТА В ЭНЕРГОМАШИНОСТРОЕНИИ

3-е издание, исправленное и дополненное

*Допущено УМО по образованию  
в области энергетики и электротехники  
в качестве учебного пособия  
для студентов высших учебных заведений, обучающихся  
по специальности 140501 «Двигатели внутреннего сгорания»  
направления подготовки  
140500 «Энергетическое машиностроение»*

УДК 621.43  
ББК 31.365  
Г57

*Рецензенты:*

*Н.А. Иващенко* — доктор технических наук, профессор, заслуженный деятель науки РФ, заведующий кафедрой «Поршневые двигатели» Московского государственного технического университета имени Н.Э. Баумана;  
*В.М. Фомин* — доктор технических наук, профессор кафедры «Автомобильные и тракторные двигатели» Московского государственного технического университета «МАМИ»

**Гоц А.Н.**

Г57 Численные методы расчета в энергомашиностроении : учебное пособие / А.Н. Гоц. — 3-е изд., испр. и доп. — М. : ФОРУМ : ИНФРА-М, 2014. — 352 с. — (Высшее образование. Бакалавриат).

ISBN 978-5-91134-790-1 (ФОРУМ)  
ISBN 978-5-16-009034-4 (ИНФРА-М)

В учебном пособии рассмотрены основы математической теории упругости, методы решения задач теории упругости, а также численные методы расчета сложных конструкций, к которым относятся детали поршневых двигателей. Приведены следующие методы: конечных разностей (сеточные методы), конечных элементов и вариационные, даны примеры решения, методы расчета пластин и симметрично нагруженных цилиндрических деталей. Особое внимание уделено вариационным методам расчета, рассмотрены основы метода конечных элементов.

Пособие предназначено для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 140501 «Двигатели внутреннего сгорания» направления подготовки 140500 «Энергетическое машиностроение».

Учебное пособие соответствует требованиям государственных образовательных стандартов указанных специальностей. Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

**УДК 621.43**  
**ББК 31.365**

ISBN 978-5-91134-790-1 (ФОРУМ)  
ISBN 978-5-16-009034-4 (ИНФРА-М)

© Гоц А.Н., 2014  
© Издательство «ФОРУМ», 2014

## Предисловие

---

Учитель, ты знаешь, бывает как трудно  
Учить дураков, но бывает трудней  
Учить молодежь (ведь она всех умней!),  
Тогда-то становится тошно и нудно...  
Уча, ты в науку сам глубже вникаешь —  
К стыду своему сознаешь, замечаешь,  
Что много сам ты, премудрый, не знаешь!  
*Омар Хайям*<sup>1</sup>

Численные методы расчета конструкций являются составной частью строительной механики машин — одной из важнейших наук, основная задача которой заключается в обеспечении прочности и долговечности деталей, а также сложных машиностроительных конструкций, к которым относятся детали и узлы поршневых двигателей внутреннего сгорания. Знание основ этой науки и владение ее методами в той или иной степени необходимы всем специалистам в области энергетического машиностроения независимо от их специализации: расчетчикам, проектировщикам, специалистам по эксплуатации и т. д.

Достаточная прочность и долговечность — основные требования, предъявляемые к деталям поршневых двигателей. Однако если для стационарных сооружений (зданий, мостов и т. п.) их собственная масса связана лишь с расходом материалов и их стоимостью, то для автомобильных и тракторных двигателей собственная масса отдельных деталей (совершающих возвратно-поступательное или вращательное движение) влияет на технико-экономические показатели. Следовательно, наука о прочности имеет большое народно-хозяйственное значение. Любое достижение этой науки, позволяющее без ущерба для прочности деталей и узлов двигателя снизить его собст-

<sup>1</sup> Омар Хайям и персидские поэты X—XVI веков / под ред. В.П. Бутромеева [и др.]. М.: Белый город, 2007.

венную массу, равносильно соответствующему увеличению технико-экономических показателей.

Численные методы расчета в энергомашиностроении позволяют решать следующие основные проблемы:

- разработка методов определения величины и характера распределения напряжений и деформаций, возникающих в конструкциях поршневых двигателей при действии заданных внешних сил<sup>1</sup>. Решение этой проблемы применительно к отдельным элементам выполняется с использованием соответствующих методов сопротивления материалов, теории упругости, теории пластичности и других разделов механики деформируемого твердого тела;
- исследование допускаемых напряжений: изучение факторов, влияющих на прочность основных деталей поршневого двигателя в процессе его эксплуатации, установление уровней предельно допустимых напряжений, деформаций и перемещений с полным учетом всех факторов, влияющих на прочность;
- разработка методов расчета долговечности деталей, особенно в условиях действия высоких температур, а также нагрузок, действующих циклически;
- разработка методов численного решения напряженно-деформированного состояния наиболее нагруженных деталей тепловых двигателей с использованием методов конечных элементов, сеточного и др.

Ввиду сложности основных проблем численных методов адекватность полученных результатов может быть достигнута только при экспериментальных исследованиях — как модельных, так и натуральных.

Степень и глубина разработки указанных основных проблем численных методов расчета деталей поршневых двигателей различны. Наиболее строго и полно решена, пожалуй, первая проблема. Однако с точки зрения получения окончательных результатов все три проблемы имеют одинаковое значение. Действительно, если даже допущена неточность в определении величины внешних нагрузок или допускаемых напряжений, результат практически один и тот же — конструкция в зависимости от знака ошибки будет иметь либо избыточную прочность, а следовательно, и массу, либо окажется недостаточно

<sup>1</sup> Внешние силы определяются при рассмотрении кинематики и динамики поршневых двигателей [1, 2].

прочной. Поэтому главной задачей при расчете деталей поршневых двигателей является расширение исследований по указанным проблемам.

Заметим, что наибольшие результаты по проблеме повышения прочности базовых узлов и деталей двигателей внутреннего сгорания были получены на кафедре «Поршневые двигатели» Московского государственного технического университета им. Н.Э. Баумана [3].

На кафедре «Тепловые двигатели и энергетические установки» Владимирского государственного университета ряд преподавателей достаточно плодотворно работает по указанным проблемам<sup>1</sup>. Некоторые из полученных интересных результатов, в частности, по расчету теплонапряженных деталей, по расчету деталей при напряжениях, переменных во времени, выбор эквивалентного напряжения при расчете деталей ДВС методом конечных элементов, используются в практике конструкторских бюро.

В первой части пособия будут рассмотрены теория напряжений и деформаций, основные соотношения, принципы и методы решения задач теории упругости, в том числе решение плоской задачи в полиномах, тригонометрических рядах, а также с использованием конечно-разностного метода.

Во второй части рассмотрены прикладные задачи: расчет пластин, расчет толстостенных цилиндров (задача Ламе), прессовых посадок, вариационные методы решения, а также основы теории метода конечных элементов.

В пособии ведется последовательная нумерация формул, которые используются в дальнейших расчетах. Однако в каждом пункте часть формул, которая поясняет вывод основных зависимостей, и они нигде, кроме данного пункта, не используются, нумеруется буквами русского алфавита. Это позволяет уменьшить общее количество зависимостей, которые при изучении курса учащиеся должны использовать.

Пособие предназначено для студентов специальности 140501 «Двигатели внутреннего сгорания» направления 140500 «Энергетическое машиностроение» (бакалавров и магистров) и рассчитано как на аудиторную, так и самостоятельную работу не только при изучении курса «Численные методы в энергомашиностроении», но и при даль-

<sup>1</sup> Следует отметить, что часть преподавателей кафедры окончили аспирантуру на кафедре «Поршневые двигатели» МГТУ.

нейшем изучении курсов «Использование МКЭ в энергомашиностроении», «Конструирование ДВС».

Автор с благодарностью примет замечания и предложения, которые могут появиться при практическом пользовании пособием. Вину за все опечатки автор принимает на себя. Замечания просим направлять по адресу:

600000, г. Владимир, ул. Горького, д. 87, Владимирский государственный университет им. А.Г. и Н.Г. Столетовых, кафедра «Тепловые двигатели и энергетические установки».

E-mail: hotz@mail.ru; hotz@vlsu.ru

## ЧАСТЬ 1

### Раздел I ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

#### Глава 1 ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ

---

---

Не ищите в этой книге чудодейственного ключа, который откроет перед вами все двери — научит решать все задачи. Однако вы найдете в ней хорошие образцы для подражания и множество благоприятных возможностей попрактиковаться. Если хотите научиться плавать — нужно войти в воду, а если желаете научиться решать задачи — решайте их.

*Джорж Поиа<sup>1</sup>*

##### 1.1. Объект изучения.

##### Основные принципы классической теории упругости

*Механика деформируемого твердого тела* — наука, изучающая напряженно-деформированное состояние реальных тел при силовом и температурном воздействиях. Она разрабатывает методы, которые используются при расчетах прочности и проектировании самых разнообразных инженерных сооружений: поршневых двигателей, самолетов, космических кораблей, машин и т. д. Эта наука служит также основой многих технологических процессов: гибки,ковки, обработки материалов резанием, давлением.

---

<sup>1</sup> Поиа Дж. Математическое открытие. М.: Наука, 1970.

Используемый в механике деформируемого твердого тела математический аппарат базируется на общих законах механики и ряде упрощающих допущений, а также понятий.

Сечением тела называется любая мысленно проведенная поверхность, разделяющая тело на две части. Каждому сечению соответствуют две совпадающие внутренние поверхности, принадлежащие расположенным по разные стороны от сечения частям тела.

Одним из таких свойств, которым в той или иной мере обладают все конструкционные материалы, является *свойство упругости*, т. е. способность тела, изготовленного из такого материала, восстанавливать свои первоначальные размеры и форму после снятия внешних нагрузок. Частный, но очень важный для практики случай упругости — это линейно-упругое тело Гука (линейная зависимость между напряжениями и деформациями для каждой температуры независимо от времени).

При этом первоначальное состояние тела предполагается ненапряженным; оно обычно именуется *естественным* состоянием тела. Предположение о естественном состоянии тела исключает из рассмотрения начальные напряжения, характер и величина которых, как правило, нам неизвестны и зависят от истории возникновения тела.

Идеально упругое тело предполагается *сплошным*, т. е. твердое тело способно заполнять объем без всяких пустот и после деформации. Таким образом, допущение о *сплошности* полагает, что материал представляет собой сплошную среду — континуум, не имеющую дискретной (молекулярной, атомной) структуры, характерной для любого реального тела. Допущение о сплошности позволяет ввести понятие напряженно-деформированного состояния в окрестности точки тела и записать условия равновесия элемента тела в виде дифференциальных уравнений. Кроме того, это допущение позволяет считать перемещения точек тела при деформации непрерывными и дифференцируемыми функциями координат и выразить компоненты деформаций через производные этих функций.

Полученное в результате допущения о сплошности абстрактное тело наделяют некоторыми механическими свойствами, аппроксимирующими способность реальных тел сопротивляться деформированию.

Идеально упругое тело принимается *однородным*. Это значит, что во всех точках тело под действием одних и тех же напряжений деформируется одинаково. Предположение об *однородности* позволяет счи-

тать величины, характеризующие упругие свойства тела, постоянными по всему объему тела.

Идеально упругое тело предполагается *изотропным*. Под этим подразумевается, что упругие свойства тела одинаковы по всем направлениям, проведенным из данной точки, а любая плоскость, проходящая через частицу тела, является для нее плоскостью симметрии. Если эти свойства одинаковы во всех частицах тела, то приходим к понятию однородного изотропного тела.

Реальные тела в той или иной степени отличаются от рассматриваемой модели. Поэтому приемлемость решений, получаемых в теории упругости, для реальных тел зависит от того, насколько эти тела можно считать вполне упругими, сплошными, однородными и изотропными.

Использование допущения об упругости в дополнение к допущению о сплошности привело к образованию большого самостоятельного раздела механики деформируемого твердого тела — *теории упругости*.

В классической теории упругости принимается, что перемещения тела малы по сравнению с его линейными размерами, а относительные удлинения и углы сдвига малы по сравнению с единицей.

Малость деформаций и линейная зависимость между напряжениями и деформациями позволяет применять *принцип независимости действия сил*. Этот принцип при действии на тело группы сил дает возможность подсчитать воздействие каждой силы в отдельности с последующим сложением полученных результатов.

Большое значение при решении многих задач в теории упругости имеет *принцип локальности эффекта самоуравновешенных внешних нагрузок*, или *принцип Сен-Венана*. Согласно этому принципу, если к малой части тела приложена система взаимно уравновешенных нагрузок, то она вызывает лишь местные напряжения, быстро убывающие по мере удаления от места приложения нагрузок.

Высказанную мысль можно пояснить на следующем примере. При захвате проволоки клещами на нее действуют две равные и противоположно направленные силы  $P$ , приложенные в месте захвата проволоки (рис. 1). Эти силы создают большие напряжения и деформации в месте захвата, быстро уменьшающиеся при удалении влево и вправо от места захвата. На рис. 1 показана эпюра нормальных напряжений вдоль оси проволоки.

Принцип Сен-Венана имеет и другую редакцию: в точках твердого тела, достаточно удаленных от места приложения нагрузок, напря-

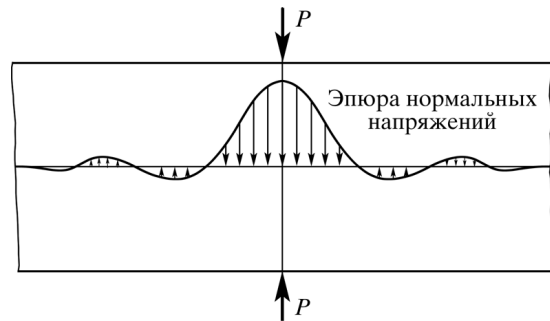


Рис. 1. Распределение напряжений при точечном нагружении

жения весьма мало зависят от характера распределения этих нагрузок по поверхности тела.

На основании принципа Сен-Венана нагрузку, распределенную по небольшой части поверхности тела, можно заменять сосредоточенной силой.

Для многих важных в практическом отношении задач методы теории упругости позволяют получить результат, вполне достоверно оценивающий работоспособность конструкций. Однако большинство конструкционных материалов начиная с некоторого значения напряжений получают *остаточные* (пластические) деформации, которые не исчезают после снятия внешней нагрузки. При этом свойство совершенной упругости материала оказывается нарушенным. Исследованием поведения конструкций, в материале которых наряду с упругими могут появляться также и необратимые пластические деформации, уже занимается *теория пластичности* — важный раздел механики деформируемого твердого тела.

Модель упругопластического тела, которая используется в теории пластичности, предполагает независимость механических свойств материала во времени. Однако можно назвать целый ряд современных строительных материалов (титан, стеклопластики и т. п.), у которых наблюдается заметное изменение их механических прочностных свойств в зависимости от времени, хотя внешняя нагрузка при этом не изменяется. В материале с течением времени развиваются дополнительные деформации, называемые *деформациями ползучести*. С повышением температуры и уровня напряжений явление ползучести для большинства конструкционных материалов резко усиливается. Исследованием поведения конструкций с учетом свойств ползучести

материала занимается *теория ползучести* — еще один раздел механики деформируемого твердого тела.

*Сопротивление материалов*, которое студенты уже изучали, также считается разделом механики деформируемого твердого тела. Для нее как инженерной науки характерно использование приближенных и сравнительно простых расчетных методов, опирающихся на экспериментальные исследования. Область приложения таких методов ограничивается сравнительно простыми конструкциями, тогда как существует широкий класс практически важных задач, для решения которых требуется использование более строгих и точных моделей и методов. Такие уточненные исследования напряженно-деформированного состояния проводятся в зависимости от принятой уточненной модели материала тела в рамках следующих разделов механики деформируемого твердого тела: *теории упругости; теории пластичности и теории ползучести*.

Различия в моделях, которые используются в каждом из этих разделов механики деформируемого твердого тела, порождают существенные различия и в методах исследования. Именно это и дает основание рассматривать *теорию упругости, теорию пластичности и теорию ползучести* как самостоятельные науки. Конечно, в этих науках сохранилось и много общего — структура и содержание основных уравнений.

Основное внимание в первом разделе уделено изложению главных положений теории упругости, которую можно считать основным разделом механики деформируемого твердого тела.

## 1.2. Силы и напряжения

Все внешние силы, действующие на твердое тело, можно подразделить на две группы: поверхностные и объемные.

*Поверхностные силы* — это результат контакта двух тел. Они распределены по поверхности тела, например, давление газов на поршень, давление воды на плотину и т. д.

Поверхностные силы характеризуются *интенсивностью*, т. е. величиной силы, приходящейся на единицу площади поверхности, на которой распределена эта сила. Если размеры площади, на которой действует сила, малы по сравнению с размерами тела, то такой пло-



щадью можно пренебречь и считать, что сила приложена в точке. Такую силу называют *сосредоточенной*.

*Объемные силы* действуют в каждой точке тела. К ним относятся, например, силы инерции.

На рис. 2, а в прямоугольной (декартовой) системе координат хуз изображено твердое тело произвольной формы, находящееся в равновесии под действием поверхностных и объемных сил. Для исследования внутренних сил, возникающих в теле, применим метод сечений. Мысленно разрежем тело произвольной плоскостью на две части А и В, а часть В отбросим<sup>1</sup>. Положение плоскости сечения  $\Delta S_v$  в пространстве определяется направлением нормали  $\nu$  (с направляющими косинусами  $l = \cos(\nu, x)$ ;  $m = \cos(\nu, y)$ ;  $n = \cos(\nu, z)$ ), внешней по отношению к оставшейся части А.

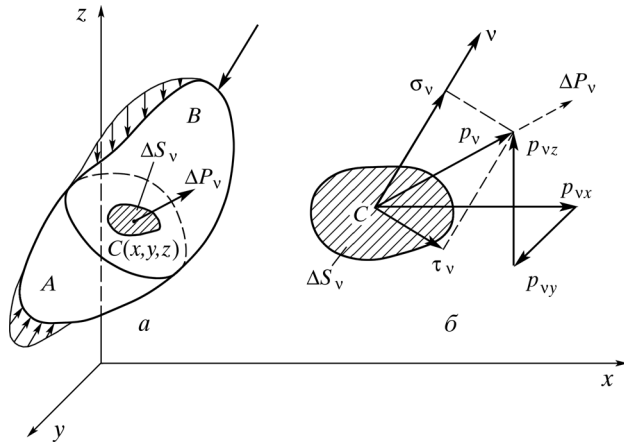


Рис. 2. Определение напряжений в окрестности точки С

Действие отброшенной части можно заменить силой  $\Delta \bar{P}_v^2$  (рис. 2, б), приложенной к центру тяжести сечения площадью  $\Delta S_v$ . Если этот вектор  $\Delta \bar{P}_v$  разделить на площадь  $\Delta S_v$ , то получается средняя интенсивность внутренних сил упругости на данной площадке — *среднее полное напряжение*:

$$\bar{p}_{v\text{cp}} = \Delta \bar{P}_v / \Delta S_v. \tag{1.1}$$

<sup>1</sup> Напомним, что иногда этот метод называют методом РОЗУ — разрежем, отбросим, заменим и уравновесим.

Перейдем к пределу в (1.1) при стягивании площадки  $\Delta S_v$  в точку С:

$$\bar{p}_v = \lim_{\Delta S_v \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{P}_v}{\Delta S_v} \tag{1.2}$$

Полученная при этом величина  $\bar{p}_v$  называется *полным напряжением* в данной точке по данной элементарной площадке.

Полное напряжение  $\bar{p}_v$  как векторная величина может быть задано либо модулем  $p_v$  и направляющими косинусами  $l_p = \cos(p_v, x)$ ;  $m_p = \cos(p_v, y)$ ;  $n_p = \cos(p_v, z)$ , причем  $l_p^2 + m_p^2 + n_p^2 = 1$ , либо тремя проекциями (составляющими) на координатные оси (см. рис. 2, б):

$$p_{xv} = p_v l_p; \quad p_{yv} = p_v m_p; \quad p_{zv} = p_v n_p. \tag{1.3}$$

Полное напряжение разлагается также на две составляющие: проекция на нормаль — нормальное напряжение  $\sigma_v$ , проекция на плоскость площадки  $\Delta S_v$  — полное касательное напряжение  $\tau_v$  (см. рис. 2, б).

В сечениях, параллельных координатным плоскостям, индекс  $v$  можно заменить индексом координатной оси, нормальной к сечению. Например, в сечении, параллельном координатной плоскости  $yOz$  (рис. 3, а), внешняя нормаль совпадает по направлению с осью  $x$ , и составляющие напряжения обозначаются так:  $p_{xx}$ ,  $p_{yx}$ ,  $p_{zx}$ . Составляющая  $p_{xx}$  направлена перпендикулярно к сечению и называется *нормальным* напряжением  $\sigma_x$ .

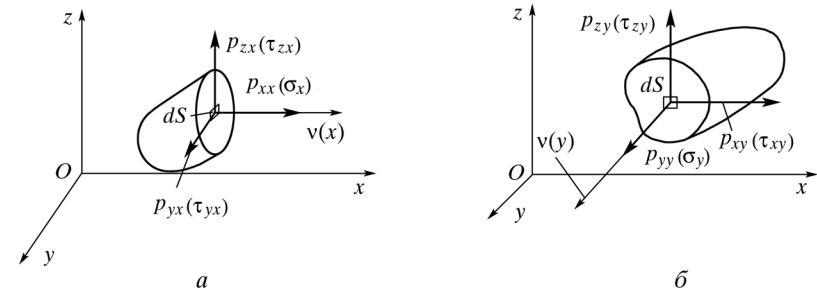


Рис. 3. Обозначение нормальных и касательных напряжений на площадках с нормальными, совпадающими с осями х (а) и у (б)

Составляющие  $p_{yx}$  и  $p_{zx}$ , лежащие в плоскости сечения, называются *касательными* напряжениями  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{zx}$ .

Для нормального напряжения  $\sigma_x$  индекс  $x$  указывает ту ось, параллельно которой направлено напряжение (одновременно это является и обозначением нормали к площадке, на которой рассматривается нормальное напряжение).

Касательные напряжения обозначаются  $\tau$  с двумя индексами. Так, например,  $\tau_{yx}$  — касательное напряжение, имеющее направление, параллельное оси  $y$  и действующее на площадке, нормаль к которой параллельна оси  $x$ . Таким образом, первый индекс определяет направление, а второй — адрес площадки (по направлению нормали), где оно действует. Для нормального напряжения  $\sigma_x$  второй индекс обычно опускают (хотя можно и обозначать  $\sigma_{xx}$ ), поскольку и так понятно, куда направлена нормаль к площадке, где оно действует.

На рис. 3, б показаны составляющие напряжений в сечении параллельной координатной плоскости  $zOx$ .

Из девяти составляющих напряжений на всех трех площадках, параллельных координатным плоскостям  $yOz$ ,  $zOx$  и  $xOy$ , три составляющие являются нормальными напряжениями:

$$p_{xx} = \sigma_x; \quad p_{yy} = \sigma_y; \quad p_{zz} = \sigma_z,$$

а шесть составляющих — касательными:

$$p_{xy} = \tau_{xy}; \quad p_{yx} = \tau_{yx}; \quad p_{yz} = \tau_{yz};$$

$$p_{zy} = \tau_{zy}; \quad p_{zx} = \tau_{zx}; \quad p_{xz} = \tau_{xz}.$$

Для напряжений принято следующее правило знаков.

Нормальное напряжение считается положительным, если оно вызывает растяжение (в этом случае оно направлено по внешней нормали к площадке, принадлежащей рассматриваемой части тела), и отрицательным, когда оно вызывает сжатие (в последнем случае оно направлено для данной части тела по внутренней нормали).

Касательное напряжение считается положительным, если оно на площадке, нормаль к которой совпадает с положительным направлением соответствующей ей координатной оси, направлено в сторону соответствующей этому направлению координатной оси. Если внешняя нормаль совпадает с отрицательным направлением соответствующей ей координатной оси, то положительное касательное напряжение направлено в сторону, противоположную направлению соответствующей ему координатной оси.

Напряжения, возникающие в твердом теле, в общем случае могут быть различными в разных точках тела, т. е. должны быть функциями координат точек:

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y, z); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y, z);$$

$$\sigma_y = \sigma_y(x, y, z); \quad \tau_{yz} = \tau_{yz}(x, y, z);$$

$$\sigma_z = \sigma_z(x, y, z); \quad \dots\dots\dots$$

Введем понятие о тензоре напряжения. Для этой цели расположим все напряжения, определяющие напряженное состояние в данной рассматриваемой точке, в виде следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

В первой строке расположены все компоненты напряжений, имеющие направление, параллельное оси  $x$ , во второй строке — параллельное оси  $y$  и в третьей — параллельное оси  $z$ . Кроме того, в первом столбце сгруппированы напряжения, действующие на площадке, нормаль к которой параллельна оси  $x$ , во втором столбце — все напряжения на площадке с нормалью, параллельной оси  $y$ , и в третьем столбце — на площадке с нормалью, параллельной оси  $z$ .

Нормальные напряжения при таком способе построения расположены на главной диагонали. Ниже будет доказано, что касательные напряжения, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны, т. е. квадратная матрица (1.4) симметрична.

Приведенную выше симметричную квадратную матрицу называют *тензором напряжений*<sup>1</sup>. Напряженное состояние в точке вполне определено, если задан тензор напряжений для этой точки.

### 1.3. Дифференциальные уравнения равновесия

Выделим из тела, находящегося под действием внешних сил, бесконечно малый параллелепипед с гранями, параллельными координатным плоскостям, и ребрами длиной  $dx$ ,  $dy$  и  $dz$  (рис. 4). Установим

<sup>1</sup> Название «тензор» введено для обозначения совокупности всех векторов напряжений, действующих на площадках, проходящих через одну и ту же точку в деформируемом теле [5].



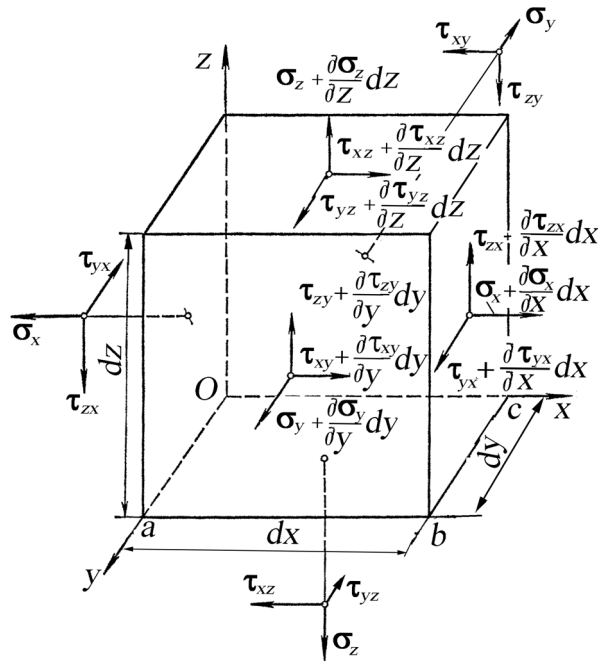


Рис. 4. Действующие компоненты напряжений по всем граням элементарного параллелепипеда

зависимость между составляющими напряжений, действующих на гранях этого параллелепипеда. На каждой грани имеем три составляющие, параллельные координатным осям. Всего на шести гранях получаем восемнадцать составляющих напряжений (объемные силы не показаны).

Составляющие напряжения на параллельных гранях параллелепипеда, отстоящих друг от друга на бесконечно малое расстояние, отличаются одно от другого на бесконечно малую величину.

Например, если на площадке  $dydz$  параллелепипеда, совпадающей с координатной плоскостью  $yOz$ , действует нормальное напряжение  $\sigma_x$ , то на площадке, находящейся на расстоянии  $dx$  от первой, действует нормальное напряжение  $\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$ , которое отличается на бесконечно малую величину за счет изменения координаты  $x$ . Аналогично связаны напряжения и на остальных парах параллельных граней параллелепипеда. Таким образом, из восемнадцати

составляющих напряжения неизвестными являются только девять:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}, \tau_{yx}, \tau_{zy}, \tau_{xz}$ .

Кроме напряжений, на параллелепипед будут действовать объемные силы (массовые или инерционные). Обозначим проекции на координатные оси массовых сил, отнесенных к единице объема тела,  $X, Y$  и  $Z$ . Составляющие массовых сил, действующих в объеме рассматриваемого параллелепипеда, будут:

$$Xdx dy dz, Ydx dy dz, Zdx dy dz.$$

Для тела, находящегося в равновесии, должны удовлетворяться шесть уравнений статики: три уравнения проекций действующих сил на координатные оси и три уравнения моментов этих сил относительно осей координат.

Рассмотрим уравнение проекций на ось  $x$ . На ось  $x$  дают проекции только силы, параллельные этой оси. При проектировании каждое напряжение будем умножать на величину площади, на которой оно действует. Проектируя, получаем:

$$\left(\sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx\right) dy dz - \sigma_x dy dz + \left(\tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy\right) dz dx - \tau_{xy} dz dx + \left(\tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz\right) dx dy - \tau_{xz} dx dy + X dx dy dz = 0.$$

После приведения подобных членов и деления на объем  $dV = dx dy dz$  окончательно получим:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X = 0.$$

Аналогично можно составить уравнения проекций сил на оси  $y$  и  $z$ . В результате получим три дифференциальных уравнения равновесия, которые называются уравнениями Навье:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.5)$$

Переходим к составлению уравнений моментов действующих на параллелепипед сил (см. рис. 4) относительно координатных осей.

Возьмем, например, уравнение моментов относительно оси  $y$ . Суммируя моменты всех сил относительно этой оси, получаем:

$$\begin{aligned} & \left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dydz \frac{dz}{2} - \sigma_x dydz \frac{dz}{2} + \sigma_z dx dy \frac{dz}{2} - \\ & - \left( \sigma_z + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} dz \right) dx dy \frac{dx}{2} + \left( \tau_{xz} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} dz \right) dx dy dz - \\ & - \left( \tau_{zx} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} dx \right) dy dz dx - \tau_{xy} dz dx \frac{dz}{2} + \\ & + \left( \tau_{xy} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} dy \right) dz dx \frac{dz}{2} - \left( \tau_{zy} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} dy \right) dz dx \frac{dx}{2} + \\ & + \tau_{zy} dz dx \frac{dx}{2} + X dx dy dz \frac{dx}{2} - Z dx dy dz \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned} \quad (a)$$

В полученном соотношении (a) моменты некоторых сил являются бесконечно малыми величинами третьего порядка, другие же — четвертого порядка малости.

Например, касательные напряжения  $\tau_{xz}$  и  $\tau_{zx}$  создают моменты  $\tau_{xz} dx dy \cdot dz$  и  $\tau_{zx} dy dz \cdot dx$ , являющиеся величинами третьего порядка малости. Момент, создаваемый нормальными напряжениями по левой и правой граням, равен:

$$\left( \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx \right) dy dz \frac{dz}{2} - \sigma_x dy dz \frac{dz}{2}.$$

Этот момент оказывается величиной четвертого порядка малости. Такой же порядок малости имеют моменты массовых сил

$$X dx dy dz \frac{dx}{2} \text{ и } Z dx dy dz \frac{dx}{2}.$$

Преобразовав выражение (a) и отбросив величины четвертого порядка малости, после деления на объем рассматриваемого параллелепипеда получим:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx}.$$

Составляя уравнение моментов относительно осей  $z$  и  $x$ , получаем еще два аналогичных соотношения. Таким образом, из уравнений моментов вытекают три равенства

$$\tau_{xy} = \tau_{yx}; \quad \tau_{yz} = \tau_{zy}; \quad \tau_{zx} = \tau_{xz},$$

представляющие собой закон парности касательных напряжений. Этот закон можно выразить так: *в каждой двух взаимно перпендикулярных плоскостях компоненты касательных напряжений, направленные перпендикулярно к линии пересечения этих плоскостей, равны между собой и при этом оба направлены либо к линии пересечения, либо от нее.*

Вследствие парности касательных напряжений вместо девяти неизвестных составляющих напряжений, характеризующих напряженное состояние в точке тела, остается только шесть:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_x(x, y, z); & \tau_{xy} &= \tau_{xy}(x, y, z); \\ \sigma_y &= \sigma_y(x, y, z); & \tau_{yz} &= \tau_{yz}(x, y, z); \\ \sigma_z &= \sigma_z(x, y, z); & \tau_{zx} &= \tau_{zx}(x, y, z). \end{aligned} \right\} \quad (1.6)$$

Кроме того, из закона парности касательных напряжений следует, что тензор напряжений (1.4) — симметричная матрица, так как компоненты, расположенные симметрично относительно главной диагонали, равны между собой ( $\tau_{ij} = \tau_{ji}$ , где  $i, j = x, y, z$ ). Для определения шести неизвестных функций (6) получено только три дифференциальных уравнения равновесия (1.5).

Следовательно, уравнений статики недостаточно, и задача механики деформируемого твердого тела по определению напряжений в бесконечно малом объеме является статически неопределимой. Недостающие уравнения можно получить, изучая деформации тела и учитывая его физические свойства в рамках упомянутых выше разделов механики деформируемого твердого тела.

При решении некоторых задач вместо декартовой системы координат удобно пользоваться другими системами, например цилиндрической. В цилиндрической системе координат положение любой точки определяется тремя координатами:  $x, \theta$  и  $r$ , причем две из них

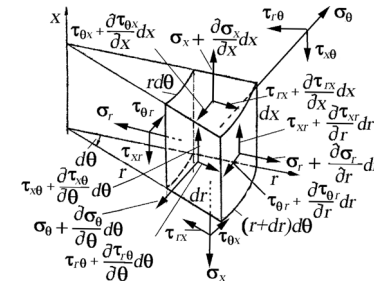


Рис. 5. Бесконечно малый элемент в цилиндрической системе координат

( $x$  и  $r$ ) — прямолинейные, а третья  $\theta$  — угловая. На рис. 5 показаны бесконечно малый элемент тела в цилиндрической системе координат и напряжения, действующие на гранях этого элемента.

Из уравнений проекций, действующих на бесконечно малый элемент тела (см. рис. 5) аналогично уравнениям (1.5) в декартовой системе координат, получим следующие дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрической системе координат:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{xr}}{\partial r} + \frac{\tau_{xr}}{r} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{\theta x}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \theta &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{rx}}{\partial x} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.7)$$

### 1.4. Напряжения на наклонных площадках.

#### Условия на поверхности

Для исследования напряженного состояния во всех точках упругого тела необходимо уметь находить напряжения в любой площадке, положение которой определяется нормалью  $v$ , направляющие косинусы которой равны  $\cos(x, v) = l$ ,  $\cos(y, v) = m$ ,  $\cos(z, v) = n$  (рис. 6). Наклонная площадка  $abc$  вместе с координатными площадками  $Oab$ ,  $Obc$  и  $Oca$  образует бесконечно малый тетраэдр. Обозначим площадь наклонной грани  $abc$  через  $dF$ .

Тогда площади остальных граней тетраэдра, перпендикулярных координатным осям, определим как проекции площади грани  $abc$  на соответствующие координатные плоскости: пл.  $Obc = dF \cdot l$ , пл.  $Oca = dF \cdot m$ , пл.  $Oab = dF \cdot n$ .

На рассматриваемый тетраэдр действуют нагрузки: на координатных площадках шесть составляющих напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}$  и  $\tau_{zx}$ , на площадке  $abc$  три составляющие полного напряжения  $p_{xv}, p_{yv}$ , и  $p_{zv}$ , а также по всему объему составляющие объемной силы  $X, Y, Z$  (последние на рис. 6 не показаны). Проецируя на ось  $x$  все силы, действующие на тетраэдр  $Oabc$ , получаем:

$$p_{xv} dF - \sigma_x dFl - \tau_{xy} dFm - \tau_{xz} dFn + XdV = 0.$$

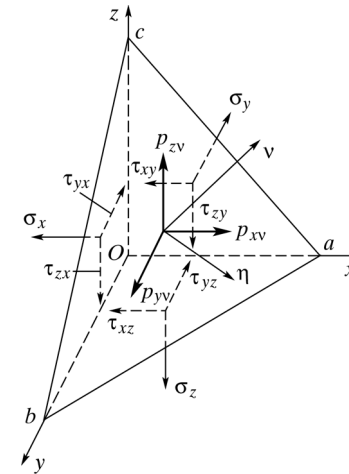


Рис. 6. Площадка с напряжениями на исходных гранях

В этом уравнении последнее слагаемое, учитывающее действие объемных сил, имеет третий порядок малости (умножается на объем  $dV$ ), а остальные — второй ( $dF$ ). Пренебрегая слагаемыми третьего порядка малости и деля все члены равенства на  $dF$ , находим:

$$p_{xv} = \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n. \quad (a)$$

Составляя уравнения равновесия всех сил, действующих на тетраэдр  $Oabc$ , на оси  $y$  и  $z$ , получаем еще два уравнения. Таким образом, приходим к следующим трем уравнениям равновесия элементарного тетраэдра:

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (1.8)$$

Уравнения (1.8) позволяют определить составляющие напряжения на любой наклонной площадке с нормалью  $v$  с помощью шести составляющих напряжений на площадках, параллельных координатным плоскостям.

Если площадка  $abc$  совпадает с поверхностью тела, то составляющие напряжения  $p_{xv}, p_{yv}$  и  $p_{zv}$  будут составляющими внешних сил, действующих на поверхности тела. Тогда уравнения (1.8) называют условиями на контуре тела, или статическими граничными условиями, так как они связывают внешние силы с внутренними напряжениями.

В уравнения (1.8) не входят объемные силы (силы тяжести или инерционные), потому что они являются бесконечно малыми третьего порядка, тогда как все члены уравнения (а) в его первоначальном виде — второго порядка.

Удовлетворение уравнениям (1.5) и (1.8) является необходимым и достаточным для равновесия всего тела под действием заданных внешних сил. Действительно, если составляющие напряжений (1.6) удовлетворяют уравнениям равновесия (1.5) во всех точках внутри тела, то все точки внутри тела находятся в равновесии. Если составляющие напряжений (1.6) удовлетворяют уравнениям (1.8) в точках у поверхности тела, то все точки тела у поверхности находятся в равновесии. Если же составляющие напряжений (1.6) одновременно удовлетворяют уравнениям (1.5) и (1.8), то все тело в целом находится в равновесии.

И, наоборот, если тело находится в равновесии под действием заданных внешних сил, то во всех точках внутри тела должны обращаться в тождества уравнения (1.5), а во всех точках у поверхности тела — уравнения (1.8). Для удобства запоминания условий (1.8) можно представить их в виде табл. 1.

Выделенные в табл. 1 компоненты составляют, как известно, *тензор напряжений*.

Таблица 1. Определение поверхностных компонентов внешней нагрузки

Поверхностные компоненты нагрузки	Множители		
	<i>l</i>	<i>m</i>	<i>n</i>
$p_{xv}$	$\sigma_x$	$\tau_{xy}$	$\tau_{xz}$
$p_{yv}$	$\tau_{yx}$	$\sigma_y$	$\tau_{yz}$
$p_{zv}$	$\tau_{zx}$	$\tau_{zy}$	$\sigma_z$

### 1.5. Исследование напряженного состояния в данной точке тела при известном для нее тензоре напряжений

Продолжим исследование напряженного состояния в точке тела. Уравнениями (1.8) можно воспользоваться для вычисления напряжений в любой точке, расположенной на любой наклонной площадке внутри тела, если известны составляющие напряжений по трем вза-

имно перпендикулярным площадкам, параллельным координатным плоскостям (тензор напряжений (1.4)). Действительно, если известны нормальные и касательные напряжения по трем ортогональным граням бесконечно малого параллелепипеда, вырезанного возле данной точки, и требуется определить напряжения в какой-либо наклонной по отношению к граням параллелепипеда (рис. 7), то нужно воспользоваться зависимостью (1.8). Разница будет лишь в том, что составляющие  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$  и  $p_{zv}$ , которые в (1.8) были известными внешними силами, в данном случае являются неизвестными составляющими внутренних сил.

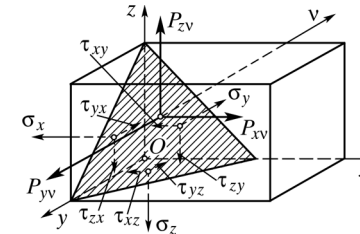


Рис. 7. Вычисление напряжений на наклонной площадке

Равнодействующая составляющих напряжений на наклонной площадке  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$  и  $p_{zv}$  называется *полным напряжением* на этой площадке и определяется по формуле

$$p_v = \sqrt{p_{xv}^2 + p_{yv}^2 + p_{zv}^2}. \tag{1.9}$$

Компоненты  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$  и  $p_{zv}$  не являются ни нормальными, ни касательными напряжениями, и потому для суждения о прочности они не совсем удобны.

Разложим полное напряжение  $p_v$  на составляющие по нормали к площадке (это будет нормальное напряжение) и по касательной к последней (это будет касательное напряжение). Итак, нормальное напряжение равно сумме проекций составляющих  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$  и  $p_{zv}$  на направление нормали  $v$

$$\sigma_v = p_{xv}l + p_{yv}m + p_{zv}n. \tag{1.10}$$

Подставляя в (1.10) значения составляющих  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$  и  $p_{zv}$  из (1.8), получаем:

$$\sigma_v = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl. \tag{1.11}$$

Формула (1.11) позволяет определять нормальные напряжения на любой наклонной площадке с помощью известных компонентов тензора напряжений (1.4) (шести составляющих напряжений на трех площадках, параллельных координатным плоскостям (см. рис. 7)).

Касательное напряжение на этой площадке определится из уравнения

$$\tau_v^2 = p_v^2 - \sigma_v^2. \quad (1.12)$$

Последняя формула дает только величину касательного напряжения, но не указывает его направление в плоскости площадки.

Найдем составляющую касательного напряжения в плоскости площадки с нормалью  $v$  по заданному направлению. Для этого зададим в плоскости рассматриваемой площадки с нормалью  $v$  (см. рис. 6) направление  $\eta$  с направляющими косинусами  $l_1, m_1, n_1$ . Так как направления  $v$  и  $\eta$  взаимно перпендикулярны, между их направляющими косинусами существует известное соотношение

$$ll_1 + mm_1 + nn_1 = 0. \quad (1.13)$$

Касательное напряжение на площадке с нормалью  $v$  в направлении  $\eta$  равно сумме проекций составляющих полного напряжения  $p_{xv}, p_{yv}$  и  $p_{zv}$  на эту площадку на направление  $\eta$ :

$$\tau_{\eta v} = \sigma_x ll_1 + \sigma_y mm_1 + \sigma_z nn_1 + \tau_{xy}(lm_1 + l_1 m) + \tau_{yz}(mn_1 + m_1 n) + \tau_{zx}(nl_1 + n_1 l). \quad (1.14)$$

Формула (1.14) позволяет определить касательные напряжения на любой наклонной площадке в заданном направлении с помощью шести составляющих напряжений по трем площадкам, параллельным координатным плоскостям.

### 1.6. Главные напряжения

Если положение наклонной площадки (см. рис. 7) менять в пространстве, то при определенных значениях направляющих косинусов  $l_1, m_1, n_1$  полный вектор напряжений  $p_v$  будет совпадать с нормалью  $v$  к наклонной площадке  $ABC$  (рис. 8). В этом случае в наклонной площадке  $ABC$  будет отсутствовать проекция полного вектора напряжений  $p_v$  на эту площадку, т. е. на  $ABC$  не будет касательных напряжений.

Площадка, на которой касательные напряжения равны нулю, называется *главной*, а нормальное напряжение — *главным напряжением*.

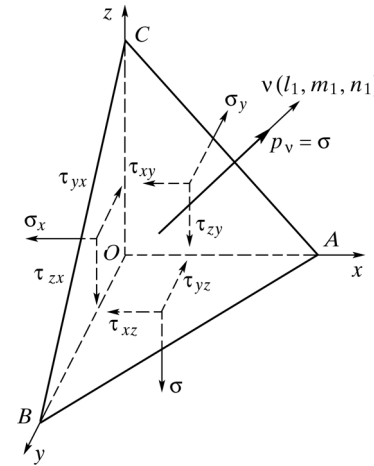


Рис. 8. Положение главной площадки

В этом случае (см. рис. 8)  $\tau_v = 0$ , а  $p_v = \sigma$ . В данном случае  $\sigma$  — искомое главное напряжение. Проецируя его на координатные оси, находим составляющие главного напряжения, параллельные координатным осям:

$$\sigma l_1 = p_{xv}; \quad \sigma m_1 = p_{yv}; \quad \sigma n_1 = p_{zv}. \quad (a)$$

Сравнивая соотношение (a) и (1.8), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma l_1 &= \sigma_x l_1 + \tau_{xy} m_1 + \tau_{xz} n_1; \\ \sigma m_1 &= \tau_{yx} l_1 + \sigma_y m_1 + \tau_{yz} n_1; \\ \sigma n_1 &= \tau_{zx} l_1 + \tau_{zy} m_1 + \sigma_z n_1. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Кроме того, имеем известное из аналитической геометрии соотношение между направляющими косинусами

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1. \quad (1.16)$$

Уравнения (1.15) и (1.16) содержат четыре неизвестных: главное напряжение  $\sigma_1$  и три его направляющих косинуса.

Представим уравнение (1.15) в виде

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma)l_1 + \tau_{xy}m_1 + \tau_{xz}n_1 &= 0; \\ \tau_{yx}l_1 + (\sigma_y - \sigma)m_1 + \tau_{yz}n_1 &= 0; \\ \tau_{zx}l_1 + \tau_{zy}m_1 + (\sigma_z - \sigma)n_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.17)$$

Система (1.17) — система трех линейных однородных алгебраических уравнений не допускает тривиального решения  $l_1 = m_1 = n_1 = 0$  в силу соотношения (1.16). Для того чтобы однородная система (1.17) имела решения, отличные от нулевого, необходимо и достаточно определить этой системы приравнять к нулю, т. е.:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \sigma_x - \sigma & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y - \sigma & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma \end{vmatrix} = 0. \quad (б)$$

Раскроем определитель (б)

$$(\sigma_x - \sigma)(\sigma_y - \sigma)(\sigma_z - \sigma) + \tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} + \tau_{yx}\tau_{zy}\tau_{zx} - (\sigma_y - \sigma)\tau_{xz}^2 - (\sigma_x - \sigma)\tau_{yz}^2 - (\sigma_z - \sigma)\tau_{xy}^2 = 0.$$

После перемножения и группировки по степеням  $\sigma$  получим кубическое уравнение

$$\sigma^3 - (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z)\sigma^2 + (\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2)\sigma - (\sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{yz}\tau_{zx} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{zx}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2) = 0. \quad (1.18)$$

Полученное кубическое уравнение имеет три корня, которые и дают величины главных напряжений. Как известно, кубическое уравнение имеет либо три действительных корня, либо один корень действительный, а два — комплексно-сопряженных.

Докажем, что все три корня полученного кубического уравнения являются действительными величинами, следовательно, в каждой точке упругого тела существуют три главных напряжения и три главных площадки, в которых они действуют [6].

Обозначим главные напряжения через

$$\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3,$$

где  $\sigma_1$  — наибольшее, а  $\sigma_3$  — наименьшее (в алгебраическом смысле) главные напряжения, а направляющие косинусы нормалей к главным площадкам, в которых действуют главные напряжения, соответственно, через  $l_1, m_1, n_1$  — для площадки с напряжением  $\sigma_1$ ;  $l_2, m_2, n_2$  — для площадки с напряжением  $\sigma_2$ ;  $l_3, m_3, n_3$  — для площадки с напряжением  $\sigma_3$ .

Для доказательства подставим значение главного напряжения  $\sigma_1$  и направляющих косинусов  $l_1, m_1$  и  $n_1$  в уравнение (1.17).

В результате получим:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{xy}m_1 + \tau_{xz}n_1 &= 0; \\ \tau_{yx}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{yz}n_1 &= 0; \\ \tau_{zx}l_1 + \tau_{zy}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.19)$$

Умножая далее каждое из уравнений (1.19), соответственно, на  $l_2, m_2, n_2$  и складывая почленно, получаем:

$$[(\sigma_x - \sigma_1)l_1 + \tau_{xy}m_1 + \tau_{xz}n_1]l_2 + [\tau_{yx}l_1 + (\sigma_y - \sigma_1)m_1 + \tau_{yz}n_1]m_2 + [\tau_{zx}l_1 + \tau_{zy}m_1 + (\sigma_z - \sigma_1)n_1]n_2 = 0. \quad (1.20)$$

Подставляя  $\sigma_2$  и направляющие косинусы для второй главной площадки  $l_2, m_2, n_2$  (вместо  $l_1, m_1, n_1$ ) в уравнение (1.17), получаем:

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x - \sigma_2)l_2 + \tau_{xy}m_2 + \tau_{xz}n_2 &= 0; \\ \tau_{yx}l_2 + (\sigma_y - \sigma_2)m_2 + \tau_{yz}n_2 &= 0; \\ \tau_{zx}l_2 + \tau_{zy}m_2 + (\sigma_z - \sigma_2)n_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.21)$$

Умножая каждое из уравнений (1.21), соответственно, на  $l_1, m_1, n_1$  и складывая их, имеем:

$$[(\sigma_x - \sigma_2)l_2 + \tau_{xy}m_2 + \tau_{xz}n_2]l_1 + [\tau_{yx}l_2 + (\sigma_y - \sigma_2)m_2 + \tau_{yz}n_2]m_1 + [\tau_{zx}l_2 + \tau_{zy}m_2 + (\sigma_z - \sigma_2)n_2]n_1 = 0. \quad (1.22)$$

Вычитая из уравнения (1.20) уравнение (1.22), получим после преобразований:

$$(\sigma_2 - \sigma_1)(l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2) = 0.$$

Так как в общем случае  $\sigma_1 \neq \sigma_2$ ,

$$l_1l_2 + m_1m_2 + n_1n_2 = 0. \quad (1.23)$$

Если предположить, что два корня  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  являются комплексно-сопряженными величинами, т. е.

$$\sigma_1 = a + bi \text{ и } \sigma_2 = a - bi,$$

то на основании системы уравнений (1.17) должны быть комплексно-сопряженными направляющие косинусы  $l_1$  и  $l_2, m_1$  и  $m_2, n_1$  и  $n_2$ , а следовательно,

$$l_1l_2 > 0; \quad m_1m_2 > 0; \quad n_1n_2 > 0.$$



В таком случае левая часть уравнения (1.23) не может быть равна нулю.

Таким образом, предположение о том, что величины  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$  являются комплексно-сопряженными, не соответствует действительности. Аналогичное доказательство можно выполнить для любой пары главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ .

Следовательно, все три корня  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  кубического уравнения (1.18) являются действительными величинами, и в любой точке упругого тела существуют:

- три главных напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ ;
- три главные площадки с нормальными  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  и  $\nu_3$ , определяемые, соответственно, направляющими косинусами  $l_1, m_1, n_1, l_2, m_2, n_2$  и  $l_3, m_3, n_3$ .

Так как уравнение (1.23) представляет собой условие перпендикулярности нормалей  $\nu_1$  и  $\nu_2$ , отсюда следует, что две главные площадки, в которых имеются напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ , взаимно перпендикулярны. Аналогично можно доказать, что  $l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0$ , т. е. нормали  $\nu_1$  и  $\nu_3$ , а следовательно, и главные площадки с напряжениями  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  также взаимно перпендикулярны.

Таким образом, все три нормали  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  и  $\nu_3$  к главным площадкам взаимно перпендикулярны. Итак, в каждой точке упругого тела имеются три взаимно перпендикулярные главные площадки и три главных напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  (в главных площадках).

Зная в заданной точке главные напряжения  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$ , можно определить нормальные и касательные напряжения в произвольной наклонной площадке, проходящей через заданную точку упругого тела, приняв главные напряжения за исходные.

Так как в главных площадках касательные напряжения отсутствуют, согласно формуле (1.11) нормальное напряжение в наклонной площадке с направляющими косинусами  $l, m, n$ , выраженное через главные напряжения, будет равно:

$$\sigma_\nu = \sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2. \quad (1.24)$$

Компоненты полного вектора напряжений в наклонной площадке, выраженные через исходные главные напряжения, будут в соответствии с формулами (а) равны:

$$p_{x\nu} = \sigma_1 l; \quad p_{y\nu} = \sigma_2 m; \quad p_{z\nu} = \sigma_3 n.$$

Следовательно,

$$p_\nu = \sqrt{\sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2}. \quad (1.25)$$

При этом

$$p_\nu = \sqrt{\sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2}. \quad (б)$$

Тогда, сравнивая (1.25) и (б):

$$\sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2. \quad (1.26)$$

Выражения (1.24) и (1.26) представляют собой систему двух уравнений с двумя неизвестными напряжениями  $\sigma$  и  $\tau$  в наклонной площадке, которые можно определить, если задана площадка направляющими косинусами  $l, m, n$ .

## 1.7. Инварианты тензора напряжений

Если около данной точки мысленно вырезать несколько бесконечно малых параллелепипедов, грани которых различным образом ориентированы по отношению к осям координат, то, очевидно, компоненты напряжений для одного такого элементарного параллелепипеда будут отличными от компонентов для другого, так как напряжения зависят от направления рассматриваемой площадки, проходящей через заданную точку. Однако также очевидно, что независимо от способа вырезания элемента около заданной точки при подстановке значений его компонентов напряжений в уравнение (1.18) получаются одни и те же значения главных напряжений для всех таких элементарных параллелепипедов. *Главные напряжения* в данной точке существуют, и *величины их* независимы от метода их нахождения, т. е. они *инвариантны* по отношению к преобразованию координатной системы.

Следовательно, корни кубического уравнения (1.18) не зависят от системы координат  $x, y, z$ , а потому коэффициенты этого уравнения также не зависят от выбора координатной системы, т. е. эти коэффициенты являются инвариантами преобразования координат, и уравнение (1.18) представим в виде

$$\sigma^3 - S_1 \sigma^2 + S_2 \sigma - S_3 = 0,$$

где  $S_1, S_2, S_3$  — инвариантные соотношения. Их еще называют первым, вторым и третьим инвариантами напряженного состояния (тензора напряжений).

Итак,

$$\left. \begin{aligned} S_1 &= \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \text{const}; \\ S_2 &= \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = \text{const}; \\ S_3 &= \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 = \text{const}. \end{aligned} \right\} \quad (1.27)$$

Заметим, что первый (или *линейный*) инвариант представляет собой сумму членов, расположенных на главной диагонали в тензоре напряжений (1.4), которая, как будет показано ниже, пропорциональна относительной объемной деформации у рассматриваемой точки.

Контролем правильности решения кубического уравнения (1.18) может служить равенство

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3. \quad (1.28)$$

Третий (*кубический*) инвариант представляет собой развернутый в строку определитель, составленный из компонентов тензора напряжений, т. е.:

$$S_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix}. \quad (1.29)$$

Контролем правильности решения уравнения (1.18) может также служить равенство, составленное применительно к параллелепипеду, гранями которого являются главные площадки возле данной точки:

$$S_3 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3. \quad (1.30)$$

Второй (*квадратичный*) инвариант представляет сумму миноров<sup>1</sup> определителя (1.29), если произвести разложение его по главной диагонали, т. е.

$$S_2 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} \\ \tau_{yx} & \sigma_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_z & \tau_{zx} \\ \tau_{xz} & \sigma_x \end{vmatrix}. \quad (1.31)$$

Контролем правильности решения уравнения (1.18) может, очевидно, служить и такое равенство, составленное из (1.31) примени-

<sup>1</sup> Минором элемента  $a_{ij}$  называется определитель  $(n-1)$ -го порядка, образованный из данного определителя зачеркиванием  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца.

тельно к параллелепипеду, гранями которого являются главные площадки возле данной точки:

$$S_2 = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_1 \end{vmatrix} = \sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1. \quad (1.31a)$$

Контрольные соотношения (1.28) — (1.31a) можно использовать и для непосредственного вычисления корней кубического уравнения (1.18). Так, если один из корней найден непосредственно из (1.18), то остальные можно подсчитать при помощи (1.28)—(1.31a).

Заметим, что в теории напряжений, а также в теории деформаций инварианты следует рассматривать как основные характеристики напряженного и деформированного состояний в точке; компоненты напряжений и деформаций как связанные с осями координат являются вспомогательными.

## 1.8. Наибольшие касательные напряжения

Примем для заданной точки направления главных напряжений  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  и  $\sigma_3$  за направления координатных осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Тогда для любой косоугольной площадки по отношению к главным направлениям нормальное и касательное напряжения определяются согласно (1.24), (1.26). Используя (1.25), найдем из (1.26) касательное напряжение

$$\tau_v^2 = p_v^2 - \sigma_v^2 = \sigma_1^2 l^2 + \sigma_2^2 m^2 + \sigma_3^2 n^2 - (\sigma_1 l^2 + \sigma_2 m^2 + \sigma_3 n^2)^2. \quad (1.32)$$

Исключим теперь из уравнения (1.32) один из косинусов, например  $n$ , используя зависимость  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ .

После этого определим косинусы  $l$  и  $m$  таким образом, чтобы касательное напряжение  $\tau$  получило максимальное значение.

После подстановки  $n^2 = 1 - l^2 - m^2$  в выражение (1.32) составим производные последнего по  $l$  и  $m$  и приравняем эти производные нулю. Получим следующие два уравнения для направляющих косинусов  $l$  и  $m$ , определяющих положение площадок, по которым напряжение  $\tau$  получает максимальное или минимальное значение:

$$\left. \begin{aligned} l[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_3)] &= 0; \\ m[(\sigma_1 - \sigma_3)l^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)m^2 - \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3)] &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1.33)$$

Одно из решений этих уравнений получим, если приравняем  $l$  и  $m$  нулю. Можно получить и решения, отличные от нуля. Так, приняв  $l = 0$ , из второго уравнения системы (1.33) найдем  $m = \pm\sqrt{1/2}$ , а при  $m = 0$  из первого уравнения системы (1.33) найдем  $l = \pm\sqrt{1/2}$ .

Повторяя приведенные выше выкладки, при исключении из выражения (1.33) сначала косинуса  $m$ , а затем косинуса  $l$  в конечном итоге получаем следующую таблицу шести значений косинусов углов, при которых напряжение  $\tau$  получает максимальное или минимальное значение (табл. 2). В первых трех столбцах даны площадки, совпадающие с плоскостями координат, которые являются главными площадками. По этим площадкам касательные напряжения равны нулю, т. е. выражение (1.33) для квадрата  $\tau$  получает минимальное значение.

Таблица 2. Значения направляющих косинусов для площадок, при которых касательное напряжение получает максимальное или минимальное значение

$l$	0	0	$\pm 1$	0	$\pm\sqrt{0,5}$	$\pm\sqrt{0,5}$
$m$	0	$\pm 1$	0	$\pm\sqrt{0,5}$	0	$\pm\sqrt{0,5}$
$n$	$\pm 1$	0	0	$\pm\sqrt{0,5}$	$\pm\sqrt{0,5}$	0

В трех последних столбцах даны площадки, проходящие через одну из трех главных осей и делящие угол между двумя другими главными осями пополам (рис. 9).

Подставив направляющие косинусы, определяющие положение этих трех площадок в выражение (1.33), найдем следующие значения касательных напряжений (иногда называемых *главными касательными*) по этим трем плоскостям:

$$\tau_{12} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2); \quad \tau_{23} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3); \quad \tau_{31} = \pm \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1). \quad (1.34)$$

Это показывает, что наибольшее касательное напряжение действует на площадке, делящей пополам угол между наибольшим и наименьшим главными напряжениями, и что оно равно половине разности между главными напряжениями.

На площадках, на которых касательные напряжения принимают значения в соответствии с (1.34), действуют также нормальные на-

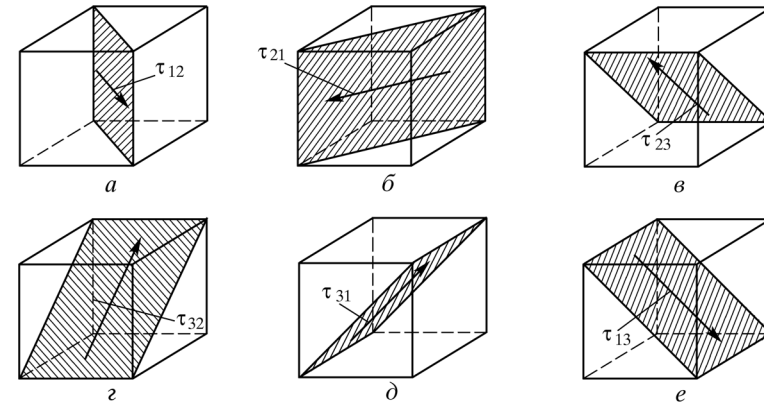


Рис. 9. Три пары площадок с относительными максимумами касательных напряжений: индексы  $i, j$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) на видах  $a-e$  определяют, из разности каких главных напряжений определяется  $\tau_{ij}$

пряжения, которые согласно (1.24) равны полусуммам соответствующих главных напряжений<sup>1</sup>

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 + \sigma_2); \quad \frac{1}{2}(\sigma_2 + \sigma_3); \quad \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1). \quad (1.35)$$

Из (1.35) следует, что если величина главных напряжений подчинена неравенствам  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , то наибольшее касательное напряжение равно  $\sigma_1 - \sigma_3$ , т. е. полуразности наибольшего и наименьшего главных напряжений.

### 1.9. Октаэдрические напряжения

Рассмотрим площадку, которая равно наклонена к главным плоскостям (рис. 10). Вычислим нормальное и касательное напряжения по площадке, называемой *октаэдрической, или площадкой результирующих напряжений в данной точке*.

Оси координат направим по нормальям главных площадок, т. е. вдоль главных напряжений. Направляющие косинусы, связанные

<sup>1</sup> В работе [7] с использованием площадок с максимальными касательными напряжениями приведен численный расчет напряженно-деформированного состояния шатуна.

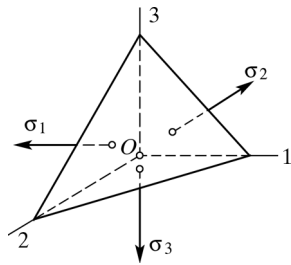


Рис. 10. Октаэдрическая площадка

соотношением  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , для октаэдрической площадки относительно осей координат (равно наклоненная), очевидно, равны между собой и составляют  $l = m = n = 1/\sqrt{3}$ .

Согласно формуле (1.8) находим:

$$p_{1v} = \sigma_1 l; \quad p_{2v} = \sigma_2 m; \quad p_{3v} = \sigma_3 n.$$

Для полного напряжения на октаэдрической площадке согласно (1.9) имеем уравнение:

$$p_v^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2),$$

т. е. квадрат полного напряжения на октаэдрической площадке равняется среднему из квадратов главных напряжений.

По формуле (1.10) для нормального напряжения на той же площадке получаем:

$$\sigma_{\text{окт}} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$$

или

$$\sigma_{\text{окт}} = \sigma_{\text{ср}}, \tag{1.36}$$

т. е. нормальное напряжение на октаэдрической площадке равняется среднему нормальному напряжению для данной точки.

Для касательного напряжения на октаэдрической площадке имеем выражение (1.12)  $\tau_{\text{окт}}^2 = p_v^2 - \sigma_{\text{окт}}^2$ , которое в данном случае примет вид

$$\tau_{\text{окт}}^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) - \frac{1}{9}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2,$$

откуда

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \tag{1.37}$$

Учитывая, что полуразности (см. (1.34))

$$\frac{1}{2}(\sigma_1 - \sigma_2) = \tau_{12}; \quad \frac{1}{2}(\sigma_2 - \sigma_3) = \tau_{23}; \quad \frac{1}{2}(\sigma_3 - \sigma_1) = \tau_{31}$$

являются главными касательными напряжениями, выражение (1.37) можем представить и так:

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}, \tag{1.37a}$$

т. е. из (1.37a) квадрат касательного напряжения на октаэдрической площадке равняется 4/9 (т. е. немного меньше половины) суммы квадратов главных касательных напряжений.

Приведенные выше нормальное и касательное напряжения на октаэдрических площадках, или так называемые *октаэдрические напряжения*, одинаковы для всех восьми площадок, которые можно провести во всех октантах.

Если отрезки, отсекаемые площадками на главных осях 1, 2, 3, одинаковы во всех октантах, то совокупность таких равнонаклоненных площадок образует замкнутую восьмигранную фигуру — *октаэдр* (рис. 11).

В ряде случаев наступление именно пластического состояния в точке тела зависит от достижения октаэдрическим касательным напряжением некоторого определенного для данного тела предельного значения. Октаэдрическое касательное напряжение можно представить в другом виде. Так, из (1.36) на основании инвариантов тензора напряжений (1.28) и (1.31a), выраженных через главные напряжения, следует

$$\tau_{\text{окт}}^2 = \frac{2}{9}(S_1^2 - 3S_2). \tag{1.38}$$

Принимая для инвариантов выражения через компоненты напряжений, действующих по случайным (не главным) ортогональным площадкам, на основании (1.31) имеем

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_x)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}. \tag{1.39}$$

Из курса сопротивления материалов известна так называемая энергетическая теория прочности, или теория энергии формоизмене-

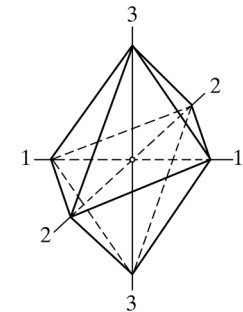


Рис. 11. Октаэдрические площадки

ния. Расчетное (эквивалентное) напряжение по этой теории определяется по формуле

$$\sigma_{\text{эkv}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}. \quad (1.40)$$

При сопоставлении (1.37) и (1.40) видно, что октаэдрическое касательное напряжение прямо пропорционально эквивалентному напряжению по энергетической теории прочности, т. е.

$$\tau_{\text{окт}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_{\text{эkv}}. \quad (1.41)$$

В теории пластичности величину  $\sigma_{\text{эkv}}$ , устанавливаемую независимо от тех соображений, которые были в сопротивлении материалов, называют *интенсивностью напряжения* (или *обобщенным напряжением*) и обозначают  $\sigma_i$ . Таким образом<sup>1</sup>:

$$\sigma_i = \frac{3}{\sqrt{2}} \tau_{\text{окт}}. \quad (1.42)$$

### Контрольные вопросы

1. Назовите основные задачи механики деформируемого твердого тела.
2. Какова роль и допустимость использования гипотезы о сплошности в механике деформируемых тел?
3. Какие силы называются внутренними силами упругости и как доказываются их существование?
4. Какими величинами характеризуется напряженное состояние в точке тела и во всем теле?
5. Что такое главные напряжения и на каких площадках они действуют?
6. Что такое инварианты напряженного состояния?
7. Как определяются главные касательные напряжения?
8. Что такое октаэдрическое напряжение?

<sup>1</sup> При сложном напряженном состоянии расчеты на прочность ведут также с использованием интенсивности напряжения  $\sigma_i$ .

## Глава 2 ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ

Геометрия — прекрасное средство проверки наших интеллектуальных сил, но отнюдь не объект их приложения.

Б. Паскаль<sup>1</sup>

### 2.1. Составляющие перемещения и деформации. Зависимость между ними

Исследуем деформацию упругого тела. Чтобы определить ее, необходимо сравнить положения точек тела до и после приложения нагрузки. На рис. 12 показаны некоторое упругое тело и точка  $A$ , координаты которой до деформации  $x, y, z$ . Под действием нагрузки точка  $A$  переместится в новое положение — в точку  $A'$  с координатами  $x', y', z'$ . Отрезком  $AA'$  определяется перемещение точки  $A$ .

Различают два вида перемещений: перемещение всего тела целиком без его деформации и перемещение, связанное с деформацией тела. Перемещения первого вида изучаются в теоретической механике как перемещения абсолютно твердого тела.

В теории упругости рассматриваются только перемещения, связанные с деформацией тела. Проекции перемещения точки  $A$  на координатные оси  $x, y$  и  $z$  равны разности соответствующих координат точек  $A$  и  $A'$

$$u_x = x' - x; \quad u_y = y' - y; \quad u_z = z' - z$$

и являются функциями координат точки

$$u_x = u_x(x, y, z); \quad u_y = u_y(x, y, z);$$

$$u_z = u_z(x, y, z).$$

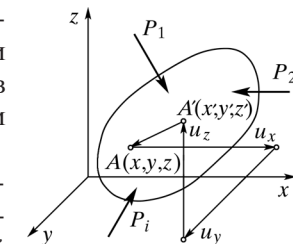


Рис. 12. Перемещение точки  $A$  под действием внешней нагрузки

<sup>1</sup> Энциклопедия мудрости. М.: РООССА, 2013.

Разница в величинах перемещений в различных точках тела вызывает его деформацию.

Бесконечно малый параллелепипед  $dx dy dz$ , вырезанный из упругого тела около произвольной точки  $A$ , вследствие различия перемещений его точек деформируется, т. е. изменяется длина его ребер и искажаются первоначально прямые углы между гранями.

На рис. 13 изображены два ребра этого параллелепипеда: ребро  $AB$ , параллельное оси  $x$ , и ребро  $AC$ , параллельное оси  $z$ .

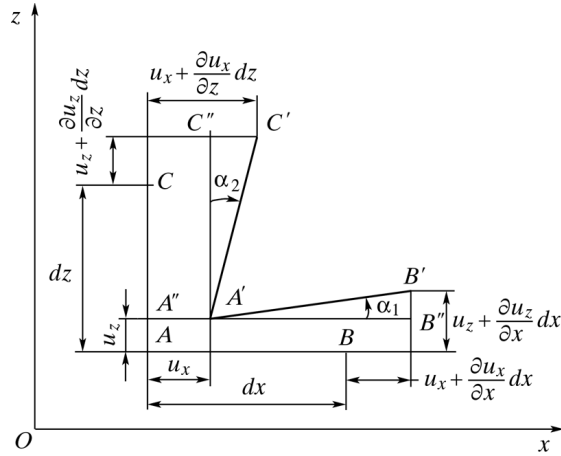


Рис. 13. Компоненты смещений концов ребер  $AB$  и  $AC$  при деформации элементарного параллелепипеда

Длина ребра  $AB$  равна  $dx$ , ребра  $AC$  —  $dz$ . После деформирования точки  $A$ ,  $B$  и  $C$  займут новые положения —  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ . При этом точка  $A$  получит перемещение, составляющие которого в плоскости чертежа  $u_x$  и  $u_z$ .

Точка  $B$ , отстоящая от точки  $A$  на бесконечно малое расстояние  $dx$ , получит перемещение, составляющие которого по осям  $x$  и  $z$  будут отличаться от составляющих перемещения точки  $A$  на бесконечно малые величины  $\frac{\partial u_x}{\partial x} dx$ ,  $\frac{\partial u_z}{\partial x} dx$  за счет изменения координаты  $x$  и будут равны, соответственно:

$$u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx; \quad u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx.$$

Составляющие перемещения точки  $C$  будут отличаться от составляющих перемещения точки  $A$  на бесконечно малую величину за счет изменения координаты  $z$

$$u_x + \frac{\partial u_x}{\partial z} dz; \quad u_z + \frac{\partial u_z}{\partial z} dz.$$

Длина проекции ребра  $AB$  на ось  $x$   $A'B''$  (см. рис. 13) после деформации будет:

$$A'B'' = A''B'' - u_x$$

или

$$A'B'' = dx + \left( u_x + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx \right) - u_x = dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx. \quad (2.1)$$

Проекция абсолютного удлинения ребра  $AB$  на ось  $x$  равна:

$$\Delta AB = A'B'' - AB = \frac{\partial u_x}{\partial x} dx.$$

Относительное удлинение вдоль оси  $x$  называется линейной деформацией  $\epsilon_x$  по этому направлению. Она равна

$$\epsilon_x = \frac{\Delta AB}{AB} = \frac{\partial u_x}{\partial x}. \quad (a)$$

Если рассмотреть смещение ребер элементарного параллелепипеда в плоскостях  $xOy$  и  $yOz$ , то аналогично получим линейные деформации по направлениям координатных осей  $y$  и  $z$ :

$$\epsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \epsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (б)$$

Итак, *линейная деформация по любому направлению равна частной производной составляющей перемещения в этом направлении по переменной в том же направлении.*

Рассмотрим изменения углов между ребрами параллелепипеда (см. рис. 13). С использованием (2.1) найдем тангенс угла поворота ребра  $AB$  в плоскости  $xOz$

$$\operatorname{tg} \alpha_1 = \frac{B'B''}{A'B''} = \frac{\left( u_z + \frac{\partial u_z}{\partial x} dx \right) - u_z}{dx \left( 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)} = \frac{\frac{\partial u_z}{\partial x}}{1 + \epsilon_x}.$$



Ограничиваясь рассмотрением только малых деформаций, можно полагать, что  $\operatorname{tg} \alpha_1 \approx \alpha_1$ , а также пренебречь линейной деформацией  $\epsilon_x$  по сравнению с единицей. Тогда

$$\alpha_1 = \frac{\partial u_z}{\partial x}. \quad (\text{в})$$

Аналогично находим угол поворота ребра  $AC$  в этой же плоскости:

$$\alpha_2 = \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (\text{г})$$

Угол сдвига в плоскости  $xOz$ , т. е. искажение прямого угла  $BAC$ , называется угловой деформацией и определяется как сумма углов поворота ребер  $AB$  из (в) и  $AC$  в соответствии с (г):

$$\gamma_{zx} = \alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \quad (\text{д})$$

Аналогично найдем угловые деформации в двух других координатных плоскостях:

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}. \quad (\text{е})$$

Итак, угловая деформация в любой плоскости равна сумме частных производных составляющих перемещения в этой плоскости по переменным в перпендикулярных направлениях.

Формулы (а), (б), (д) и (е) дают шесть основных зависимостей составляющих линейных и угловых деформаций от составляющих перемещения

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \epsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \\ \epsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (2.2)$$

Они носят название формул Коши.

В пределе, когда ребра параллелепипеда стремятся к нулю, формулы (2.2) определяют линейные и угловые деформации в точке  $A$ .

Правило знаков для составляющих деформации:

1. Положительным линейным деформациям отвечают удлинения по соответствующим направлениям, а отрицательным — укорочения.

2. Положительным угловым деформациям соответствует уменьшение углов между положительными направлениями координатных осей, а отрицательным — увеличение тех же углов.

При решении задачи теории упругости в цилиндрической системе координат  $x\theta r$  (см. рис. 5) составляющие перемещения имеют следующие значения:

$u_\theta$  — составляющая перемещения в направлении оси  $x$ ;

$u_r$  — составляющая перемещения в направлении оси  $\theta$ ,

т. е. перпендикулярно к плоскости  $xOr$  в каждой точке, а также  $u_r$  — составляющая перемещения в направлении оси  $r$ . Составляющие линейной деформации в цилиндрической системе координат  $xOr$  будем обозначать  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_\theta$  и  $\epsilon_r$ , а составляющие угловой деформации —  $\gamma_{x\theta}$ ,  $\gamma_{\theta r}$  и  $\gamma_{rx}$ .

Формулы Коши в цилиндрической системе координат приведем без вывода:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \gamma_{x\theta} &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial x}; \\ \epsilon_\theta &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; & \gamma_{\theta r} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta}; \\ \epsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; & \gamma_{rx} &= \frac{\partial u_r}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (2.3)$$

## 2.2. Объемная деформация

В процессе деформирования изменяется объем тела. Подсчитаем изменение объема бесконечно малого параллелепипеда, объем которого до деформирования  $dV = dx dy dz$  (рис. 14).

При указанных на рис. 14 элементарных деформациях по осям  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$ ,  $\epsilon_z$  изменяются объем параллелепипеда и его форма. При углах сдвига, пренебрежимо малых по сравнению с единицей (а такие именно углы сдвига и предполагаются в классической теории упругости), можно считать, что объем параллелепипеда, получившего деформации сдвига, не изменился, а ребра не получили удлинений. С точностью до бесконечно малых величин высшего порядка можно считать, что изменение объема связано только с изменением длины ребер, но не с угловыми деформациями.

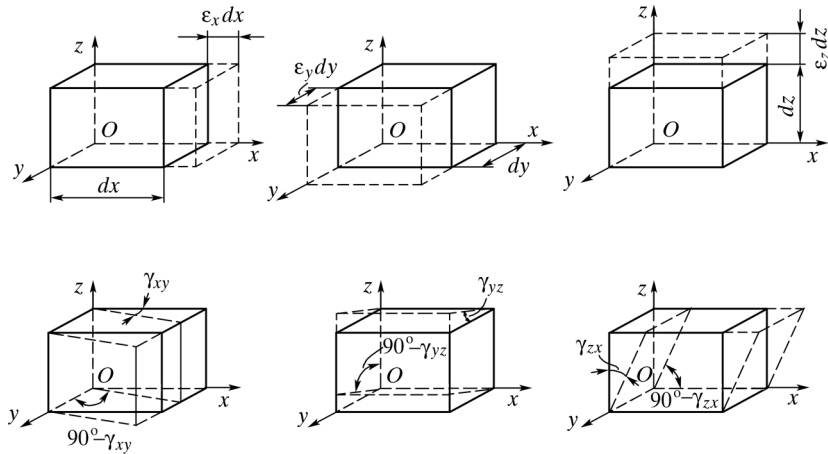


Рис. 14. Изменение объема и формы элементарного объема при упругой деформации

Длина ребра вдоль оси  $x$  (см. рис. 14), равная  $dx$  до деформации, после деформации согласно формуле (43) будет:

$$dx_1 = dx + \frac{\partial u_x}{\partial x} dx = dx \left( 1 + \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = dx(1 + \epsilon_x). \quad (2.4)$$

Аналогично вычисляются длины двух других ребер после деформации:

$$\left. \begin{aligned} dy_1 &= dy(1 + \epsilon_y); \\ dz_1 &= dz(1 + \epsilon_z). \end{aligned} \right\} \quad (2.5)$$

Объем параллелепипеда после деформации найдем как произведение новых длин ребер:

$$dV_1 = dx_1 dy_1 dz_1 = dx(1 + \epsilon_x) dy(1 + \epsilon_y) dz(1 + \epsilon_z).$$

Раскрывая скобки, получаем:

$$dV_1 = dx dy dz (1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z + \epsilon_x \epsilon_y + \epsilon_y \epsilon_z + \epsilon_z \epsilon_x + \epsilon_x \epsilon_y \epsilon_z).$$

Пренебрегая в скобках величинами второго и третьего порядков малости и учитывая, что  $dx dy dz = dV$ , находим:

$$dV_1 = dV(1 + \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z).$$

Относительная объемная деформация равна

$$\frac{dV_1 - dV}{dV} = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z.$$

Обозначим относительное изменение объема (*объемную деформацию*) через  $\theta$ , тогда

$$\theta = \epsilon_x + \epsilon_y + \epsilon_z. \quad (2.6)$$

Таким образом, *объемная деформация равна сумме трех линейных деформаций по взаимно перпендикулярным направлениям.*

С помощью формул Коши (2.2) объемную деформацию можно выразить через составляющие перемещения:

$$\theta = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}. \quad (2.7)$$

Условимся об обозначении угловых деформаций. Если ребро, первоначально параллельное оси  $x$ , повернулось в направлении к ребру, первоначально параллельному оси  $y$ , то происходящее при этом уменьшение угла можно обозначить  $\gamma_{xy}$  (рис. 15, а).

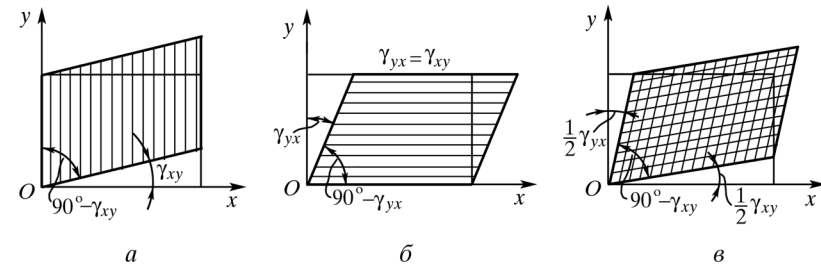


Рис. 15. Взаимность сдвигов

Если на тот же угол повернется второе ребро (параллельное оси  $y$ ) по направлению к первому (параллельному оси  $x$ ), то угол сдвига можно обозначить через  $\gamma_{yx}$  (рис. 15, б).

Тем же случаем (см. рис. 15, а, б) совершенно эквивалентен случай, изображенный на рис. 15, в. Таким образом, можно условиться о тождественности обозначений:

$$\gamma_{xy} = \gamma_{yx}; \quad \gamma_{yz} = \gamma_{zy}; \quad \gamma_{zx} = \gamma_{xz} \quad (2.8)$$

или *взаимности сдвигов.*

Расположим все компоненты, определяющие собой деформированное состояние в рассматриваемой точке, в следующем виде аналогично тензору напряжений (углы сдвига поделим пополам в соответствии с рис. 15, в):

$$T_{\text{деф}} = \begin{vmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{vmatrix}. \quad (2.9)$$

Эту матрицу назовем тензором деформаций. В (2.8), если сложить все члены по главной диагонали, то получим  $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \theta$ , т. е. относительную объемную деформацию. А так как  $\theta$  в окрестности данной точки не зависит от ориентации элементарного параллелепипеда относительно координатных осей и даже не зависит от формы элементарного объема, следовательно, указанная сумма диагональных членов инвариантна к ортогональному преобразованию координатной системы и называется *первым инвариантом тензора деформаций*.

Тензор (2.8) симметричен относительно главной диагонали.

Аналогично тензору напряжений можно найти следующие инварианты деформированного состояния:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z; \\ E_2 &= \varepsilon_x \varepsilon_y + \varepsilon_y \varepsilon_z + \varepsilon_z \varepsilon_x - \frac{1}{4}\gamma_{xy}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\gamma_{zx}^2; \\ E_3 &= \varepsilon_x \varepsilon_y \varepsilon_z + \frac{1}{4}\gamma_{xy}\gamma_{yz}\gamma_{zx} - \frac{1}{4}\varepsilon_x \gamma_{yz}^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_y \gamma_{zx}^2 - \frac{1}{4}\varepsilon_z \gamma_{xy}^2. \end{aligned} \right\} \quad (2.10)$$

### 2.3. Уравнения неразрывности деформаций

Формулы Коши (2.2) связывают шесть составляющих деформации —  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}$  и  $\gamma_{zx}$ , а также три составляющих перемещения —  $u_x, u_y$  и  $u_z$ . Если заданы три составляющие перемещения, то шесть составляющих деформации определяются из этих формул однозначно. Если же заданы шесть составляющих деформации, то для

определения трех составляющих перемещения необходимо проинтегрировать шесть дифференциальных уравнений (2.2) в частных производных. При произвольном выборе шести составляющих деформации шесть уравнений с тремя неизвестными не всегда могут быть решены однозначно. Поэтому между шестью составляющими деформации должны существовать определенные зависимости. Чтобы вывести эти зависимости, необходимо исключить составляющие перемещения из формул Коши (2.2).

Первую формулу Коши дважды продифференцируем по  $y$ :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2},$$

а вторую — дважды по  $x$ :

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y}$$

и полученные результаты сложим:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right). \quad (a)$$

В выражении (a) составляющие, стоящие в скобках, согласно формулам Коши (2.2) определяют угловую деформацию  $\gamma_{xy}$ . Тогда вместо соотношения (a) получим

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (б)$$

Аналогично можно установить зависимость между деформациями и в двух других координатных плоскостях

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Уравнения (б) и (в) показывают, что если заданы две линейные деформации в перпендикулярных направлениях, то угловую деформацию в плоскости этих линейных деформаций нельзя задать произвольно.

Трех уравнений (б) и (в) оказывается недостаточно для обеспечения однозначности перемещений, так как они получены дифферен-

цированием. При дифференцировании порядок дифференциального уравнения повышается, и возможно появление новых решений, не удовлетворяющих первоначальному уравнению. Чтобы не получалось неприемлемых решений, необходимо иметь дополнительные условия.

Возьмем три последние формулы Коши (2.2) и продифференцируем их следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Сложим в (e) две первые строки и вычтем третью:

$$\frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x}.$$

Продифференцируем это выражение еще раз по  $y$  и, заметив, что

$$\frac{\partial^3 u_y}{\partial z \partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x},$$

получим

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}.$$

Аналогично можно получить еще два уравнения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}; \\ \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}. \end{aligned} \right\}$$

Эти уравнения свидетельствуют о том, что если заданы три угловые деформации в трех взаимно перпендикулярных плоскостях, то линейные деформации не могут быть заданы произвольно.

Итак, получена следующая система уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (2.11)$$

Уравнения (2.11), выведенные Сен-Венаном, называют *уравнениями (условиями) совместности или неразрывности деформаций*. Их физический смысл таков: если, задавая деформацией, не учитывать эти уравнения и для каждого из параллелепипедов, на которые мысленно разбито тело, назначить шесть независимых составляющих деформаций, то из отдельных таких деформированных параллелепипедов нельзя сложить непрерывное деформированное тело. Иными словами, *заданное тело, сплошное и непрерывное до деформации, должно остаться сплошным и непрерывным и после деформации*.

Если условие (2.11) не выполняется, то в некоторых точках окажутся после деформации бесконечно малые разрывы. Уравнения (2.11) устанавливают зависимости между составляющими деформации, при выполнении которых тело после деформации получается сплошным. Поэтому уравнения (2.11) можно рассматривать как следствия принятого допущения о сплошности тела.

Если бы при решении задачи теории упругости удалось по заданным нагрузкам точно найти перемещения точек  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$ , то после этого деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\varepsilon_z$  можно было бы вычислить по формулам (2.2). В этом случае условия неразрывности (2.11) будут точно удовлетворены сами по себе, так как они выведены из уравнений (2.2) и являются их следствием.

Если же по заданным нагрузкам определить напряжения, а затем деформации, то при этом необходимо одновременно удовлетворить и уравнениям неразрывности (2.11), в противном случае деформации будут несовместимы. В этом случае невозможно найти из уравнения (2.2) перемещения (после интегрирования и определения постоянных по заданным граничным условиям), так как в них будут взаимные противоречия.

Энергетический смысл уравнений (2.11) по доказательству Л.С. Лейбензона [8] (он называет их условиями интегрируемости) заключается в том, что осуществлению указанного принципа неразрывности деформаций соответствует в упругом теле минимальное значение накапливаемой телом потенциальной энергии деформации.

Таким образом, для упругого тела принцип наименьшей работы деформации и уравнения совместности деформаций тождественны между собой (хотя в теории и прикладных расчетах они не могут полностью заменять друг друга).

## 2.4. Граничные условия

На поверхности упругого тела возможны различного рода граничные условия.

Во-первых, могут быть заданы значения упругих перемещений  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  по всей поверхности  $S$  упругого тела, в том числе и от времени

$$\left. \begin{aligned} u_x &= \Psi_1(x, y, z, t); \\ u_y &= \Psi_2(x, y, z, t); \\ u_z &= \Psi_3(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

Эти условия носят *кинематический характер*.

Так как уравнения (2.2) имеют место по всему объему упругого тела вплоть до его поверхности, значения  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$ , полученные интегрированием уравнений (2.2), также имеют место по всему объему упругого тела вплоть до его поверхности. На поверхности  $S$  эти значения должны совпадать с теми, которые даны *граничными условиями* (2.12). Следовательно, интегралы уравнений (2.2) нужно подобрать так, чтобы были удовлетворены условия (2.12).

Во-вторых, могут быть заданы по всей поверхности упругого тела значения внешних сил, приложенных ко всем элементам этой поверхности:

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \chi_1(x, y, z, t); \\ p_{yv} &= \chi_2(x, y, z, t); \\ p_{zv} &= \chi_3(x, y, z, t). \end{aligned} \right\} \quad (2.13)$$

Интегрируя уравнения (1.5), определим значения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ , пригодные по всему объему упругого тела вплоть до его поверхно-

сти и на самой поверхности  $S$ . Поэтому (1.8) будет справедливо на поверхности, и составляющие по координатным осям  $p_{xv}$ ,  $p_{yv}$ ,  $p_{zv}$  равны правой части (2.13).

Таким образом, из (1.8) получим условия на поверхности  $S$ :

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n = \chi_1; \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n = \chi_2; \\ p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n = \chi_3. \end{aligned} \right\} \quad (2.14)$$

Эти условия носят *динамический характер*. Если в (2.13) отсутствует время  $t$ , то это будут статические граничные условия.

В-третьих, на поверхности упругого тела может иметь место комбинация этих условий. На одной части поверхности  $S$  могут быть заданы значения упругих перемещений. На остальные части этой поверхности могут быть известны внешние силы. Так, в отдельных точках поверхности  $S$  могут быть заданы перемещения (в частности, отдельные точки могут быть закреплены), тогда как остальная часть поверхности  $S$  может быть нагружена поверхностными силами либо быть свободной от усилий, но на тело будут действовать массовые силы, например силы тяжести. Также встречаются условия, накладываемые на компоненты деформации или компоненты угловых деформаций в отдельных местах поверхности тела.

## 2.5. Начальные условия

В начале движения в момент  $t = 0$  могут быть заданы значения упругих перемещений  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$ , а также их производных по времени  $t$ :

$$\left. \begin{aligned} u_x &= f_1(x, y, z, t); \\ u_y &= f_2(x, y, z, t); \\ u_z &= f_3(x, y, z, t) \end{aligned} \right\} \text{ для } t = 0; \quad (2.15)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} &= \varphi_1(x, y, z); \\ \frac{\partial u_y}{\partial t} &= \varphi_2(x, y, z); \\ \frac{\partial u_z}{\partial t} &= \varphi_3(x, y, z) \end{aligned} \right\} \text{ для } t = 0. \quad (2.16)$$

Интегралы уравнений (2.2) должны быть подобраны так, чтобы условия (2.15) и (2.16) были удовлетворены.

При удовлетворении начальных условий существенную роль играет начальное состояние тела. Предполагаем, что в естественном состоянии, когда еще нет деформации, нет напряженного состояния.

### Контрольные вопросы

1. Какова роль уравнений Коши и какие задачи они позволяют решать?
2. Как определяется относительная линейная деформация по любому направлению?
3. Какие правила знаков приняты при определении линейных деформаций?
4. Какие правила знаков приняты при определении угловых деформаций?
5. Что такое взаимность сдвигов?
6. Что такое тензор деформаций?
7. Чему равна угловая деформация в любой плоскости, параллельной оси координат?
8. Как определяется относительная объемная деформация?
9. Объясните физический смысл уравнений совместности деформаций Сен-Венана.
10. Каков энергетический смысл уравнений неразрывности деформаций Сен-Венана?
11. Для чего нужны граничные условия и что они определяют?
12. Какие граничные условия носят статический характер?
13. Какие граничные условия носят динамический характер?
14. В каком случае уравнения неразрывности деформаций Сен-Венана выполняются после решения задачи точно?
15. Для чего определяются граничные и начальные условия?

## Глава 3 ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА

Пусть не говорят, что не сказал ничего нового: новизна в расположении материала.

*Б. Паскаль*<sup>1</sup>

### 3.1. Выражение составляющих деформации через составляющие напряжения

Для совместного рассмотрения теории напряжений и теории деформации необходимо установить зависимости между напряжениями и деформациями. Эти зависимости носят физический характер, поэтому их иногда называют физическими уравнениями теории упругости. Действительно, рассматривая изучаемые в курсе сопротивления материалов диаграммы растяжения различных материалов, заключаем, что зависимости напряжение — деформация определяются свойствами материалов.

Ограничиваясь малыми деформациями упругого тела, связь между напряжениями и деформациями можно принять линейной. При этом в общем случае каждая составляющая напряжения может зависеть от всех составляющих деформации

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{yz} + a_{16}\gamma_{zx}; \\ \sigma_y &= a_{21}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + a_{23}\varepsilon_z + a_{24}\gamma_{xy} + a_{25}\gamma_{yz} + a_{26}\gamma_{zx}; \\ \sigma_z &= a_{31}\varepsilon_x + a_{32}\varepsilon_y + a_{33}\varepsilon_z + a_{34}\gamma_{xy} + a_{35}\gamma_{yz} + a_{36}\gamma_{zx}; \\ \tau_{xy} &= a_{41}\varepsilon_x + a_{42}\varepsilon_y + a_{43}\varepsilon_z + a_{44}\gamma_{xy} + a_{45}\gamma_{yz} + a_{46}\gamma_{zx}; \\ \tau_{yz} &= a_{51}\varepsilon_x + a_{52}\varepsilon_y + a_{53}\varepsilon_z + a_{54}\gamma_{xy} + a_{55}\gamma_{yz} + a_{56}\gamma_{zx}; \\ \tau_{zx} &= a_{61}\varepsilon_x + a_{62}\varepsilon_y + a_{63}\varepsilon_z + a_{64}\gamma_{xy} + a_{65}\gamma_{yz} + a_{66}\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

<sup>1</sup> Энциклопедия мудрости. М.: РООССА, 2013.



Коэффициенты  $a_{mn}$  называются упругими постоянными, и в общем случае их оказывается 36.

Рассматривая только обратимые процессы деформирования, т. е. такие, при которых после снятия нагрузок форма и размеры тела полностью восстанавливаются, можно убедиться, что между коэффициентами  $a_{mn}$  существует зависимость  $a_{mn} = a_{nm}$ . Тогда количество упругих постоянных окажется равным 21.

В случае изотропного тела формулы (а) не должны изменяться при любых преобразованиях координат. Преобразуя координаты путем поворота осей на  $180^\circ$ , можно установить, что нормальные напряжения не связаны с угловыми деформациями, а касательные напряжения не связаны с линейными деформациями. Кроме того, касательные напряжения не связаны с угловыми деформациями в других плоскостях. После поворотов осей на  $90^\circ$  и на произвольный угол число упругих постоянных сокращается до двух. В качестве упругих постоянных можно взять постоянные, известные из курса сопротивления материалов.

При испытании стержня на растяжение установлена пропорциональность между нормальным напряжением и линейной деформацией в одном направлении

$$\epsilon = \sigma/E,$$

называемая законом Гука. Входящая сюда упругая постоянная  $E$  называется *модулем упругости*.

Также экспериментально установлен закон, связывающий линейные деформации в продольном  $\epsilon_x$  и поперечном  $\epsilon_y$  направлениях:

$$\epsilon_y = -\mu\epsilon_x. \tag{б}$$

Входящая в уравнение (б) вторая упругая постоянная  $\mu$  называется коэффициентом Пуассона.

При испытании на чистый сдвиг установлена пропорциональность между касательным напряжением и угловой деформацией в плоскости действия этого напряжения

$$\gamma = \tau/G. \tag{в}$$

Здесь появляется уже третья упругая постоянная  $G$ , называемая модулем сдвига. Однако модуль сдвига не является новой независимой упругой постоянной, так как он выражается через первые две известной из курса сопротивления материалов зависимостью

$$G = \frac{E}{2(1 + \mu)}. \tag{3.1}$$

Чтобы установить зависимости между составляющими деформации и составляющими напряжений при объемном напряженном состоянии, выделим из тела бесконечно малый параллелепипед (см. рис. 4) и рассмотрим действие только нормальных напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ . Разницей между напряжениями на противоположных гранях можно пренебрегать, так как она дает деформации более высокого порядка малости.

Воспользуемся принципом независимости действия сил. Так, при действии силы  $P_x = \sigma_x dydz$  вдоль оси  $x$  (см. рис. 4) напряжение  $\sigma_x$  вызывает одновременно три линейные деформации: по линии действия силы получается линейная деформация  $\epsilon_x = \sigma_x/E$ , а по направлениям, перпендикулярным направлению  $P_x$ , — линейные деформации  $\epsilon_y = \epsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$ .

При одновременном действии трех растягивающих нагрузок получится девять линейных деформаций, суммирующихся по направлению каждой из трех осей  $x, y, z$ . Получающиеся по каждому из этих направлений деформации могут быть объединены следующим образом (табл. 3).

Таблица 3. Составляющие линейной деформации по осям

От растягивающей силы	Линейная деформация по осям		
	$x$	$y$	$z$
$P_x$	$\frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_x}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_x}{E}$
$P_y$	$-\mu \frac{\sigma_y}{E}$	$\frac{\sigma_y}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_y}{E}$
$P_z$	$-\mu \frac{\sigma_z}{E}$	$-\mu \frac{\sigma_z}{E}$	$\frac{\sigma_z}{E}$

Связь между угловыми деформациями и касательными напряжениями согласно закону Гука при сдвиге (в) можно представить независимо для каждой из трех плоскостей, параллельных координатным плоскостям:

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G; \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G; \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G. \tag{г}$$

Суммируя линейные деформации в направлении каждой оси (см. табл. 3), получим суммарные линейные деформации в трех взаимно

перпендикулярных направлениях  $x, y, z$ , а также, используя (2), получим шесть формул *обобщенного закона Гука*.

Они выражают линейную зависимость между составляющими деформации и составляющими напряжений в изотропном упругом теле

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

Формулы обобщенного закона Гука в цилиндрической системе координат  $x, \theta, r$  (см. рис. 5) получаем из формул (3.2) простой заменой индексов  $x, y, z$ , соответственно, на индексы  $x, \theta, r$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_\theta + \sigma_r)]; & \gamma_{x\theta} &= \frac{\tau_{x\theta}}{G}; \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_x)]; & \gamma_{\theta r} &= \frac{\tau_{\theta r}}{G}; \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_x + \sigma_\theta)]; & \gamma_{rx} &= \frac{\tau_{rx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

### 3.2. Выражение составляющих напряжений через составляющие деформации

При расчете напряженно-деформированного тела часто возникает необходимость иметь выражения составляющих напряжений через составляющие деформации.

Выведем предварительно соотношения для объемной деформации. Складывая почленно первые три формулы обобщенного закона Гука (3.2), находим:

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \frac{1-2\mu}{E} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z). \quad (a)$$

Однако на основании соотношений (2.6) и (1.27):

$$\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \theta; \quad \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = S_1,$$

формулу (a) можно представить так:

$$\theta = \frac{1-2\mu}{E} S_1, \quad (3.4)$$

т. е. *относительная объемная деформация  $\theta$  пропорциональна первому инварианту напряженного состояния  $S_1$* . Введя модуль объемного расширения

$$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}, \quad (3.5)$$

получим:

$$S_1 = 3K\theta. \quad (б)$$

Если первый инвариант напряженного состояния  $S_1$  заменить средним напряжением в точке

$$\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3} = \frac{1}{3} S_1, \quad (3.6)$$

то вместо уравнения (б) получим:

$$\sigma_0 = K\theta. \quad (3.7)$$

Последнее соотношение можно сформулировать так: *среднее напряжение в окрестностях данной точки пропорционально объемной деформации*.

Для выражения составляющих напряжений через составляющие деформации возьмем первую формулу закона Гука (3.2) и в квадратной скобке прибавим и вычтем величину  $\mu\sigma_x$ :

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [\sigma_x + \mu\sigma_x - \mu\sigma_x - (\mu\sigma_y + \sigma_z)].$$

Введя обозначение  $S_1$  первого инварианта напряженного состояния согласно формуле (1.27), получим:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} [(1+\mu)\sigma_x - \mu S_1]. \quad (в)$$

Из формулы (3.4):

$$S_1 = \frac{E}{1-2\mu} \theta. \quad (з)$$

Подставляя формулу (з) в формулу (в), получаем:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left[ (1+\mu)\sigma_x - \frac{E\mu}{1-2\mu} \theta \right],$$

откуда находим напряжение

$$\sigma_x = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}\theta + \frac{E}{1+\mu}\varepsilon_x. \quad (d)$$

Введем обозначения:

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (3.8)$$

Тогда вместо формулы (d) получим:

$$\sigma_x = \lambda\theta + 2G\varepsilon_x. \quad (e)$$

Упругие постоянные  $\lambda$  и  $G$  называются *коэффициентами Ламе*. Они также характеризуют упругие свойства материала<sup>1</sup>.

Аналогично формуле (e) можно получить еще две формулы для  $\sigma_y$  и  $\sigma_z$ . Присоединив к ним три последние формулы для касательных напряжений, получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z; & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

Эти формулы называют *обратной формой закона Гука*.

Складывая почленно первые три формулы (3.9), находим:

$$\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 3\lambda\theta + 2G(\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z)$$

или согласно формулам (1.27) и (2.6):

$$S_1 = (3\lambda + 2G)\theta. \quad (3.10)$$

Это соотношение устанавливает связь между первыми инвариантами напряженного  $S_1$  и деформированного состояния  $\theta$  через коэффициенты Ламе. Заменяя  $S_1$  средним напряжением в точке  $\sigma_0$  согласно (3.6), а объемную деформацию  $\theta$  — средней деформацией в точке

$$\varepsilon_0 = \frac{\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z}{3} = \frac{1}{3}\theta, \quad (3.11)$$

<sup>1</sup> В работах [5, 9] коэффициент Пуассона обозначается как  $\nu$ , а вторая постоянная Ламе —  $\mu$ . Наше обозначение соответствует принятым обозначениям в дисциплине «Сопроотивление материалов».

получаем еще одну форму закона Гука:

$$\sigma_0 = (3\lambda + 2G)\varepsilon_0, \quad (3.12)$$

т. е. *среднее напряжение в точке пропорционально среднему удлинению в этой точке*.

### 3.3. Работа упругих сил. Потенциальная энергия деформации

Выделим из тела бесконечно малый параллелепипед (см. рис. 4) и подсчитаем работу, совершаемую приложенными к нему упругими силами, на возможных перемещениях.

Рассмотрим сначала работу, совершаемую нормальными напряжениями, действующими на гранях, нормальных к оси  $Ox$ :

$$\sigma_x \text{ и } \sigma_x + \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx. \quad (a)$$

Если точкам тела сообщить какие-либо возможные перемещения, то расстояние между рассматриваемыми гранями изменится на некоторую величину  $\delta\varepsilon_x dx$ . Отбросив в выражении (a) бесконечно малую величину  $\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} dx$  по сравнению с  $\sigma_x$ , найдем, что две равные и

противоположно направленные силы  $\sigma_x dydz$ , приложенные к граням параллелепипеда, произведут работу:

$$\sigma_x dydz \cdot \delta\varepsilon_x dx = \sigma_x \delta\varepsilon_x dx dy dz.$$

Точно так же можно подсчитать возможную работу, совершаемую продольными силами в направлениях осей  $Oy$  и  $Oz$  на соответствующих им возможных перемещениях:

$$\sigma_y \delta\varepsilon_y dx dy dz, \quad \sigma_z \delta\varepsilon_z dx dy dz.$$

Касательные напряжения, параллельные оси  $Ox$ , на вертикальных гранях (см. рис. 4) при отбрасывании бесконечно малых величин высшего порядка образуют пару сил с моментом  $\tau_{xy} dz dx \cdot dy$ . Для вычисления работы, совершаемой данной парой сил на возможных перемещениях, эту пару нужно умножить на приращение соответствующего угла сдвига  $\delta\gamma_{xy}$ :

$$\tau_{xy} dz dx dy \cdot \delta\gamma_{xy} = \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} dx dy dz.$$

Таким же путем подсчитаем работу двух других составляющих касательных напряжений на соответствующих им возможных перемещениях:

$$\tau_{yz} \delta\gamma_{yz} dx dy dz; \quad \tau_{zx} \delta\gamma_{zx} dx dy dz.$$

На основании принципа независимости действия сил возможную работу всех сил, приложенных к рассматриваемому элементу, получим как сумму возможных работ, совершаемых каждой силой в отдельности:

$$\delta(dA) = (\sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta\gamma_{zx}) dx dy dz.$$

Разделив это выражение на объем рассматриваемого параллелепипеда  $dx dy dz$ , получим приращение работы, отнесенной к единице объема тела в той точке, где выделен параллелепипед:

$$\delta A = \sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta\gamma_{zx}. \quad (б)$$

На основании закона сохранения энергии будем считать, что работа упругих сил полностью переходит в потенциальную энергию, накапливаемую телом при получении им упругих деформаций и возвращаемую им обратно в виде работы сил при исчезновении деформации.

Если обозначить через  $W$  удельную потенциальную энергию, т. е. энергию, накапливаемую в единице объема деформируемого тела, то на основании принятого выше допущения приращение работы внутренних сил на возможных перемещениях полностью перейдет в потенциальную энергию, и последняя получит приращение  $\delta W = \delta A$ .

Сравнивая это соотношение с формулой (б), получаем приращение удельной потенциальной энергии в таком виде:

$$\delta W = \sigma_x \delta\varepsilon_x + \sigma_y \delta\varepsilon_y + \sigma_z \delta\varepsilon_z + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz} + \tau_{zx} \delta\gamma_{zx}. \quad (3.13)$$

Составляющие напряжений в выражении (3.13) могут быть заменены составляющими деформации с помощью формул закона Гука (3.9). Следовательно, удельную потенциальную энергию  $W$  можно рассматривать как функцию шести независимых составляющих деформации

$$W = W(\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}). \quad (в)$$

Приращение  $\delta W$  функции (в) на возможных перемещениях с точностью до величин второго порядка малости можно заменить первым полным ее дифференциалом:

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \delta\varepsilon_x + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} \delta\varepsilon_y + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} \delta\varepsilon_z + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \delta\gamma_{xy} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \delta\gamma_{yz} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \delta\gamma_{zx}. \quad (г)$$

Сравнивая правые части выражений (3.13) и (г), получаем следующие шесть соотношений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x}; & \sigma_y &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y}; & \sigma_z &= \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z}; \\ \tau_{xy} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}}; & \tau_{yz} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}}; & \tau_{zx} &= \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.14)$$

Таким образом, составляющие напряжений выражаются через частные производные от удельной потенциальной энергии (в) по соответствующим им составляющим деформации. Эти формулы выведены впервые Гринном. Функция  $W$  называется *упругим потенциалом*.

Сопоставляя формулы (3.9) и (3.14), заключаем, что частные производные функции  $W$  по составляющим деформации представляют собой однородные линейные функции составляющих деформаций  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ , следовательно, сама функция  $W$  является однородной функцией второй степени этих составляющих. Вид функции  $W$  можно получить с помощью теоремы Эйлера об однородных функциях, которая утверждает, что если  $F(x, y, z, \dots)$  есть однородная функция  $n$ -й степени, то

$$\frac{\partial F}{\partial x} x + \frac{\partial F}{\partial y} y + \frac{\partial F}{\partial z} z + \dots = nF.$$

Применив теорему Эйлера к функции  $W$ , найдем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_x} \varepsilon_x + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_y} \varepsilon_y + \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_z} \varepsilon_z + \\ + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{xy}} \gamma_{xy} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{yz}} \gamma_{yz} + \frac{\partial W}{\partial \gamma_{zx}} \gamma_{zx} = 2W. \end{aligned}$$

Заменяв здесь частные производные упругого потенциала  $W$  напряжениями, согласно формулам (3.14) получим:

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}). \quad (3.15)$$

Следовательно, *удельная потенциальная энергия, накапливаемая в упругом теле, равна половине суммы произведений составляющих напряжений на соответствующие им составляющие деформации*. Это соотношение называют формулой Клапейрона.

Формулу Клапейрона можно выразить через одни составляющие напряжений или только через составляющие деформации. Подставляя в зависимость (3.15) формулы закона Гука в виде (3.3), находим выражение удельной потенциальной энергии через напряжения:

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2 - 2\mu(\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_z + \sigma_z\sigma_x) + 2(1 + \mu)(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)]. \quad (3.16)$$

Подставляя в зависимость (3.15) выражение закона Гука в форме (3.9), получаем выражение удельной потенциальной энергии через деформации:

$$W = \frac{1}{2} [\lambda\theta^2 + 2G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]. \quad (3.17)$$

В формуле (3.17) упругие постоянные Ламе  $\lambda$  и  $G$  в соответствии с формулой (3.8) — величины положительные, следовательно, потенциальная энергия  $W$  всегда будет величиной положительной, т. е.  $W > 0$ .

Потенциальную энергию, накапливаемую во всем теле, подсчитываем суммированием удельной потенциальной энергии по всему объему тела  $V$ :

$$U = \iiint_V W dx dy dz. \quad (3.18)$$

Подставляя в (3.18) выражение потенциальной энергии из формулы Клапейрона (3.15), получаем:

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx}) dx dy dz. \quad (3.19)$$

Соотношение (77) позволяет подсчитать потенциальную энергию, накапливаемую в упругом теле в процессе деформации.

### Контрольные вопросы

1. Сформулируйте обобщенный закон Гука.
2. Почему обобщенный закон Гука называют физическими уравнениями теории упругости?
3. Какая связь между модулем сдвига  $G$  и модулем упругости  $E$ ?

4. Что такое модуль объемного расширения?
5. Как определяются коэффициенты Ламе?
6. Сформулируйте обратную формулу закона Гука.
7. Чему пропорционально среднее напряжение в окрестности данной точки упругого тела?
8. Что называется упругим потенциалом?
9. Какая связь между удельной потенциальной энергией и составляющими тензора напряжений?
10. Что определяется с помощью уравнения Клапейрона?

## Глава 4

# О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Математика — наиболее совершенный способ водить самого себя за нос.

А. Эйнштейн<sup>1</sup>

### 4.1. Основные уравнения теории упругости и способы их решения

Рассмотренные ранее уравнения теории упругости распределим на три группы.

А. *Группа статических или динамических уравнений.*

В эту группу входят дифференциальные уравнения равновесия (1.5). Для динамической задачи, принимая, что перемещения  $u_x, u_y, u_z$  очень малые, а проекции ускорения на координатные оси запишутся как  $\partial^2 u_x / \partial t^2, \partial^2 u_y / \partial t^2, \partial^2 u_z / \partial t^2$ , удельная объемная сила по осям  $x, y, z$  будет равна:

$$-\rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}; \quad -\rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}; \quad -\rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}. \quad (a)$$

В случае динамической задачи уравнения (5) будут содержать, кроме объемных (массовых) сил  $X, Y, Z$ , отнесенных к единице объема, и инерционные силы, определяемые в соответствии с (a).

Система уравнений будет иметь вид:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0 & (\text{или } \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2}); \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0 & (\text{или } \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2}); \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 & (\text{или } \rho \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}). \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

Б. *Геометрические уравнения (2.2):*

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

В. *Физические уравнения (3.2):*

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

или в обратной форме (3.9):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z; & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (4.3a)$$

Уравнения (4.1)—(4.3) (их количество — 15) содержат 15 неизвестных функций: шесть компонентов напряжений:

$$\sigma_x(x, y, z); \quad \sigma_y(x, y, z); \quad \sigma_z(x, y, z); \\ \tau_{xy}(x, y, z); \quad \tau_{yz}(x, y, z); \quad \tau_{zx}(x, y, z),$$

шесть компонентов деформации:

$$\varepsilon_x(x, y, z); \quad \varepsilon_y(x, y, z); \quad \varepsilon_z(x, y, z); \\ \gamma_{xy}(x, y, z); \quad \gamma_{yz}(x, y, z); \quad \gamma_{zx}(x, y, z),$$

а также три компонента перемещения:

$$u_x(x, y, z); \quad u_y(x, y, z); \quad u_z(x, y, z).$$

Таким образом, с математической точки зрения задача может быть разрешена и сводится к нахождению 15 функций, удовлетво-

<sup>1</sup> Энциклопедия мудрости. М.: РОСССА, 2013.



ряющих уравнениям (4.1), (4.2), (4.3) или (4.3a), а также условиям на контуре (1.8):

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

К ним необходимо присоединить уравнения неразрывности деформаций (2.11):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

При прямом решении задачи, когда используются все 15 уравнений (4.1)–(4.3), уравнения неразрывности (в) сами по себе, как вытекающие из (4.1), не нужны и могут играть роль контрольных уравнений.

Однако, если решается статическая задача теории упругости (следовательно, правая часть уравнений (4.1) обращается в нуль) и отыскиваются только напряжения и деформации (значит, неизвестных будет 12), целесообразно уравнения (4.2) подменить тремя из шести уравнений (в) или принять первую группу уравнений неразрывности. В этом случае будем иметь три уравнения равновесия (4.1), шесть физических уравнений (4.3) и три уравнения неразрывности (в) (для линейных деформаций). Задача сводится к нахождению 12 неизвестных функций, удовлетворяющих в каждой точке упругого тела 12 уравнениям, а на поверхности тела удовлетворяющих граничным уравнениям (б).

Далее, если это потребуется, по найденным деформациям из (4.3) можно вычислить компоненты перемещений  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$ ,  $u_z(x, y, z)$ . Решение указанных уравнений можно вести различными способами в зависимости от того, какие величины приняты за основные неизвестные:

1. Решение в *перемещениях*, когда за основные неизвестные приняты три составляющие перемещения:

$$u_x(x, y, z); \quad u_y(x, y, z); \quad u_z(x, y, z).$$

Этот метод часто называют методом перемещений [5]. При решении задачи используются кинематические граничные условия или граничные условия смешанного типа.

2. Решение в *напряжениях*, когда за основные неизвестные приняты шесть составляющих напряжений:

$$\begin{aligned} \sigma_x(x, y, z); \quad \sigma_y(x, y, z); \quad \sigma_z(x, y, z); \\ \tau_{xy}(x, y, z); \quad \tau_{yz}(x, y, z); \quad \tau_{zx}(x, y, z). \end{aligned}$$

Этот метод часто называют методом сил [5]. При решении задачи используются статические или динамические граничные условия.

3. Решение в *смешанной форме*, когда за основные неизвестные приняты некоторые из перемещений и некоторые из напряжений. При решении задачи используются граничные условия смешанного типа.

## 4.2. Решение задачи теории упругости в перемещениях

При решении задачи теории упругости в перемещениях за основные неизвестные принимают три составляющие перемещения

$$u_x(x, y, z); \quad u_y(x, y, z); \quad u_z(x, y, z).$$

Для их отыскания необходимо иметь три уравнения, которые можно получить из дифференциальных уравнений равновесия (4.1) (в статической форме, т. е.  $\partial^2 u_i / \partial t^2 = 0$ ,  $i = x, y, z$ ), выразив в них напряжения через перемещения.

Возьмем первое уравнение равновесия (1.5) и подставим в него напряжения из формул закона Гука в форме (4.3a) (обратная форма закона Гука):  $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$ . Дифференцируя их в соответствии с (4.3a), получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} &= G \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \lambda \frac{\partial \theta}{\partial x}; & \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} &= G \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}; \\ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} &= G \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} + G \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

Внесем полученные решения в первое уравнение группы (4.1). После группировки находим:

$$\lambda \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} \right) + G \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + X = 0. \quad (a)$$

Выражение, заключенное в первых скобках, может быть короче записано так:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z) = \frac{\partial \theta}{\partial x}.$$

Введем для краткости письма обозначение:

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \nabla^2 u_x \quad (4.4)$$

(читается «набла два»), называемое также оператором Лапласа над функцией  $u_x(x, y, z)$ . Тогда уравнение (a) после группировки подобных членов будет иметь вид:

$$(\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u_x + X = 0. \quad (б)$$

Аналогично преобразуем и два других дифференциальных уравнения равновесия (4.1)<sup>1</sup>. Таким образом, получаем группу уравнений для решения задачи теории упругости в перемещениях

$$\left. \begin{aligned} (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial x} + G \nabla^2 u_x + X &= 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial y} + G \nabla^2 u_y + Y &= 0; \\ (\lambda + G) \frac{\partial \theta}{\partial z} + G \nabla^2 u_z + Z &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

<sup>1</sup> Можно и сразу записать результат, сделав в (б) круговую подстановку букв  $x, y, z$ .

Уравнения (4.5) называются уравнениями Ламе. Они объединяют все три группы уравнений (4.1)—(4.3). Действительно, они содержат условия равновесия, геометрические характеристики деформаций,  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$ ,  $u_z(x, y, z)$  и физические характеристики материала  $\lambda$  и  $G$ .

Поверхностные условия (1.8) также можно преобразовать, выразив напряжения через перемещения. Для этого подставим в первое уравнение (1.8) (или (б) п. 4.1) на место напряжений  $\sigma_x, \tau_{xy}, \tau_{xz}$  выражение для них в форме (80a). Получим:

$$p_{xv} = (\lambda \theta l + 2G \varepsilon_x) l + G \gamma_{xy} m + G \lambda_{xz} n. \quad (в)$$

Подставим в (в) вместо линейных и угловых деформаций их значения из формул Коши (4.2) и сгруппируем следующим образом:

$$p_{xv} = \lambda \theta l + G \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} l + \frac{\partial u_x}{\partial y} m + \frac{\partial u_x}{\partial z} n \right) + G \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} l + \frac{\partial u_y}{\partial x} m + \frac{\partial u_z}{\partial x} n \right). \quad (г)$$

Выражение в первой скобке уравнения (г) представляет собой производную по направлению нормали  $v$  от функции  $u_x(x, y, z)$  [10]. Действительно, вычисляя частную производную сложной функции  $u_x(x, y, z)$  по  $v$ , получаем:

$$\frac{\partial u_x}{\partial v} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dv} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot \frac{dz}{dv}.$$

Производные координат по  $v$  представляют собой соответствующие направляющие косинусы нормали  $v$ :

$$\frac{dx}{dv} = l; \quad \frac{dy}{dv} = m; \quad \frac{dz}{dv} = n.$$

Таким образом,

$$\frac{\partial u_x}{\partial v} = \frac{\partial u_x}{\partial x} l + \frac{\partial u_x}{\partial y} m + \frac{\partial u_x}{\partial z} n,$$

и формула (г) принимает следующий вид:

$$p_{xv} = \lambda \theta l + G \frac{\partial u_x}{\partial v} + G \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} l + \frac{\partial u_y}{\partial x} m + \frac{\partial u_z}{\partial x} n \right).$$

Точно так же можно преобразовать два других уравнения из условий на поверхности (1.8). В результате приходим к следующим трем условиям на поверхности, выраженным через перемещения:

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \lambda\theta l + G \frac{\partial u_x}{\partial v} + G \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} l + \frac{\partial u_y}{\partial x} m + \frac{\partial u_z}{\partial x} n \right); \\ p_{yv} &= \lambda\theta m + G \frac{\partial u_y}{\partial v} + G \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} l + \frac{\partial u_y}{\partial y} m + \frac{\partial u_z}{\partial y} n \right); \\ p_{zv} &= \lambda\theta n + G \frac{\partial u_z}{\partial v} + G \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} l + \frac{\partial u_y}{\partial z} m + \frac{\partial u_z}{\partial z} n \right). \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

Составим план решения задачи теории упругости в перемещениях. Для определения трех составляющих перемещения  $u_x(x, y, z)$ ,  $u_y(x, y, z)$ ,  $u_z(x, y, z)$  необходимо проинтегрировать три уравнения Ламе (4.5) и удовлетворить условиям на поверхности (4.6). По найденным перемещениям из формул Коши (4.2) определяют составляющие деформаций, а затем из формул закона Гука (4.3a) — составляющие напряжений. Заметим, что для динамической задачи правая часть уравнений (4.5) равна  $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2}$  ( $u_i = x, y, z$ ).

### 4.3. Решение задачи теории упругости в напряжениях при постоянстве объемных сил

Ограничим круг рассматриваемых задач случаями статического равновесия, когда объемные силы постоянны по всему объему тела или равны нулю. Эти ограничения позволяют значительно упростить некоторые уравнения при решении задач в напряжениях, так как все производные от составляющих объемных сил по координатам  $x, y, z$  обращаются в нуль. Рассмотрим свойства функций  $\theta$  и  $S_1$  при постоянстве объемных сил.

Продифференцируем первое уравнение Ламе из зависимости (4.5) по  $x$ , второе — по  $y$ , третье — по  $z$  и сложим почленно.

В результате получим:

$$(\lambda + G) \left( \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} \right) + G \left( \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_x + \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 u_y + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 u_z \right) = 0. \quad (a)$$

Выражение, стоящее в первых скобках, представляет собой оператор Лапласа над функцией  $\theta$ :

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \nabla^2 \theta.$$

Вторые скобки преобразуем следующим образом:

$$\frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_x + \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 u_y + \frac{\partial}{\partial z} \nabla^2 u_z = \nabla^2 \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \nabla^2 \theta.$$

Тогда вместо уравнения (a) получим:

$$(\lambda + 2G) \nabla^2 \theta = 0,$$

или

$$\nabla^2 \theta = 0. \quad (4.7)$$

Функция, подчиняющаяся условию (4.7), называется *гармонической функцией*.

Следовательно, *при постоянстве объемных сил объемная деформация есть функция гармоническая*.

Подставляя формулу (3.4) для объемной деформации  $\theta$  в уравнение (4.7), получаем:

$$\nabla^2 S_1 = 0, \quad (4.8)$$

т. е. *при постоянстве объемных сил первый инвариант напряженного состояния есть функция гармоническая*.

При решении задачи теории упругости в напряжениях за основные неизвестные принимают шесть составляющих напряжений:  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ . Для их отыскания трех уравнений равновесия (4.1) недостаточно, и поэтому к ним нужно добавить еще шесть уравнений неразрывности деформаций (2.11). Так как в последние входят составляющие деформации, их необходимо предварительно выразить через напряжения.

Подставляя в первое уравнение неразрывности деформаций

$$\frac{\partial^2 \epsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}$$

значения  $\epsilon_x, \epsilon_y, \gamma_{xy}$  из формул закона Гука (4.3), получаем:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \left( \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial y^2} \right) + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \left( \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} \right) - 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (б)$$

Преобразуем (б), исключив из него касательные напряжения  $\tau_{xy}$ . Для этого продифференцируем первое уравнение равновесия (статическое) (4.1) по  $x$ , второе — по  $y$ , третье — по  $z$ . Складывая почленно два первых из полученных уравнений и вычитая третье, находим:

$$-2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2}. \quad (в)$$

Подставляя полученное решение (в) в уравнение (б), получаем:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \sigma_z}{\partial z^2} - \mu \nabla^2 \sigma_z = 0.$$

Прибавим и вычтем в этом уравнении  $\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial z^2}$ ,  $\frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial z^2}$ ,  $\nabla^2 \sigma_z$ . Тогда с учетом уравнения (4.8) получим:

$$(1 + \mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} = 0. \quad (з)$$

Аналогично можно преобразовать остальные уравнения неразрывности деформаций (2.11) (или можно сделать круговую подстановку букв  $x, y, z$  в уравнении (з)).

В результате получим уравнения Бельтрами — Митчела:

$$\left. \begin{aligned} (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_x + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x^2} = 0; & \quad (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{xy} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial x \partial y} = 0; \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_y + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y^2} = 0; & \quad (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{yz} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial y \partial z} = 0; \\ (1 + \mu) \nabla^2 \sigma_z + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z^2} = 0, & \quad (1 + \mu) \nabla^2 \tau_{zx} + \frac{\partial^2 S_1}{\partial z \partial x} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (4.9)$$

Эти уравнения получены Бельтрами в 1892 г. В 1899 г. Митчел вывел эти уравнения для случая, когда объемные силы не постоянны, и, следовательно, в правую часть уравнений (4.9) вместо нулей входят члены, содержащие производные от объемных сил.

Таким образом, для решения задачи теории упругости в напряжениях необходимо проинтегрировать девять уравнений: три равновесия (4.1) и шесть (4.9). Наличие трех лишних уравнений необходимо для получения однозначного решения и обсуждалось при выводе уравнений неразрывности деформаций (2.11), следствием которых являются уравнения Бельтрами — Митчела. Полученные после ин-

тегрирования шесть составляющих напряжений должны удовлетворять условиям на поверхности (1.8). После этого по формулам закона Гука (4.3) определяют составляющие деформации, а из формул Коши (4.2) — составляющие перемещения  $u_x, u_y, u_z$ .

#### 4.4. Теорема единственности. Методы решения задач теории упругости

При решении задач теории упругости может возникнуть вопрос о том, является ли полученное решение однозначным, т. е. могут ли заданным объемным и поверхностным силам соответствовать одна или несколько различных систем напряжений.

Докажем следующую теорему.

*Для тела, находящегося в естественном состоянии, решение задачи теории упругости единственно, если справедлив принцип независимости действия сил.*

Предположим обратное: под действием заданных поверхностных  $p_{xy}, p_{yz}, p_{zx}$  и объемных  $X, Y, Z$  сил возможны две различные системы напряжений

$$\sigma'_x, \sigma'_y, \sigma'_z, \tau'_{xy}, \tau'_{yz}, \tau'_{zx} \text{ и } \sigma''_x, \sigma''_y, \sigma''_z, \tau''_{xy}, \tau''_{yz}, \tau''_{zx}.$$

Обе эти системы напряжений должны удовлетворять уравнениям статического равновесия (4.1):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma'_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau'_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma'_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau'_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau'_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau'_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma'_z}{\partial z} + Z &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (а)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma''_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau''_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau''_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau''_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma''_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau''_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau''_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau''_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma''_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

и условиям на поверхности (1.8):

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma'_x l + \tau'_{xy} m + \tau'_{xz} n; \\ p_{yv} &= \tau'_{yx} l + \sigma'_y m + \tau'_{yz} n; \\ p_{zv} &= \tau'_{zx} l + \tau'_{zy} m + \sigma'_z n; \end{aligned} \right\} \quad (\theta)$$

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma''_x l + \tau''_{xy} m + \tau''_{xz} n; \\ p_{yv} &= \tau''_{yx} l + \sigma'_y m + \tau''_{yz} n; \\ p_{zv} &= \tau''_{zx} l + \tau''_{zy} m + \sigma''_z n. \end{aligned} \right\} \quad (\varepsilon)$$

Вычтя почленно соответствующие уравнения систем (а) и (б), получим новую систему уравнений равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}(\sigma'_x - \sigma''_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau'_{xy} - \tau''_{xy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau'_{xz} - \tau''_{xz}) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x}(\tau'_{yx} - \tau''_{yx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\sigma'_y - \sigma''_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\tau'_{zy} - \tau''_{zy}) &= 0; \\ \frac{\partial}{\partial x}(\tau'_{zx} - \tau''_{zx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\tau'_{zy} - \tau''_{zy}) + \frac{\partial}{\partial z}(\sigma'_z - \sigma''_z) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (\partial)$$

и условий на поверхности (θ) и (ε):

$$\left. \begin{aligned} 0 &= (\sigma'_x - \sigma''_x)l + (\tau'_{xy} - \tau''_{xy})m + (\tau'_{xz} - \tau''_{xz})n; \\ 0 &= (\tau'_{yx} - \tau''_{yx})l + (\sigma'_y - \sigma''_y)m + (\tau'_{yz} - \tau''_{yz})n; \\ 0 &= (\tau'_{zx} - \tau''_{zx})l + (\tau'_{zy} - \tau''_{zy})m + (\sigma'_z - \sigma''_z)n. \end{aligned} \right\} \quad (\varepsilon)$$

На основании принципа независимости действия сил разности напряжений, входящих в системы уравнений (θ) и (ε), можно принять за новую систему напряжений. Однако согласно уравнениям (θ) и (ε) полученная новая система напряжений возникает при отсутствии объемных и поверхностных сил. Для тела, находящегося в естественном состоянии, эти напряжения равны нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x - \sigma''_x = 0; \quad \tau'_{xy} - \tau''_{xy} = 0; \quad \tau'_{xz} - \tau''_{xz} = 0; \\ \sigma'_y - \sigma''_y = 0; \quad \sigma'_z - \sigma''_z = 0; \quad \tau'_{yz} - \tau''_{yz} = 0 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} \sigma'_x &= \sigma''_x; \quad \tau'_{xy} = \tau''_{xy}; \quad \tau'_{xz} = \tau''_{xz}; \\ \sigma'_y &= \sigma''_y; \quad \sigma'_z = \sigma''_z; \quad \tau'_{yz} = \tau''_{yz}. \end{aligned} \right.$$

Следовательно, обе системы напряжений совпадают, и решение задачи теории упругости, когда заданы объемные и поверхностные силы, единственно.

Точно так же можно доказать единственность решения задачи теории упругости и в случае, когда на поверхности упругого тела заданы перемещения.

Из доказанной теоремы следует, что так как решение задачи теории упругости единственно, то безразлично, каким математическим методом решена задача.

Можно указать три основных метода математического решения задачи теории упругости:

1. *Прямой метод.* Этот метод заключается в непосредственном интегрировании уравнений теории упругости совместно с заданными условиями на поверхности (2.12)—(2.14).

2. *Обратный метод.* В этом случае задаются функциями перемещений или напряжений, удовлетворяющими дифференциальным уравнениям совместности деформаций или равновесия, и определяют, каким внешним нагрузкам соответствует рассматриваемая система перемещений или напряжений.

3. *Полуобратный метод Сен-Венана.* При решении задачи этим методом делают допущения о виде некоторых из функций напряжений или перемещений. При этом дифференциальные уравнения настолько упрощаются, что решение их не представляет особых трудностей. Полуобратный метод является одним из наиболее эффективных методов решения задачи теории упругости.

#### 4.5. Задачи для решения по Разделу I

1. Дан тензор напряжений  $\begin{vmatrix} 50 & 50 & 80 \\ 50 & 0 & -75 \\ 80 & -75 & -30 \end{vmatrix}$ . Найти для площадки с

направляющими нормальными  $l = 1/2$ ,  $m = 1/2$ ,  $n = 1/\sqrt{2}$  полное, нормальное и касательное напряжения.

2. Определить, можно ли в упругом теле произвольной формы при равных нулю объемных силах создать соответствующим подбором поверхностных сил следующие напряженные состояния:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a(y+z); \quad \sigma_y = b(x+z); \quad \sigma_z = c(x+y); \quad \tau_{xy} = az; \\ \tau_{yz} &= bx; \quad \tau_{zx} = cy. \end{aligned} \right.$$

3. Перемещения в упругом теле определяются следующими выражениями:

$$u_x = a(x + y - 5 + 0,5z); \quad u_y = a(y + 0,5z)z; \quad u_z = a(xy + yz + xz).$$

Определить деформации тела.

4. Определить, можно ли в упругом теле произвольной формы при равных нулю объемных силах создать соответствующим подбором поверхностных сил следующие напряженные состояния:

$$\sigma_x = a(2y + 2z); \quad \sigma_y = b(2x + 2z); \quad \sigma_z = c(2x + 2y);$$

$$\tau_{xy} = 2az; \quad \tau_{yz} = 3bx; \quad \tau_{zx} = 4cy$$

5. Дан тензор напряжений  $\begin{vmatrix} 50 & 50 & 0 \\ 50 & 80 & 75 \\ 0 & 75 & -30 \end{vmatrix}$ . Найти для площадки с

направляющими нормальными  $l = 1/\sqrt{2}$ ,  $m = 1/2$ ,  $n = 1/2$  полное, нормальное и касательное напряжения.

6. Для напряженного состояния, заданного тензором, имеющим все одинаковые составляющие, равные  $\sigma$ , найти главные напряжения и главные площадки. Объяснить, почему число последних оказывается неограниченным.

7. Определить, можно ли в упругом теле произвольной формы при равных нулю объемных силах создать соответствующим подбором поверхностных сил следующие напряженные состояния:

$$\sigma_x = a(y^3 + z^2); \quad \sigma_y = b(x + z)^3; \quad \sigma_z = c(x + y)^2;$$

$$\tau_{xy} = az; \quad \tau_{yz} = bx; \quad \tau_{zx} = 0.$$

8. Дан тензор напряжений  $\begin{vmatrix} 20 & 10 & 50 \\ 10 & 20 & 30 \\ 50 & 30 & -30 \end{vmatrix}$ . Найти для площадки с

направляющими нормальными  $l = 1/\sqrt{2}$ ,  $m = 1/2$ ,  $n = 1/2$  полное, нормальное и касательное напряжения.

9. Для точки, имеющей компоненты напряжений  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = 0$ ,  $\sigma_z = 200$ ,  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 100$ .

Вычислить главные напряжения.

10. В точке тела, на его границе (направляющие косинусы  $l, m, n$  заданы) известны компоненты внешнего нагружения  $p_x = a$ ,  $p_y = p_z = 0$ .

Кроме того, известно, что возле заданной точки внутри тела  $\tau_{xy} = \tau_{xz} = \sigma_z = 0$ . Вычислить остальные компоненты напряжений.

11. В одной из точек поверхности тела полная интенсивность внешней поверхностной силы равна 150, а ее направление определяется направляющими косинусами  $l = m = 0,707$ ;  $n = 0$ . Найти составляющие внешней нагрузки в окрестности этой точки.

12. В точке тела  $A(10, 5, -8)$  по площадке с нормалью  $\nu(0,5; 0,5; 0,707)$  известны полное напряжение  $p_\nu = 100$  и его направление  $l = m = n = \frac{1}{3}$ . Известно также, что касательные напряжения в теле определяются выражениями  $\tau_{xy} = 60y$ ;  $\tau_{yz} = 100z$ ;  $\tau_{zx} = 20 + 40y$ .

Определить нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  в точке  $A$ .

13. Дан тензор напряжений  $\begin{vmatrix} 50 & 50 & 80 \\ 50 & 25 & 55 \\ 80 & 55 & -30 \end{vmatrix}$ . Найти для площадки с

направляющими нормальными  $l = 1/\sqrt{2}$ ,  $m = 1/2$ ,  $n = 1/2$  полное, нормальное и касательное напряжения.

14. Определить, можно ли в упругом теле произвольной формы при равных нулю объемных силах создать соответствующим подбором поверхностных сил следующие напряженные состояния:

$$\sigma_x = a(y + z); \quad \sigma_y = b(x + z); \quad \sigma_z = c(x + y);$$

$$\tau_{xy} = az; \quad \tau_{yz} = 0; \quad \tau_{zx} = cy.$$

15. Перемещения в упругом теле определяются выражениями:

$$u_x = a(x + y - 5 + 0,5z); \quad u_y = a(y + 0,5z)z; \quad u_z = a(xy + yz + xz).$$

Определить деформации тела.

16. Определить, можно ли в упругом теле произвольной формы при равных нулю объемных силах создать соответствующим подбором поверхностных сил следующие напряженные состояния:

$$\sigma_x = a(2y + 2z^2); \quad \sigma_y = b(2x + 2z); \quad \sigma_z = c(2x + 2y);$$

$$\tau_{xy} = 0; \quad \tau_{yz} = bx; \quad \tau_{zx} = 2cy^2.$$

17. По граням находящегося внутри тела куба действуют главные напряжения  $\sigma_x = 50$ ,  $\sigma_y = -50$ ,  $\sigma_z = 75$ . Определить полное, нормальное и касательное напряжения в площадке  $ABC$ , проходящей через три вершины куба, а также направление полного напряжения.



18. Какому виду деформации тела соответствуют следующие перемещения

$$u_x = a - by - cz; \quad u_y = bx - cz; \quad u_z = a(xy + yz + xz),$$

где  $a, b, c$  — константы?

19. По граням находящегося внутри тела куба действуют главные напряжения  $\sigma_x = 50, \sigma_y = -50, \sigma_z = 75$ . Определить полное, нормальное и касательное напряжения в площадке  $ABC$ , проходящей через три вершины куба, а также направление полного напряжения.

20. В точке тела  $A(10, 5, -8)$  по площадке с нормалью  $\nu(0,5; 0,5; 0,707)$  известно полное напряжение  $p_\nu = 100$  и его направление  $l = m = n = \frac{1}{3}$ . Известно также, что касательные напряжения в теле определяются выражениями  $\tau_{xy} = 60y, \tau_{yz} = 100z, \tau_{zx} = 20 + 40y$ .

Определить нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  в точке  $A$ .

21. Для точки, имеющей компоненты напряжений  $\sigma_x = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \sigma_x = 200, \tau_{yz} = \tau_{zx} = 100$ .

Вычислить главные напряжения.

22. Перемещения в упругом теле определяются следующими выражениями:

$$u_x = a(x + y - 5 + 0,5z); \quad u_y = a(y + 0,5z)z; \quad u_z = a(yz + xz).$$

Определить деформации тела.

23. В точке тела  $A(10, 5, -8)$  по площадке с нормалью  $\nu(0,5; 0,5; 0,707)$  известны полное напряжение  $p_\nu = 100$  и его направление  $l = m = n = \frac{1}{3}$ . Известно также, что касательные напряжения в теле определяются выражениями  $\tau_{xy} = 50y, \tau_{yz} = 200z, \tau_{zx} = 20 + 40y$ .

Определить нормальные напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  в точке  $A$ .

24. Для упругого тела известен тензор деформаций  $\epsilon_x = ay; \epsilon_y = ax; \epsilon_z = -a(x + y); \gamma_{xy} = 2az; \gamma_{yz} = 0; \gamma_{zx} = a$ , где  $a$  — некоторая константа.

Получить формулы для вычисления полной удельной потенциальной энергии деформации в произвольной точке тела.

25. Для точки, имеющей компоненты напряжений  $\sigma_x = \sigma_z = \tau_{xy} = 0, \sigma_x = 200, \tau_{yz} = \tau_{zx} = 100$ . Вычислить главные напряжения.

26. Для упругого тела известен тензор напряжений

$$\sigma_x = 3bz; \quad \sigma_y = -3bx; \quad \sigma_z = 6by.$$

Касательные напряжения равны нулю. Получить формулы для вычисления полной удельной потенциальной энергии деформации в произвольной точке тела.

27. Какому виду деформации тела соответствуют следующие перемещения:  $u_x = by - cz; u_y = bx + cz; u_z = c(x + y)$ , где  $a, b, c$  — константы?

28. Для упругого тела известен тензор напряжений  $\sigma_x = bz, \sigma_y = -3bx, \sigma_z = 2by$ . Касательные напряжения равны нулю. Получить формулы для вычисления полной удельной потенциальной энергии деформации в произвольной точке тела.

29. Для упругого тела прямоугольной формы, размерами  $b \cdot h \cdot l$ , известны перемещения:

$$u_x = \frac{P}{Ebh} x; \quad u_y = -\frac{\mu P}{Ebh} y; \quad u_z = -\frac{\mu P}{Ebh} z.$$

Вычислить полную потенциальную энергию деформации, накопленную во всем объеме тела и работу внешней нагрузки  $A$ . Установить физический смысл параметра  $P$ .

30. Для упругого тела заданы перемещения:

$$u_x = \left(\frac{1}{2}a - \frac{b}{r^2}\right)x; \quad u_y = \left(\frac{1}{2}a - \frac{b}{r^2}\right)y; \quad u_z = 2cz,$$

где  $a, b, c$  — константы;  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Определить деформации, возникшие в теле.

31. Можно ли вызвать в произвольном упругом теле заданные ниже перемещения путем соответствующего подбора одних только поверхностных внешних сил:

$$u_x = a; \quad u_y = b(x + z); \quad u_z = c(x + y)^3.$$

32. Можно ли вызвать в произвольном упругом теле заданные ниже перемещения путем соответствующего подбора одних только поверхностных внешних сил:

$$u_x = \frac{1}{2}a[z^2 - \mu(x^2 + y^2)]; \quad u_y = \mu axy; \quad u_z = -axz.$$

33. Какому виду деформации тела соответствуют следующие перемещения:  $u_x = a - by - cz; u_y = bx - cz; u_z = c(x + y)$ , где  $a, b, c$  — константы?

34. Для упругого тела известны перемещения:

$$u_x = 0,01(x^2 + y^2); \quad u_y = 0,01(xy + z^2); \quad u_z = 0,01(z^2 + y^2).$$

Вычислить полное перемещение точки тела  $A(3, -2, 1)$  и определить его направление. Произвести графическое построение.

35. Концы отрезка  $MN$  до деформации тела имели следующие декартовы координаты:  $M(0, 0, 0)$ ;  $N(5, 3, 6)$ . После деформации координаты концов отрезка изменились:  $M_1(1, 1, 1)$ ,  $N_1(6,05; 4,03; 7,06)$ . Вычислить абсолютную и среднюю относительную деформацию отрезка  $MN$ .

36. Для упругого тела заданы перемещения:

$$u_x = \left(a - \frac{b}{r^2}\right)x; \quad u_y = \left(a - \frac{b}{r^2}\right)y; \quad u_z = 2cz,$$

где  $a, b, c$  — константы;  $r^2 = x^2 + y^2$ .

Определить деформации, возникшие в теле.

37. Для упругого тела известны деформации:

$$\varepsilon_x = 10^{-4} \cdot (y - 5); \quad \varepsilon_y = 10^{-4} \cdot (z - 4); \quad \varepsilon_z = 10^{-4} \cdot (x - 6).$$

Определить перемещения точек тела при следующих условиях закрепления тела: перемещения точки  $A(2, 5, 4)$  равны нулю.

38. Найти напряжения в упругом теле при известных следующих перемещениях:

$$u_x = \frac{1}{2}a[z^2 - \mu x^2]; \quad u_y = \mu ax; \quad u_z = -axz.$$

39. Концы отрезка  $MN$  до деформации тела имели следующие декартовы координаты:  $M(0, 0, 0)$ ;  $N(5, 3, 6)$ . После деформации координаты концов отрезка изменились:  $M_1(1, 1, 1)$ ,  $N_1(6,05; 4,03; 7,06)$ . Вычислить абсолютную и среднюю относительную деформацию отрезка  $MN$ .

40. Каким напряжениям тела соответствуют следующие перемещения:  $u_x = ax - cz$ ;  $u_y = bx - cz$ ;  $u_z = c(x + y)$ , где  $a, b, c$  — константы?

41. Для упругого тела известны перемещения:

$$u_x = 0,01(x^2 + y^2); \quad u_y = 0,01(xy + z^2); \quad u_z = 0,01(z^2 + y^2).$$

Вычислить нормальное, касательное и полное напряжения в точке тела  $A(3, -2, 1)$ .

42. Перемещения в упругом теле определяются следующими выражениями:

$$u_x = a(x + y - 5 + 0,5z); \quad u_y = a(y + 0,5z)z; \quad u_z = a(xy + yz + xz).$$

Определить напряжения в теле.

### Контрольные вопросы

1. Сколько неизвестных функций необходимо определить при решении пространственной задачи теории упругости?
2. Является ли с математической точки зрения разрешимой задача определения компонентов перемещения, напряжений и деформаций?
3. Укажите способы решения задач теории упругости.
4. Как решается задача теории упругости в перемещениях?
5. Как решается задача теории упругости в напряжениях?
6. Синтезом каких уравнений являются уравнения Ламе?
7. Составьте план решения задачи теории упругости в перемещениях.
8. В чем суть решения задачи теории упругости в напряжениях?
9. Какая функция является гармонической?
10. Описываются ли гармоническими функциями объемная деформация и первый инвариант тензора напряжений?

## Раздел II ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

### Глава 5 ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ

Наши математические затруднения Бога не беспокоят. Он интегрирует эмпирически.

*А. Эйнштейн*<sup>1</sup>

#### 5.1. Плоская деформация

Если при каком-либо напряженном состоянии тела перемещения всех его точек могут происходить только в двух направлениях, т. е. только в одной плоскости, то такая деформация называется *плоской*. Примером может служить тело, помещенное между двумя абсолютно твердыми плитами (рис. 16), расстояние между которыми остается неизменным, и сжимаемое силами, параллельными плоскостям плит.

В таких же условиях фактически оказывается тело, размеры которого в одном направлении, например в направлении оси  $z$ , очень велики (например, длинный цилиндрический каток, длинная пластинка и т. д.).

Если такое длинное в направлении, например оси  $z$ , тело нагружено силами (рис. 17), не меняющимися по длине тела и перпендикулярными к этому направлению, то часть его, находящаяся на значи-

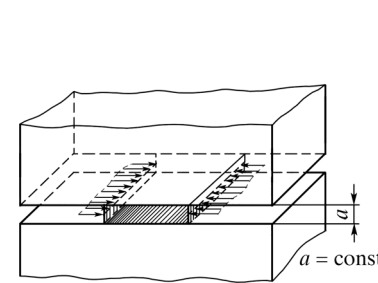


Рис. 16. Плоская деформация

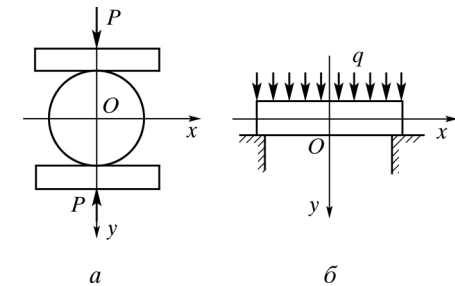


Рис. 17. Плоская деформация при нагружении цилиндрического катка (а)

тельном расстоянии от концов, фактически будет подвергаться плоской деформации.

Перемещения всех точек деформированного тела в таком случае происходят в плоскостях, перпендикулярных длине тела.

Итак, в упругом теле возникает *плоская деформация*, если перемещения будут происходить только параллельно одной плоскости, например  $xOy$ :

$$u_x = u_x(x, y); \quad u_y = u_y(x, y); \quad u_z = 0. \quad (a)$$

Подставляя составляющие перемещения (а) в формулы Коши (4.2), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x(x, y); & \varepsilon_z &= 0; \\ \varepsilon_y &= \varepsilon_y(x, y); & \gamma_{yz} &= 0; \\ \gamma_{xy} &= \gamma_{xy}(x, y); & \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Отсутствие линейных деформаций в направлении оси  $z$  ведет к появлению нормальных напряжений  $\sigma_z$ . Эти напряжения зависят от напряжений, действующих в плоскости  $xOy$ . Действительно, из третьей формулы закона Гука (4.3) при отсутствии деформации  $\varepsilon_z$  следует, что

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)] = 0,$$

откуда

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y). \quad (5.1)$$

<sup>1</sup> Энциклопедия мудрости. М.: РОСССА, 2013.

Подставляя соотношение (5.1) в первые две формулы закона Гука (4.3), находим:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E} \left( \sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right); \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E} \left( \sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right). \end{aligned} \right\} \quad (\theta)$$

Из анализа формул (б), (θ) и (4.3) следует, что  $\tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ , а

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y).$$

На основании формулы (5.1) напряжение  $\sigma_z$  также является функцией только двух координат  $\sigma_z = \sigma_z(x, y)$ .

Таким образом, основные уравнения теории упругости в случае плоской деформации значительно упрощаются. Из дифференциальных уравнений равновесия (4.1) остаются только два

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + Y &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

а третье превращается в тождество.

Так как на боковой поверхности упругого тела везде направляющий косинус  $n = 0$ , из условий на поверхности (1.8) остаются также только два:

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m; \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m. \end{aligned} \right\} \quad (5.3)$$

Формулы Коши (4.2) сведутся к трем:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

Из шести уравнений неразрывности деформаций (2.11) остается только одно:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}, \quad (5.5)$$

а остальные обращаются в тождества.

Из шести формул закона Гука (4.3) с учетом соотношений (б) и (θ) остаются только три:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1-\mu^2}{E} \left( \sigma_x - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_y \right); \\ \varepsilon_y &= \frac{1-\mu^2}{E} \left( \sigma_y - \frac{\mu}{1-\mu} \sigma_x \right); \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

Эти формулы примут более удобный вид, если ввести новые упругие постоянные:

$$\left. \begin{aligned} E_1 &= E/(1-\mu^2); \\ \mu_1 &= \mu/(1-\mu). \end{aligned} \right\} \quad (5.6)$$

В данном случае выражение коэффициента пропорциональности в третьем уравнении (5.6) через новые упругие постоянные не изменяется:

$$2(1+\mu)/E = 2(1+\mu_1)/E_1.$$

С учетом этого результата и формул (5.6) формула закона Гука для плоской деформации примет вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \mu_1 \sigma_y)/E_1; \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \mu_1 \sigma_x)/E_1; \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu_1)}{E_1} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

## 5.2. Обобщенное плоское напряженное состояние

Все уравнения теории упругости значительно упрощаются, если напряжения параллельны одной плоскости. Так, в задаче о тонкой пластинке, нагруженной по боковой поверхности силами, параллельными ее основаниям и равномерно распределенными по ее толщине (рис. 18), возможны упрощения, аналогичные упрощениям в задаче о плоской деформации.

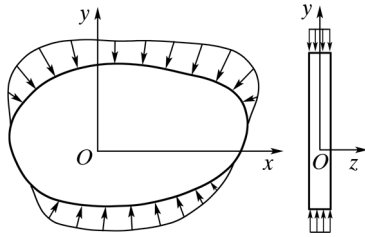


Рис. 18. Обобщенное плоское напряженное состояние

Этот случай называется *обобщенным плоским напряженным состоянием*.

На основаниях пластинки напряжения  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{xz}$  равны нулю, а так как она тонкая, можно считать, что  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$  по всему объему пластинки. По той же причине остальные напряжения можно считать постоянными по толщине пластинки, т. е. не зависящими от координаты  $z$ . Таким образом, в тонкой пластинке, нагруженной силами, параллельными плоскости  $xOy$ , возникает напряженное состояние, для которого

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y).$$

В отношении напряжений обобщенное плоское напряженное состояние отличается от плоской деформации условием  $\sigma_z = 0$ . Переходя к деформациям с помощью третьей формулы закона Гука (80), получаем, что деформация

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y).$$

Поскольку  $\varepsilon_z \neq 0$ , основания пластинки не останутся плоскими, а будут искривляться.

При этих предположениях основные уравнения плоской деформации: дифференциальные уравнения равновесия (1.5), условия на

поверхности (1.8), формулы Коши (2.2) и уравнение неразрывности деформаций (2.13) сохраняют такой же вид и в задаче об обобщенном плоском напряженном состоянии, а формулы закона Гука (3.2) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \mu\sigma_y)/E; \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \mu\sigma_x)/E; \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\} \quad (5.8)$$

Эти формулы отличаются от формул закона Гука для плоской деформации (5.7) только значениями упругих постоянных. Следовательно, при решении задач о плоской деформации и обобщенном плоском напряженном состоянии можно пользоваться одними и теми же уравнениями и объединять обе задачи в одну: *плоскую задачу теории упругости*.

В плоской задаче теории упругости неизвестными являются восемь функций: три составляющие напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ ; три составляющие деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$ , а также две составляющие перемещений  $u_x$  и  $u_y$ . Уравнений для решения задачи также восемь: два дифференциальных уравнения равновесия (5.2), три формулы Коши (5.4) и три формулы закона Гука (5.7) или (5.8).

Если по условию задачи перемещения искать не нужно, то остается шесть неизвестных: три составляющие напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy}$ , а также три составляющие деформации  $\varepsilon_x$ ,  $\varepsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$ . В таком случае остается шесть уравнений: два дифференциальных уравнения равновесия (5.2), три формулы закона Гука (5.7) или (5.8) и одно уравнение неразрывности деформаций (5.5), достаточных для решения задачи.

## 5.3. Решение плоской задачи в напряжениях. Функция напряжений

Решение плоской задачи в напряжениях сводится к отысканию трех неизвестных функций  $\sigma_x(x, y)$ ,  $\sigma_y(x, y)$  и  $\tau_{xy}(x, y)$ . Для отыскания этих трех функций имеются два дифференциальных уравнения равновесия (5.2). К ним следует добавить уравнение неразрывности

деформаций (5.5), заменив в нем деформации  $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_y$  и  $\gamma_{xy}$  на напряжения.

Возьмем уравнение (5.5) и подставим в него деформации из формул закона Гука (5.8) для обобщенного плоского напряженного состояния. После упрощения получим:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - \mu \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} - 2(1 + \mu) \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (a)$$

Исключим из этого уравнения касательное напряжение  $\tau_{xy}$ . Для этого первое уравнение равновесия (5.2) продифференцируем по  $x$ , а второе — по  $y$  и сложим почленно. Считая, как и в пространственной задаче, объемные силы  $X$  и  $Y$  постоянными по всему объему, найдем:

$$-2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}.$$

Подставив это соотношение в уравнение (a), получим:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\sigma_x + \sigma_y) = 0$$

или через оператор Лапласа:

$$\nabla^2 (\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (5.9)$$

Таким образом, *сумма нормальных напряжений в плоской задаче есть функция гармоническая.*

Это уравнение носит название уравнения Мориса Леви и выведено для обобщенного плоского напряженного состояния. Оно не содержит упругих постоянных, поэтому и для случая плоской деформации имеет такой же вид.

Таким образом, решение плоской задачи теории упругости при постоянстве объемных сил сведено к интегрированию трех уравнений: двух уравнений равновесия (5.2) и уравнения неразрывности деформаций (5.9) при обязательном удовлетворении условий на поверхности (5.3).

Решение плоской задачи можно упростить, сведя ее к отысканию одной функции  $\varphi(x, y)$ . Функция  $\varphi(x, y)$  называется *функцией напряжений Эри*. Ее выбирают таким образом, чтобы дифференциальные

уравнения равновесия (5.2) обращались в тождества. Этим условиям можно удовлетворить, если напряжения выразить через функцию Эри следующими соотношениями:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \\ \sigma_y &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} - Xy - Yx. \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Действительно, подставляя эти выражения в (5.2), получаем тождества, т. е. принятая таким образом функция напряжений  $\varphi(x, y)$  является решением системы двух уравнений равновесия (5.2).

Подставляя теперь напряжения (5.10) в уравнение неразрывности деформаций (5.9), находим:

$$\nabla^2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (б)$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой оператор Лапласа над функцией  $\varphi(x, y)$ . Поэтому уравнение (б) может быть представлено с помощью оператора Лапласа так:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi(x, y) = 0$$

или

$$\nabla^4 \varphi(x, y) = 0. \quad (в)$$

Читается левая часть соотношения (в) так: «набла четыре  $\varphi$ » и называется двойным оператором Лапласа над функцией  $\varphi$ .

Функция, подчиняющаяся уравнению (в), называется бигармонической, а само уравнение (в) — бигармоническим уравнением.

Представим бигармоническое уравнение в развернутом виде. Уравнение (б) имеет вид:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) = 0. \quad (г)$$



После дифференцирования (ε) найдем:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0. \quad (5.11)$$

Условия на поверхности (5.3) для плоской задачи выразим через функцию напряжений  $\varphi(x, y)$  с помощью уравнений (5.10):

$$p_{xv} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} l - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Xy + Yx \right) m;$$

$$p_{yv} = - \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + Xy + Yx \right) l + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} m.$$

Итак, плоская задача теории упругости сведена к отысканию одной бигармонической функции  $\varphi(x, y)$ , удовлетворяющей заданным условиям на контуре.

#### 5.4. Методы решения плоской задачи для прямоугольных односвязных областей

Тело называется *односвязным*, когда оно полностью занимает объем внутри одной замкнутой внешней поверхности. Если объем, занятый телом, заключен между двумя замкнутыми поверхностями, одна из которых полностью размещается внутри другой и образует внутреннюю полость в теле, то такое тело называется *двухсвязным*. При наличии двух, трех таких полостей тело называется, соответственно, *трех-, четырехсвязным* и т. п. Всякий открытый в обе стороны (сквозной) канал в теле также увеличивает степень связности тела на единицу.

Тело считается заданным, если известны его границы (ограничивающие поверхности) и заданы некоторые механические свойства его материала.

Отыскание бигармонической функции, удовлетворяющей условиям на контуре прямоугольной области, возможно различными методами. Здесь ограничимся рассмотрением лишь некоторых из них: решение плоской задачи в полиномах, решение плоской задачи в тригонометрических рядах, решение плоской задачи при помощи конечных разностей.

##### 5.4.1. Решение плоской задачи в полиномах

Решение плоской задачи можно осуществить обратным методом, задаваясь сначала аналитической формой функции напряжений, удовлетворяющей бигармоническому уравнению (5.11), а затем определить, каким нагрузкам на контуре она соответствует. В качестве бигармонической функции можно выбирать алгебраические полиномы разных степеней.

Полином первой степени

$$\varphi_1 = a_1 x + b_1 y$$

как функция напряжений нас не удовлетворяет, так как напряжения, подсчитанные по формулам (5.10), окажутся равными нулю.

Возьмем функцию напряжений в виде полинома второй степени

$$\varphi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2. \quad (5.12)$$

Четвертые производные от этой функции

$$\frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^4} = 0; \quad \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial x^2 \partial y^2} = 0; \quad \frac{\partial^4 \varphi_2}{\partial y^4} = 0,$$

и, следовательно, уравнение (5.11) обращается в тождество при любых значениях коэффициентов  $a_2, b_2, c_2$ .

Если функцию напряжений  $\varphi(x, y)$  взять в виде полинома третьей степени

$$\varphi_3 = \frac{a_3}{3 \cdot 2} x^3 + \frac{b_3}{2 \cdot 1} x^2 y + \frac{c_3}{1 \cdot 2} xy^2 + \frac{d_3}{2 \cdot 3} y^3, \quad (5.13)$$

то уравнение (5.11) по-прежнему будет обращаться в тождество при произвольных значениях коэффициентов  $a_3, b_3, c_3$  и  $d_3$  (выше четвертой степени нет ни одной переменной), т. е. полином третьей степени является бигармонической функцией и также может быть применен для решения плоской задачи.

Возьмем функцию напряжений  $\varphi(x, y)$  в виде полинома четвертой степени:

$$\varphi_4 = \frac{a_4}{4 \cdot 3} x^4 + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + \frac{c_4}{2 \cdot 2} x^2 y^2 + \frac{d_4}{2 \cdot 3} xy^3 + \frac{e_4}{3 \cdot 4} y^4. \quad (5.14)$$

Четвертые производные этой функции равны:

$$\frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^4} = 2a_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial x^2 \partial y^2} = c_4; \quad \frac{\partial^4 \varphi_4}{\partial y^4} = 2e_4.$$

Подставляя эти производные в бигармоническое уравнение (5.11), получаем:

$$2a_4 + 2c_4 + 2e_4 = 0,$$

откуда находим:

$$e_4 = -a_4 - c_4. \quad (a)$$

Следовательно, не все коэффициенты полинома четвертой степени можно брать произвольными. Независимыми коэффициентами могут быть только четыре, например  $a_4, b_4, c_4$  и  $d_4$ , а пятый —  $e_4$  следует взять из соотношения (a). Следовательно, для того чтобы полином четвертой степени был бигармонической функцией, он должен иметь такой вид:

$$\varphi_4 = a_4 \left( \frac{x^4}{4 \cdot 3} - \frac{y^4}{3 \cdot 4} \right) + \frac{b_4}{3 \cdot 2} x^3 y + c_4 \left( \frac{x^2 y^2}{2 \cdot 2} - \frac{y^4}{3 \cdot 4} \right) + \frac{d_4}{2 \cdot 3} xy^3.$$

Рассмотрим полином пятой степени:

$$\begin{aligned} \varphi_5 = & \frac{a_5}{5 \cdot 4} x^5 + \frac{b_5}{4 \cdot 3} x^4 y + \frac{c_5}{3 \cdot 2} x^3 y^2 + \frac{d_5}{2 \cdot 3} x^2 y^3 + \\ & + \frac{e_5}{3 \cdot 4} xy^4 + \frac{f_5}{4 \cdot 5} y^5. \end{aligned} \quad (5.15)$$

Четвертые производные этой функции равны:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^4 \varphi_5}{\partial x^4} &= 6a_5 x + 2b_5 y; \\ \frac{\partial^4 \varphi_5}{\partial x^2 \partial y^2} &= 2c_5 x + 2d_5 y; \\ \frac{\partial^4 \varphi_5}{\partial y^4} &= 2e_5 x + 6f_5 y. \end{aligned}$$

Подставляя эти производные в бигармоническое уравнение (5.11) и группируя слагаемые по аргументам  $x$  и  $y$ , получаем:

$$2(3a_5 + 2c_5 + e_5)x + 2(b_5 + 2d_5 + 3f_5)y = 0.$$

Чтобы это уравнение обращалось в тождество при любых значениях аргументов  $x$  и  $y$ , необходимо, чтобы коэффициенты при этих переменных были равны нулю, т. е.

$$3a_5 + 2c_5 + e_5 = 0; \quad b_5 + 2d_5 + 3f_5 = 0. \quad (б)$$

Если принять независимыми коэффициенты  $a_5, b_5, c_5$  и  $d_5$ , то остальные два выразятся через них согласно уравнениям (б) следующим образом:

$$e_5 = -3a_5 - 2c_5; \quad f_5 = \frac{1}{3}b_5 - \frac{2}{3}d_5.$$

Внося коэффициенты  $e_5$  и  $f_5$  из соотношений (б) в формулу (101), находим:

$$\begin{aligned} \varphi_5 = & \frac{a_5}{5 \cdot 4} (x^5 - 5xy^4) + \frac{b_5}{4 \cdot 3} \left( x^4 y - \frac{1}{5} y^5 \right) + \\ & + \frac{c_5}{3 \cdot 2} (x^3 y^2 - xy^4) + \frac{d_5}{2 \cdot 3} \left( x^2 y^3 - \frac{1}{5} y^5 \right). \end{aligned} \quad (5.16)$$

В такой форме полином пятой степени будет бигармонической функцией, и его можно будет применить к решению плоской задачи. С помощью алгебраических полиномов можно решить ряд простых задач: чистый изгиб балки, изгиб консольной балки под действием сосредоточенной силы, изгиб балки на двух опорах под действием равномерно распределенной нагрузки и др.

Для решения произвольной плоской задачи с применением полиномов используется их набор, чтобы они моделировали внешнюю нагрузку на контуре односвязной области. В работе [11] приведены полиномы разных степеней и показано их использование при решении конкретных задач.

Приведем примеры решения плоской задачи с помощью полиномов.

**Пример 1.** Для тонкой пластинки длиной  $L$ , высотой  $h$  и толщиной в единицу (рис. 19) задана функция напряжений в виде полинома второй степени:  $\varphi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2$ . Известно, что внешние силы, приложенные по кромкам пластинки, равномерно распределены по их толщине и, таким образом, создают обобщенное плоское

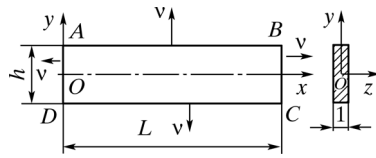


Рис. 19. Эскиз пластинки с нормальми  $v$  к границам

напряженное состояние. Объемные силы отсутствуют. Для такой функции напряжений:

- проверить возможность существования ее, используя формулу (5.11);
- по функции напряжений найти выражения для компонентов напряжений на основании уравнения (5.10);
- используя контурные условия (5.3), выяснить характер внешних нагрузок, при которых будет иметь место найденная система напряжений;
- дать эскиз распределения по контурам внешних нагрузок, отвечающих исследуемой функции напряжений.

*Решение.* В соответствии с (5.12) функция может быть использована в качестве функции напряжений, поскольку она удовлетворяет уравнению (5.11).

Определим компоненты напряжений, используя уравнения (5.10):

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = c_2; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = a_2; \quad \tau_{xy} = -b_2. \quad (6)$$

Используем контурные условия (5.3) для выяснения характера внешних нагрузок, которые вызовут напряжения (6).

На верхней грани  $AB$  (см. рис. 19) с направляющими косинусами  $l = \cos(\nu, x) = \cos 90^\circ = 0$ ,  $m = \cos(\nu, y) = \cos 0 = 1$  в соответствии с (5.3) контурные условия, при которых будет иметь место найденная система напряжений, имеют вид:

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m = c_2 \cdot 0 - b_2 \cdot 1 = -b_2; \\ p_{y\nu} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m = -b_2 \cdot 0 + a_2 \cdot 1 = a_2. \end{aligned} \quad (7)$$

На нижней грани  $CD$  с направляющими косинусами  $l = \cos(\nu, x) = \cos(-90^\circ) = 0$ ,  $m = \cos(\nu, y) = \cos 180^\circ = -1$  в соответствии с (5.3) контурные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= c_2 \cdot 0 + (-b_2)(-1) = b_2; \\ p_{y\nu} &= (-b_2) \cdot 0 + a_2(-1) = -a_2. \end{aligned} \quad (8)$$

На левой грани  $AD$  с направляющими косинусами  $m = 0$ ,  $l = \cos(180^\circ) = -1$  контурные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= c_2(-1) + (-b_2)0 = -c_2; \\ p_{y\nu} &= (-b_2)(-1) + a_2 \cdot 0 = b_2. \end{aligned} \quad (9)$$

Наконец, на правой грани  $BC$  с направляющими косинусами  $m = 0$ ,  $l = 1$  контурные условия имеют вид:

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= c_2 \cdot 1 + (-b_2)0 = c_2; \\ p_{y\nu} &= (-b_2)1 + a_2 \cdot 0 = -b_2. \end{aligned} \quad (10)$$

Используя контурные условия по границам (9)—(10), дадим эскиз распределения по контурам внешних нагрузок, отвечающих исследуемой функции напряжений  $\varphi_2 = \frac{a_2}{2} x^2 + b_2 xy + \frac{c_2}{2} y^2$  (рис. 20).

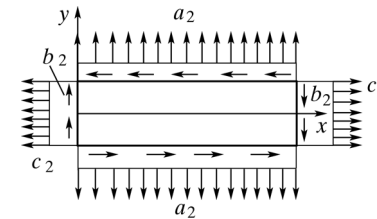


Рис. 20. Внешние нагрузки по контуру пластинки

По результатам исследования можно сделать вывод, что предложенная функция напряжений моделирует сложное напряженное состояние: растяжение по осям  $x$  и  $y$  с напряжениями  $\sigma_x = c_2$ ,  $\sigma_y = a_2$ , соответственно, а также сдвиг с касательными напряжениями  $\tau_{xy} = \tau_{yx} = -b_2$ .

**Пример 2[12].** На рис. 21 изображены три случая нагружения по кромкам пластинки.

Каждая из приведенных эпюр отвечает какой-либо из функций (5.12)—(5.15) (или частей этих функций). Выяснить, соответствуют ли приведенным функциям напряжений изображенные на рис. 21 эпюры нагрузок.

Решение при помощи целых полиномов применимо только в тех случаях, когда нагрузка по краям полосы непрерывно и монотонно возрастает или убывает по какому-либо алгебраическому закону.

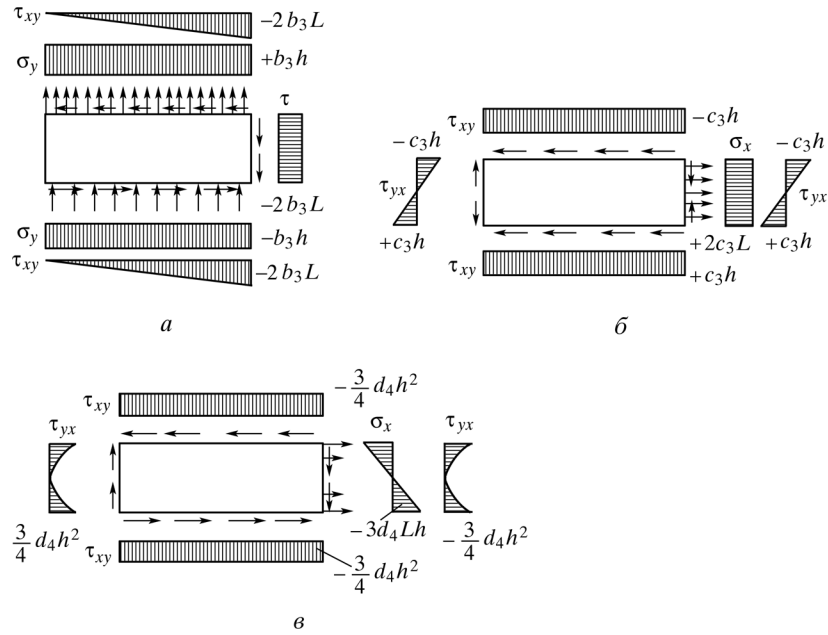


Рис. 21. Нагрузки по краям пластинки соответствуют функциям:  
 а —  $\varphi = b_3 x^2 y$ ; б —  $\varphi = c_3 x y^2$ ; в —  $\varphi = d_4 x y^3$

Если же нагрузка не является непрерывной или же закон ее не может быть представлен алгебраической функцией, решение можно искать в виде тригонометрического ряда.

**5.4.2. Решение плоской задачи в тригонометрических рядах**

В более сложных случаях расчета прямоугольной пластинки в качестве функции напряжений для плоской задачи  $\varphi(x, y)$  можно применять тригонометрические ряды. Исследуем для этого следующую тригонометрическую функцию:

$$\varphi = Y \cos \alpha x, \tag{a}$$

где  $Y$  — функция, зависящая только от координаты  $y$ ;

$$\alpha = n\pi/L; \tag{б}$$

$L$  — длина пластинки в направлении оси  $x$ .

Исследуем, при каких условиях функция  $\varphi(x, y)$  является бигармонической, т. е. удовлетворяет уравнению (5.11):

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Подсчитаем четвертые производные от функции  $\varphi(x, y)$ :

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \alpha^4 Y \cos \alpha x; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\alpha^2 Y'' \cos \alpha x; \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = Y^{IV} \cos \alpha x.$$

Подставляя эти производные в уравнение (5.11), получаем:

$$\alpha^4 Y \cos \alpha x - 2\alpha^2 Y'' \cos \alpha x + Y^{IV} \cos \alpha x = 0$$

или

$$\cos \alpha x (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) = 0.$$

Это уравнение обращается в тождество при любых значениях аргумента  $x$ , если  $Y(y)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения можно представить с помощью гиперболических функций в виде [13]:

$$Y = A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y. \tag{5.17}$$

Подставляя это выражение в (а), получим:

$$\varphi(x, y) = \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y). \tag{5.18}$$

Функция (104) бигармоническая и может быть использована для решения плоской задачи.

Аналогично можно показать, что функция

$$\varphi(x, y) = \sin \alpha x (A'_n \operatorname{ch} \alpha y + B'_n y \operatorname{ch} \alpha y + C'_n \operatorname{sh} \alpha y + D'_n y \operatorname{sh} \alpha y) \tag{5.19}$$

также является бигармонической и может быть применена для решения плоской задачи.

Если числу  $n$  в формуле (б) давать различные значения, то будут получаться новые функции, отличающиеся значениями параметра  $\alpha$  и постоянных  $A_n, B_n, C_n, D_n$ . Поэтому общее решение бигармонического уравнения (97) может быть представлено как сумма всех его

возможных частных решений, т. е. в виде бесконечного ряда из решений (104) и (105):

$$\varphi(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} [\cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y) + \sin \alpha x (A'_n \operatorname{ch} \alpha y + B'_n y \operatorname{ch} \alpha y + C'_n \operatorname{sh} \alpha y + D'_n y \operatorname{sh} \alpha y)]. \quad (5.20)$$

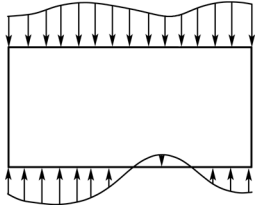


Рис. 22. Нагрузка по контуру пластинки

Постоянные  $A_n, B_n, \dots, C'_n, D'_n$  определяются из условий на контуре. Нагрузка по контуру (рис. 22) должна быть разложена в бесконечные тригонометрические ряды Фурье по синусам и косинусам и иметь вид:

$$q = A_0 + \sum_{n=1}^{n=\infty} A_n \cos \alpha x + \sum_{n=1}^{n=\infty} B_n \sin \alpha x. \quad (5.21)$$

Коэффициенты, входящие в формулу, зависят от порядковых номеров членов ряда и определяются согласно теории рядов.

Если некоторая функция разлагается в ряд в промежутке от  $-L$  до  $+L$ , то коэффициенты:

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} f(x) dx; \\ A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \cos \alpha x dx; \\ B_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} f(x) \sin \alpha x dx. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Функция, стоящая в подынтегральном выражении в нашем случае является заданной нагрузкой, которая зависит от  $x$ . Обозначим ее через  $q(x)$ . Таким образом, из (5.22):

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} q(x) dx; \\ A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} q(x) \cos \alpha x dx; \\ B_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} q(x) \sin \alpha x dx. \end{aligned} \quad (5.23)$$

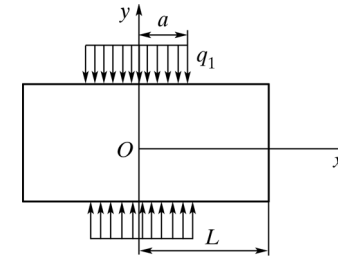


Рис. 23. Равномерно распределенная нагрузка на участке  $-a > x < +a$

Предположим, например, что равномерная нагрузка на пластинку длиной  $2L$  расположена сверху и снизу только на участке  $2a$  (рис. 23).

В этом случае в пределах от  $-L$  до  $-a$ , а также от  $+a$  до  $+L$  нагрузка  $q(x) = 0$ . В пределах от  $-a$  до  $+a$   $q(x) = q_1$ . Коэффициенты согласно (5.23):

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1}{2L} \int_{-L}^{+L} q(x) dx = \frac{q_1}{2L} \int_{-a}^{+a} dx = \frac{q_1 a}{2L}; \\ A_n &= \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} q(x) \cos \alpha x dx = \frac{q_1}{L} \int_{-a}^{+a} \cos \alpha x dx = \frac{2q_1}{\alpha L} \sin \alpha a. \end{aligned} \quad (5.24)$$

Члены  $B_n \sin \alpha x$  в выражении для нагрузки в данном случае отпадают вследствие симметрии:

$$B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{+L} q(x) \sin \alpha x dx = \frac{q_1}{L} \int_{-a}^{+a} \sin \alpha x dx = 0.$$

Таким образом, нагрузка, положим, по верхнему краю (напомним, что  $\alpha = n\pi/L$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots, n$ ) в соответствии с (5.21):

$$\begin{aligned} q &= 2q_1 \left[ \frac{a}{2L} + \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin \alpha x}{\alpha L} \cos \alpha x \right] = \\ &= 2q_1 \left[ \frac{a}{2L} + \frac{\sin\left(\frac{1\pi a}{L}\right)}{\frac{1\pi}{L}} \cos\left(\frac{1\pi x}{L}\right) + \frac{\sin\left(\frac{2\pi a}{L}\right)}{\frac{2\pi}{L}} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \dots \right] = \\ &= \frac{2q_1}{\pi} \left[ \frac{\pi a}{2L} + \sin\left(\frac{\pi a}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi a}{L}\right) + \frac{1}{2} \sin\left(\frac{2\pi a}{L}\right) \cos\left(\frac{2\pi a}{L}\right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

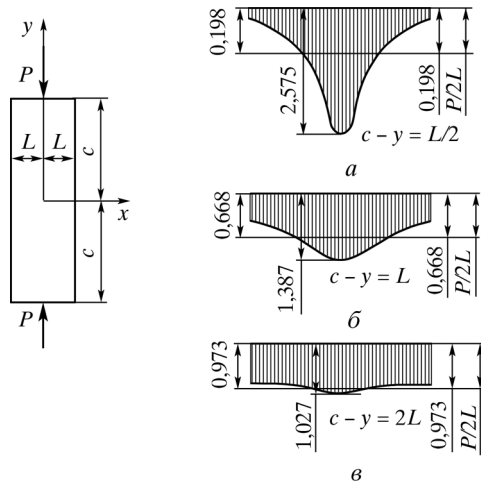


Рис. 24. Распределение напряжений в сечениях:  
 $a - c - y = L/2$ ;  $б - c - y = L$ ;  $в - c - y = 2L$

Такое же выражение будет и для нагрузки по нижнему краю. Вычисляя, легко убедиться, что при  $-a < x < +a$  нагрузка равна  $q_1$ , а на остальном протяжении — нулю.

Для того чтобы написать граничные условия, следует составить выражение напряжений, дифференцируя функцию  $\phi$  (формула (5.11)) соответственно формулам (5.10), и установить связь между напряжениями на контуре и внешней нагрузкой.

При помощи рядов могут быть найдены решения для очень многих задач.

Так, исследование случая, приведенного на рис. 24, приводит к заключению, что вблизи концов пластинки напряжения распределяются крайне неравномерно, но затем они выравниваются и на достаточно большом расстоянии становятся почти равномерными [14]. Напряжения  $\sigma_y$  при таком нагружении определяются по формуле [14]:

$$\sigma_y = -\frac{P}{2L} - \frac{P}{L} \sum_{n=1}^{\infty} \left[ \frac{n\pi}{L}(c-y) + 1 \right] e^{\frac{n\pi(y-c)}{L}} \cos \frac{n\pi x}{L}.$$

Распределение напряжений в средних сечениях мало зависит от того, каким способом осуществляется передача сжимающих сил по концам. Это служит лишним подтверждением правильности принци-

па Сен-Венана. Применение тригонометрических функций все же не является универсальным методом, так как далеко не всегда удается удовлетворить граничным условиям по боковым границам.

### 5.4.3. Понятие о методе конечных разностей (методе сеток) для решения плоской задачи

При поиске количественного описания физического явления обычно вводят в рассмотрение некоторую систему обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными, справедливую в определенной области, и налагают на эту систему подходящие краевые и начальные условия. На этой стадии математическая модель замкнута, и для практических применений требуется только найти решение для конкретного множества числовых данных. Здесь, однако, возникают основные трудности, так как точному решению существующими математическими методами поддаются лишь уравнения самого простого вида внутри геометрически тривиальных границ. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами являются одним из немногих примеров, для которых имеются стандартные процедуры решения, но даже здесь при большом числе независимых переменных встречаются значительные трудности.

Чтобы преодолеть эти трудности и иметь возможность воспользоваться ПЭВМ, необходимо преобразовать задачу к чисто алгебраической форме, включающей только основные арифметические операции. Для достижения этой цели могут быть использованы различные виды дискретизации непрерывной задачи, определенной дифференциальными уравнениями. При этом бесконечное множество чисел, представляющих неизвестную функцию или функции, заменяется конечным числом неизвестных параметров, и для этого процесса, вообще говоря, требуется некоторая форма аппроксимации. Среди различных возможных видов дискретизации одним из простейших является процесс перехода к конечным разностям. Рассмотрим основные понятия этого процесса, что позволит сформулировать суть метода.

Точное решение бигармонического уравнения (5.11) плоской задачи во многих случаях оказывается очень сложным. Для его решения можно применить приближенный метод конечных разностей. Его еще часто называют конечно-разностным, или методом сеток [15].



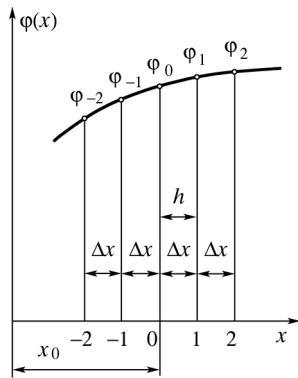


Рис. 25. К определению производных функции  $\varphi(x)$

которых отличаются на малую величину  $\Delta x$ . По определению производная функции  $\varphi(x)$  в точке 0 равна:

$$\varphi'_0 = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\varphi_1 - \varphi_{-1}}{2\Delta x}.$$

Если интервал между точками  $h = \Delta x$  мал, то производную в точке 0 приближенно можно представить так<sup>1</sup>:

$$\varphi'_0 = \frac{1}{2h}(\varphi_1 - \varphi_{-1}). \quad (a)$$

Аналогично можно представить производную в точке 1:

$$\varphi'_1 = \frac{1}{2h}(\varphi_2 - \varphi_0)$$

и в точке -1:

$$\varphi'_{-1} = \frac{1}{2h}(\varphi_0 - \varphi_{-2}).$$

Для промежуточных точек  $(+1/2)$  и  $(-1/2)$  первые производные по аналогии с (a) можно записать так:

$$\varphi'_{1/2} = \frac{1}{h}(\varphi_1 - \varphi_0); \quad \varphi'_{-1/2} = \frac{1}{h}(\varphi_0 - \varphi_{-1}). \quad (б)$$

<sup>1</sup> Во всех полученных ниже формулах знак равенства означает  $\approx$ .

Сравнивая (a) и (б), замечаем, что для промежуточных точек  $(+1/2)$  и  $(-1/2)$  погрешность при вычислении производных уменьшается в два раза.

Тогда вторая производная для точки 0 будет иметь следующий вид, если выразить ее через разности первых производных в точках  $(+1/2)$  и  $(-1/2)$ :

$$\varphi''_0 = (\varphi')'_0 = \frac{1}{h}(\varphi'_{1/2} - \varphi'_{-1/2}) = \frac{1}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_{-1}). \quad (в)$$

Третью производную в точке 0 представим через разности вторых производных в двух соседних точках  $(+1)$  и  $(-1)$ :

$$\varphi'''_0 = \frac{1}{2h}(\varphi''_1 - \varphi''_{-1}),$$

где в соответствии с (в):

$$\varphi''_1 = \frac{1}{h^2}(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_0); \quad \varphi''_{-1} = \frac{1}{h^2}(\varphi_0 - 2\varphi_{-1} + \varphi_{-2}).$$

После подстановки значений  $\varphi''_1$  и  $\varphi''_{-1}$  имеем:

$$\varphi'''_0 = \frac{1}{2h^3}(\varphi_2 - 2\varphi_1 + 2\varphi_{-1} - \varphi_{-2}).$$

Для получения выражения четвертой производной в точке 0 сначала найдем третьи производные в промежуточных точках  $(+1/2)$  и  $(-1/2)$ :

$$\begin{aligned} \varphi'''_{1/2} &= \frac{1}{h}(\varphi''_1 - \varphi''_0) = \frac{1}{h^3}[(\varphi_2 - 2\varphi_1 + \varphi_0) - (\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_{-1})] = \\ &= \frac{1}{h^3}(\varphi_2 - 3\varphi_1 + 3\varphi_0 - \varphi_{-1}); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varphi'''_{-1/2} &= \frac{1}{h}(\varphi''_0 - \varphi''_{-1}) = \frac{1}{h^3}[(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_{-1}) - (\varphi_0 - 2\varphi_{-1} + \varphi_{-2})] = \\ &= \frac{1}{h^3}(\varphi_1 - 3\varphi_0 + 3\varphi_{-1} - \varphi_{-2}). \end{aligned}$$

Четвертую производную в точке 0 представим через разности третьих производных в точках  $(+1/2)$  и  $(-1/2)$ :

$$\varphi^{IV}_0 = \frac{1}{h}(\varphi'''_{1/2} - \varphi'''_{-1/2}) = \frac{1}{h^4}(\varphi_2 - 4\varphi_1 + 6\varphi_0 - 4\varphi_{-1} + \varphi_{-2}).$$

Таким образом, мы получили для некоторой точки 0 выражения для первых четырех производных, представленных через значения функции  $\varphi(x)$  в соседних точках. Расстояние между соседними точками (шаг аргумента) принято равным  $h$ . Особенность полученных выражений для производных в том, что они получены через так называемые центральные разности — через разности значений функции  $\varphi(x)$  или ее производных справа и слева от точки 0.

Выпишем сводку полученных значений производных через конечные разности

$$\left. \begin{aligned} \varphi'_0 &= \frac{1}{2h}(\varphi_1 - \varphi_{-1}); & \varphi''_0 &= \frac{1}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_{-1}); \\ \varphi'''_0 &= \frac{1}{2h^3}(\varphi_2 - 2\varphi_1 + 2\varphi_{-1} - \varphi_{-2}); \\ \varphi^{IV}_0 &= \frac{1}{h^4}(\varphi_2 - 4\varphi_1 + 6\varphi_0 - 4\varphi_{-1} + \varphi_{-2}). \end{aligned} \right\} \quad (5.25)$$

Если функция зависит не от одной, а от двух переменных, то частные производные этой функции могут быть получены так же, как это было показано выше.

Пусть  $\varphi = \varphi(x, y)$  является функцией двух переменных. Нанесем на область  $Oklm$  вблизи точки 0, для которой определяются производные, сетку с шагом  $h$  в направлении осей  $x$  и  $y$  (рис. 26). В общем случае шаги сетки по осям  $x$  и  $y$  могут быть различными.

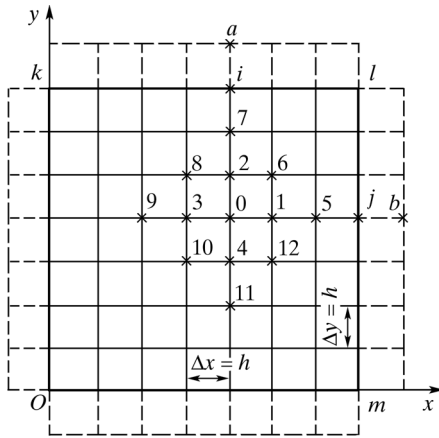


Рис. 26. Пластика с нанесенными на нее равномерной сеткой и нумерацией узлов вокруг точки 0 (против хода часовой стрелки)

Первые и вторые производные в точке 0 по одной из координат легко составить по аналогии с формулами (5.25):

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 &= \frac{1}{2h}(\varphi_1 - \varphi_3); \\ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)_0 &= \frac{1}{2h}(\varphi_2 - \varphi_4); \\ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 &= \frac{1}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3); \\ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right)_0 &= \frac{1}{h^2}(\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4). \end{aligned} \right\} \quad (z)$$

Вторую смешанную производную в точке 0 найдем, применив дважды формулу (z):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} \right)_0 &= \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_0 = \frac{1}{2h} \left[ \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_2 - \left( \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)_4 \right] = \\ &= \frac{1}{2h} \left[ \frac{1}{2h}(\varphi_6 - \varphi_8) - \frac{1}{2h}(\varphi_{12} - \varphi_{10}) \right] = \frac{1}{4h^2}(\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}). \end{aligned} \quad (d)$$

Четвертые частные производные по одной из координат в точке 0 составим согласно формуле (5.25):

$$\left. \begin{aligned} \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} \right)_0 &= \frac{1}{h^4}(\varphi_5 - 4\varphi_1 + 6\varphi_0 - 4\varphi_3 + \varphi_9); \\ \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} \right)_0 &= \frac{1}{h^4}(\varphi_7 - 4\varphi_2 + 6\varphi_0 - 4\varphi_4 + \varphi_{11}). \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

Четвертую смешанную производную найдем, применив дважды формулу (d):

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} \right)_0 &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 = \frac{1}{h^2} \left[ \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_2 - 2 \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_0 + \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \right)_4 \right] = \\ &= \frac{1}{h^2} \left[ \frac{1}{h^2}(\varphi_0 - 2\varphi_2 + \varphi_8) - \frac{2}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3) + \frac{1}{h^2}(\varphi_{12} - 2\varphi_4 + \varphi_{10}) \right] = \\ &= \frac{1}{h^4} [4\varphi_0 - 2(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + (\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12})]. \end{aligned}$$

Связь между функциями в тринадцати рассматриваемых точках установим с помощью бигармонического уравнения плоской задачи (5.11). В точке 0 оно принимает вид:

$$\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_0 = 0.$$

Подставляя в бигармоническое уравнение четвертые производные из формул (e) и (ж), получаем<sup>1</sup>:

$$20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + (\varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_{11}) = 0. \quad (5.26)$$

Напряжения в точке 0 найдем с помощью формул (5.10) без учета объемных сил:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}\right)_0 = \frac{1}{h^2}(\varphi_2 - 2\varphi_0 + \varphi_4); \quad \sigma_y = \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}\right)_0 = \\ &= \frac{1}{h^2}(\varphi_1 - 2\varphi_0 + \varphi_3); \\ \tau_{xy} &= -\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}\right)_0 = -\frac{1}{4h^2}(\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}). \end{aligned} \right\} \quad (5.27)$$

Уравнение вида (5.26) можно составить для каждого из узлов внутри контура. При этом в часть уравнений в соответствии с формулами (e) и (ж) войдут и значения функции  $\varphi$  на контуре и для узлов, расположенных на расстоянии одного шага сетки вне контура. На рис. 26 внеконтурная сетка показана штриховыми линиями.

Значения функции  $\varphi$  на контуре и вне контура находят из граничных условий. Таким образом, неизвестных значений функции окажется столько, сколько узлов внутри контура, но столько же можно составить уравнений вида (5.26). Следовательно, для решения задачи уравнений достаточно.

Однако, когда уравнения типа (5.26) составляются для внутриконтурных точек, лежащих, например, на расстоянии  $h$  от границы

<sup>1</sup> Дифференциальное уравнение Мориса Леви взято в качестве примера решения методом конечных разностей. В конструировании ДВС при расчете смазочного слоя подшипников скольжения этим методом решается, например, уравнение Рейнольдса [16] с заданными граничными условиями.

контура  $kl$  (точка 7), то в уравнение войдут значения функции на контуре (точка  $i$ ) и вне его (точка  $a$ , см. рис. 26). Аналогично при составлении уравнения для точки 5 необходимо определить функции напряжений в точках  $j$  и  $b$ .

Если знать на контуре значения производной по перпендикулярному к нему направлению, то значения функции  $\varphi$  законтурных точек могут быть выражены через значения функции  $\varphi$  ближайших внутриконтурных точек на основе зависимостей (e).

Для верхнего края (рис. 27, а):

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_i = \frac{1}{2h}(\varphi_a - \varphi_c).$$



Рис. 27. К определению функции напряжений в законтурных точках

Отсюда для законтурной точки  $a$  верхнего края получим:

$$\varphi_a = \varphi_c + 2h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_i. \quad (5.28)$$

Для законтурной точки  $c$  нижнего края (рис. 27, б):

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_i = \frac{1}{2h}(\varphi_a - \varphi_c).$$

Отсюда

$$\varphi_c = \varphi_a - 2h \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)_i. \quad (5.29)$$

Для законтурной точки  $d$  левого края (рис. 27, в):

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{2h}(\varphi_b - \varphi_d).$$

Отсюда:

$$\varphi_d = \varphi_b - 2h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_i. \quad (5.30)$$

Для законтурной точки  $b$  правого края (рис. 27, г):

$$\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_i = \frac{1}{2h}(\varphi_b - \varphi_d).$$

Отсюда:

$$\varphi_b = \varphi_d + 2h\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)_i. \quad (5.31)$$

Точность полученных результатов решения задачи зависит от размеров шага  $h$ . По мере уменьшения шага точность возрастает, но одновременно возрастает и число уравнений, которые нужно решать для определения функции напряжений в узловых точках (или любой другой функции). При замене производных конечными центральными разностями ошибка пропорциональна  $h^2$ . Поэтому точность вычисления быстро возрастает с уменьшением шага. Вместе с тем примерно пропорционально  $1/h^2$  возрастает число уравнений.

Современные ПЭВМ позволяют без особого труда решать большие системы линейных алгебраических уравнений. Для их решения имеются стандартные программы. Поэтому метод конечных разностей (метод сеток) получил в настоящее время широкое распространение для решения многих прикладных задач [17].

Для сокращения количества уравнений, подлежащих решению, целесообразно использовать условия симметрии, если они имеют место. Рассмотрим в качестве примера случай расчета балки-стенки, которой называют очень высокую и узкую балку, нагруженную по внешней стороне силами, лежащими в одной плоскости.

### 5.5. Расчет балок-стенок

Пусть на каждой стороне балки-стенки приложены распределенные перпендикулярные  $q_n$  и касательные  $q_t$  к стороне нагрузки (рис. 28, а).

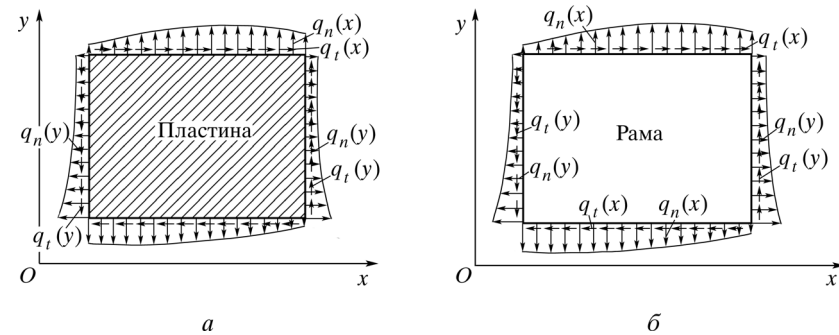


Рис. 28. Балка-стенка (а) с приложенной внешней нагрузкой и заменяющая ее рама (б)

Их направления совпадают с положительными направлениями нормальных и касательных напряжений на каждой стороне балки-стенки (см. п. 1.2).

Рассмотрим верхнюю сторону балки-стенки (см. рис. 28, а), на которой координата  $y$  — величина постоянная. Для нее граничные условия на  $i$ -м участке можно представить в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{yi} &= \left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x^2}\right) = q_{ni}(x); \\ \tau_{xyi} &= -\left(\frac{\partial^2\varphi_i}{\partial x\partial y}\right) = q_{ti}(x). \end{aligned} \right\} \quad (5.32)$$

Проинтегрировав уравнения (5.32), в общем виде получим:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \int dx \int \sigma_y(x, y) dx + x f_1(y) + f_2(y); \\ \frac{\partial\varphi(x, y)}{\partial y} &= -\int \tau_{xy}(x, y) dx + f_3(y). \end{aligned} \quad (a)$$

Так как на верхней стороне пластины координата постоянна, в соответствии с (5.32) и (а) для произвольной  $i$ -й точки получаем:

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(x, y) &= \int dx \int q_{ni}(x) dx + A_i x + B_i; \\ \frac{\partial\varphi_i(x, y)}{\partial x} &= \int q_{ti}(x) dx + A_i; \quad \frac{\partial\varphi_i(x, y)}{\partial y} = -\int q_{ti}(x) dx + C_i. \end{aligned} \right\} \quad (5.33)$$

Выражения (5.33) справедливы и для нижней стороны.

Аналогично для боковых сторон (на которых координата  $x$  — величина постоянная):

$$\left. \begin{aligned} \varphi_i(x, y) &= \int dx \int q_{ni}(y) dy + A_i y + B_i; \\ \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial y} &= \int q_{ni}(y) dy + A_i; \quad \frac{\partial \varphi_i(x, y)}{\partial x} = -\int q_{ii}(y) dy + C_i. \end{aligned} \right\} \quad (5.34)$$

Поскольку для вычисления напряжений используются вторые производные, к функции  $\varphi$  в трех любых точках могут быть назначены произвольно добавлением  $\Delta\varphi = ax + by + c$ .

Для определения значений функции на контуре, а также производных  $\partial\varphi/\partial x$  и  $\partial\varphi/\partial y$  на границе балки-стенки пользуются рамной аналогией, разработанной А.П. Сеницыным, П.Л. Пастернаком, П.М. Варваком [17]. В этом случае  $\varphi$  для контурных точек получается непосредственно, а для законтурных точек — через  $\varphi$  внутриконтурных точек.

Изобразим контур балки-стенки в виде рамы с той же действующей нагрузкой (рис. 28, б). Составим по каждой стороне балки-стенки граничные условия, а для каждого соответствующего стержня рамы — дифференциальные зависимости продольных сил и изгибающих моментов от нагрузки и сопоставим эти уравнения с граничными условиями.

**Верхняя сторона:**

граничные условия для балки-стенки (в произвольной точке  $i$ ):

$$\sigma_{yi} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial x^2} = \frac{d^2 \varphi_i}{dx^2} = q_{ni}(x); \quad (б)$$

$$\tau_{xyi} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) = -\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) = q_{ii}(x). \quad (в)$$

Рассмотрим дифференциальные зависимости для выделенного в верхней стороне рамы элементарного участка стержня (рис. 29, а). Спроектировав все силы, действующие на элементарный участок стержня на оси  $x$  и  $y$ , а также взяв сумму моментов всех сил относительно точки  $A$  (см. рис. 29, а), получим следующую систему уравнений:

$$\sum X = 0; \quad -N + N + dN + q_{ii}(x)dx = 0; \quad (з)$$

$$\sum Y = 0; \quad Q - Q - dQ + q_{ni}(x)dx = 0; \quad (д)$$

$$\sum M_A = 0; \quad -M + M + dM - (Q + dQ)dx - q_{ni}(x)dx \cdot dx/2 = 0. \quad (е)$$

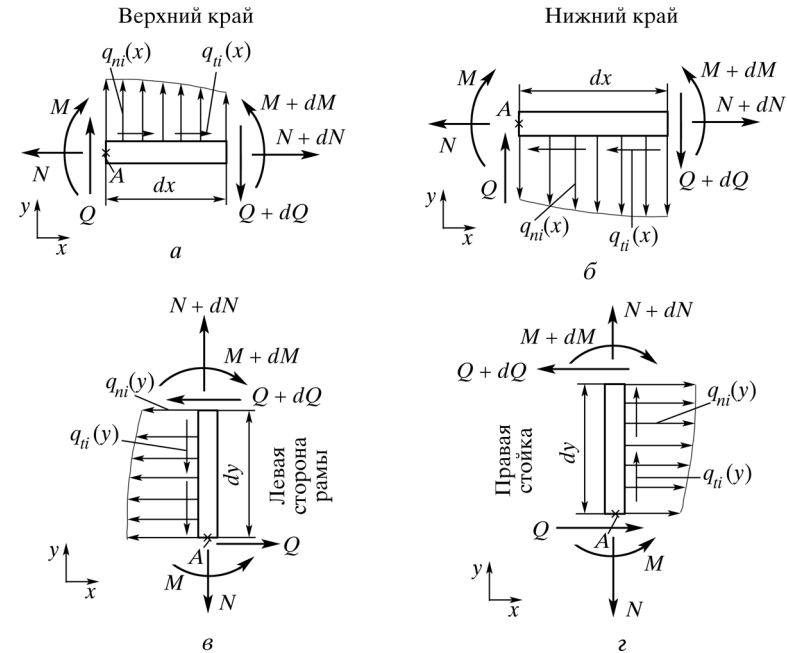


Рис. 29. К выводу дифференциальных зависимостей для верхнего края (а), нижнего — (б), левой (в) и правой (з) стойки рамы

В соответствии с уравнением (з) получим:

$$dN/dx = -q_{ii}(x). \quad (ж)$$

Сравнивая левые части равенств (в) и (ж), запишем:

На контуре	Дифференциальная зависимость
$\frac{d}{dx} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right) = -q_{ii}(x).$	$\frac{dN}{dx} = -q_{ii}(x)$

Сопоставляя граничные условия на контуре балки-стенки и дифференциальные зависимости для верхнего участка стержня рамы, можно установить, что для произвольной точки  $i$ :

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)_{\text{на контуре}} = N_i \text{ (в раме)}. \quad (5.35)$$

Из уравнений (д) и (е), отбросив бесконечно малые второго порядка малости, получим:

$$\frac{dQ}{dx} = q_{ni}(x) \text{ и } Q = \frac{dM}{dx}.$$

Откуда

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q_{ni}(x). \quad (3)$$

Сравнивая (б) и (з), получим для произвольной точки  $i$  верхнего края:

$$\varphi_i \text{ (на контуре)} = M_i \text{ (в раме)}. \quad (5.36)$$

Следовательно, значения функции  $\varphi$  на контуре балки-стенки определяются изгибающими моментами в раме, стороны которой совпадают с контуром балки-стенки, а частная по перпендикулярному к контуру направлению определяется продольной силой в раме. В этом состоит рамная аналогия. Такие же рассуждения проводим и для остальных сторон балки-стенки.

#### Нижняя сторона:

граничные условия для балки-стенки (в произвольной точке  $i$ ) определяем уравнениями (б) и (в).

Рассмотрим дифференциальные зависимости для выделенного (также в произвольной точке  $i$ ) в нижней стороне рамы элементарного участка стержня (рис. 29, б). После рассмотрения условий равновесия аналогично (з)—(е) получим:

$$\frac{dN}{dx} = q_{ii}(x); \quad (u)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q_{ni}(x). \quad (к)$$

Сопоставляя уравнения (б) и (к), а также (в) и (л), получим для произвольной точки нижнего края:

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial y} \right)_{\text{на контуре}} = -N_i \text{ (в раме)} \quad (5.37)$$

и

$$\varphi_i \text{ (на контуре)} = -M_i \text{ (в раме)}. \quad (5.38)$$

#### Левая боковая сторона:

граничные условия для балки-стенки (в произвольной точке  $i$ )

$$\sigma_{xi} = \frac{\partial^2 \varphi_i}{\partial y^2} = \frac{d^2 \varphi_i}{dy^2} = q_{ni}(y); \quad (л)$$

$$\tau_{yxi} = -\frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) = -\frac{d}{dy} \left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right) = q_{ii}(y). \quad (м)$$

Рассмотрим дифференциальные зависимости для выделенного (также в произвольной точке  $i$ ) в левой боковой стороне рамы элементарного участка стержня (рис. 29, в). После рассмотрения условий равновесия аналогично (з)—(е) получим:

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = -q_{ni}(y); \quad (н)$$

$$\frac{dN}{dy} = q_{ii}(y). \quad (о)$$

Сопоставляя уравнения (л) и (м), а также (н) и (о), получим для произвольной точки для левой боковой стороны:

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)_{\text{на контуре}} = -N_i \text{ (в раме)} \quad (5.39)$$

и

$$\varphi_i \text{ (на контуре)} = -M_i \text{ (в раме)}. \quad (5.40)$$

#### Правая боковая сторона:

граничные условия для балки-стенки (в произвольной точке  $i$ ) описываются уравнениями (л) и (м).

Рассмотрим дифференциальные зависимости для выделенного (также в произвольной точке  $i$ ) в правой боковой стороне рамы элементарного участка стержня (рис. 29, з). После рассмотрения условий равновесия аналогично (з)—(е) получим

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q_{ni}(y), \quad (п)$$

$$\frac{dN}{dy} = -q_{ii}(y). \quad (р)$$



Сопоставляя уравнения (л) и (м), а также (н) и (р), получим для произвольной точки для правой боковой стороны:

$$\left( \frac{\partial \varphi_i}{\partial x} \right)_{\text{на контуре}} = N_i \text{ (в раме)} \quad (5.41)$$

и

$$\varphi_i \text{ (на контуре)} = \bar{M}_i \text{ (в раме)}. \quad (5.42)$$

Из приведенных сопоставлений следует, что если ординаты эпюры изгибающих моментов отложены на сжатой стороне стержня (как это принято для машиностроителей), т. е. ординаты располагаются вне контура рамы (рис. 30), то

$$\varphi_i \text{ (на контуре)} = M_i \text{ (в раме)}. \quad (5.43)$$

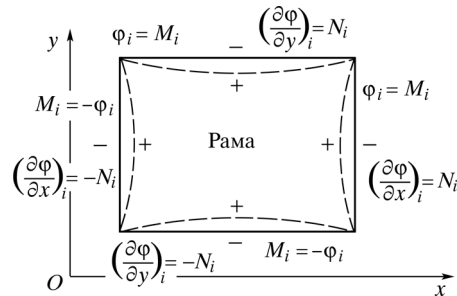


Рис. 30. Граничные условия на контуре балки-стенки, полученные из стержневой аналогии

На рис. 30 знаком плюс отмечены растянутые волокна стержней, составляющих раму, а знаком минус — сжатые (ординаты эпюры располагаются вне контура рамы). Штриховыми линиями условно показана деформация рамы под действием внешней нагрузки. Знак изгибающего момента определяется знаком кривизны упругой линии стержня, которую он создает в заданной системе координат  $xOy$ .

Поэтому слева и снизу  $M_i < 0$ , на верхнем стержне и справа  $M_i > 0$ . Таким образом для всех граничных условий приходим к условию (5.43). Поскольку  $\varphi$  есть непрерывная функция, к которой может быть добавлена некоторая функция  $\Delta\varphi = Ax + By + C$  (поскольку эта добавка не повлияет на величину напряжений), в некоторых точках функции напряжений можно назначать произвольно.

При положительной (растягивающей) продольной силе  $N$  (см. рис. 30) сопоставление формул (5.35), (5.37), (5.39), (5.41) дает:

для верхнего края пластины:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = N;$$

для нижнего края пластины:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y} = -N;$$

для левого края пластины:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = -N;$$

для правого края пластины:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = N.$$

Формулы (5.28)—(5.31) (см. рис. 27) можно представить так:

для верхнего края пластины:

$$\varphi_a = \varphi_c + 2hN_{\text{верх.б}}; \quad (5.44)$$

для нижнего края:

$$\varphi_c = \varphi_a + 2hN_{\text{ниж.б}}; \quad (5.45)$$

для левого края:

$$\varphi_d = \varphi_b + 2hN_{\text{лев.ст}}; \quad (5.46)$$

для правого края:

$$\varphi_b = \varphi_d + 2hN_{\text{прав.ст}}. \quad (5.47)$$

Из формул (5.44)—(5.47) следует, что для определения  $\varphi$  в законтурных точках необходимо знать в условной раме эпюру продольных сил  $N$  (верхней и нижней балках, левой и правой стойках).

Таким образом, после нахождения значений функции напряжений  $\varphi$  для контурных и законтурных точек по эпюрам изгибающих моментов в условной раме  $M$  и продольных сил  $N$  неизвестными будут только значения  $\varphi$  для внутриконтурных точек. Для их определения можно составить достаточное число уравнений (5.26).

Ниже приведем пример расчета балки-стенки методом сеток. В приложении даны примеры расчета замкнутых рам, к которым приводятся балки-стенки.

### 5.6. Порядок расчета балки-стенки методом конечных разностей

Для расчета балок-стенок методом конечных разностей или методом сеток можно рекомендовать следующий порядок.

1. Заменяем контур балки-стенки в виде рамы (замкнутого контура) с той же действующей нагрузкой. Выбираем основную систему для данного замкнутого контура и, применяя метод сил, раскрываем статическую неопределимость рамы (см. п. 5.6). Строим в заданной системе суммарные эпюры изгибающих моментов, продольных и поперечных сил по общеизвестной методике. Последняя эпюра (поперечных сил) строится для проверки правильности построения эпюры изгибающих моментов (ввиду их дифференциально-интегральной зависимости —  $Q = dM/dx$ ). Заметим, что обычно оси координат совмещают с осями стержней, составляющих раму или замкнутый контур. В нашем случае координатная система остается неизменной, как она была выбрана для балки-стенки.

2. Нанесем на пластину (балку-стенку) квадратную сетку<sup>1</sup> с заранее выбранным шагом. Назначая шаг сетки, необходимо иметь в виду, что при уменьшении шага сетки точность решения повышается, но одновременно с этим растёт громоздкость решения.

Пронумеруем узлы сетки с учетом свойств прямой или обратной симметрии (ориентируясь на эпюру изгибающих моментов).

3. Используя ординаты эпюры изгибающих моментов для замкнутого контура (рамы), определяем функции напряжений  $\varphi_i$  по контуру балки-стенки. Для этого используем зависимости (5.36), (5.38), (5.40), (5.42) или рекомендации рис. 30 и формулы (5.43). Напомним, что ординаты эпюры изгибающих моментов откладываются на сжатой стороне стержней.

4. Используя эпюру продольных сил  $N$  в стержнях замкнутого контура и зависимости (5.35), (5.37), (5.39) и (5.41) или при положи-

<sup>1</sup> В пособии рассматривается только равномерная по осям  $x$  и  $y$  сетка. В случае неравномерной сетки решение немного усложняется (см., например [18, 19]).

тельном значении  $N$  (5.44)—(5.47), выражаем функции напряжений в законтурных точках через функции внутри контура и частные производные по соответствующему направлению.

5. Для составления разностных уравнений используем шаблон (рис. 31). После этого уравнение Мориса Леви в нулевой точке

$$\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4}\right)_0 + 2\left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4}\right)_0 = 0$$

в соответствии с (112) записывается в виде:

$$20\varphi_0 - 8(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4) + 2(\varphi_6 + \varphi_8 + \varphi_{10} + \varphi_{12}) + (\varphi_5 + \varphi_7 + \varphi_9 + \varphi_{11}) = 0.$$

Составим разностные уравнения для всех внутриконтурных точек (число уравнений в точности равно числу внутриконтурных точек).

6. Решив полученную систему алгебраических линейных уравнений, находим значения функции напряжений  $\varphi_i$  в точках внутри контура (на контуре и в законтурных точках  $\varphi_i$  определены в п. 3 и 4).

7. Для проверки правильности решения необходимо подставить найденные значения функции напряжений  $\varphi_i$  в исходные алгебраические уравнения (п. 5). Погрешность в каждом из уравнений между положительными и отрицательными значениями не должна превышать 5%.

8. Используя шаблон (см. рис. 31), определяем нормальные и касательные напряжения в окрестностях всех узловых точек в соответствии с зависимостями (5.27).

9. Строим распределение напряжений по линиям сетки, используя вычисленные в п. 8 значения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  в узловых точках.

10. Из условия равновесия проверяем правильность построения эпюр  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ . Для удобства составления условий равновесия эпюра внутренних сил, действующих по нелинейному закону (эпюра криволинейная), заменяется равновеликими им (по площади) силами, равномерно распределенными по каждому участку.

**Пример 3.** Определить методом конечных разностей напряженное состояние в пластинке толщиной  $b = 1$ , загруженную, как показано на

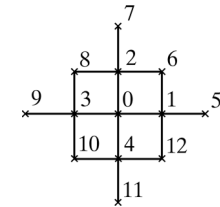


Рис. 31. Шаблон для составления разностных уравнений

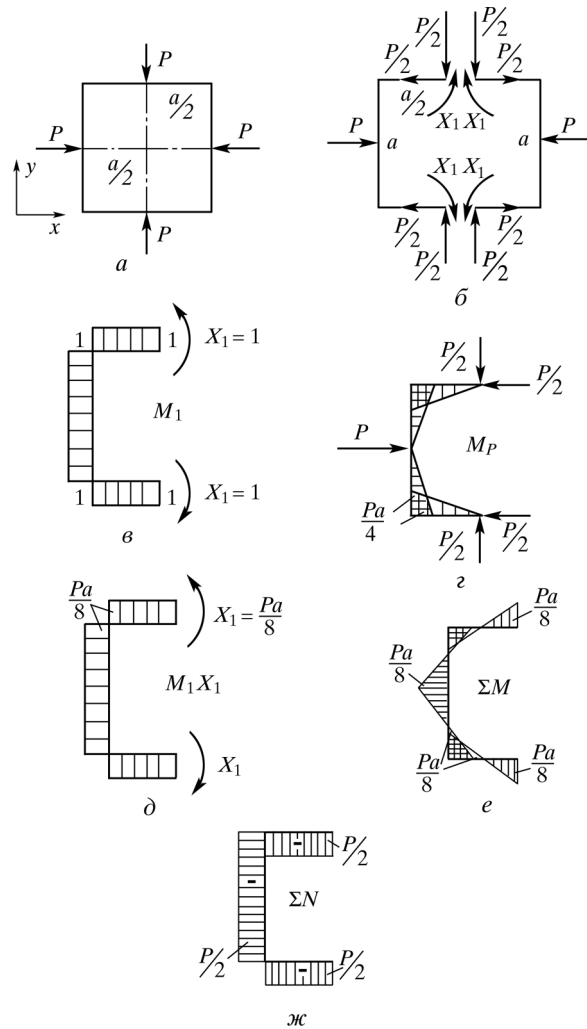


Рис. 32. Расчет рамы, равной по контуру балке-стенке

рис. 32. Решение проведем в общем виде, придерживаясь предложенного алгоритма решения таких задач.

1. Заменяем контур пластинки (рис. 32, а) рамой с той же приложенной нагрузкой. Поскольку рама имеет четыре оси симметрии, основную систему выбираем путем сквозного разреза по одной из линий симметрии конструкции и нагрузки (вертикальной).

На рис. 32, б показана основная система, эквивалентная заданной — в сечении разреза приложены внутренние силовые факторы, которые при этом могут возникнуть.

Продольные силы  $N = P/2$  определяются из условия равновесия половины рамы. Поперечные силы отсутствуют ввиду симметрии<sup>1</sup>.

Для рассматриваемой основной системы запишем каноническое уравнение метода сил

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1,P} = 0. \tag{а}$$

Физический смысл полученного уравнения заключается в том, что в случае приложения в сечении разреза неизвестных пока моментов  $X_1$  плоскость разреза не будет разорвана.

Для основной системы на рис. 32, в построена эпюра изгибающих моментов от единичной силы  $X_1 = 1$   $M_1$ , а на рис. 32, г — от заданной нагрузки  $M_P$  (ее еще называют грузовой).

Используя построенные на рис. 32, в и г эпюры, по правилу Верещагина определим коэффициенты  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1,P}$  в каноническом уравнении (а):

$$EI\delta_{11} = 1 \cdot \frac{a}{2} \cdot 1 \cdot 2 + 1 \cdot a \cdot 1 = 2a; \quad EI\Delta_{1,P} = -4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{Pa}{4} \cdot \frac{a}{2} = -\frac{Pa^2}{4}.$$

Подставив полученные значения  $\delta_{11}$  и  $\Delta_{1,P}$  в уравнение (а), получим:

$$2aX_1 - \frac{Pa^2}{4} = 0.$$

Откуда

$$X_1 = \frac{Pa}{8}.$$

После определения неизвестного значения  $X_1$  строим эпюру  $M_1 X_1$  (рис. 32, д). Суммарная эпюра изгибающих моментов для заданной системы (см. рис. 32, е) может быть построена суммированием ординат эпюр  $M_P$  и  $M_1 X_1$

$$\sum M = M_P + M_1 X_1.$$

<sup>1</sup> Для проверки можно выбрать основную систему путем разреза в одном сечении рамы (например, внизу) и приложить все три внутренних силовых фактора. После составления канонических уравнений и определения коэффициентов при неизвестных метода сил получим: поперечные силы  $Q = 0$ .

Суммарная эпюра изгибающих моментов  $\sum M$  построена для половины замкнутого контура (для второй половины она будет симметричной относительно вертикальной оси).

Эпюра продольных сил построена на рис. 32, ж.

2. Нанесем на пластину (балку-стенку) квадратную сетку с шагом  $a/4$  (рис. 33, а). Для определения функции напряжений в узловых точках контура, а также в законтурных точках на рис. 33, б приведена эпюра  $\sum M$ , а на рис. 33, в — суммарная эпюра продольных сил  $\sum N$ .

Пронумеруем узлы сетки с учетом свойств прямой симметрии (эпюра моментов симметрична относительно четырех осей).

3. Используя ординаты эпюры изгибающих моментов для замкнутого контура, определяем функции напряжений  $\varphi_i$  по контуру бал-

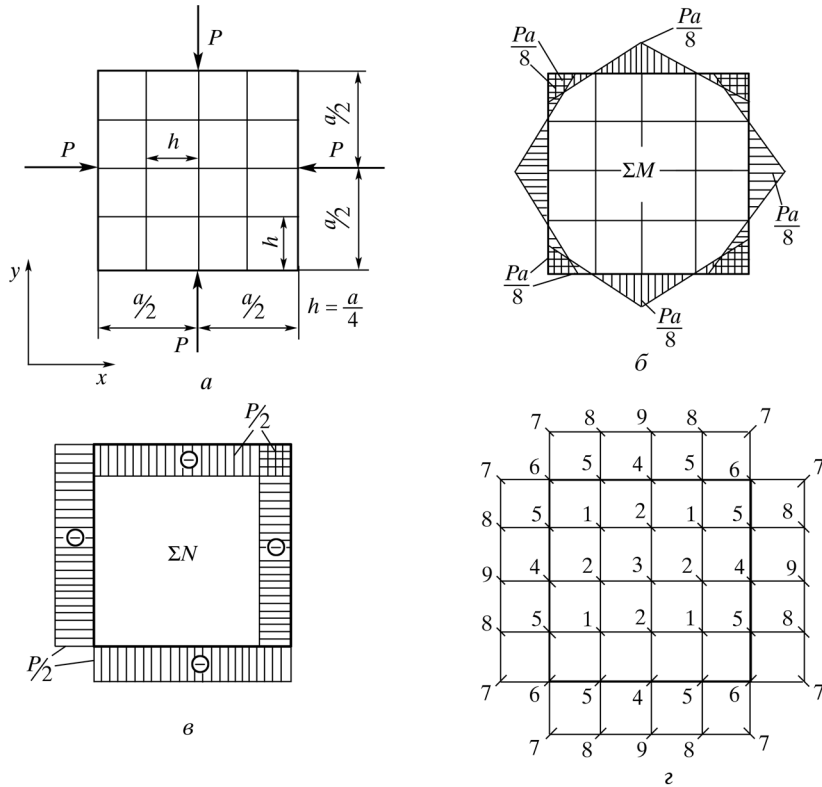


Рис. 33. Пластина с нанесенной сеткой (а) и обозначением узловых точек (г), эпюры моментов (б) и продольных сил (в) после замены контура пластинки рамой

ки-стенки. Для этого используем зависимости (5.36), (5.38), (5.40), (5.42) или рекомендации рис. 30 и формулы (5.43). Напомним, что ординаты эпюры изгибающих моментов откладываются на сжатой стороне стержней.

Из эпюр (см. рис. 33, б) следует, что в узловых точках контура функция напряжений имеет следующие значения:

$$\varphi_4 = \frac{Pa}{8}; \quad \varphi_5 = 0; \quad \varphi_6 = -\frac{Pa}{8}. \tag{б}$$

4. Используя эпюру продольных сил  $N$  (см. рис. 33, в) для замкнутого контура и зависимости (5.35), (5.37), (5.39) и (5.41), выражаем функции напряжений в законтурных точках через функции внутри контура и частные производные по соответствующему направлению:

$$\begin{aligned} \varphi_9 &= \varphi_2 + 2 \frac{a}{4} \left( -\frac{P}{2} \right) = \varphi_2 - \frac{Pa}{4}; \\ \varphi_8 &= \varphi_1 + 2 \frac{a}{4} \left( -\frac{P}{2} \right) = \varphi_1 - \frac{Pa}{4}; \\ \varphi_7 &= \varphi_5 + 2 \frac{a}{4} \left( -\frac{P}{2} \right) = -\frac{Pa}{4}. \end{aligned} \tag{в}$$

5. Используя рис. 31 как шаблон для решения уравнения Мориса Леви (в нулевой точке), составляем разностные уравнения (5.26) для всех внутриконтурных точек (число уравнений равно числу внутриконтурных точек):

$$\begin{aligned} 20\varphi_1 - 8(\varphi_2 + \varphi_5 + \varphi_2 + \varphi_5) + 2(\varphi_4 + \varphi_6 + \varphi_4 + \varphi_3) + \\ + (\varphi_1 + \varphi_8 + \varphi_8 + \varphi_1) &= 0; \\ 20\varphi_2 - 8(\varphi_1 + \varphi_4 + \varphi_1 + \varphi_3) + 2(\varphi_5 + \varphi_5 + \varphi_2 + \varphi_2) + \\ + (\varphi_5 + \varphi_9 + \varphi_5 + \varphi_2) &= 0; \\ 20\varphi_3 - 8(\varphi_2 + \varphi_2 + \varphi_2 + \varphi_2) + 2(\varphi_1 + \varphi_1 + \varphi_1 + \varphi_1) + \\ + (\varphi_4 + \varphi_4 + \varphi_4 + \varphi_4) &= 0. \end{aligned} \tag{г}$$

Подставляя найденные значения функции напряжений в контурных (б) и законтурных (в) точках в выражение (г) и группируя подобные члены, получим следующую систему линейных уравнений:

$$\left. \begin{aligned} 24\varphi_1 - 16\varphi_2 + 2\varphi_3 - 0,25Pa &= 0; \\ -16\varphi_1 + 26\varphi_2 - 8\varphi_3 - 1,25Pa &= 0; \\ 8\varphi_1 - 32\varphi_2 + 20\varphi_3 + 0,5Pa &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{д}$$

6. Решив систему алгебраических линейных уравнений (д), найдем значения функции напряжений  $\varphi_i$  в точках внутри контура. Для этого используем, например, схему Гаусса [20]. Решая, находим:

$$\varphi_1 = 0,1215 Pa; \quad \varphi_2 = 0,1974 Pa; \quad \varphi_3 = 0,243 Pa.$$

Из уравнений (е) также получим:

$$\varphi_9 = -0,0526 Pa; \quad \varphi_8 = -0,1285 Pa; \quad \varphi_7 = -0,25 Pa.$$

7. Для проверки правильности решения необходимо подставить найденные значения функции напряжений  $\varphi_i$  в исходные алгебраические уравнения (д):

$$6,356 Pa - 6,3168 Pa \approx 0;$$

$$-5,186 Pa + 5,1324 Pa \approx 0;$$

$$3,474 Pa - 3,408 Pa \approx 0.$$

Хотя полученные уравнения не обращаются в нуль, расхождение (между положительными и отрицательными значениями) составляет:

$$\text{в первом} - [(6,332 - 6,3168)/6,3168]100 \approx 0,2 \%;$$

$$\text{во втором} - [(5,1324 - 5,138)/5,1324]100 = 0,1 \%;$$

$$\text{в третьем} - [(3,408 - 3,402)/3,402]100 = 0,2 \%,$$

что объясняется принятыми в процессе решения округлениями (допускается до 5 %).

8. Используя шаблон (см. рис. 31), определяем нормальные и касательные напряжения в окрестностях всех узловых точек в соответствии с зависимостями (5.27). Определим, например, напряжения  $\sigma_x$  по сечению 4—4 (см. рис. 33, з — вертикальная линия)

$$\sigma_{x4} = (\varphi_9 - 2\varphi_4 + \varphi_2)/(0,25a)^2 = -1,683 \frac{P}{a};$$

$$\sigma_{x2} = (\varphi_4 - 2\varphi_2 + \varphi_3)/(0,25a)^2 = -0,429 \frac{P}{a};$$

$$\sigma_{x3} = (\varphi_2 - 2\varphi_3 + \varphi_2)/(0,25a)^2 = -1,459 \frac{P}{a}.$$

Поскольку на балку-стенку действует нагрузка, симметричная относительно осей симметрии балки-стенки (см. рис. 33, з), нормальные напряжения  $\sigma_y$  по горизонтальному сечению 4—4 будут равны:

$$\sigma_{y4} = -1,683 \frac{P}{a}; \quad \sigma_{y2} = -0,429 \frac{P}{a}; \quad \sigma_{y3} = -1,459 \frac{P}{a}.$$

По горизонтальному сечению 5—5 нормальные напряжения  $\sigma_y$ :

$$\sigma_{y5} = (\varphi_8 - 2\varphi_5 + \varphi_1)/(0,25a)^2 = 0,016 \frac{P}{a} \approx 0;$$

$$\sigma_{y1} = (\varphi_5 - 2\varphi_1 + \varphi_2)/(0,25a)^2 = -0,73 \frac{P}{a};$$

$$\sigma_{y2} = (\varphi_1 - 2\varphi_2 + \varphi_1)/(0,25a)^2 = -2,45 \frac{P}{a}.$$

По горизонтальной линии 6—6:

$$\sigma_{y6} = (\varphi_5 - 2\varphi_6 + \varphi_7)/(0,25a)^2 = 0;$$

$$\sigma_{y5} = (\varphi_4 - 2\varphi_5 + \varphi_6)/(0,25a)^2 = 0;$$

$$\sigma_{y4} = (\varphi_5 - 2\varphi_4 + \varphi_5)/(0,25a)^2 = 4 \frac{P}{a}.$$

Если воспользоваться шаблоном (см. рис. 31) и зависимостью для вычисления касательных напряжений

$$\tau_{xy} = -\frac{1}{4h^2}(\varphi_6 - \varphi_8 + \varphi_{10} - \varphi_{12}),$$

то по сечениям 4—4 в балке-стенке как в горизонтальном, так и в вертикальном направлениях  $\tau_{xy} = 0$ . Действительно, для  $\tau_{yx4}$  по вертикальному сечению 4—4:

$$\tau_{yx4} = -(\varphi_8 - \varphi_8 + \varphi_1 - \varphi_1)/[4(0,25)^2] = 0.$$

Нетрудно заметить, что аналогичный результат получим для всех точек по сечению 4—4.

Для вертикального сечения 5—5:

$$\tau_{yx5} = -(\varphi_7 - \varphi_9 + \varphi_2 - \varphi_5)/[4(0,25a)^2] = 0;$$

$$\tau_{yx1} = -(\varphi_6 - \varphi_4 + \varphi_3 - \varphi_4)/[4(0,25a)^2] = 0,528 \frac{P}{a};$$

$$\tau_{yx2} = -(\varphi_5 - \varphi_2 + \varphi_2 - \varphi_5)/[4(0,25a)^2] = 0;$$

$$\tau_{yx1} = -(\varphi_4 - \varphi_3 + \varphi_4 - \varphi_6)/[4(0,25a)^2] = -0,528 \frac{P}{a}.$$

Построенные по расчетным данным эпюры напряжений (знак напряжений указан знаком плюс или минус) приведены на рис. 34.

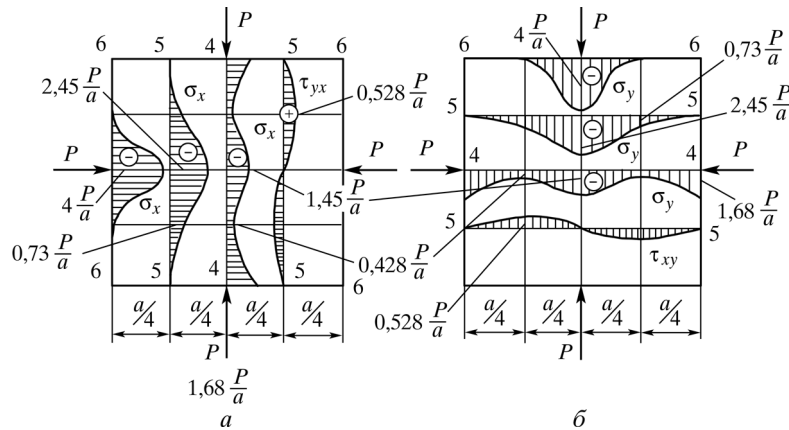


Рис. 34. Эпюры напряжений  $\sigma_x$  (а) и  $\sigma_y$  (б), построенных по расчетным данным

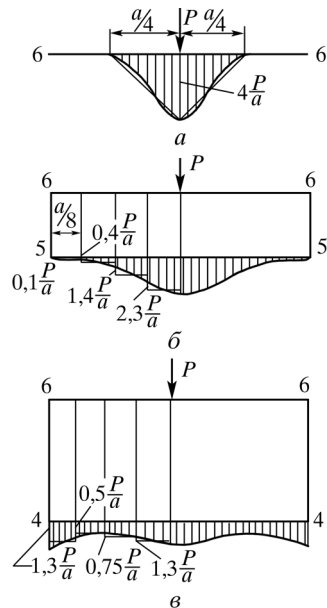


Рис. 35. К равновесию отсеченных частей балки-стенки

Для удобства проверки из условия равновесия эпюры  $\sigma_x$  построены по вертикальным сечениям, а эпюры  $\sigma_y$  — по горизонтальным. Проверка правильности построения эпюр  $\tau_{xy}$  не требуется, так как

сумма площадей для этих эпюр равна нулю, т. е. оно выполняется по сечениям тождественно.

В силу симметрии эпюр  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , очевидно, достаточно проверить только эпюру нормальных напряжений  $\sigma_y$ . Рассмотрим равновесие отсеченных частей, приведенных на рис. 35.

Если заменить на рис. 35, а площадь эпюры напряжений  $\sigma_y$  площадью треугольника, то, используя уравнения равновесия в форме  $\sum Y = 0$ , получим для сечения 6—6:

$$\frac{1}{2} \cdot 4 \frac{P}{a} \cdot \frac{a}{2} - P = 0.$$

Для удобства составления условий равновесия по сечениям 5—5 (рис. 35, б) и 4—4 (рис. 35, в) разобьем эпюру внутренних сил, изменяющихся по нелинейному закону, на участках длиной  $a/8$  равновеликими равномерно распределенными силами (чтобы площади под эпюрами были одинаковыми). Тогда для сечения 5—5 имеем:

$$2 \left( 0,1 \frac{P}{a} + 0,4 \frac{P}{a} + 1,4 \frac{P}{a} + 2,3 \frac{P}{a} \right) \frac{a}{8} - P \approx 0.$$

Для сечения 4—4:

$$2 \left( 1,3 \frac{P}{a} + 0,5 \frac{P}{a} + 0,75 \frac{P}{a} + 1,3 \frac{P}{a} \right) \frac{a}{8} - P \approx 0.$$

Таким образом, равновесие по всем сечениям выполняется.

### 5.7. Другие сеточные методы решения плоской задачи теории упругости

В п. 5.4.3 был рассмотрен один из приближенных методов — метод конечных разностей. Погрешность этого метода зависит, главным образом, от того, что уравнения равновесия и сплошности в нем удовлетворяются *только в некоторых (узловых) точках*, а дифференциалы функций заменены разностями функций в смежных точках тела.

Погрешности метода конечных разностей уменьшаются с увеличением количества узловых точек, однако при этом значительно возрастает объем вычислений. Так, при решении системы с восемью уравнениями приходится выполнять операций в шесть раз больше, чем при решении системы с четырьмя уравнениями.



Ряд погрешностей можно избежать, если удастся подобрать такое напряженное состояние, которое удовлетворяло бы во всех точках тела дифференциальным уравнениям равновесия и граничным условиям на поверхности тела. При таком подходе решение задачи будет зависеть лишь от того, насколько точно будут соблюдаться уравнения сплошности тела. Проиллюстрируем возможность такого метода решения на примере прямоугольной пластинки (рис. 36), на гранях которой при  $x = \pm a$  приложена нагрузка  $P(y) = P_0(1 - y^2/b^2)$ .

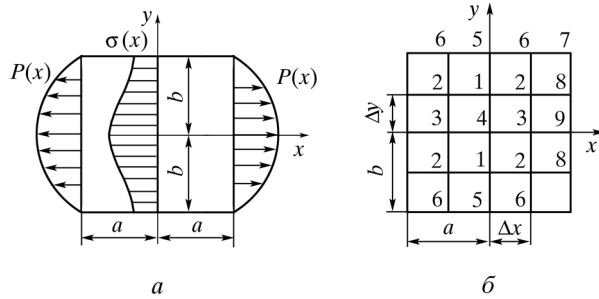


Рис. 36. Прямоугольная пластинка с приложенной по сторонам нагрузкой (а) и расчетная сетка (б)

Предварительный выбор напряженного состояния для такого тела легко осуществить путем наложения двух напряженных состояний: *основного и корректирующего*.

*Основное* напряженное состояние определяется только нагрузкой, приложенной к телу; оно должно удовлетворять уравнениям равновесия и граничным условиям. Для рассматриваемого примера такое напряженное состояние можно задать так:

$$\sigma_x^{(0)} = P(y) = P_0(1 - y^2/b^2); \quad \sigma_y^{(0)} = \tau_{xy}^{(0)} = 0. \quad (5.48)$$

*Корректирующее* напряженное состояние должно быть самоуравновешенным, и, кроме уравнений равновесия, оно должно удовлетворять нулевым граничным условиям (условиям отсутствия внешней нагрузки). В то же время следует иметь в виду, что при симметричной нагрузке касательные напряжения  $\tau_{xy}^{(k)}$  на осях симметрии должны обращаться в нуль. Корректирующее напряженное состояние по своему назначению должно помочь так скорректировать суммарное напряженное состояние, чтобы это последнее совпадало или было близко к фактическому. Этого можно достичь введением в выражения для

корректирующих напряжений достаточного числа независимых друг от друга неопределенных коэффициентов  $\alpha_i$ .

Корректирующее напряженное состояние можно выбрать по-разному. Например, задаться касательными напряжениями в виде

$$\tau_{xy}^{(k)} = \left( \alpha_1 + \alpha_2 \frac{x}{a} + \alpha_3 \frac{y}{b} + \dots \right) \sin\left(\frac{\pi}{a} x\right) \sin\left(\frac{\pi}{b} y\right), \quad (5.49)$$

а нормальные напряжения найти из дифференциальных уравнений равновесия (5.2) (без учета объемных сил):

$$\sigma_x^{(k)} = -\int \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial y} dx + f(y); \quad \sigma_y^{(k)} = -\int \frac{\partial \tau_{xy}^{(k)}}{\partial x} dy + f(x). \quad (5.50)$$

Функции  $f(x)$  и  $f(y)$  определяются из условия равенства нулю нагрузки на контуре тела. Корректирующее напряженное состояние можно задать и такой функцией напряжений:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= (x^2 - a^2)^2 (y^2 - b^2)^2 \times \\ &\times (\alpha_1 + \alpha_2 x^2 + \alpha_3 y^2 + \alpha_4 x^2 y^2 + \dots). \end{aligned} \quad (5.51)$$

Сами же напряжения можно получить дифференцированием согласно (5.10):

$$\begin{aligned} \sigma_x^{(k)} &= a^4 b^4 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \left[ 4 \left(\frac{\alpha_1}{b^2} + \alpha_2 \frac{x^2}{b^2}\right) \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_3 + \alpha_4 x^2) \left(30 \frac{y^4}{b^4} - 24 \frac{y^2}{b^2} + 2\right) \dots \right]; \\ \sigma_y^{(k)} &= a^4 b^4 \left(1 - \frac{y^2}{b^2}\right) \left[ 4 \left(\frac{\alpha_1}{a^2} + \alpha_2 \frac{y^2}{a^2}\right) \left(3 \frac{x^2}{a^2} - 1\right) + \right. \\ &\quad \left. + (\alpha_2 + \alpha_4 y^2) \left(30 \frac{x^4}{a^4} - 24 \frac{x^2}{a^2} + 2\right) \dots \right]; \end{aligned} \quad (5.52)$$

$$\begin{aligned} \tau_{xy}^{(k)} &= -8a^3 b^3 \frac{x}{a} \cdot \frac{y}{b} \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right) \left(\frac{y^2}{b^2} - 1\right) \left[ 2\alpha_1 + a^2 \alpha_2 \left(3 \frac{x^2}{a^2} - 1\right) + \right. \\ &\quad \left. + b^2 \alpha_3 \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \frac{a^2 b^2}{2} \alpha_4 \left(3 \frac{y^2}{b^2} - 1\right) + \dots \right]. \end{aligned}$$

Из (5.52) можно определить, что напряжения  $\sigma_x^{(\kappa)}$  равны нулю на сторонах  $x = \pm a$ , а  $\sigma_y^{(\kappa)}$  — на сторонах  $y = \pm b$ ,  $\tau_{xy}^{(\kappa)}$  равны нулю на всех четырех сторонах и на осях симметрии пластинки.

Полные напряжения в теле будут равны алгебраической сумме основных и корректирующих:

$$\sigma = \sigma^{(o)} + \sigma^{(\kappa)}.$$

Коэффициенты  $\alpha_i$  будем находить из уравнения сплошности (5.9). Подобрать так удачно коэффициенты  $\alpha_i$ , чтобы всюду в области тела уравнение (5.9) обращалось в нуль, практически невозможно. Рассмотрим два приближенных способа решения, основанных на удовлетворении уравнению сплошности дискретно в конечном числе внутренних точек тела — точках коллокации. Этот способ решения краевых задач теории упругости получил название метода коллокаций. Второй способ основан на выполнении энергетического смысла уравнений сплошности и поэтому называется энергетическим.

**Метод коллокаций** [21, 22, 23]. При решении плоской задачи непосредственно в напряжениях (см. п. 5.3) получены уравнения:

$$\left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (a)$$

и

$$-2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial y^2}. \quad (б)$$

Заменив в уравнении (a) второй член в квадратных скобках член (б), получим:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \sigma_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 \tau_{xy}}{\partial x \partial y} = 0. \quad (5.53)$$

При дискретном выполнении этого уравнения следует вторые производные заменить вторыми центральными разностями. Для регулярной сетки (с равноотстоящими узловыми точками в направлении оси  $x$  на  $\Delta x$  и в направлении  $y$  на  $\Delta y$ ) на основании соотношений (z) и (д) для нулевой точки (см. рис. 26) получим следующие приближенные равенства:

$$\frac{\partial^2 \sigma_x^{(0)}}{\partial y^2} \approx \frac{\sigma_x^{(2)} - 2\sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(4)}}{\Delta y^2}; \quad (e)$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_y^{(0)}}{\partial x^2} \approx \frac{\sigma_y^{(1)} - 2\sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(3)}}{\Delta x^2}; \quad (e)$$

$$-\frac{\partial^2 \tau_{xy}^{(0)}}{\partial x \partial y} \approx \frac{\tau_{xy}^{(6)} - \tau_{xy}^{(8)} + \tau_{xy}^{(10)} - \tau_{xy}^{(12)}}{4\Delta x \Delta y}. \quad (д)$$

Теперь уравнение (5.53) в центральных разностях в соответствии с (e)—(д) для 0-й точки (см. рис. 33) может быть записано в виде:

$$\frac{\sigma_x^{(2)} - 2\sigma_x^{(0)} + \sigma_x^{(4)}}{\Delta y^2} + \frac{\sigma_y^{(1)} - 2\sigma_y^{(0)} + \sigma_y^{(3)}}{\Delta x^2} - \frac{\tau_{xy}^{(6)} - \tau_{xy}^{(8)} + \tau_{xy}^{(10)} - \tau_{xy}^{(12)}}{2\Delta x \Delta y} = 0. \quad (5.54)$$

Уравнение, аналогичное (5.54), составляют для каждой внутренней узловой точки сетки, которой разделяют исследуемое тело.

При решении показанного на рис. 36, a примера примем  $a = b$  и  $\Delta x = \Delta y = 0,5a$ . В силу симметрии (конструкции и нагрузки) составим уравнение только для четырех точек (см. рис. 36, б). Прежде чем записывать эти уравнения, составим выражения для полных напряжений во всех узловых точках в виде функции от  $\alpha_i$ , приняв за корректирующие напряжения выражения (5.52). Тогда, подставляя в формулы (5.48) и (5.52) координаты каждой узловой точки (см. рис. 36, б), получим выражения, представленные в табл. 4. Для удобства вычисления в табл. 4 введены обозначения:

$$c_1 = \alpha_1/a^2; \quad c_2 = \alpha_2; \quad c_3 = \alpha_3; \quad c_4 = \alpha_4 a^2. \quad (5.55)$$

Запишем для всех внутренних точек (1, 2, 3, 4) разностные уравнения типа (5.54).

Для точки 1 (см. рис. 33 и 36, б):

$$\frac{\sigma_x^{(5)} - 2\sigma_x^{(1)} + \sigma_x^{(4)}}{(a/2)^2} + \frac{\sigma_y^{(2)} - 2\sigma_y^{(1)} + \sigma_y^{(2)}}{(a/2)^2} - \frac{\tau_{xy}^{(6)} - \tau_{xy}^{(6)} + \tau_{xy}^{(3)} - \tau_{xy}^{(3)}}{2(a/2)(a/2)} = 0. \quad (e)$$

Таблица 4. Выражения для напряжений в узловых точках сетки

Номер точки (координаты)	$\sigma_x/a^8$	$\sigma_y/a^8$	$\tau_{xy}/a^8$
5(0, a)	$8(c_1 + c_2)$	0	0
6(a/2, a)	$\frac{18}{16}(4c_1 + c_2 + 4c_3 + c_4)$	0	0
7(a, a)	0	0	0
8(a, a/2)	$0,75 \cdot P_0/a^8$	$\frac{18}{16}(4c_1 + c_2 + 4c_3 + c_4)$	0
9(a, 0)	$P_0/a^8$	$8(c_1 + c_2)$	0
1(0, a/2)	$0,75 P_0/a^8 - c_1 - 2,125 c_3$	$-\frac{9}{16}\left(4c_1 + \frac{8,5}{4}c_2 + \frac{c_3}{4} + \frac{8,5}{16}c_4\right)$	0
2(a/2, a/2)	$0,75 \frac{P_0}{a^8} - \frac{9}{16}\left(c_1 + \frac{c_2}{4} + \frac{8,5}{4}c_3 + \frac{8,5}{16}c_4\right)$	$-\frac{9}{16}\left(c_1 + \frac{8,5}{4}c_2 + \frac{c_3}{4} + \frac{8,5}{16}c_4\right)$	$-\frac{9}{16}\left(4c_1 + \frac{c_2}{4} - \frac{c_3}{2} + \frac{c_4}{16}\right)$
3(a/2, 0)	$\frac{P_0}{a^8} - \frac{9}{16}\left(4c_1 + c_2 - 2c_3 - \frac{c_4}{2}\right)$	$-c_1 - \frac{8,5}{4}c_2$	0
4(0, 0)	$\frac{P_0}{a^8} - 4c_1 + 2c_3$	$-4c_1 + 2c_2$	0

Для точки 2:

$$\frac{\sigma_x^{(6)} - 2\sigma_x^{(2)} + \sigma_x^{(3)}}{(a/2)^2} + \frac{\sigma_y^{(8)} - 2\sigma_y^{(2)} + \sigma_y^{(1)}}{(a/2)^2} - \frac{\tau_{xy}^{(7)} - \tau_{xy}^{(5)} + \tau_{xy}^{(4)} - \tau_{xy}^{(9)}}{2(a/2)(a/2)} = 0. \quad (e)$$

Для точки 3:

$$\frac{\sigma_x^{(2)} - 2\sigma_x^{(3)} + \sigma_x^{(2)}}{(a/2)^2} + \frac{\sigma_y^{(9)} - 2\sigma_y^{(3)} + \sigma_y^{(4)}}{(a/2)^2} - \frac{\tau_{xy}^{(8)} - \tau_{xy}^{(1)} + \tau_{xy}^{(1)} - \tau_{xy}^{(8)}}{2(a/2)(a/2)} = 0. \quad (3)$$

Для точки 4:

$$\frac{\sigma_x^{(1)} - 2\sigma_x^{(4)} + \sigma_x^{(1)}}{(a/2)^2} + \frac{\sigma_y^{(3)} - 2\sigma_y^{(4)} + \sigma_y^{(3)}}{(a/2)^2} - \frac{\tau_{xy}^{(2)} - \tau_{xy}^{(2)} + \tau_{xy}^{(2)} - \tau_{xy}^{(2)}}{2(a/2)(a/2)} = 0. \quad (u)$$

Подставляя теперь в уравнения (e)—(u) напряжения в узловых точках 1—9 согласно табл. 4 и учитывая закон парности касательных напряжений  $\tau_{ij} = -\tau_{ji}$ , получим следующие уравнения сплошности:

$$9,3750c_1 - 4,6406c_2 + 15,0938c_3 - 1,1602c_4 = 0,5000 \frac{P_0}{a^8};$$

$$12,0000c_1 + 15,7500c_2 + 15,7500c_3 + 7,1250c_4 = 0,8889 \frac{P_0}{a^8};$$

$$9,3750c_1 + 15,0938c_2 - 4,8406c_3 - 1,1602c_4 = 0,5000 \frac{P_0}{a^8};$$

$$8,2500c_1 - 4,5312c_2 - 4,4062c_3 + 0,0352c_4 = 0,2500 \frac{P_0}{a^8}.$$

Решая полученную систему, находим:

$$c_1 = 0,0420 \frac{P_0}{a^8}; \quad c_2 = 0,0108 \frac{P_0}{a^8}; \quad c_3 = 0,0108 \frac{P_0}{a^8}; \quad c_4 = 0,0062 \frac{P_0}{a^8}.$$

Если подставить полученные значения  $c_i$  в соотношения (141), то легко определяются коэффициенты  $\alpha_i$ :

$$\alpha_1 = 0,0420 \frac{P_0}{a^6}; \quad \alpha_2 = 0,0108 \frac{P_0}{a^8}; \quad \alpha_3 = 0,0108 \frac{P_0}{a^8}; \quad \alpha_4 = 0,0062 \frac{P_0}{a^{10}}.$$

Используя теперь зависимости (5.48), а также (5.49)—(5.50) и (5.52) с применением для последнего случая данных табл. 4, подсчитаем напряжения в узловых точках, а по формулам (5.48) и (5.52) — в любой точке пластинки. В табл. 5 приведены величины напряжения  $\sigma_x$  для сечения 5—5 (см. рис. 36), а на рис. 36, а построена их эпюра.

Если за корректирующие напряжения взять соотношения (5.49)—(5.50), то, поступив подобным же образом, определим:

$$\alpha_1 = 0,03376P_0; \quad \alpha_2 = \alpha_3 = -0,07315P_0; \quad \alpha_4 = -0,1168P_0.$$

Напряжения  $\sigma_x$  в сечении 5—5, подсчитанные по формулам (5.48) и (5.49)—(5.50), приведены во второй строке табл. 5.

Таким образом, выбор корректирующих напряжений в виде (5.49)—(5.50) или (5.51)—(5.52) незначительно сказывается на точности: разница в величинах напряжений лежит в пределах погрешности вычислений.

Таблица 5. Значения напряжений  $\sigma_x/P_0$  в сечении 5—5

Способ вычисления		Номер точки		
		5	1	4
Дискретный	Зависимости (137)—(138)	0,3888	0,6914	0,8590
	Зависимости (135)—(136)	0,4037	0,6663	0,8592
	С использованием непрерывных производных	0,4027	0,6883	0,8593

В тех случаях когда выражения для основных и корректирующих напряжений можно продифференцировать дважды, нет необходимости заменять производные конечными разностями, ибо такая замена неизбежно внесет дополнительные погрешности в решение, особенно в местах резкого изменения поля напряжений. Так, в рассматриваемом примере, выполнив двукратное дифференцирование и определив производные от напряжений, как это требует (5.53), получим уравнение сплошности в функции от параметров  $\alpha_i$ , пригодное для любых точек исследуемого тела. Подставив для  $x$  и  $y$  координаты тех же четырех точек, что и раньше, получим для коэффициентов  $\alpha_i$  значения:

$$\alpha_1 = 0,04023 \frac{P_0}{a^{10}}; \quad \alpha_2 = 0,01012 \frac{P_0}{a^8};$$

$$\alpha_3 = 0,01012 \frac{P_0}{a^8}; \quad \alpha_4 = 0,00962 \frac{P_0}{a^{10}}.$$

Это значения весьма близкие, они были найдены ранее при замене производных конечными разностями. Напряжения, вычисленные по этим коэффициентам и приведенные в третьей строке табл. 5, практически совпадают с ранее найденными. Это произошло потому, что в рассматриваемом случае нагружения все напряжения во всей

области тела изменяются весьма плавно и разница между их производными и конечными разностями мала.

**Энергетический метод.** В зависимости (3.17) было рассмотрено значение удельной потенциальной энергии упругой деформации, которое для обобщенного плоского напряженного состояния будет иметь вид:

$$W = \frac{1}{2E} [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2].$$

Выполнив интегрирование по всему объему (приняв, что размер по направлению оси  $z$  равен единице), получим выражение для полной энергии деформации  $U$ , накопленной во всем теле:

$$U = \frac{1}{2E} \iint [\sigma_x^2 + \sigma_y^2 - 2\mu\sigma_x\sigma_y + 2(1+\mu)\tau_{xy}^2] dx dy. \quad (5.56)$$

На основании теоремы Лагранжа — Дирихле [8] доказывается принцип минимума потенциальной энергии: *из всех мыслимых перемещений упругого тела перемещения, удовлетворяющие условиям равновесия, сообщают потенциальной энергии системы минимальное значение.* При этом уравнения сплошности (95) вытекают как следствие из условия минимума потенциальной энергии в сплошном деформируемом теле.

Значит, для упругого тела принцип наименьшей энергии деформации и уравнения сплошности тождественны между собой. Поэтому в задачах определения напряжений требование соблюдения сплошности можно заменить требованием минимальной величины энергии деформации.

Ранее было показано, что напряжения в теле могут быть представлены в функции свободных параметров  $\alpha_i$  (см. зависимости (5.49)—(5.52)). Значит, энергия деформации согласно выражению (5.56) будет также функцией этих коэффициентов  $U = f(\alpha_1, \alpha_2, \dots)$ . Следовательно, их можно определить из условия:

$$\frac{\partial U}{\partial \alpha_i} = 0, \quad (i = 1, 2, 3, \dots). \quad (\kappa)$$

Учитывая, что при отсутствии массовых сил распределение напряжений в плоской задаче не зависит от упругих постоянных материала (см. формулу (5.9)), что позволяет упростить вычисление, приняв в формуле (5.56)  $\mu = 0$ . Тогда, выполняя дифференцирование

в соответствии с (κ) по параметрам  $\alpha_i$  под знаком интеграла, получим следующие уравнения:

$$\iint \left( \sigma_x \frac{\partial \sigma_x}{\partial \alpha_i} + \sigma_y \frac{\partial \sigma_y}{\partial \alpha_i} + 2\tau_{xy} \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \alpha_i} \right) dx dy = 0;$$

$$\alpha_i = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$$

Уравнения применим к решению задачи — определение напряжений в прямоугольной пластине (см. рис. 36, а) для случая  $a = b$ , ограничившись в (5.51) только  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Подставляя в это уравнение напряжения согласно формулам (5.48)—(5.52), а также их производных, а затем выполняя интегрирование по всей площади пластины, получим систему трех уравнений, линейных относительно  $\alpha_i$ :

$$23,5103\alpha_1 + 2,1373a^2\alpha_2 + 2,1373a^2\alpha_3 = \frac{P_0}{a^6};$$

$$14,9611\alpha_1 + 32,0960a^2\alpha_2 + 1,6624a^2\alpha_3 = \frac{P_0}{a^6}; \quad (л)$$

$$14,9611\alpha_1 + 1,6624a^2\alpha_2 + 32,0960a^2\alpha_3 = \frac{P_0}{a^6}.$$

Решив систему (л), получим:

$$\alpha_1 = 0,04040 \frac{P_0}{a^6}; \quad \alpha_2 = 0,01174 \frac{P_0}{a^8}; \quad \alpha_3 = 0,01174 \frac{P_0}{a^8}.$$

Для сравнения с предыдущим решением найдем напряжения  $\sigma_x$  в сечении 5—5. Для этого необходимо в формулах (5.51)—(5.52) для корректирующих напряжений положить  $x = 0$  и прибавить еще основные напряжения по формулам (5.48). В результате вычисления получим следующие значения  $\sigma_x$  в точках 5, 1, 4:

$$\sigma_{x,5} = 0,4172 P_0; \quad \sigma_{x,1} = 0,6846 P_0; \quad \sigma_{x,5} = 0,8619 P_0.$$

Полученные результаты указывают на примерно одинаковую точность рассмотренных выше методов (см. табл. 5).

Вычисление напряжений в такой же пластинке через функцию напряжений методом конечных разностей показало, что для достижения такой же точности необходимо брать сетку в два раза мельче, чем при решении методом коллокаций [24, 25, 26].

### Контрольные вопросы

1. Что называется плоской деформацией?
2. Какое напряженное состояние называется обобщенным плоским?
3. Как записываются уравнения равновесия в случае обобщенного плоского напряженного состояния?
4. Как выглядит условие неразрывности Сен-Венана в случаях плоского напряженного состояния и плоской деформации?
5. Какой вид приобретает условие неразрывности в случае применения функции напряжений (функции Эри)?
6. Как записать статические условия на границах тела через функцию напряжений?
7. Покажите, что при использовании функции напряжений уравнения равновесия плоской задачи удовлетворяются тождественно.
8. В чем преимущество применения тригонометрических рядов вместо полиномов для функции напряжений  $\varphi$  при решении плоской задачи?
9. Как можно представить производные через конечные разности функций?
10. Каким образом дифференциальное уравнение Мориса Леви можно представить в конечно-разностном виде?

# Глава 6 ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ

Наука всегда оказывается неправа. Она никогда не решит вопроса, не поставив при этом десятка новых.

*Б. Шоу*<sup>1</sup>

## 6.1. Основные уравнения плоской задачи в полярных координатах

При решении плоской задачи встречаются тела, ограниченные поверхностями кругового цилиндра с радиально расходящимися плоскостями. В этих случаях переход от декартовой системы координат к полярной значительно упрощает решение.

Выведем основные уравнения плоской задачи в полярных координатах: дифференциальные уравнения равновесия, уравнение сплошности, формулы Коши и формулы обобщенного закона Гука.

Вырежем из пластинки толщиной, равной единице, элемент *abcd* (рис. 37). Для этого проведем радиус *Oab* под произвольным углом  $\theta$  к оси абсцисс, затем дадим углу бесконечно малое приращение  $d\theta$  и проведем радиус *Odc*. Произвольным радиусом  $Oa = r$  проведем дугу *ad*, затем дадим радиусу  $r$  приращение  $ab = dr$  и проведем вторую дугу *bc*. Стороны полученного элемента имеют следующие размеры:

$$ab = cd = dr; \quad ad = rd\theta, \quad bc = (r + dr)d\theta.$$

На гранях этого элемента действуют следующие составляющие напряжений:  $\sigma_r$  — радиальное нормальное,  $\sigma_\theta$  — тангенциальное нормальное напряжение,  $\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta}$  — касательные напряжения.

Дифференциальные уравнения равновесия в полярной системе координат получим как частный случай уравнений равновесия (1.7) в цилиндрической системе координат.

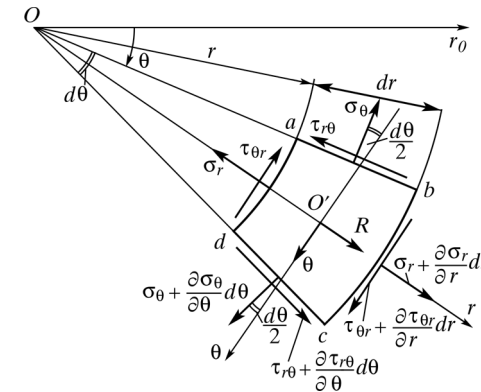


Рис. 37. Равновесие элементарного объема в полярной системе координат

Если в (1.7) положить  $\sigma_x = 0; \tau_{xr} = \tau_{\theta r} = 0$ , то получим:

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \theta &= 0; \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.1)$$

Особенностью этих уравнений является наличие в знаменателе  $r$ . Чем ближе к началу координат расположена рассматриваемая точка, тем быстрее будут возрастать слагаемые, содержащие множитель  $1/r$ . Поэтому уравнения (6.1) неприемлемы для точек, лежащих в начале координат.

Преобразуем к полярным координатам уравнение сплошности в плоской задаче. В декартовых координатах уравнение сплошности (5.9) имело такой вид:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (a)$$

Сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам в плоской задаче является инвариантом. Действительно, подставляя в первый инвариант напряженного состояния (1.27)  $\sigma_z = 0$ , получим, что при обобщенном плоском напряженном состоянии инвариантной величиной будет:

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y.$$

При плоской деформации согласно формуле (5.1) напряжение  $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$ , и инвариантной величиной является:

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \mu(\sigma_x + \sigma_y) = (1 + \mu)(\sigma_x + \sigma_y).$$

<sup>1</sup> Энциклопедия мудрости. М.: РОСССА, 2013.



Таким образом, в плоской задаче в каждой точке сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам есть величина постоянная, и можно составить следующее тождество:

$$\sigma_x + \sigma_y \equiv \sigma_r + \sigma_\theta.$$

Заменяя с помощью этого тождества напряжения в формуле (а), получаем уравнение сплошности для плоской задачи в полярной системе координат:

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (6.2)$$

В развернутом виде это уравнение имеет вид:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0. \quad (6.3)$$

Формулы Коши можно получить как частный случай формул (2.3), сохраняя в них только составляющие деформаций и перемещений в плоскости  $\theta\theta r$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

Здесь  $u_r$  — составляющая перемещения вдоль оси  $r$ , а  $u_\theta$  — составляющая перемещения, перпендикулярная к оси  $r$ .

Формулы закона Гука для обобщенного плоского напряженного состояния в полярных координатах также получим как частный случай из формул (3.3), сохраняя только составляющие напряжений и деформаций, действующие в плоскости  $\theta\theta r$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= (\sigma_\theta - \mu\sigma_r)/E; \\ \varepsilon_r &= (\sigma_r - \mu\sigma_\theta)/E; \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{\theta r}. \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

В случае плоской деформации упругие постоянные  $E$  и  $\mu$  в формулах (6.5) должны быть соответственно заменены на упругие постоянные  $E_1$  и  $\mu_1$  согласно формулам (5.6).

## 6.2. Простое радиальное напряженное состояние

При решении многих задач приходится иметь дело с напряженным состоянием, при котором во всех точках напряженного тела действуют только радиальные нормальные напряжения  $\sigma_r$ , а остальные составляющие напряжений  $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0$ ,  $R = \theta = 0$ . Такое напряженное состояние называется простым радиальным напряженным состоянием.

В случае простого радиального напряженного состояния первое уравнение системы (6.1) обратится в тождество, а второе (уравнение равновесия) и уравнение сплошности (6.3) — значительно упростятся

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial \theta^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Систему уравнений (а) можно проинтегрировать в общем виде. Для этого применим метод Фурье. Представим напряжение  $\sigma_r(r, \theta)$ , являющееся функцией двух переменных  $r$  и  $\theta$ , в виде произведения двух функций:

$$\sigma_r = \varphi \cdot \psi, \quad (б)$$

одна из которых  $\varphi(r)$  является функцией только одного переменного  $r$ , а другая  $\psi(\theta)$  — одного переменного  $\theta$ .

Подставляя функцию (б) в уравнения (а), получаем два обыкновенных дифференциальных уравнения с двумя неизвестными функциями  $\varphi$  и  $\psi$ :

$$\left. \begin{aligned} \varphi' \psi + \frac{1}{r} \varphi \psi &= 0; \\ \varphi'' \psi + \frac{1}{r} \varphi' \psi + \frac{1}{r^2} \varphi \psi'' &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Первое уравнение (в) после деления на  $\psi$  дает:

$$\varphi' + \varphi/r = 0,$$

откуда после разделения переменных получаем:

$$\varphi'/\varphi = -1/r.$$

Интегрируя, находим:

$$\ln \varphi = -\ln r + \ln C \quad \text{или} \quad \ln \varphi = \ln \frac{C}{r}.$$

Потенцируя, находим:

$$\varphi = C/r. \quad (z)$$

Для отыскания функции  $\psi$  подставим найденную функцию  $\varphi$  во второе уравнение (6):

$$\frac{2C}{r^3}\psi + \frac{1}{r}\left(-\frac{C}{r^2}\right)\psi + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{C}{r}\psi'' = 0.$$

После деления на дробь  $C/r^3$  получаем следующее дифференциальное уравнение:

$$\psi'' + \psi = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения представляется в таком виде:

$$\psi = A \cos \theta + B \sin \theta. \quad (d)$$

Подставляя решения (z) и (d) в выражение (6), находим:

$$\sigma_r = \frac{C}{r}(A \cos \theta + B \sin \theta). \quad (e)$$

Для удобства дальнейших выкладок введем новые произвольные постоянные  $k$  и  $\theta_0$ :

$$C \cdot A = -k \cos \theta_0;$$

$$C \cdot B = -k \sin \theta_0.$$

Тогда функция (e) примет вид:

$$\sigma_r = -\frac{k}{r}(\cos \theta \cos \theta_0 + \sin \theta \sin \theta_0) \quad (6.6)$$

или, если применить тригонометрическую формулу преобразования косинуса разности двух углов,

$$\sigma_r = -\frac{k}{r} \cos(\theta - \theta_0).$$

Следовательно, простое радиальное напряженное состояние представляется следующими составляющими напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{k}{r} \cos(\theta - \theta_0); \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.7)$$

Полученный результат можно использовать при решении ряда задач; при этом произвольные постоянные  $k$  и  $\theta_0$  определяются из граничных условий.

### 6.3. Клин, нагруженный в вершине сосредоточенной силой

Решение (6.7) можно применить к задаче о клине, к вершине которого приложена сила  $P$  произвольного направления (рис. 38). Угол раствора клина равен  $2\alpha$ . Начальный радиус-вектор совпадает с биссектрисой угла  $2\alpha$ . Направление линии действия силы  $P$  с начальным радиусом-вектором составляет угол  $\beta$ . Покажем, что в этом случае клин находится в простом радиальном напряженном состоянии.

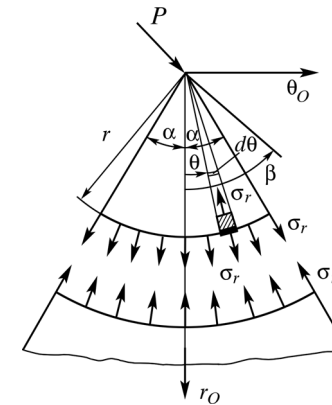


Рис. 38. Нагружение на участок клина произвольной силой

Для этого возьмем составляющие напряжений для простого радиального напряженного состояния в форме (6.6) и определим постоянные  $k$  и  $\theta_0$ , при которых эти напряжения удовлетворяют граничным условиям поставленной задачи.

Из рассмотрения исключим закрепление нижней кромки клина, которое оказывает влияние на распределение напряжений только вблизи кромки, а на боковых поверхностях клина при  $\theta = \pm\alpha$  должно быть  $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$ .

Из (6.6) и (6.7) следует, что эти условия тождественно выполняются во всех точках боковой поверхности за исключением полюса  $O$ .

В полюсе при  $r = 0$  формула (6.6) неприемлема. Для включения в граничные условия силы  $P$  на основании принципа Сен-Венана заменим эту силу эквивалентной ей нагрузкой, распределенной по дуге радиусом  $r$ , проведенной из полюса  $O$  (см. рис. 38) и рассмотрим равновесие элемента клина.

Спроектируем все силы, действующие на этот элемент, на вертикальную и горизонтальную оси. В результате получим:

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \sigma_r r d\theta \cdot \cos\theta + P \cos\beta = 0;$$

$$\int_{-\alpha}^{+\alpha} \sigma_r r d\theta \cdot \sin\theta + P \sin\beta = 0.$$

После подстановки значения  $\sigma_r$  из формулы (6.6) получим:

$$-k \cos\theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos^2 \theta d\theta - k \sin\theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin\theta \cos\theta d\theta + P \cos\beta = 0;$$

$$-k \cos\theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \cos\theta \sin\theta d\theta - k \sin\theta_0 \int_{-\alpha}^{+\alpha} \sin^2 \theta d\theta + P \sin\beta = 0.$$

Проинтегрировав, получаем систему двух уравнений для определения постоянных  $k$  и  $\theta_0$ :

$$-k \cos\theta_0 [\alpha + (\sin 2\alpha)/2] + P \cos\beta = 0;$$

$$-k \sin\theta_0 [\alpha + (\sin 2\alpha)/2] + P \sin\beta = 0,$$

откуда находим:

$$\left. \begin{aligned} k \cos\theta_0 &= \frac{P \cos\beta}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2}; \\ k \sin\theta_0 &= \frac{P \sin\beta}{\alpha - (\sin 2\alpha)/2}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Разделив почленно второе уравнение (a) на первое, получаем уравнение для определения постоянной  $\theta_0$ :

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \operatorname{tg} \beta \frac{\alpha + (\sin 2\alpha)/2}{\alpha - (\sin 2\alpha)/2}. \quad (6.8)$$

Возведем оба выражения в (a) в квадрат, сложим, а после извлечения квадратного корня находим:

$$k = P \sqrt{\frac{\cos^2 \beta}{[\alpha + (\sin 2\alpha)/2]^2} + \frac{\sin^2 \beta}{[\alpha - (\sin 2\alpha)/2]^2}}. \quad (6.9)$$

Таким образом, удалось удовлетворить граничным условиям и, следовательно, рассматриваемый клин находится в простом радиальном напряженном состоянии.

#### 6.4. Сжатие клина

Задачу о сжатии клина сосредоточенной силой, приложенной к его вершине (рис. 39), можно рассматривать как частный случай решения в п. 6.3 при  $\beta = 0$ . Постоянные  $\theta_0$  и  $k$  из формул (6.8) и (6.9) получают следующие значения:

$$\theta_0 = 0;$$

$$k = \frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2}.$$

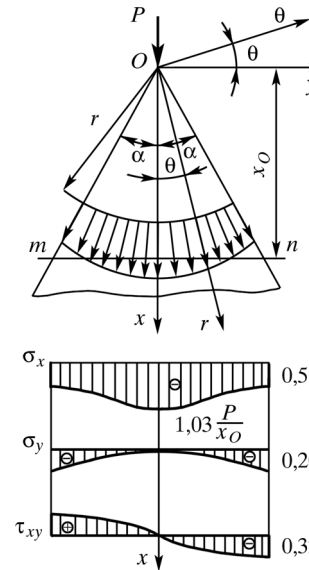


Рис. 39. Сжатие клина сосредоточенной силой

Внося эти значения постоянных в формулы (6.7), получаем  $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = 0$ :

$$\sigma_r = -\frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2} \cdot \frac{\cos \theta}{r}. \quad (6.10)$$

Эпюра распределения радиальных напряжений  $\sigma_r$  в сечении  $r = \text{const}$  показана на рис. 39.

Для исследования напряженного состояния в сжатом клине удобно перейти к поперечным и продольным сечениям клина. Если ось  $x$  совместить с осью симметрии клина, а ось  $y$  направить вправо (см. рис. 39), то составляющие напряжений в поперечном сечении клина будут  $\sigma_x$  и  $\tau_{xy}$ , а в продольном —  $\sigma_y$  и  $\tau_{yx}$ .

Связь между составляющими напряжений в декартовой и полярной системах координат для плоской задачи получим из формул (1.11) и (1.14) с учетом того, что  $n = n_1 = 0$ , направляющие косинусы  $l$  и  $m$  — косинусы углов между осями  $x$  и  $r$ , а также  $\theta$  (см. рис. 39); направляющие косинусы  $l_1$  и  $m_1$  — косинусы углов между осями  $y$  и  $r$ , а также  $\theta$  (соответственно, вместо направления  $v$  в первом случае принимается ось  $x$ , а во втором случае —  $y$ ). Кроме того, в уравнениях (1.11) и (1.14) исходными служат компоненты тензора напряжений (4) (для плоской задачи, когда  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ ). Тогда уравнения (1.11) и (1.14) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r l^2 + \sigma_\theta m^2 + 2\tau_{r\theta} lm; \\ \sigma_y &= \sigma_r l_1^2 + \sigma_\theta m_1^2 + 2\tau_{r\theta} l_1 m_1; \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \sigma_r l l_1 + \sigma_\theta m m_1 + \tau_{r\theta} (l m_1 + l_1 m). \end{aligned} \right\} (a)$$

В этих формулах направляющие косинусы  $l$  и  $m$  определяют направление оси  $x$ , соответственно, по отношению к осям  $r$  и  $\theta$ :

$$l = \cos(r, x) = \cos \theta; \quad m = \cos(\theta, x) = \cos(\pi/2 + \theta) = -\sin \theta, \quad (б)$$

а направляющие косинусы  $l_1$  и  $m_1$  — оси  $y$ :

$$l_1 = \cos(r, y) = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta; \quad m_1 = \cos(\theta, y) = \cos \theta. \quad (в)$$

После подстановки в (а) значений  $l$ ,  $m$ ,  $l_1$  и  $m_1$  из (б) и (в) получим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \theta + \sigma_\theta \sin^2 \theta - 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta; \\ \sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \theta + \sigma_\theta \cos^2 \theta + 2\tau_{r\theta} \sin \theta \cos \theta; \\ \tau_{xy} &= (\sigma_r - \sigma_\theta) \sin \theta \cos \theta + \tau_{r\theta} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \end{aligned} \right\} (6.11)$$

Используя (6.10) и (6.11), определим составляющие напряжений, возникающие при сжатии клина в его горизонтальном и вертикальном сечениях:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2} \cdot \frac{\cos^3 \theta}{r}; \\ \sigma_y &= -\frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2} \cdot \frac{\cos \theta \sin^2 \theta}{r}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2} \cdot \frac{\cos^2 \theta \sin \theta}{r}. \end{aligned} \right\} (z)$$

Перейдем в правой части полученных соотношений от полярной системы координат к декартовой. Связь между координатами в этих системах выражается следующим образом:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \cos \theta = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \theta = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

Подставляя их значения в формулы (z), получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2} \cdot \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2} \cdot \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{\alpha + (\sin 2\alpha)/2} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} (6.12)$$

Исследуем полученные формулы на примере клина с углом  $\alpha = \pi/6$  (см. рис. 39). В сечении  $mn$  этого клина, находящегося на расстоянии  $x_0$  от вершины, напряжения в соответствии с (6.12) равны:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{P}{0,957} \cdot \frac{x_0^3}{(x_0^2 + y^2)^2}; \quad \sigma_y = -\frac{P}{0,957} \cdot \frac{x_0 y^2}{(x_0^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{P}{0,957} \cdot \frac{x_0^2 y}{(x_0^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} (d)$$

Эпюры этих напряжений изображены на рис. 39.

Для сравнения приведем решение, получаемое методами сопротивления материалов, где принимают при сжатии  $\sigma_y^0 = \tau_{xy}^0 = 0$ ,  $\sigma_x^0$  — распределено равномерно по сечению:

$$\sigma_x^0 = -\frac{P}{F_{mn}} = -\frac{P}{2x_0 \operatorname{tg} \alpha} = -0,866 \frac{P}{x_0}. \quad (6.13)$$

Сравнивая эти напряжения с (6), заключаем, что  $\sigma_x^0$ , полученное методами сопротивления материалов, отличается от максимального  $\sigma_x$ , полученного методами теории упругости, на 17%. С увеличением угла раствора  $\alpha$  эта разница растёт.

### 6.5. Действие сосредоточенной силы, приложенной к границе полуплоскости

На рис. 40 изображена упругая среда, ограниченная плоскостью  $AB$  и простирающаяся неограниченно вниз. В точке  $O$  приложена сила  $P$ , перпендикулярная плоскости  $AB$ . Эта задача будет плоской в двух случаях. Если протяженность среды в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, весьма мала, то имеем дело с обобщенным плоским напряженным состоянием. Если же протяженность среды в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа, велика, то имеем дело с плоской деформацией, и в этом случае сила  $P$  представляет собой нагрузку, равномерно распределенную вдоль прямой, перпендикулярной плоскости чертежа. В случае плоской задачи рассматриваемая среда называется упругой полуплоскостью или полубесконечной пластинкой.

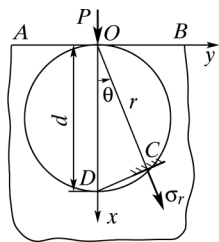


Рис. 40. Действие силы  $P$  на упругую полуплоскость

Полуплоскость можно рассматривать как частный случай клина при угле раствора  $2\alpha = \pi$ .

Полагая также  $\beta = 0$ , так как сила  $P$  направлена вдоль оси  $x$ , из формул (150) и (151) получаем постоянные:

$$\theta_0 = 0; \quad k = \frac{P}{2\pi}.$$

Подставляя эти постоянные в формулы (6.7), находим напряжения в точках упругой полуплоскости:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta; \\ \sigma_\theta &= \tau_{r\theta} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.14)$$

Ж.В. Буссинеском предложено следующее графическое представление напряженного состояния внутри полуплоскости: если провести окружность, касающуюся границы полуплоскости в точке  $O$  приложения нагрузки  $P$ , то эта окружность будет представлять собой геометрическое место точек с одинаковыми радиальными напряжениями  $\sigma_r$  (круг Буссинеска). Для доказательства этого проведем через точку  $O$  (см. рис. 40) окружность диаметром  $OD = d$ , касательную к границе полуплоскости  $AOB$ , а из точки  $O$  — произвольный радиус-вектор  $OC = r$ . Из треугольника  $OCD$  следует:

$$r = d \cos \theta \quad \text{или} \quad \frac{\cos \theta}{r} = \frac{1}{d}.$$

Подставляя это соотношение в формулу (156), получаем:

$$\sigma_r = -(2P)/(\pi d). \quad (6.15)$$

Таким образом, во всех точках проведенной окружности радиальные напряжения  $\sigma_r$  одинаковы.

### 6.6. Приложение теории плоской задачи к определению напряжений в основании фундамента

Результаты, полученные в предыдущем пункте, можно применять для определения напряжений в основании фундамента. Основанием фундамента чаще всего бывает грунт, не обладающий упругими свойствами. Однако практически для всех грунтов при небольших внешних давлениях можно принимать линейную зависимость между деформациями и напряжениями и использовать уравнения теории упругости.

В инженерной практике при расчете фундаментов необходимо знать распределение напряжений в глубине грунта по горизонтальному и вертикальному сечениям, поэтому в предыдущей задаче от напряжений в полярной системе координат перейдем к напряжениям в

декартовой системе координат  $xOy$ . Подставляя напряжения из формул (6.14) в формулы (6.11), получаем:

$$\sigma_x = -\frac{2P}{\pi r} \cos^3 \theta; \quad \sigma_y = -\frac{2P}{\pi r} \cos \theta \sin^2 \theta; \quad \tau_{xy} = -\frac{2P}{\pi r} \cos^2 \theta \sin \theta.$$

Используя формулы перехода от одной системы координат к другой (6.12), выразим эти напряжения через декартовы координаты:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{x^3}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \sigma_y &= -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{xy^2}{(x^2 + y^2)^2}; \\ \tau_{xy} &= -\frac{2P}{\pi} \cdot \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \right\} \quad (6.16)$$

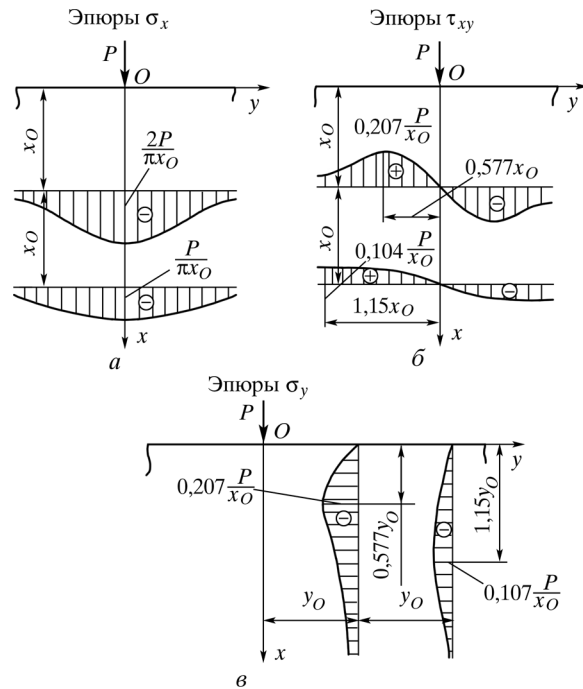


Рис. 41. Эпюры нормальных и касательных напряжений при действии силы на полуплоскость

Эпюры нормальных  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и касательных  $\tau_{xy}$  напряжений для двух горизонтальных уровней показаны на рис. 41.

Как следует из полученных значений напряжений  $\sigma_x$  (см. рис. 41, а),  $\sigma_y$  (см. рис. 41, в) и  $\tau_{xy}$  (рис. 41, б) по мере удаления от точки приложения нагрузки они затухают не только по линии действия силы и в сторону от этого направления.

Так, нормальные напряжения  $\sigma_x$  (см. рис. 41, а), действующие в горизонтальных сечениях, достигают максимума под силой: при значении  $x_0$  напряжения  $\sigma_x = -\frac{2P}{\pi x_0}$ , при  $2x_0 - \sigma_x = -\frac{P}{\pi x_0}$ . Другими сло-

вами, они затухают при удалении от точки приложения силы  $P$  как в стороны, так и в глубину.

### 6.7. Функция напряжений для плоской задачи в полярных координатах

Решение плоской задачи в полярных координатах в напряжениях заключается в отыскании трех функций —  $\sigma_r(r, \theta)$ ,  $\sigma_\theta(r, \theta)$  и  $\tau_{r\theta}(r, \theta)$  — с помощью трех уравнений: двух уравнений равновесия (6.1) и уравнения сплошности (6.2), удовлетворяющих условиям на поверхности.

Аналогично тому, как это было сделано при решении плоской задачи в декартовых координатах, решение плоской задачи в полярных координатах можно свести к отысканию одной функции напряжений  $\varphi(r, \theta)$ . Введем эту функцию так, чтобы напряжения выражались через нее следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\} \quad (6.17)$$

Подставляя эти соотношения в уравнения равновесия (6.1), убеждаемся, что при отсутствии объемных сил уравнения равновесия об-



ращаются в тождества. Чтобы преобразовать уравнение сплошности (6.2), сложим почленно формулы для нормальных напряжений (6.17):

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}.$$

В правой части этой суммы согласно формуле (6.3) стоит оператор Лапласа над функцией  $\varphi(r, \theta)$ . Следовательно:

$$\sigma_r + \sigma_\theta = \nabla^2 \varphi.$$

Подставляя это соотношение в уравнение сплошности (6.2), получаем:

$$\nabla^2 \nabla^2 \varphi = 0$$

или

$$\nabla^4 \varphi = 0. \quad (6.18)$$

В развернутом виде это уравнение представляется следующим образом:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2} \right) = 0. \quad (6.19)$$

Таким образом, функция напряжений  $\varphi(r, \theta)$  для плоской задачи в полярных координатах должна быть функцией бигармонической.

## 6.8. Осесимметричные задачи. Решение в перемещениях

Остановимся на плоских задачах, в которых напряжения не зависят от полярного угла  $\theta$ . Как следует из зависимостей (6.17) в этих задачах функцию напряжений можно считать не зависящей от  $\theta$ . Бигармоническое уравнение (6.19) примет более простой вид:

$$\left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \right) \left( \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dr} \right) = 0$$

или после дифференцирования:

$$\frac{d^4 \varphi}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 \varphi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{d\varphi}{dr} = 0. \quad (6.20)$$

Также упростятся выражения напряжений через функцию  $\varphi(r)$  из (6.17):

$$\sigma_r = \frac{1}{r} \cdot \frac{d\varphi}{dr}; \quad \sigma_\theta = \frac{d^2 \varphi}{dr^2}; \quad \tau_{r\theta} = 0. \quad (6.21)$$

Из уравнений равновесия (6.1) при отсутствии объемных сил останется только одно:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \quad (6.22)$$

Формулы Коши (6.5) упростятся, так как составляющая перемещения  $u_\theta = 0$  в силу симметрии:

$$\varepsilon_\theta = \frac{u_r}{r}; \quad \varepsilon_r = \frac{du_r}{dr}; \quad \gamma_{r\theta} = 0. \quad (6.23)$$

Из формул (6.6) закона Гука останутся лишь две:

$$\varepsilon_\theta = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_r); \quad \varepsilon_r = \frac{1}{E}(\sigma_r - \mu\sigma_\theta). \quad (6.24)$$

Осесимметричную задачу в перемещениях можно решить в общем виде. Для этого из формул (6.24) находим:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2}(\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

С помощью формул Коши (6.23) исключаем из уравнений (a) составляющие относительных деформаций  $\varepsilon_\theta$  и  $\varepsilon_r$ :

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{du_r}{dr} + \mu \frac{u_r}{r} \right); \quad \sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{u_r}{r} + \mu \frac{du_r}{dr} \right). \quad (b)$$

Подставляя (b) в уравнение равновесия (6.22), получаем следующее дифференциальное уравнение относительно составляющей перемещения  $u_r$ :

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = 0. \quad (6.25)$$

Это дифференциальное уравнение с переменными коэффициентами. Для решения приведем его к уравнению с постоянными коэффициентами с помощью подстановки:

$$t = \ln r \quad (\vartheta)$$

или

$$r = e^t. \quad (\varepsilon)$$

Дифференцируя соотношение (ϑ) по переменной  $r$ , получаем:

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{r}. \quad (\partial)$$

Найдем связь между производными от функции  $u_r$  по старой и новой переменным:

$$\frac{du_r}{dr} = \frac{du_r}{dt} \cdot \frac{dt}{dr}.$$

С учетом соотношения (∂) получаем:

$$\frac{du_r}{dr} = \frac{1}{r} \cdot \frac{du_r}{dt}. \quad (\varepsilon)$$

Вторая производная:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u_r}{dr^2} &= \frac{d}{dr} \left( \frac{du_r}{dr} \right) = \frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{du_r}{dt} \right) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{du_r}{dt} + \\ &+ \frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left( \frac{du_r}{dt} \right) = -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{du_r}{dt} + \frac{1}{r} \cdot \frac{d^2 u_r}{dt^2} \cdot \frac{dt}{dr} = \\ &= \frac{1}{r^2} \left( \frac{d^2 u_r}{dt^2} - \frac{du_r}{dt} \right). \end{aligned} \quad (\varkappa)$$

Подставляя производные (ε) и (κ) в уравнение (6.25), находим:

$$\frac{d^2 u_r}{dt^2} - u_r = 0.$$

Решение этого уравнения имеет вид:

$$u_r = Ae^t + Be^{-t}.$$

Переходя к старой переменной  $r$  согласно зависимостям (ϑ) и (ε), получаем следующее решение уравнения (6.25):

$$u_r = Ar + \frac{B}{r}. \quad (6.26)$$

Так как  $\frac{du_r}{dr} = A - \frac{B}{r^2}$ , после подстановки в уравнение (6.23) значения  $u_r$  и ее производной по  $r$ , получим:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_r &= A - \frac{B}{r^2}; \\ \varepsilon_\theta &= A + \frac{B}{r^2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.27)$$

а из формул (б) — составляющие напряжений:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu)A - (1-\mu)\frac{B}{r^2} \right]; \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} \left[ (1+\mu)A + (1-\mu)\frac{B}{r^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (6.28)$$

Постоянные  $A$  и  $B$  определяются из граничных условий.

### Контрольные вопросы

1. Что называется простым радиальным напряженным состоянием?
2. Как определяются постоянные интегрирования после решения уравнений равновесия и сплошности для клина, нагруженного продольной силой?
3. В чем смысл задачи Буссинеска?
4. Что такое круг Буссинеска и каковы его свойства?
5. Как записываются функции напряжений для плоской задачи теории упругости в полярных координатах?
6. Запишите функцию напряжений для плоской задачи в полярных координатах.
7. Какое решение осесимметричной задачи имеет точное решение?

## ЧАСТЬ 2

### Раздел III ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

#### Глава 7 ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК

Я кланяюсь низко познания морю безбрежному  
разумный свой век, многоопытный век свой любя.  
А все-таки жаль, что кумиры нам сняться по-прежнему  
и мы до сих пор все холопами числим себя.

Б. Окуджава<sup>1</sup>

##### 7.1. Основные понятия и гипотезы

Пластинкой называется призматическое или цилиндрическое тело, высота которого мала по сравнению с размерами в плане. Высота такого тела называется толщиной пластинки и обозначается  $h$ .

Плоскость, делящая пластинку пополам по толщине, называется *срединной плоскостью*. При изгибе пластинки срединная плоскость превращается в изогнутую срединную поверхность пластинки.

Линия пересечения боковой поверхности пластинки со срединной плоскостью называется *контуром* пластинки.

Для исследования деформаций пластинки прямоугольную систему координат будем располагать так, чтобы координатная плоскость  $xOy$  совпала со срединной плоскостью пластинки. Ось  $z$  будем направлять вниз. При таком выборе системы координат составляющие перемещений по оси  $x$  будут  $u_x$ , оси  $y$  —  $u_y$ , а в направлении оси  $z$  —  $u_z$ , которое будет представлять собой прогиб пластинки. Положение на-

чала координат в срединной плоскости будем выбирать в каждом рассматриваемом случае в зависимости от очертания контура пластинки и характера закрепления ее краев (рис. 42).

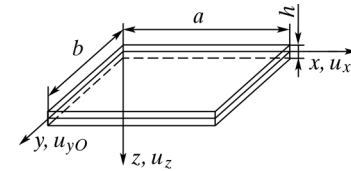


Рис. 42. Тонкая прямоугольная пластинка

При расчете пластинок различают тонкие пластинки и толстые плиты, которые применяются в строительстве.

*Тонкими* называются пластинки, имеющие отношение толщины к наименьшему характерному размеру в плане примерно в следующих пределах:

$$\frac{1}{5} \geq \frac{h}{b} \geq \frac{1}{80}.$$

Величина ожидаемых прогибов  $w$  для такой пластинки не более  $h/4$  (см. рис. 42). Как показал Б.Г. Галеркин, теорию тонких пластинок можно использовать даже при  $h/b > 1/3$ .

Пластинки, у которых  $h/b > 1/3$ , рассчитываются по теории толстых плит, а пластинки, имеющие прогибы более  $h/4$ , рассчитываются по теории гибких пластинок или мембран.

Тонкие пластинки можно рассчитывать по приближенной теории — технической теории изгиба пластинок, основанной на следующих гипотезах, предложенных Кирхгофом:

1. Гипотеза прямых нормалей: любой линейный элемент, нормальный к срединной плоскости пластинки, остается прямолинейным и нормальным к срединной поверхности после деформации, и длина его не изменяется.

Любой линейный элемент, нормальный к срединной плоскости, направлен вдоль оси  $z$ , и, следовательно, первая часть гипотезы предполагает, что прямые углы между этим элементом и осями  $x$  и  $y$  остаются прямыми, т. е. сдвиги в указанных плоскостях отсутствуют:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{yz} &= 0; \\ \gamma_{zx} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

<sup>1</sup> Окуджава Б. Музыка души/ Булат окуджава. М.: НексМЕдиа; Комсомольская правда, 2012.

Гипотеза о сохранении длины прямоугольного элемента предполагает, что линейная деформация в направлении оси  $z$  отсутствует:

$$\varepsilon_z = 0. \quad (7.2)$$

2. Гипотеза о нерастяжимости срединной плоскости: в срединной плоскости отсутствуют деформации растяжения, сжатия и сдвига, а значит, срединная плоскость является нейтральной. Следовательно, в срединной плоскости (см. рис. 42) перемещения:

$$u_{x0} = 0; \quad u_{y0} = 0. \quad (7.3)$$

3. Гипотеза об отсутствии давления между слоями пластинки. Ввиду малости давления между слоями пластинки, параллельными срединной плоскости, напряжением  $\sigma_z$  по сравнению с напряжениями  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  можно пренебречь.

## 7.2. Перемещения и деформации в пластинке

Изучение изгиба пластинки начнем с определения перемещений и деформаций. Будем исследовать пластинку, несущую поперечную нагрузку, т. е. нагрузку, нормальную к срединной плоскости пластинки. Под действием этой нагрузки пластинка получит перемещения. Для их определения обратимся к принятым гипотезам.

Согласно первой гипотезе линейная деформация в направлении оси  $z$   $\varepsilon_z = 0$ . Подставляя это условие в формулу Коши [1], получаем:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0.$$

Отсюда следует, что прогибы пластинки  $u_z$  не зависят от координаты  $z$ , т. е.

$$u_z = u_z(x, y).$$

Это означает, что все точки пластинки, лежащие на одной вертикали, получают одинаковые прогибы. Следовательно, достаточно определить прогибы срединной плоскости пластинки, чтобы знать прогибы всех ее точек.

Рассматривая условия для сдвигов (7.1), из формул Коши [1] получаем:

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0; \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0.$$

Откуда находим производные от составляющих перемещения по осям  $x$  —  $u_x$  и  $y$  —  $u_y$  по координате  $z$ :

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}.$$

Интегрируя эти уравнения по  $z$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -z \frac{\partial u_z}{\partial x} + f_1(x, y); \\ u_y &= -z \frac{\partial u_z}{\partial y} + f_2(x, y). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Для вычисления функций  $f_1(x, y)$  и  $f_2(x, y)$ , появившихся при интегрировании уравнений в частных производных, воспользуемся гипотезой о нерастяжимости срединной плоскости. Согласно этой гипотезе составляющие перемещения  $u_x$  и  $u_y$  (7.3) на срединной плоскости  $u_{x0} = 0$ , а также  $u_{y0} = 0$  при  $z = 0$ . Подставляя эти условия в формулы (a), получаем:

$$u_{x0} = f_1(x, y) = 0; \quad u_{z0} = f_2(x, y) = 0.$$

Тогда формулы (a) примут следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} u_x &= -z \frac{\partial u_z}{\partial x}; \\ u_y &= -z \frac{\partial u_z}{\partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

Таким образом, составляющие перемещения точек пластинки в направлениях осей  $x$  и  $y$  выражены через функцию прогибов срединной плоскости пластинки.

Составляющие деформации в пластинке, отличные от нуля, найдем с помощью формул Коши, подставляя в них значения составляющих перемещения (7.4):

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}; \\ \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\} \quad (7.5)$$

Здесь составляющие деформации также, как и составляющие перемещения в соотношениях (7.4), выражены через одну функцию прогибов срединной плоскости пластинки.

### 7.3. Напряжения в пластинке

Теперь перейдем к исследованию напряжений в пластинке. Для вычисления нормальных напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  возьмем две первые формулы закона Гука [1]:

$$\varepsilon_x = 1/E [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; \quad \varepsilon_y = 1/E [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)].$$

На основании третьей гипотезы напряжение  $\sigma_z = 0$ . Тогда с учетом (7.5) получим:

$$\begin{aligned} -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} &= \frac{1}{E} (\sigma_x - \mu \sigma_y), \\ -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} &= \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x). \end{aligned}$$

Выразив из полученных соотношений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ , окончательно получим:

$$\begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right). \end{aligned} \quad (a)$$

Формула закона Гука для угловой деформации  $\tau_{xy} = G\gamma_{xy}$  после подстановки  $\gamma_{xy}$  из формул (7.5) примет такой вид:

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}. \quad (б)$$

А касательные напряжения в двух других плоскостях после подстановки составляющих деформации из формул (7.1) в формулы закона Гука обратятся в нуль:

$$\begin{aligned} \tau_{yz} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{yz} = 0; \\ \tau_{zx} &= \frac{E}{2(1+\mu)} \gamma_{zx} = 0. \end{aligned}$$

Однако в действительности эти касательные напряжения не равны нулю, такой результат получен только вследствие принятых ранее гипотез и противоречит условиям равновесия. Для отыскания этих напряжений рассмотрим дифференциальные уравнения равновесия [1]:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Пренебрегая объемными силами, из первого уравнения находим:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y}.$$

Подставим сюда напряжения из формул (а) и (б):

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + \frac{Ez}{1+\mu} \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right).$$

После дифференцирования и упрощения получим:

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)$$

или

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = \frac{Ez}{1-\mu^2} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z.$$

Интегрируя по  $z$ , находим:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z + f_1(x, y). \quad (в)$$

Для определения произвольной функции  $f_1(x, y)$  имеем следующие граничные условия: на верхней и нижней поверхностях пластинки нет касательных нагрузок, т. е. при  $z = \pm h/2$  должно быть  $\tau_{zx} = 0$ . Подставляя эти условия в формулу (в), получаем:

$$0 = \frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z + f_1(x, y),$$

откуда находим искомую функцию:

$$f_1(x, y) = -\frac{Eh^2}{8(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z.$$

Введя полученное значение  $f_1(x, y)$  в формулу (6), получаем:

$$\tau_{xz} = \tau_{zx} = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z. \quad (z)$$

Решая таким же путем второе уравнение равновесия относительно напряжения  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ , находим:

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 u_z. \quad (d)$$

Итак, в сечениях пластинки, перпендикулярных к ее срединной плоскости, возникают согласно формулам (a), (6), (z) и (d) следующие напряжения:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right); \\ \sigma_y &= -\frac{Ez}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right); \\ \tau_{xy} &= -\frac{Ez}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}; \\ \tau_{yz} &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 u_z; \\ \tau_{zx} &= -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z. \end{aligned} \right\} \quad (7.6)$$

На рис. 43 показано распределение этих напряжений по толщине пластинки. Напряжения  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  и  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$  распределяются по линейному закону, обращаясь в нуль в точках срединной плоскости, а напряжения  $\tau_{zy}$  и  $\tau_{zx}$  распределяются по параболе, достигая в точках срединной плоскости максимального значения. Так же распределяются касательные напряжения и при поперечном изгибе балок прямоугольного сечения.

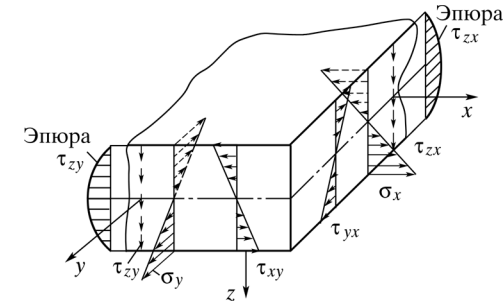


Рис. 43. Распределение напряжений в сечениях пластинки

Остается исследовать нормальные напряжения  $\sigma_z$ , которыми мы пренебрегли по сравнению с напряжениями  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ . Для их определения возьмем третье уравнение равновесия и, считая объемные силы  $Z=0$ , найдем:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = -\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} - \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y}.$$

Подставив сюда касательные напряжения  $\tau_{zy}$  и  $\tau_{zx}$  из формул (7.6), после упрощения получаем:

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) \nabla^4 u_z.$$

Интегрируя по  $z$ , находим:

$$\sigma_z = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{h^2 z}{4} - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^4 u_z + f_2(x, y). \quad (e)$$

Для определения произвольной функции  $f_2(x, y)$  рассмотрим случай загрузки пластинки поперечной нагрузкой на верхней грани интенсивностью  $q_1(x, y)$ , а на нижней — интенсивностью  $q_2(x, y)$ , направленными в сторону положительной оси  $z$  (рис. 44). В этом случае граничные условия имеют вид: при  $z = -h/2$   $\sigma_z = -q_1$ , а при  $z = +h/2$   $\sigma_z = q_2$ . Подставляя эти условия в формулу (e), получаем:

$$-q_1 = -\frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \nabla^4 u_z + f_2(x, y),$$

$$q_2 = \frac{Eh^3}{24(1-\mu^2)} \nabla^4 u_z + f_2(x, y).$$



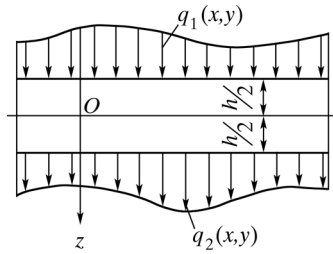


Рис. 44. Схема загрузки пластинки поперечной нагрузкой

В правой части полученной первой зависимости поставлен знак минус, так как напряжение  $\sigma_z$  — отрицательное.

Складывая почленно эти соотношения, находим:

$$q_2 - q_1 = 2f_2(x, y),$$

откуда произвольная функция:

$$f_2(x, y) = \frac{q_2 - q_1}{2}.$$

Следовательно, формула (e) примет такой вид:

$$\sigma_z = \frac{q_2 - q_1}{2} + \frac{E}{2(1-\mu^2)} \left( \frac{h^2 z}{4} - \frac{z^3}{3} \right) \nabla^4 u_z. \quad (7.7)$$

Напряжения, подсчитанные по этой формуле, имеют тот же порядок, что и интенсивность поперечной нагрузки  $q$ , и составляют незначительную часть напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ .

В формулах (7.6) и (7.7) все напряжения выражены через одну функцию двух переменных  $u_z(x, y)$ , следовательно, функция прогибов играет здесь ту же роль, что и функция напряжений в плоской задаче.

#### 7.4. Усилия в пластинке

Исследуем, какие усилия создаются напряжениями (7.6) в сечениях пластинки, нормальных к ее срединной плоскости. На рис. 45 изображен элемент пластинки, вырезанный такими сечениями. Рассмотрим вначале площадку этого элемента с нормалью  $x$ . На этой площадке действуют составляющие напряжений  $\sigma_x$ ,  $\tau_{yx}$  и  $\tau_{zx}$ . На рис. 45 показаны положительные величины этих напряжений, т. е. нормальное напряжение  $\sigma_x$  направлено по внешней нормали к

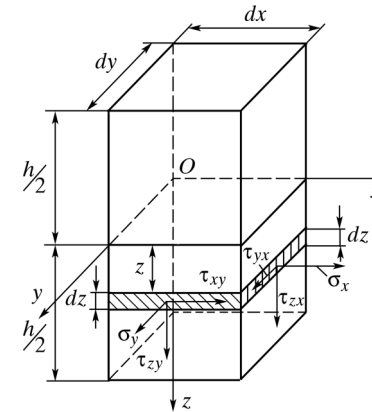


Рис. 45. Обозначение положительных составляющих напряжений

сечению, а касательные — в направлении соответствующих положительных координатных осей, так как внешняя нормаль к сечению совпадает с положительным направлением оси  $x$ .

Обозначаем через  $N_x$  погонную, т. е. приходящуюся на единицу ширины сечения, нормальную силу в сечении с нормалью  $x$ . Она равна сумме проекций на ось  $x$  равнодействующих напряжений в сечении с нормалью  $x$ . На ось  $x$  проецируется только нормальное напряжение  $\sigma_x$ . Его равнодействующая на бесконечно малой площадке  $dydz$  равна  $\sigma_x dydz$ , а на единицу ширины сечения приходится сила, равная  $\sigma_x dz$ . Суммируя эти бесконечно малые проекции по толщине пластинки, получаем выражение для погонной нормальной силы:

$$N_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x dz.$$

Подставим сюда напряжение  $\sigma_x$  из формул (7.6) и вынесем за знак интеграла величины, не зависящие от координаты  $z$ :

$$N_x = -\frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z dz.$$

Под знаком входящего сюда интеграла стоит нечетная функция, а пределы интегрирования отличаются только знаком. Следовательно, этот интеграл равен нулю, а значит, и усилие

$$N_x = 0,$$

т. е. нормальной силы в этом сечении не возникает.

Далее подсчитаем изгибающий момент. Обозначим через  $M_x$  погонный изгибающий момент в сечении с нормалью  $x$ . Изгибающий момент в рассматриваемом сечении создается нормальными напряжениями  $\sigma_x$ . Равнодействующая этих напряжений на площадке толщиной  $dz$  и шириной, равной единице, равна  $\sigma_x dz$ , а изгибающий момент  $\sigma_x dz \cdot z$ . Суммируя эти моменты от напряжения  $\sigma_x$  на всех таких площадках по толщине пластинки, получаем выражение для погонного изгибающего момента в сечении с нормалью  $x$ :

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} \sigma_x z dz. \quad (a)$$

Подставляя в соотношение (a) значение нормального напряжения  $\sigma_x$  из формул (7.6) и вынося за знак интеграла величины, не зависящие от координаты  $z$ , находим:

$$M_x = -\frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz.$$

После интегрирования получаем:

$$M_x = -D \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right).$$

Входящая сюда величина

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)} \quad (7.8)$$

называется *цилиндрической жесткостью пластинки* и является физической и геометрической характеристикой пластинки при ее изгибе.

Погонная поперечная сила в сечении с нормалью  $x$  равна

$$Q_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz.$$

Подставляя в этот интеграл значение касательного напряжения  $\tau_{yx}$  из формул (7.6), получим:

$$Q_x = -\frac{E}{2(1-\mu^2)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z \int_{-h/2}^{h/2} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right) dz.$$

После интегрирования находим:

$$Q_x = -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z.$$

Погонную сдвигающую силу  $S_x$  находим, проецируя усилия в этом сечении на ось  $y$ :

$$S_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz.$$

Подставляя в этот интеграл значение касательного напряжения  $\tau_{yx}$  из формул (7.6), получим:

$$S_x = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} dz = -\frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z dz = 0,$$

т. е. сдвигающая сила в этом сечении равна нулю.

Погонный крутящий момент в сечении с нормалью  $x$  равен:

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz.$$

Подставляя в этот интеграл значение касательного напряжения  $\tau_{yx}$  из формул (7.6), находим:

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} \tau_{yx} z dz = -\frac{E}{1+\mu} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \int_{-h/2}^{h/2} z^2 dz.$$

После интегрирования получим:

$$M_{yx} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}. \quad (б)$$

Аналогично найдем усилия, действующие в сечении с нормалью  $y$  (см. рис. 45):

погонный изгибающий момент:

$$M_y = -D \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right);$$

погонная поперечная сила:

$$Q_y = -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 u_z;$$

погонный крутящий момент:

$$M_{xy} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}. \quad (6)$$

Сравнивая формулы (б) и (6), получаем:

$$M_{yx} = M_{xy} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} = H.$$

Таким образом, в сечениях пластинки, перпендикулярных к ее срединной плоскости, под действием поперечной нагрузки возникают следующие погонные усилия:

изгибающие моменты:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -D \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right); \\ M_y &= -D \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (7.9)$$

поперечные силы:

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -D \frac{\partial}{\partial x} \nabla^2 u_z; \\ Q_y &= -D \frac{\partial}{\partial y} \nabla^2 u_z \end{aligned} \right\} \quad (7.10)$$

и крутящий момент:

$$H = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}. \quad (7.11)$$

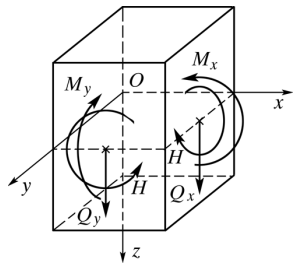


Рис. 46. Внутренние силовые факторы в сечениях пластинки

Все внутренние силовые факторы выражены через прогибы срединной плоскости пластинки. На рис. 46 показаны положительные значения найденных усилий, причем положительные направления усилий совпадают с направлением действия соответствующих положительных составляющих напряжений.

## 7.5. Выражение напряжений через усилия

Формулы (7.9)—(7.11) позволяют определять моменты и поперечные силы в любой точке срединной плоскости пластинки. По их величине можно найти напряжения в любой точке пластинки. Действительно, сравнивая формулы (7.6) нормальных напряжений  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$  с формулами (7.9) изгибающих моментов  $M_x$  и  $M_y$ , получаем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{12 M_x z}{h^3}; \\ \sigma_y &= \frac{12 M_y z}{h^3}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Полученные формулы соответствуют формулам для определения нормальных напряжений при изгибе балки прямоугольного сечения. В них входит момент инерции прямоугольного сечения при ширине сечения, равной единице, т. е.

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{h^3}{12}.$$

Тогда формулы (a) принимают вид, известный из курса сопротивления материалов для расчета балок при изгибе:

$$\sigma_x = \frac{M_x z}{I}; \quad \sigma_y = \frac{M_y z}{I}.$$

Максимальные нормальные напряжения возникают при  $z = \pm h/2$ :

$$\left. \begin{aligned} \max \sigma_x &= \frac{M_x}{W}; \\ \max \sigma_y &= \frac{M_y}{W}. \end{aligned} \right\} \quad (7.12)$$

Здесь

$$W = \frac{I}{h/2} = \frac{h^2}{6}$$

— момент сопротивления балки прямоугольного сечения высотой  $h$  и шириной, равной единице.

Из сравнения формул (7.6) и (7.11) следует:

$$\tau_{xy} = \frac{12 H z}{h^3}.$$

Максимальные касательные напряжения возникают при  $z = \pm h/2$  и равны:

$$\max \tau_{xy} = \frac{6H}{h^2}.$$

Для определения касательных напряжений  $\tau_{zx}$  и  $\tau_{zy}$  сравниваем формулы (7.6) и (7.10). В результате получим:

$$\tau_{zx} = \frac{6Q_x}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right);$$

$$\tau_{zy} = \frac{6Q_y}{h^3} \left( \frac{h^2}{4} - z^2 \right).$$

Аналогичные результаты получены в сопротивлении материалов по формуле Д.И. Журавского для балки прямоугольного сечения высотой  $h$  и шириной, равной единице. Максимальные напряжения возникают в точках срединной плоскости при  $z = 0$ , где они равны

$$\max \tau_{zx} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_x}{h};$$

$$\max \tau_{zy} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{h}.$$

## 7.6. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки

В полученных выше зависимостях напряжения и усилия в пластинке выражены через прогибы срединной плоскости пластинки  $u_z(x, y)$ . Следовательно, для определения напряжений и усилий необходимо заранее знать функцию  $u_z(x, y)$  — прогиб срединной плоскости пластинки.

Для составления дифференциального уравнения изогнутой срединной поверхности пластинки вырежем из нее бесконечно малый элемент  $dx dy$  и покажем действующие на него нагрузки (рис. 47).

На грани  $Oc$  элемента срединной плоскости действует погонная поперечная сила  $Q_x$ . При проецировании действующих сил на ось  $z$  силу  $Q_x$  необходимо умножить на длину грани  $dy$ , на которой она действует.

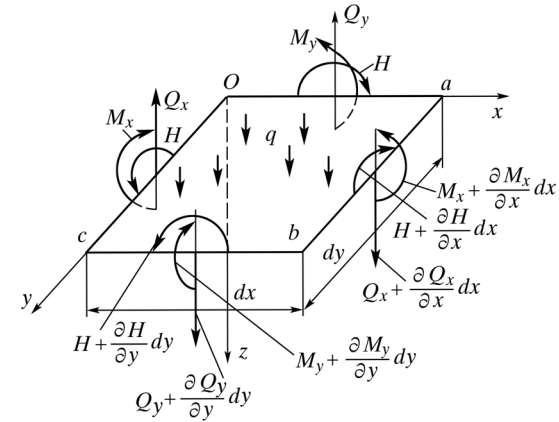


Рис. 47. Нагрузки, действующие на бесконечно малый элемент срединной поверхности пластинки

На грани  $ab$ , отстоящей от грани  $Oc$  на бесконечно малом расстоянии  $dx$ , поперечная сила получает бесконечно малое приращение и равна  $Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx$ .

Аналогично на гранях  $Oa$  и  $bc$  выделенного элемента срединной плоскости действуют, соответственно, погонные поперечные силы  $Q_y$  и  $Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy$ . По нормали к срединной плоскости пластинки действует поверхностная нагрузка интенсивностью  $q(x, y)$ .

Рассматриваемый элемент срединной плоскости находится в равновесии, следовательно, должны выполняться шесть условий равновесия: три уравнения проекций сил на координатные оси и три уравнения моментов относительно этих осей.

Спроецируем все силы, действующие на выделенный элемент (см. рис. 6), на ось  $z$ :

$$\left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy - Q_x dy + \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx - Q_y dx + q dx dy = 0.$$

После упрощения получаем:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = -q. \quad (7.13)$$

Уравнение моментов всех сил относительно оси  $y$  дает:

$$\begin{aligned} & \left( M_x + \frac{\partial M_x}{\partial x} dx \right) dy - M_x dy + \left( H + \frac{\partial H}{\partial y} dy \right) dx - H dx - \\ & - \left( Q_x + \frac{\partial Q_x}{\partial x} dx \right) dy dx + Q_y dx \frac{dx}{2} - \left( Q_y + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy \right) dx \frac{dx}{2} - \\ & - q dx dy \frac{dx}{2} = 0. \end{aligned}$$

После упрощения получаем:

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} = Q_x. \quad (7.14)$$

Аналогично из уравнения моментов относительно оси  $x$  получаем:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} = Q_y. \quad (7.15)$$

В зависимость (7.13) подставим значение поперечных сил  $Q_x$  из (7.14) и  $Q_y$  из (7.15). В результате этого получим:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q.$$

Подставив в полученное уравнение значение моментов из формул (7.9) и (7.11), найдем:

$$-D \left[ \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + \mu \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + 2(1-\mu) \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} + \mu \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} \right] = -q,$$

откуда после упрощения получим:

$$D \left( \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} \right) - q = 0 \quad (7.16)$$

или

$$D \nabla^4 u_z - q = 0. \quad (7.17)$$

Полученное уравнение представляет собой дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки, его обычно называют уравнение Софи Жермен.

При интегрировании уравнения Софи Жермен появятся произвольные постоянные, которые должны быть определены из условий на контуре пластинки, зависящих от характера закрепления ее краев.

## 7.7. Условия на контуре пластинки

На контуре пластинки в зависимости от характера закрепления краев могут быть заданы прогибы и углы поворота срединной плоскости, изгибающие и крутящие моменты, поперечные силы. Условия, при которых на контуре задаются перемещения, т. е. прогибы или углы поворота срединной плоскости, называются *геометрическими*. *Статическими* называются условия, при которых на контуре задаются усилия, т. е. изгибающие или крутящие моменты или поперечные силы. Если же на контуре заданы одновременно и перемещения, и усилия, условия называются *смешанными*. На каждом крае следует задать два граничных условия.

Сформулируем граничные условия для различных закреплений краев пластинки. Для этого рассмотрим прямоугольную пластинку (рис. 48).

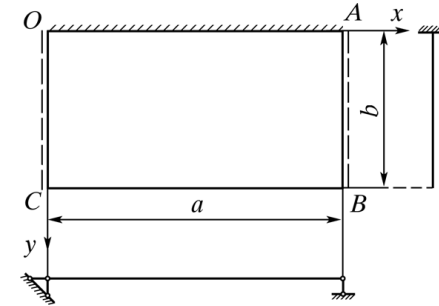


Рис. 48. Варианты закрепления краев пластинки:  $OA$  — защемление;  $AB$  и  $OC$  — шарнирное закрепление;  $BC$  — свободный край

*Защемленный край  $OA$ .* В защемлении отсутствуют прогибы, и невозможен поворот краевого сечения относительно оси  $x$ . В связи с этим имеем следующие условия:

при  $y = 0$  должно быть:  $u_z = 0$ ;  $\frac{\partial u_z}{\partial y} = 0$ .

*Шарнирно опертые края ОС и АВ.* На шарнирных краях прогибы и изгибающие моменты равны нулю, т. е.  $u_z = 0$  и  $M_x = 0$ . Выражая изгибающий момент через прогибы пластинки согласно формулам (7.9), последнее условие можно представить так:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0.$$

Поэтому граничные условия на шарнирно опертых краях *ОС* и *АВ* принимают такой вид:

$$\text{при } x = 0 \text{ и } x = a \text{ должно быть: } u_z = 0; \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0.$$

*Свободный край СВ.* На свободном крае должны обращаться в нуль изгибающий момент  $M_y$ , поперечная сила  $Q_y$  и крутящий момент  $H$ , т. е. вместо двух необходимых условий здесь появляются три условия. Такое противоречие связано с тем, что задача решается приближенно, и поэтому всем граничным условиям точно удовлетворить нельзя. Однако это противоречие можно устранить, объединив два последних условия.

Покажем, что крутящий момент и поперечную силу на контуре пластинки можно заменить одной силой, статически им эквивалентной. Рассмотрим крутящий момент  $H$ , распределенный вдоль грани *СВ*, параллельной оси  $x$  (рис. 49, *а*). На длине  $dx$  действует крутящий момент, равный  $Hdx$ . Этот момент можно представить в виде двух вертикальных противоположно направленных сил  $H$  с плечом  $dx$  (рис. 49, *б*). На соседнем элементе  $dx$  крутящий момент будет больше на бесконечно малую величину и равен  $\left(H + \frac{\partial H}{\partial x} dx\right) dx$ . Его также можно представить в виде двух вертикальных противоположно направленных сил  $H + \frac{\partial H}{\partial x} dx$  с плечом  $dx$ . Такую замену крутящих мо-

ментов вертикальными силами можно осуществить по всей длине границы *СВ*. На границе каждого бесконечно малого участка  $dx$ , за исключением крайних точек *С* и *В*, будут действовать по две противоположно направленные силы, разность между которыми равна  $\frac{\partial H}{\partial x} dx$ .

Следовательно, вдоль грани *СВ* будет действовать вертикальная распределенная по длине нагрузка интенсивностью  $\frac{\partial H}{\partial x}$  (рис. 49, *в*).

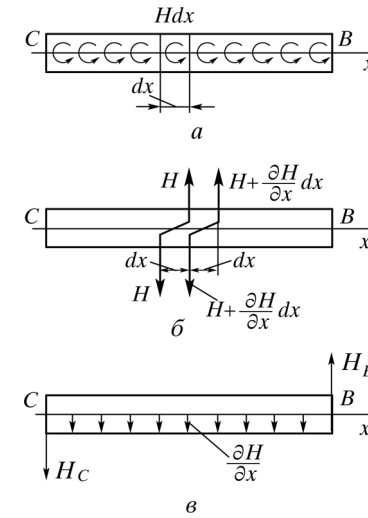


Рис. 49. Замена переменного погонного крутящего момента распределенной нагрузкой

В точках же *С* и *В* будут возникать сосредоточенные силы  $H_C$  и  $H_B$ . Полученную вертикальную нагрузку можно объединить с поперечной силой  $Q_y$  и считать, что на грани *СВ* действует приведенная поперечная сила интенсивностью

$$Q_y^{\text{прив}} = Q_y + \frac{\partial H}{\partial x}. \quad (7.18)$$

Аналогично вдоль граней контура пластинки, параллельных оси  $y$ , будет действовать приведенная поперечная сила с интенсивностью

$$Q_x^{\text{прив}} = Q_x + \frac{\partial H}{\partial y}. \quad (7.19)$$

Производные от функции, аппроксимирующей крутящий момент  $H$  (7.11), по  $x$  и  $y$  равны:

$$\left. \begin{aligned} Q_x^{\text{прив}} &= -D \left[ \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y^2} \right]; \\ Q_y^{\text{прив}} &= -D \left[ \frac{\partial^3 u_z}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^2 \partial y} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.20)$$



Таким образом, на каждой грани пластинки вместо трех усилий: изгибающего момента, крутящего момента и поперечной силы, можно рассматривать только два усилия: изгибающий момент и приведенную поперечную силу.

На рис. 50 показаны положительные направления этих приведенных поперечных сил на всех гранях прямоугольной пластинки, а также сосредоточенных сил, возникающих в углах пластинки.

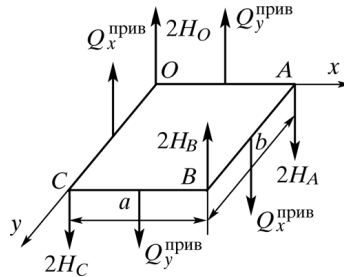


Рис. 50. Направление положительных приведенных сил

Следовательно, на свободной от закрепления грани вместо трех условий

$$M_y = 0; Q_y = 0; H = 0$$

можно потребовать удовлетворения лишь двух условий:

$$M_y = 0; Q_y^{\text{прив}} = 0. \tag{a}$$

Конечно, при этом граничные условия будут удовлетворяться приближенно. На основании принципа Сен-Венана такая замена поперечной силы и крутящего момента статически им эквивалентной приведенной поперечной силой вызовет лишь местные напряжения вблизи рассматриваемого края пластинки.

Внесем в условия (a) выражения изгибающего момента  $M_y$  (7.9) и приведенной поперечной силы  $Q_y^{\text{прив}} = 0$  (7.20). Тогда на свободной грани  $CB$  при  $y = b$  должно быть:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^3 u_z}{\partial y^3} + (2 - \mu) \frac{\partial^3 u_z}{\partial x^2 \partial y} = 0.$$

### 7.8. Эллиптическая пластинка

Решение дифференциального уравнения (7.16) для пластинки, контур которой очерчен по эллипсу, в частных случаях может быть получено в конечном виде. Для решения применим обратный метод, т. е., задаваясь видом функции прогибов  $u_z(x, y)$ , определим, каким нагрузкам и каким граничным условиям (условиям закрепления) соответствует эта функция.

Уравнение контура эллиптической пластинки (рис. 51) имеет вид

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0. \tag{a}$$

Зададимся функцией прогибов в форме

$$u_z = C \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2, \tag{б}$$

где  $C$  — постоянный коэффициент.

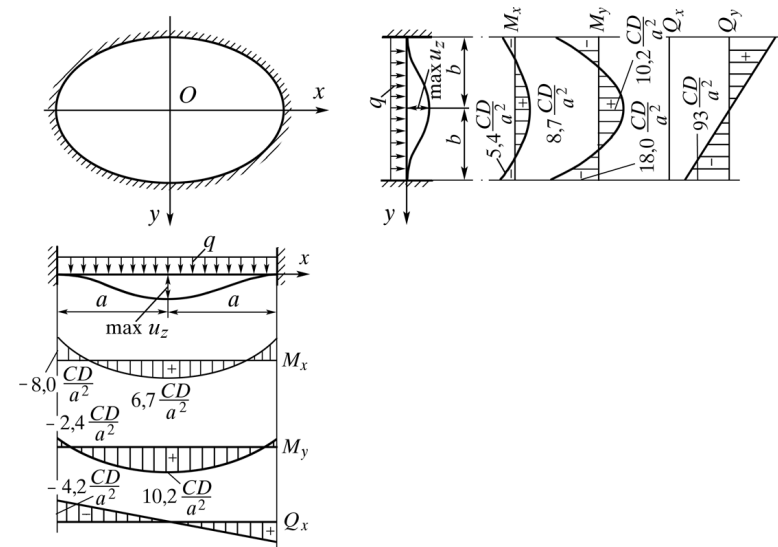


Рис. 51. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для эллиптической пластинки, защемленной по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, с отношением полуосей  $a/b = 1,5$  и коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,3$

Для определения  $C$  подставим функцию  $u_z(x, y)$  в уравнение Софьи Жермен (7.16), предварительно определив производные от этой функции:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_z}{\partial x} &= \frac{4Cx}{a^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right); & \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} &= \frac{4C}{a^2} \left( \frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right); \\ \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} &= \frac{24C}{a^4}; & \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} &= \frac{8C}{a^2 b^2}; & \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} &= \frac{24C}{b^4}. \end{aligned} \quad (6)$$

Подставив полученные производные в уравнение (7.16), получим:

$$\frac{24C}{a^4} + 2 \frac{8C}{a^2 b^2} + \frac{24C}{b^4} = \frac{q}{D},$$

откуда

$$C = \frac{q}{D \left( \frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)}. \quad (2)$$

Так как  $C$  является постоянной величиной, и  $q$  должно быть постоянным. Следовательно, функция (6) будет решением дифференциального уравнения (7.16) при поперечной нагрузке  $q$ , равномерно распределенной по поверхности пластинки.

Выясним теперь, каким условиям на контуре соответствует решение (6). Прогиб на контуре обращается в нуль, так как в скобках стоит выражение, равное нулю для любой точки контура. Производные  $\frac{\partial u_z}{\partial x}$

и  $\frac{\partial u_z}{\partial y}$  в соответствии с (6) для любой точки контура также обращаются в нуль, так как и в данном случае в скобках стоит выражение, равное нулю для любой точки контура. Таким образом, и прогибы, и углы поворота срединной плоскости на контуре пластинки равны нулю. Значит, пластинка защемлена по контуру.

Подставим постоянную  $C$  из формулы (2) в функцию (6):

$$u_z = \frac{q}{D \left( \frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)^2. \quad (7.21)$$

Таким образом, уравнение (7.21) описывает функцию прогибов срединной поверхности эллиптической в плане пластинки, защемленной по контуру и нагруженной сплошной равномерно распределенной поперечной нагрузкой  $q$ .

Характер изгиба срединной поверхности пластинки показан на рис. 51. Максимальный прогиб возникает в центре пластинки при  $x = y = 0$ :

$$\max u_z = \frac{q}{D \left( \frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^2 b^2} + \frac{24}{b^4} \right)}. \quad (7.22)$$

Сравнивая формулы (2) и (7.22), заключаем, что постоянная  $C$  равна прогибу в центре пластинки.

Подсчитаем усилия, возникающие в пластинке. Подставляя функцию прогибов (6) и производных (6) в формулы (7.9), находим изгибающие моменты в рассматриваемой пластинке:

$$\left. \begin{aligned} M_x &= -4CD \left[ \frac{1}{a^2} \left( \frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{\mu}{b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1 \right) \right]; \\ M_y &= -4CD \left[ \frac{1}{b^2} \left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{3y^2}{b^2} - 1 \right) + \frac{\mu}{a^2} \left( \frac{3x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

Изгибающие моменты в центре пластинки:

$$\left. \begin{aligned} M_x(0,0) &= 4CD \left( \frac{1}{a^2} + \frac{\mu}{b^2} \right); \\ M_y(0,0) &= 4CD \left( \frac{1}{b^2} + \frac{\mu}{a^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Изгибающие моменты у краев большой полуоси:

$$\left. \begin{aligned} M_x(\pm a, 0) &= -\frac{8CD}{a^2}; \\ M_y(\pm a, 0) &= -\frac{8\mu CD}{a^2}, \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

а у краев малой полуоси:

$$\left. \begin{aligned} M_x(0, \pm b) &= -\frac{8\mu CD}{b^2}; \\ M_y(0, \pm b) &= -\frac{8CD}{b^2}. \end{aligned} \right\} \quad (ж)$$

Подставив функцию прогибов (б) в зависимость (7.11), получим формулу для вычисления крутящих моментов в пластинке:

$$H = -\frac{8CD}{a^2 b^2} (1 - \mu) xy. \quad (7.24)$$

Полагая в (7.25)  $x = 0$  или  $y = 0$ , заключаем, что на осях симметрии рассматриваемой пластинки крутящий момент равен нулю.

Поперечные силы найдем подстановкой в формулы (7.10) функции прогибов (б):

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\frac{8CD}{a^4 b^2} (a^2 + 3b^2)x; \\ Q_y &= -\frac{8CD}{a^2 b^4} (3a^2 + b^2)y. \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

В центре пластинки поперечные силы равны нулю, а по краям полуосей

$$\left. \begin{aligned} Q_x(\pm a, 0) &= \mp \frac{8CD}{a^3 b^2} (a^2 + 3b^2); \\ Q_y(\pm a, 0) &= 0; \\ Q_x(0, \pm b) &= 0; \\ Q_y(0, \pm b) &= \mp \frac{8CD}{a^2 b^3} (3a^2 + b^2). \end{aligned} \right\}$$

Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для эллиптической пластинки с отношением полуосей  $a/b = 1,5$  и коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,3$  показаны на рис. 51.

Круглую пластинку, защемленную по контуру и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой  $q$ , можно рассматривать как частный случай эллиптической пластинки при  $b = a$ . Тогда по формуле (7.22) получаем максимальный прогиб в центре круглой пластинки:

$$\max w = \frac{qa^4}{64D}. \quad (7.26)$$

Из формулы (з) находим, что постоянная  $C$  для круглой пластинки равна:

$$C = \frac{q}{D \left( \frac{24}{a^4} + \frac{16}{a^4} + \frac{24}{a^4} \right)} = \frac{qa^4}{64D}.$$

По формулам (д) находим изгибающие моменты в центре пластинки:

$$\begin{aligned} M_x(0, 0) &= M_y(0, 0) = \\ &= \frac{4CD}{a^2} (1 + \mu) = \frac{qa^2}{16} (1 + \mu). \end{aligned}$$

По формулам (е) определяем изгибающие моменты в точках контура круглой пластинки в сечении, совпадающем с радиусом:

$$M_\theta = M_y(\pm a, 0) = -\mu \frac{qa^2}{8}$$

и в сечении, перпендикулярном радиусу (перпендикулярном оси  $x$ ):

$$M_r = M_x(\pm a, 0) = -\frac{qa^2}{8}.$$

Эпюры изгибающих моментов для круглой пластинки из материала с коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,3$  приведены на рис. 52.

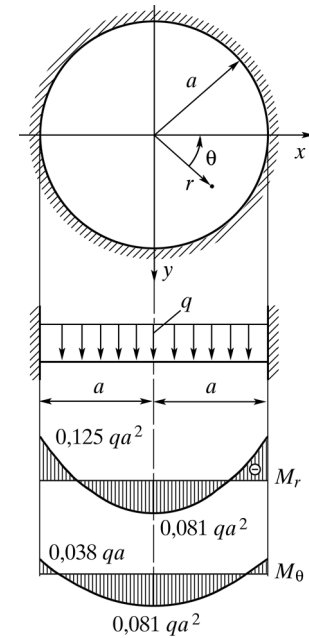


Рис. 52. Эпюры изгибающих моментов и поперечных сил для круглой пластинки, защемленной по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой, с коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,3$

## 7.9. Прямоугольная пластинка. Решение Навье

Для прямоугольной пластинки решение уравнения Софи Жермен (7.16) в конечном виде получить не удастся. Его можно найти в виде бесконечного ряда.

Рассмотрим прямоугольную пластинку (рис. 53), шарнирно опертую по контуру и нагруженную поперечной нагрузкой интенсивностью  $q(x, y)$ , которая изменяется по любому закону. Начало координат

нат расположим в углу пластинки. Размер пластинки в направлении оси  $x$  равен  $a$ , а в направлении оси  $y$  —  $b$ .

Решение уравнения Софи Жермен (7.16) будем искать в виде ряда, который представим в виде двойной тригонометрической суммы по синусам

$$u_z(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}, \quad (a)$$

где  $A_{mn}$  — коэффициенты ряда, постоянные числа;  $m$  и  $n$  — целые положительные числа 1, 2, 3, ...

В развернутом виде ряд (а) можно представить следующим образом:

$$u_z(x, y) = A_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{12} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \\ + A_{21} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + A_{22} \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b} + \dots$$

Для шарнирно опертой по контуру пластинки запишем следующие граничные условия:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0; \quad x = a; \\ u_z = 0; \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0; \end{array} \right\} \quad (б)$$

$$\left. \begin{array}{l} y = 0; \quad y = b; \\ u_z = 0; \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0. \end{array} \right\} \quad (в)$$

Нетрудно убедиться, что ряд (а) удовлетворяет этим условиям. Действительно, на грани пластинки при  $x = 0$ :

$$\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin 0 = 0,$$

а это означает в соответствии с (а), что прогиб  $u_z(x, y) = 0$ . На грани  $x = a$ :

$$\sin \frac{m\pi x}{a} = \sin m\pi = 0,$$

а значит, и прогиб  $u_z(x, y) = 0$ . Точно так же обращаются в нуль прогибы на гранях  $y = 0$  и  $y = b$ . Таким образом, граничные условия (б) и (в) для прогибов выполняются.

Вторые производные функции прогибов:

$$\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = - \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (г)$$

В производные (г) входят синусы тех же аргументов, что и в функцию (а). Поэтому вторые производные  $\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$  и  $\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}$  обращаются в нуль на всех гранях пластинки при  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$  и  $y = b$ . Следовательно, граничные условия (б) и (в) для изгибающих моментов также выполняются.

Определим коэффициенты ряда (а). Для этого подставим функцию прогибов (а) в уравнение Софи Жермен (7.16):

$$D \left( \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} \right) = q(x, y),$$

из которого получим:

$$\frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{n\pi}{b} \right)^4 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \\ \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{m\pi}{a} \right)^2 \left( \frac{n\pi}{b} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}.$$

Подставив полученные производные в (7.16), после упрощения получим:

$$D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = q(x, y). \quad (д)$$

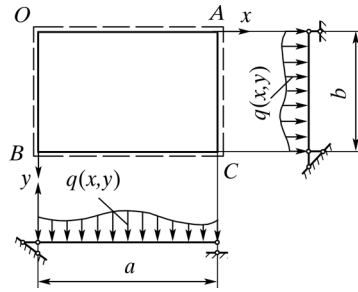


Рис. 53. Прямоугольная пластинка, шарнирно опертая по контуру и нагруженная поперечной нагрузкой интенсивностью  $q(x, y)$

Чтобы определить коэффициенты ряда, входящего в левую часть уравнения (д), необходимо нагрузку  $q(x, y)$ , входящую в правую часть этого уравнения, разложить в тригонометрический ряд. Для этого нагрузку  $q(x, y)$  представим в виде двойного тригонометрического ряда Фурье по синусам на прямоугольной области  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq y \leq b$ , получаем:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (e)$$

Как известно, коэффициенты  $C_{mn}$  ряда (e) определяются по формулам [2]:

$$C_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (ж)$$

Подставляя ряд (д) в уравнение (з), получаем:

$$\begin{aligned} D\pi^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} C_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Два ряда равны между собой, если равны между собой соответствующие члены обоих рядов. Таким образом:

$$D\pi^4 A_{mn} \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 = C_{mn}. \quad (з)$$

Подставляя в (з) значение  $C_{mn}$  из (ж), определим коэффициенты ряда (a) в виде:

$$A_{mn} = \frac{4}{D\pi^4 ab \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \int_0^a \int_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dx dy. \quad (u)$$

Таким образом, функция (a) является решением поставленной задачи, так как она удовлетворяет условиям на контуре пластинки и при выборе коэффициентов ряда в форме (u) удовлетворяет дифференциальному уравнению изгиба пластинки. Дальнейшая конкретизация задачи теперь зависит от вида функции  $q(x, y)$ .

Рассмотрим частные случаи.

**1. Нагрузка, равномерно распределенная по всей поверхности пластинки.** В этом случае  $q(x, y) = q = \text{const}$ . По формуле (u) находим:

$$A_{mn} = \frac{4q}{D\pi^4 ab \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \int_0^a \sin \frac{m\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{n\pi y}{b} dy. \quad (к)$$

После интегрирования получаем следующее значение коэффициентов ряда (a) при нагружении пластинки равномерно распределенной нагрузкой:

$$A_{mn} = \frac{16q}{D\pi^6 mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2};$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Последние ограничения вызваны тем обстоятельством, что полученные после интегрирования значения функций  $\cos m\pi$  и  $\cos n\pi$  не равны нулю при  $m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots$

После подстановки этих коэффициентов в ряд (a) находим выражение функции прогибов:

$$\begin{aligned} u_z(x, y) = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}; \\ (m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots) \end{aligned} \quad (7.27)$$

Максимальный прогиб, возникающий в центре пластинки при  $x = a/2$  и  $y = b/2$ , равен:

$$\max u_z(x, y) = \frac{16q}{\pi^6 D} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2};$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Подставляя в полученное значение  $\max u_z$  значение цилиндрической жесткости из формулы (7.8) и вынося за скобки  $a^4$ , получаем:

$$\max u_z(x, y) = \frac{192qa^4}{\pi^6 Eh^3} (1 - \mu^2) \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}. \quad (a)$$

Обычно расчеты ведутся с помощью таблиц. Для различных случаев загрузки и закрепления краев пластинки Б.Г. Галеркиным [3] составлены таблицы.

Для табулирования формулу (a) представим в виде:

$$\max u_z = \alpha \frac{qa^4}{Eh^3},$$

где коэффициент  $\alpha$  равен:

$$\alpha = \frac{192(1 - \mu^2)}{\pi^6} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2}}{mn \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2};$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots),$$

зависит только от отношения сторон пластинки  $a/b$ . Входящий сюда ряд очень быстро сходится. Так, сохраняя четыре члена ряда и принимая  $\mu = 0,3$ , находим для квадратной пластинки ( $a/b = 1$ ):

$$\alpha(1) = \frac{192(1 - \mu^2)}{\pi^6} \left[ \frac{1 \cdot 1}{1 \cdot 1(1^2 + 1^2)} + \frac{1 \cdot (-1)}{1 \cdot 3(1^2 + 3^2)} + \frac{(-1) \cdot 1}{3 \cdot 1(3^2 + 1^2)} + \frac{(-1) \cdot (-1)}{3 \cdot 3(3^2 + 3^2)} \right] = \frac{192 \cdot 0,91}{\pi^6} (0,2500 - 0,0033 - 0,0033 + 0,0003) = 0,0443.$$

Это значение равно точному, которое приводится в справочной литературе [4].

Изгибающие моменты получим, подставляя в формулы (9) функцию прогибов (7.27):

$$M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{m^2 + \mu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{mn \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{n^2 \frac{a^2}{b^2} + \mu m^2}{mn \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b};$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Максимальные изгибающие моменты возникают в центре пластинки при  $x = a/2$  и  $y = b/2$ , где они равны:

$$\max M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{m^2 + \mu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{mn \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$\max M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{n^2 \frac{a^2}{b^2} + \mu m^2}{mn \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Для составления таблиц изгибающие моменты представляют в виде:

$$\max M_x = \beta q a^2;$$

$$\max M_y = \beta_1 q a^2,$$



где

$$\beta = \frac{16}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{m^2 + \mu n^2 \frac{a^2}{b^2}}{mn \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots);$$

$$\beta_1 = \frac{16}{\pi^4} \sum_m \sum_n \frac{n^2 \frac{a^2}{b^2} + \mu m^2}{mn \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi}{2} \sin \frac{n\pi}{2};$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

зависят от отношения сторон пластинки  $a/b$ .

Подсчитаем коэффициент  $\beta$  для квадратной пластинки, сохраняя четыре члена ряда:

$$\beta(1) = \frac{16}{\pi^4} \left[ \frac{1^2 + 0,3 \cdot 1^2}{1 \cdot 1(1^2 + 1^2)} \cdot 1 \cdot 1 + \frac{1^2 + 0,3 \cdot 3^2}{1 \cdot 3(1^2 + 3^2)} \cdot 1 \cdot (-1) + \right. \\ \left. + \frac{3^2 + 0,3 \cdot 1^2}{3 \cdot 1(3^2 + 1^2)} \cdot (-1) \cdot 1 + \frac{3^2 + 0,3 \cdot 3^2}{3 \cdot 3(3^2 + 3^2)} \cdot (-1) \cdot (-1) \right] = 0,0469.$$

Точное значение, приводимое в справочниках, —  $\beta = 0,0479$ .

Следовательно, при сохранении четырех членов ряда значение коэффициента  $\beta$  отличается от точного его значения на 2,1 %.

Значение поперечных сил найдем, подставив функцию прогибов (7.27) в формулы (7.10):

$$Q_x = \frac{16qa}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}}{n \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)};$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots); \quad (м)$$

$$Q_y = \frac{16qb}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b}}{m \left( m^2 \frac{b^2}{a^2} + n^2 \right)};$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Максимальные значения поперечные силы получают посередине сторон контура пластинки. Так,  $\max Q_x$  возникает в точках пластинки с координатами  $x = 0, y = b/2$  и  $x = a, y = b/2$ , а  $\max Q_y$  — в точках с координатами  $x = a/2, y = 0$  и  $x = a/2, y = b$ , где получим:

$$\max Q_x = \frac{16qa}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)};$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots);$$

$$\max Q_y = \frac{16qb}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m \left( m^2 \frac{b^2}{a^2} + n^2 \right)};$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Для составления таблиц эти функции представим в виде:

$$\max Q_x = \gamma qa;$$

$$\max Q_y = \gamma_1 qa,$$

где

$$\gamma = \frac{16}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{n\pi}{2}}{n \left( m^2 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)};$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots);$$

$$\gamma_1 = \frac{16}{\pi^3} \sum_m \sum_n \frac{\sin \frac{m\pi}{2}}{m \left( m^2 \frac{b^2}{a^2} + n^2 \right)};$$

$$(m = 1, 3, 5, \dots; n = 1, 3, 5, \dots).$$

Нетрудно заметить, что функции  $\gamma$  и  $\gamma_1$  являются функциями отношения сторон пластинки  $a/b$ . Ряды в этих функциях сходятся еще медленнее, чем в функциях  $\beta$  и  $\beta_1$ . Так, сохраняя, как и в предыду-

щих случаях то же число членов ряда, получаем для квадратной пластинки:

$$\begin{aligned} \gamma(1) &= \frac{16}{\pi^3} \left[ \frac{1}{1(1^2 + 1^2)} + \frac{(-1)}{3(1^2 + 3^2)} + \frac{1}{1(3^2 + 1^2)} + \frac{(-1)}{3(3^2 + 3^2)} \right] = \\ &= \frac{16}{\pi^3} (0,5000 - 0,0333 + 0,1000 - 0,0185) = 0,283, \end{aligned}$$

что отличается от точного значения, равного 0,338 [4], на 16,3 %.

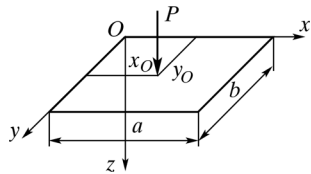


Рис. 54. Пластика с шарнирно закрепленными краями, нагруженная сосредоточенной силой  $P$

**2. Сосредоточенная сила** в точке с координатами  $x = x_0$  и  $y = y_0$  (рис. 54). Представим эту сосредоточенную силу в виде распределенной нагрузки на бесконечно малой площадке  $dxdy$  вокруг точки  $(x_0, y_0)$ :

$$q(x, y) = \frac{P}{dxdy}.$$

При вычислении двойного интеграла в формуле ( $u$ ) следует учесть, что он обращается в нуль везде, кроме точки  $(x_0, y_0)$ , где он равен:

$$\iint_0^a \iint_0^b q(x, y) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} dxdy = P \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}. \quad (н)$$

Подставляя значение ( $н$ ) в формулу ( $u$ ), получаем следующее выражение для коэффициентов ряда ( $a$ ):

$$A_{mn} = \frac{4P \sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{D\pi^4 ab \left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}.$$

После подстановки полученного значения  $A_{mn}$  в ряд ( $a$ ) найдем функцию прогибов пластинки, шарнирно опертой по краям и нагруженной сосредоточенной силой в точке с координатами  $(x_0, y_0)$ :

$$u_z = \frac{4P}{D\pi^4 ab} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{m\pi x_0}{a} \sin \frac{n\pi y_0}{b}}{\left( \frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (7.28)$$

Полученный ряд сходится медленнее, чем ряд (7.27). Зная функцию прогибов (7.28), обычным порядком можно определить изгибающие и крутящие моменты, а также поперечные силы. Ряды, входящие в функции для вычисления указанных величин, сходятся еще хуже, чем в случае равномерно распределенной нагрузки. Поэтому представленное решение может быть рекомендовано только для нахождения прогибов.

### 7.10. Прямоугольная пластинка. Решение Леви

Решение Навье, рассмотренное в п. 7.9, пригодно только для прямоугольных пластинок, шарнирно опертых по контуру. Более общим является решение Мориса Леви. Это решение пригодно для прямоугольной пластинки, два противоположных края которой оперты, а два других имеют любое закрепление: защемление, шарнирное опирание, свободный край.

Пусть у прямоугольной пластинки (рис. 55) шарнирно опертыми являются края  $OC$  и  $AB$ . Граничные условия на этих краях имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} &\text{При } x=0 \text{ и } x=a \\ &u_z = 0 \text{ и } \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Чтобы выполнить эти условия, функцию прогибов возьмем в виде

$$u_z = \sum_{n=1}^{\infty} Y \sin \alpha x, \quad (б)$$

где  $Y$  — произвольная функция одного аргумента  $y$ ;  $\alpha = n\pi/a$ .

Так как при  $x = 0$  и  $x = a$  функция  $\sin \alpha x = 0$ , зависимость ( $б$ ) удовлетворяет условиям ( $a$ ) для прогибов.

Чтобы проверить вторую часть граничных условий ( $a$ ) для изгибающих моментов

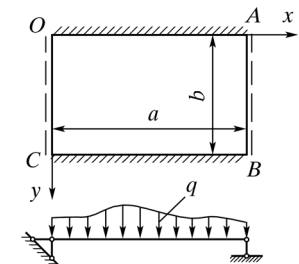


Рис. 55. Прямоугольная пластинка:  $OA$  и  $BC$  — жестко закрепленные края;  $OC$  и  $AB$  — шарнирно опертые края

на краях  $OC$  и  $AB$ ), подсчитаем вторые частные производные функции прогибов ( $\bar{b}$ ) по  $x$  и  $y$ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} &= -\sum_{n=1}^{\infty} Y \sin \alpha x; \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} &= \sum_{n=1}^{\infty} Y'' \sin \alpha x. \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

Эти производные аналогично функции прогибов ( $\bar{b}$ ) при  $x = 0$  и  $x = a$  обращаются в нуль, и, следовательно, вторая часть условия (а) также выполняется.

Функция ( $\bar{b}$ ) должна удовлетворять уравнению Софи Жермен (7.16). Подставляя функцию ( $\bar{b}$ ) в уравнение (7.16), получаем:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) \sin \alpha x = \frac{q(x, y)}{D}. \quad (2)$$

Для решения уравнения (2) разложим правую его часть в тригонометрический ряд Фурье по синусам:

$$\frac{q(x, y)}{D} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin \alpha x. \quad (d)$$

Коэффициенты ряда Фурье  $F_n(y)$  являются здесь функцией  $y$ . Так как разложение производится на отрезке  $0 \leq x \leq a$ , то коэффициенты  $F_n(y)$  определяют по известной из курса математического анализа формуле

$$F_n(y) = \frac{2}{Da} \int_0^a q(x, y) \sin \alpha x dx. \quad (e)$$

Подставим ряд (d) в уравнение (2):

$$\sum_{n=1}^{\infty} (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) \sin \alpha x = \sum_{n=1}^{\infty} F_n(y) \sin \alpha x. \quad (ж)$$

После переноса правой части соотношения (ж) в левую и выноса знаков суммирования за скобку получаем:

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y - F_n(y) = 0$$

или

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = F_n(y). \quad (з)$$

Решение неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка (з) можно представить в виде суммы общего решения соответствующего однородного уравнения (уравнения (з) без правой части) и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения (з). Однородное уравнение, соответствующее неоднородному уравнению (з), имеет вид:

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = 0. \quad (u)$$

Решение уравнения (u) имеет вид

$$Y_1 = A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y. \quad (к)$$

Обозначив частное решение уравнения (з)  $\bar{F}_n(y)$ , получим его общее решение в таком виде:

$$Y(y) = A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y + \bar{F}_n(y). \quad (л)$$

Подставляя функцию  $Y(y)$  в формулу (б), получим:

$$u_z = \sum_{n=1}^{\infty} [A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y + \bar{F}_n(y)] \sin \alpha x. \quad (м)$$

Функция (м) будет решением уравнения Софи Жермен (7.16) для поперечной нагрузки  $q(x, y)$ , распределенной по поверхности пластинки по любому закону, а кроме того, удовлетворяет граничным условиям на шарнирно опертых краях  $OC$  и  $AB$ .

Рассмотрим выбор частного решения  $\bar{F}_n(y)$ . По правилу Коши частное решение неоднородного дифференциального уравнения четвертого порядка выражается следующим интегралом:

$$\bar{F}_n(y) = \int_0^y \psi(y-t) F_n(t) dt, \quad (н)$$

где  $F_n(y)$  — правая часть решаемого уравнения, определяемая соотношением (e), а  $\psi(y)$  — частное решение соответствующего однородного уравнения, удовлетворяющего условиям:

$$\psi(0) = \psi'(0) = \psi^{(0)}, \quad \psi'''(0) = 1. \quad (o)$$

При решении однородного уравнения (u) согласно зависимости (к) была получена сумма четырех независимых функций  $\operatorname{ch} \alpha y$ ,  $y \operatorname{ch} \alpha y$ ,  $\operatorname{sh} \alpha y$ ,  $y \operatorname{sh} \alpha y$ . Из этой комбинации функций удовлетворяет условиям (o) только функция

$$\psi(y) = \frac{1}{2\alpha^2} \left( y \operatorname{ch} \alpha y - \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha y \right). \quad (п)$$

Заменяя в функциях (н) и (е) аргументы и подставив эти функции в формулу (н), получим искомое частное решение уравнения (з):

$$\bar{F}_n(y) = \frac{1}{\alpha^2 D a_0} \int_0^y \left[ (y-t) \operatorname{ch} \alpha(y-t) - \frac{1}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha(y-t) \right] \times \\ \times \int_0^a q(x, t) \sin \alpha x dx dt.$$

Для определения произвольных постоянных  $A_n, B_n, C_n$  и  $D_n$  в (м) используем граничные условия на краях  $OA$  и  $BC$ . Рассмотрим пластинку, у которой края  $OA$  и  $BC$  жестко зашпемлены (см. рис. 55). Граничные условия на этих краях:

$$\left. \begin{array}{l} \text{При } y=0 \text{ и } x=b \\ u_z = 0 \text{ и } \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0. \end{array} \right\}$$

Подставив в них функцию прогибов ( $\delta$ ), получим:

$$\left. \begin{array}{l} \sum_{n=1}^{\infty} Y(0) \sin \alpha x = 0; \quad \sum_{n=1}^{\infty} Y'(0) \sin \alpha x = 0; \\ \sum_{n=1}^{\infty} Y(b) \sin \alpha x = 0; \quad \sum_{n=1}^{\infty} Y'(b) \sin \alpha x = 0. \end{array} \right\} \quad (p)$$

Так как условия (p) должны выполняться при любых значениях аргумента  $x$ , должно быть:

$$\left. \begin{array}{l} Y(0) = 0; \quad Y'(0) = 0; \\ Y(b) = 0; \quad Y'(b) = 0. \end{array} \right\} \quad (c)$$

Если внести в условия (c) функцию (л), то можно получить систему уравнений для определения постоянных:

$$\begin{aligned} A_n &= 0; \\ B_n + C_n \alpha &= 0; \\ A_n \operatorname{ch} \alpha b + B_n b \operatorname{ch} \alpha b + C_n \operatorname{sh} \alpha b + D_n b \operatorname{sh} \alpha b + \bar{F}_n(b) &= 0; \\ A_n \alpha \operatorname{sh} \alpha b + B_n (\operatorname{ch} \alpha b + \alpha b \operatorname{sh} \alpha b) + C_n \alpha \operatorname{ch} \alpha b + D_n (\operatorname{sh} \alpha b + \\ &+ \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) + \bar{F}_n(b) = 0. \end{aligned}$$

Из полученной системы уравнений определяем следующие значения постоянных:

$$\begin{aligned} A_n &= 0; \\ B_n &= \frac{-\alpha (\operatorname{sh} \alpha b + \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) \bar{F}_n(b) - \alpha b \operatorname{sh} \alpha b \bar{F}_n(b)}{\operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2}; \\ C_n &= \frac{-(\operatorname{sh} \alpha b + \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) \bar{F}_n(b) + b \operatorname{sh} \alpha b \bar{F}_n(b)}{\operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2}; \\ D_n &= \frac{-\alpha^2 b \operatorname{sh} \alpha b \bar{F}_n(b) - (\operatorname{sh} \alpha b - \alpha b \operatorname{ch} \alpha b) \bar{F}_n(b)}{\operatorname{sh}^2 \alpha b - \alpha^2 b^2}. \end{aligned}$$

При других закреплениях краев  $OA$  и  $BC$  получаются другие значения постоянных.

Ряды в функциях прогибов и ее производных сходятся значительно быстрее, чем тригонометрические ряды в решении Навье, поэтому решение М. Леви более удобно в практических расчетах, в том числе для пластинки с шарнирно опертыми краями.

### 7.11. Основные уравнения изгиба круглой пластинки

Для решения задачи об изгибе круглой пластинки, выведенной в декартовой системе координат, преобразуем все уравнения к полярной системе координат.

В полярной системе координат прогиб пластинки и нагрузка будут функциями  $r$  и  $\theta$ , т. е.  $u_z(r, \theta)$  и  $q(r, \theta)$ . Тогда дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки Софи Жермен (7.16) получит вид

$$D \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) = q(r, \theta). \quad (7.29)$$

Изгибающие моменты в круглой пластинке будем обозначать:  $M_r$  — погонный изгибающий момент в сечении, перпендикулярном радиусу-вектору  $r$  в рассматриваемой точке, или **радиальный изгибающий момент**;  $M_\theta$  — погонный изгибающий момент в сечении, совпадающий с радиусом-вектором  $r$  в рассматриваемой точке, или **тангенциальный изгибающий момент**.

Заменяя в формулах (7.9) производные функции прогибов по  $x$  и  $y$  на производные по  $r$  и  $\theta$ , получим формулы для изгибающих моментов в полярной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left[ \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \mu \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right) \right]; \\ M_\theta &= -D \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

Таким же образом преобразуем формулу для крутящего момента в декартовой системе координат (7.11) к полярной:

$$H = -D(1 - \mu) \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right). \quad (7.31)$$

Поперечные силы в круглой пластинке обозначим следующим образом:  $Q_r$  — погонная поперечная сила на площадке с нормалью  $r$ , или радиальная поперечная сила;  $Q_\theta$  — погонная поперечная сила на площадке, совпадающая с радиусом-вектором  $r$ , или тангенциальная поперечная сила.

Заменяя в формулах (7.10) производные по  $x$  и  $y$  на производные по  $r$  и  $\theta$ , получим формулы для вычисления поперечных сил в полярной системе координат:

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 u_z; \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 u_z \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

или

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right); \\ Q_\theta &= -D \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.32)$$

Обозначим  $Q_r^{\text{прив}}$  интенсивность приведенной поперечной силы на гранях контура, перпендикулярных к радиусу-вектору  $r$ , а  $Q_\theta^{\text{прив}}$  — на гранях, совпадающих с радиусом-вектором  $r$ . Тогда из формул

(7.18) и (7.19) после замены переменных  $x$  и  $y$  на переменные  $r$  и  $\theta$  можно получить приведенную поперечную силу на гранях контура, учитывающего наличие крутящего момента:

$$\left. \begin{aligned} Q_r^{\text{прив}} &= Q_r + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial H}{\partial \theta}; \\ Q_\theta^{\text{прив}} &= Q_\theta + \frac{\partial H}{\partial r}. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Подставляя в зависимости (б) значение поперечных сил из (7.32) и  $H$  из (7.31), получим:

$$\left. \begin{aligned} Q_r^{\text{прив}} &= -D \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{\partial}{\partial r} \nabla^2 w + (1 - \mu) \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial^2}{\partial r \partial \theta} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right); \\ Q_\theta &= -D \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \nabla^2 w + (1 - \mu) \frac{\partial}{\partial r^2} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial w}{\partial \theta} \right) \right). \end{aligned} \right\} \quad (7.33)$$

Формулы (7.29)—(7.33) представляют собой основные уравнения изгиба пластинок в полярной системе координат. Уравнение (7.29) служит для определения прогибов срединной плоскости пластинки  $w$ , а остальные — для составления граничных условий и определения внутренних усилий.

## 7.12. Осесимметричные задачи изгиба круглой пластинки

Задача об изгибе круглой пластинки будет осесимметричной, если нагрузка, а также условия закрепления краев пластинки не зависят от полярного угла  $\theta$ . В этом случае и прогибы пластинки не будут зависеть от полярного угла  $\theta$ , а будут функцией лишь одной координаты  $r$ , т. е.  $u_z = u_z(r)$ .

Тогда дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности (7.29) значительно упрощается:

$$D \left( \frac{d^4 u_z}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 u_z}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{du_z}{dr} \right) = q(r). \quad (7.34)$$

Поскольку функция прогибов не зависит от угла  $\theta$ , формулы (7.30) для изгибающих моментов примут вид:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= -D \left( \frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial r} \right); \\ M_\theta &= -D \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{du_z}{dr} + \mu \frac{d^2 u_z}{dr^2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (7.35)$$

а крутящий момент в зависимости (7.31) обратится в нуль.

Поперечные силы в формулах (7.32) примут вид:

$$\left. \begin{aligned} Q_r &= -D \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_z}{dr} \right); \\ Q_\theta &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

а приведенные поперечные силы из (б):

$$\begin{aligned} Q_r^{\text{прив}} &= Q_r; \\ Q_\theta^{\text{прив}} &= 0. \end{aligned}$$

Уравнение (7.34) можно решить в общем виде. Как известно, общее решение неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы общего решения соответствующего однородного уравнения  $u_{z1}$  и какого-нибудь частного решения неоднородного уравнения  $u_{z2}$ , т. е.

$$u_z = u_{z1} + u_{z2}. \quad (в)$$

Общее решение однородного уравнения

$$\frac{d^4 u_{z1}}{dr^4} + \frac{2}{r} \cdot \frac{d^3 u_{z1}}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \cdot \frac{d^2 u_{z1}}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \cdot \frac{du_{z1}}{dr} = 0,$$

соответствующего неоднородному уравнению (7.34), имеет вид:

$$u_{z1} = C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r.$$

Чтобы получить общий вид частного решения  $u_{z2}$ , уравнение (7.34) представим в виде:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d}{dr} \left[ \left[ r \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_z}{dr} \right) \right] \right] = \frac{q(r)}{D}. \quad (з)$$

Интегрируя последовательно четыре раза уравнение (з), найдем общий вид частного решения:

$$u_{z2} = \frac{1}{D} \int_0^r \frac{1}{r} \left[ \int_0^r \left[ \int_0^r \frac{1}{r} \left( \int_0^r q(r) r dr \right) dr \right] dr \right] dr. \quad (д)$$

Пусть нагрузка равномерно распределена по всей поверхности пластинки, т. е. примем, что  $q(r) = q = \text{const}$ . В этом случае выражение (д) легко интегрируется и принимает следующий вид:

$$u_{z2} = \frac{qr^4}{64D}.$$

Тогда общее решение неоднородного дифференциального уравнения (7.34) для нагрузки, равномерно распределенной по поверхности пластинки, будет иметь вид:

$$u_z = \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_2 \ln r + C_3 r^2 + C_4 r^2 \ln r. \quad (7.37)$$

Рассмотрим **шарнирно опертую по контуру пластинку**, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой (рис. 56).

Для определения постоянных интегрирования в решении (7.37) имеем следующие граничные условия. В центре пластинки при  $r = 0$  прогиб должен иметь конечное значение. Так как  $\ln 0 = -\infty$ , в решении (7.37) следует отбросить члены, содержащие множитель  $\ln r$ , т. е. принять, что  $C_2 = C_4 = 0$ .

В этом случае решение (7.37) примет вид:

$$u_z = \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_3 r^2. \quad (е)$$

При шарнирном закреплении по контуру пластинки при  $r = a$  должны обращаться в нуль прогиб  $w$ , и радиальный изгибающий момент  $M_r$ :

$$u_z = 0; \quad \frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{du_z}{dr} = 0 \quad \text{при } r = a. \quad (ж)$$

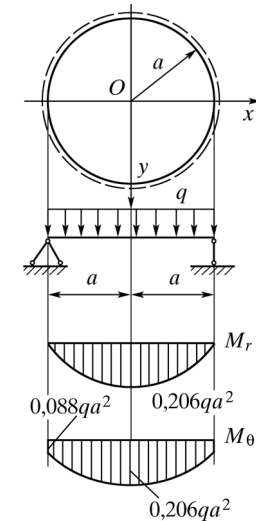


Рис. 56. Круглая пластинка с шарнирно опертыми краями, нагруженная равномерно распределенной нагрузкой



Подставляя в полученные граничные условия ( $\mathcal{M}$ ) функцию прогибов ( $e$ ), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{qr^4}{64D} + C_1 + C_3 a^2 &= 0; \\ \frac{3qa^2}{16D} + 2C_3 + \frac{\mu}{a} \left( \frac{qa^3}{16D} + 2C_3 a \right) &= 0. \end{aligned}$$

Откуда находим:

$$\begin{aligned} C_3 &= -\frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{qr^2}{32D}; \\ C_1 &= \frac{3+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{qa^4}{32D} - \frac{qa^4}{64D}. \end{aligned}$$

Подставляя найденные постоянные в решение ( $e$ ), получаем функцию прогибов для пластинки, шарнирно опертой по контуру и нагруженной равномерно распределенной нагрузкой:

$$u_z = \frac{q(a^2 - r^2)}{64D} \left( \frac{5+\mu}{1+\mu} a^2 - r^2 \right). \quad (7.38)$$

Максимальный прогиб возникает в центре пластинки при  $r = 0$ , где он равен:

$$\max u_z = \frac{5+\mu}{1+\mu} \cdot \frac{qa^4}{64D}. \quad (3)$$

Подставляя функцию прогибов (7.38) в формулы (7.35), получаем изгибающие моменты в пластинке:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{q}{16} (3+\mu)(a^2 - r^2); \\ M_\theta &= \frac{q}{16} [(3+\mu)a^2 - (1+3\mu)r^2]. \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

Максимальные изгибающие моменты возникают в центре пластинки при  $r = 0$  и равны:

$$\max M_r = \max M_\theta = \frac{qa^2}{16} (3+\mu).$$

Изгибающие моменты в точках контура при  $r = a$ :

$$M_r = 0; \quad M_\theta = \frac{qa^2}{8} (1-\mu).$$

Эпюры изгибающих моментов для пластинки, изготовленной из материала с коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,3$ , показаны на рис. 56.

Рассмотрим **круглую пластинку, защемленную по контуру** и нагруженную равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. 52).

Для определения постоянных  $C_1$  и  $C_3$  запишем следующие граничные условия: на внешнем контуре пластинки (в защемлении) отсутствуют прогибы и повороты сечений, т. е. при  $r = a$ :

$$u_z = 0, \quad \frac{du_z}{dr} = 0.$$

Подставляя в эти условия функцию прогибов ( $e$ ), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{qa^4}{64D} + C_1 + C_3 a^2 &= 0; \\ \frac{qa^3}{16D} + 2C_3 a &= 0, \end{aligned}$$

откуда находим:

$$\begin{aligned} C_3 &= -\frac{qa^2}{32D}; \\ C_1 &= \frac{qa^4}{64D}. \end{aligned}$$

Тогда уравнение изогнутой срединной поверхности круглой пластинки ( $e$ ) для случая жесткого закрепления краев принимает такой вид:

$$u_z = \frac{q(a^2 - r^2)^2}{64D}. \quad (7.40)$$

Максимальный прогиб в центре пластинки при  $r = 0$  равен:

$$\max u_z = \frac{qa^4}{64D},$$

что совпадает с результатом (7.26), полученным из решения частного случая эллиптической пластинки. Из сравнения этого значения с максимальным прогибом в шарнирно опертой пластинке (3) следует, что максимальный прогиб защемленной по контуру пластинки примерно в четыре раза меньше максимального прогиба шарнирно опертой пластинки.

Действительно из формулы (з) при  $\mu = 0,3$  найдем, что  $(5 + \mu)/(1 + \mu) = (5 + 0,3)/(1 + 0,3) = 4,07$ .

Подставляя функцию прогибов (7.40) в формулы (7.35), найдем изгибающие моменты в пластинке:

$$\left. \begin{aligned} M_r &= \frac{q}{16} [(1 + \mu)a^2 - (3 + \mu)r^2]; \\ M_\theta &= \frac{q}{16} [(1 + \mu)a^2 - (1 + 3\mu)r^2]. \end{aligned} \right\} \quad (7.41)$$

Изгибающие моменты в центре пластинки при  $r = 0$  равны:

$$M_r = M_\theta = \frac{qa^2}{16}(1 + \mu),$$

а на контуре пластинки при  $r = a$ :

$$M_r = -\frac{qa^2}{8}; \quad M_\theta = -\mu \frac{qa^2}{8}.$$

Эпюры изгибающих моментов для пластинки, изготовленной из материала с коэффициентом Пуассона  $\mu = 0,3$ , показаны на рис. 11. Максимальный изгибающий момент возникает в точках контура на площадках, перпендикулярных к радиусу. Он на 40 % меньше максимального изгибающего момента в шарнирно опертой пластинке.

Рассмотрим **кольцевую пластинку с защемленным внешним краем**, нагруженную равномерно распределенной нагрузкой (рис. 57). Для определения постоянных в функции (7.37) запишем следующие граничные условия:

на внешнем защемленном крае при  $r = a$

имеем:

$$u_z = 0; \quad \frac{du_z}{dr} = 0;$$

на внутреннем свободном крае при  $r = b$

$$M_r = -D \left( \frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{du_z}{dr} \right) = 0;$$

$$Q_r^{\text{прив}} = Q_r = -D \frac{d}{dr} \left( \frac{d^2 u_z}{dr^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{du_z}{dr} \right) = 0.$$

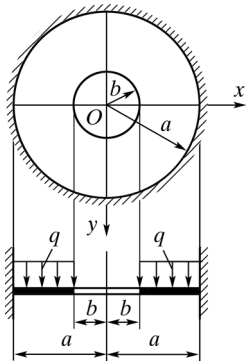


Рис. 57. Кольцевая пластинка с жестко закрепленным краем

Подставляя в эти граничные условия функцию прогибов (7.37), получаем следующую систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{qa^4}{64D} + C_1 + C_2 \ln a + C_3 a^2 + C_4 a^2 \ln a &= 0; \\ \frac{qa^3}{64D} + \frac{C_2}{a} + 2C_3 a + 2C_4 a \ln a + C_4 a &= 0; \\ \frac{3qb^2}{16D} - \frac{C_2}{b^2} + 2C_3 + 2C_4 \ln b + 3C_4 + \\ + \mu \left( \frac{qb^2}{16D} + \frac{C_2}{b^2} + 2C_3 + 2C_4 \ln b + C_4 \right) &= 0; \\ \frac{qb}{2D} + \frac{4C_4}{b} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (u)$$

Решив систему (u), находим:

$$\left. \begin{aligned} C_1 &= \frac{qa^2}{64D\alpha} \{ (1 - \mu)a^4 - [(5 - 3\mu) - 4(1 + \mu) \ln a] a^2 b^2 - \\ &- 2[2(1 + \mu) + (1 - 2 \ln a)((1 - \mu) + 4(1 + \mu) \ln b/a) b^2] b^4 \}; \\ C_2 &= -\frac{qa^2 b^2}{16D\alpha} \{ (1 + \mu)a^2 + [(1 - \mu) + 4(1 + \mu) \ln b/a] b^2 \}; \\ C_3 &= \frac{q}{32D\alpha} \{ -(1 - \mu)a^4 + 2(1 - \mu)(1 + 2 \ln a) a^2 b^2 + \\ &+ [(3 + \mu) + 4(1 + \mu) \ln b] b^4 \}; \\ C_4 &= -\frac{qb^2}{8D}, \end{aligned} \right\} \quad (к)$$

где  $\alpha = (1 - \mu)a^2 + (1 + \mu)b^2$ .

Для табулированного расчета введем обозначения:

$$\rho = \frac{r}{a}; \quad \beta = \frac{b}{a};$$

$$k = \frac{(1 - \mu)\beta^2 + (1 + \mu)(1 + 4\beta^2 \ln \beta)}{(1 - \mu) + (1 + \mu)\beta^2} \beta^2.$$

Тогда уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки (7.37) после подстановки в него постоянных ( $\kappa$ ) примет следующий вид:

$$w = \frac{qa^4}{64D} [-1 + 2(1 - k - 2\beta^2)(1 - \rho^2) + \rho^4 - (4k + 8\beta^2\rho^2) \ln \rho]. \quad (7.42)$$

Полученное решение (7.42) позволяет вычислить прогибы и перемещения в кольцевой пластинке с жестко закрепленным внешним краем.

### 7.13. Потенциальная энергия при изгибе пластинки

Выведем формулу для вычисления потенциальной энергии, накапливающейся при изгибе пластинки. Согласно принятым гипотезам в пластинке  $\sigma_z = 0$  и  $\gamma_{zx} = \gamma_{zy} = 0$ , поэтому общая формула удельной потенциальной энергии [1] в данном случае примет вид:

$$W = \frac{1}{2} (\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \tau_{xy} \gamma_{xy}).$$

Внося сюда выражения напряжений (7.6) и деформаций (7.5), получаем:

$$W = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \left[ \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) + \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) + 2\mu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + 2(1-\mu) \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right].$$

Прибавим и вычтем в квадратных скобках величину:

$$2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}.$$

После группировки получаем:

$$W = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \left\{ \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\mu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\}$$

или

$$W = \frac{Ez^2}{2(1-\mu^2)} \left\{ (\nabla^2 u_z)^2 - 2(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\}.$$

Подставим полученное выражение удельной потенциальной энергии в пластинке в формулу для определения потенциальной энергии  $U = \iiint_V W dx dy dz$ , накапливаемой во всей пластинке (по всему

ее объему  $V$ ). Так как прогибы пластинки являются функциями только двух переменных  $x$  и  $y$ , в тройном интеграле можно отделить интегрирование по координате  $z$ :

$$U = \frac{E}{2(1-\mu^2)} \iint_s \left\{ (\nabla^2 u_z)^2 - 2(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \times \\ \times \int_{-h/2}^{+h/2} z^2 dz.$$

Интегрируя и вводя обозначение цилиндрической жесткости согласно соотношению (7.8), получаем потенциальную энергию, накапливаемую при изгибе пластинки, в таком виде:

$$U = \frac{D}{2} \iint_s \left\{ (\nabla^2 u_z)^2 - 2(1-\mu) \left[ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy. \quad (7.43)$$

Здесь двойной интеграл берется по всей площади срединной поверхности пластинки.

Для некоторых случаев закрепления прямоугольной пластинки со сторонами  $a$  и  $b$  выражение для потенциальной энергии (7.43) можно упростить. Возьмем интеграл от последнего слагаемого в квадратных скобках выражения (7.43) и преобразуем его следующим образом:

$$J = \iint_s \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy = \int_0^a dx \int_0^b \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} dy. \quad (a)$$

Преобразуем интеграл (а), проведя интегрирование по частям (выражение под вторым интегралом):

$$J = \int_0^a dx \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} - \int_0^b \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y^2} dy \right) = \\ = \int_L \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} dx - \iint_s \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y^2} dx dy. \quad (б)$$

Первый из входящих сюда интегралов — контурный интеграл, так как подынтегральная функция есть результат интегрирования по  $y$ , и, следовательно, в нее входят значения производных функции прогибов по контуру, параллельному оси  $x$ . Другими словами, интегрирование ведется вдоль контура пластинки, параллельного оси  $x$ , так как после интегрирования по  $y$  необходимо выполнить подстановку по этой координате значений 0 и  $b$ . Второй интеграл в формуле (б) преобразуем еще раз:

$$\iint_s \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y^2} dx dy = \int_0^u dy \int_0^a \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y^2} dx$$

и проинтегрируем его по частям. Тогда интеграл (а) примет такой вид:

$$J = \int_L \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} dx - \int_L \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x} dy + \iint_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} dx dy. \quad (в)$$

Во втором из полученных контурных интегралов интегрирование ведется вдоль контура пластинки, параллельного оси  $y$ .

Если пластинка произвольного очертания закреплена по контуру, то во всех точках контура прогиб и углы поворота срединной плоскости равны нулю, т. е.

$$u_z = 0; \quad \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0; \quad \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0.$$

Следовательно, оба контурных интеграла в соотношении (в) обращаются в нуль, так как в них входит множителем производная  $\partial u_z / \partial x$ .

Если прямоугольная пластинка шарнирно оперта по всему контуру (см. рис. 53), то во всех точках контура прогиб  $u_z = 0$ . На краях  $OA$  и  $BC$ , параллельных оси  $x$ , искривление вдоль этой оси невозможно, если пластинка плотно прилегает к опоре. Таким образом, на этих

краях везде  $\partial u_z / \partial x$ , а значит, первый контурный интеграл в формуле (в) обращается в нуль. На краях  $OB$  и  $AC$  невозможно искривление вдоль оси  $y$ , т. е. в этом направлении углы поворота и кривизна срединной плоскости равны нулю:

$$\frac{\partial u_z}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0.$$

Другими словами, и второй контурный интеграл в формуле (в) обращается в нуль.

Таким образом, в двух рассматриваемых случаях интеграл (в) приводится к виду

$$J = \iint_s \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} dx dy.$$

После подстановки этого интеграла в формулу потенциальной энергии (7.43) выражение, стоящее в квадратных скобках, обращается в нуль, и формула (7.43) упрощается до такого вида:

$$U = \frac{D}{2} \iint_s (\nabla^2 u_z)^2 dx dy. \quad (7.44)$$

Полученное выражение можно использовать для вычисления потенциальной энергии при изгибе пластинок любого очертания, защемленных по контуру, а прямоугольных пластинок — еще и шарнирно опертых по контуру.

### Контрольные вопросы

1. Какие дополнительные допущения принимаются в теории тонких пластинок?
2. В чем смысл гипотез Кирхгофа для пластинок?
3. Что такое срединная плоскость для пластинки и чему равны в ней линейные и угловые деформации?
4. Удовлетворяются ли дифференциальные уравнения равновесия при использовании гипотез Кирхгофа?
5. Почему в пластинке определяются погонные внутренние усилия?
6. Как выражаются погонные изгибающие моменты  $M_x$  и  $M_y$  через перемещения срединной поверхности пластинки?

7. Как определяются погонные поперечные силы в пластинке?
8. Что называется цилиндрической жесткостью пластинки?
9. Из каких условий получено уравнение Софи Жермен?
10. При каких условиях возможно проинтегрировать дифференциальное уравнение срединной поверхности пластинки?
11. Какой вид имеют граничные условия для прямоугольной в плане пластинки с шарнирно опертыми краями? Сколько их должно быть?
12. Какой вид имеют граничные условия для прямоугольной в плане пластинки с жестко заделанными краями? Сколько их должно быть?
13. Какой вид имеют граничные условия для прямоугольной в плане пластинки, у которой три края шарнирно опертые, а один — свободный?
14. Как решается задача Навье в случае равномерно распределенного по поверхности давления  $q = q_0$ ?
15. К какому уравнению сводится решение задачи М. Леви? Как отыскать решение этого уравнения?
16. Какой вид имеют граничные условия в случае осесимметричного изгиба круглых пластин?
17. Какие граничные условия нужно записать для кольцевой круглой пластинки?
18. Какая из пластин, свободно опертая или защемленная, будет иметь большие изгибающие моменты при одинаковых размерах и нагрузке?

## Глава 8

# РАСЧЕТ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ

---

Эмпирические науки, когда ими занимаются только ради них самих, без всякой философской цели, подобны лицу без глаз.

*А. Шопенгауэр<sup>1</sup>*

### 8.1. Цели и задачи расчета

Рассмотрим расчет толстостенных цилиндров (труб), нагруженных внешним или внутренним давлением, как постоянным, так и изменяющимся по длине.

Теория расчета цилиндров, нагруженных постоянным по длине давлением, позволяет определять напряжения в трубах, цилиндрах машин, в напрессованных деталях и т. п., когда давление равномерно и концевые эффекты, связанные, например, с наличием днищ, отсутствуют. Она пригодна также и для тех случаев, когда постоянное давление распределено только по части длины детали или когда концы цилиндра закреплены. В этих случаях, однако, теория дает возможность установить лишь напряжения, возникающие на достаточном расстоянии от мест изменения давления или от концов цилиндра.

Напряжения вблизи мест изменения нагрузки или вблизи концов цилиндра могут быть определены с помощью теории расчета цилиндров, нагруженных переменным давлением.

Отметим главнейшие из практических задач, решаемых этой теорией:

- определение напряжений в цилиндре, нагруженном давлением на части длины; вопрос этот является актуальным, например, при расчете цилиндров двигателя, где максимальное давление в

<sup>1</sup> Энциклопедия мудрости. М.: РОССА, 2013.

рабочем пространстве имеет место лишь на небольшой части хода поршня и, следовательно, воздействует только на сравнительно узкий кольцевой пояс поверхности цилиндра;

- определение напряжений около мест сопряжения полого цилиндра с днищами;
- расчет прессовых посадок в том случае, если сопрягаемые детали имеют различную длину.

В приближенной постановке рассмотрим также расчет вращающихся дисков постоянной толщины, например, маховиков, устанавливаемых на хвостовике коленчатого вала двигателей внутреннего сгорания.

## 8.2. Расчет толстостенных цилиндров, нагруженных равномерно распределенным по длине давлением (задача Ляме)

Рассмотрим сначала деформации тонкой шайбы, имеющей толщину  $dz$  (рис. 58), нагруженной внутренним давлением  $p_1$  и наружным  $p_2$ . Боковые плоскости шайбы свободны от напряжений.

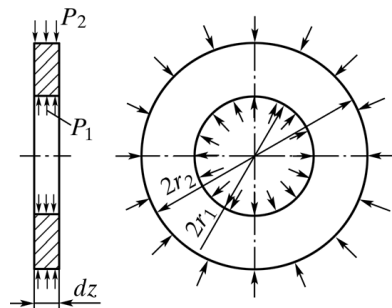


Рис. 58. Схема тонкой шайбы под действием внутреннего  $p_1$  и внешнего  $p_2$  давлений

Как будет показано далее, боковые плоскости шайбы остаются плоскими и после деформации, и, следовательно, длинную трубу можно рассматривать как составленную из ряда шайб [5]. Условия работы шайбы не изменяются в зависимости от того, рассматривается она изолированно или как часть трубы (рис. 59).

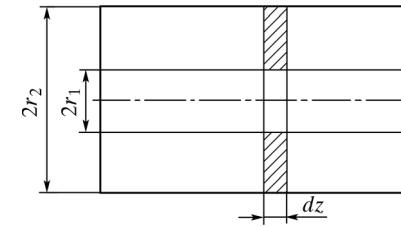


Рис. 59. Условия деформации тонкой шайбы

Радиальное перемещение  $u_r$  точки, лежащей на расстоянии  $r$  от оси цилиндра, зависит только от этого расстояния:

$$u_r = f(r).$$

Величину относительных деформаций в кольцевом и в радиальном направлениях легко выразить через смещение  $u_r$ .

Кольцевое волокно, имеющее до деформации радиус  $r$ , после деформации обращается в окружность радиусом  $r + u_r$ ; соответственно относительное удлинение этого волокна равно:

$$\varepsilon_\theta = \frac{2\pi(r + u_r) - 2\pi r}{2\pi r} = \frac{u_r}{r}. \quad (8.1)$$

Длина  $dr$  радиального элемента  $AB$  (рис. 60) после деформации становится равной:

$$A'B' = dr + \frac{du_r}{dr} dr.$$

Относительное удлинение в радиальном направлении:

$$\varepsilon_r = \frac{A'B' - AB}{AB} = \frac{du_r}{dr}. \quad (8.2)$$

Нормальные напряжения в цилиндрическом сечении радиальные  $\sigma_r$  и окружные  $\sigma_\theta$  определяются по формулам для плоского напряженного состояния

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_r + \mu\varepsilon_\theta) = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{du_r}{dr} + \mu \frac{u_r}{r} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\mu^2} (\varepsilon_\theta + \mu\varepsilon_r) = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{u_r}{r} + \mu \frac{du_r}{dr} \right). \end{aligned} \right\} \quad (8.3)$$

Эти напряжения будут главными напряжениями, поскольку плоскость радиального сечения является плоскостью симметрии.



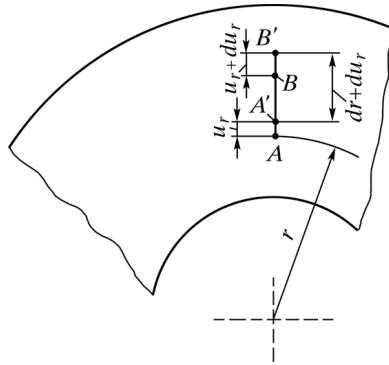


Рис. 60. Схема радиальной деформации

Рассмотрим равновесие элемента шайбы, изображенного на рис. 61 и имеющего толщину  $dz$ . Проецируя силы на радиус, имеем:

$$\sigma_r r d\theta dz + d(\sigma_r r) d\theta dz - \sigma_r r d\theta dz - \sigma_\theta dr dz d\theta = 0$$

или

$$\frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \sigma_\theta = 0. \quad (8.4)$$

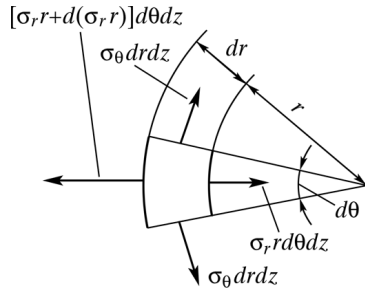


Рис. 61. Схема нагрузок, действующих на элементарный объем

Заменяя в уравнении равновесия (8.4) напряжения их выражениями через перемещения (8.3), получим обыкновенное дифференциальное уравнение, определяющее величину радиальных перемещений  $u_r$ :

$$\frac{d}{dr} \left( r \frac{du_r}{dr} + \mu u_r \right) - \left( \frac{u_r}{r} + \mu \frac{du_r}{dr} \right) = 0$$

или

$$\frac{du_r}{dr} + r \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \mu \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r} - \mu \frac{du_r}{dr} = 0.$$

После деления на  $r$  получим:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{1}{r^2} u_r = 0. \quad (8.5)$$

Левая часть этого уравнения тождественно равна выражению:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} \right].$$

Таким образом, уравнение (8.5) можно записать в виде:

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} \right] = 0. \quad (8.5a)$$

Последовательно интегрируя это уравнение дважды, получим:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \frac{d(ru_r)}{dr} &= 2C_1; \\ ru_r &= C_1 r^2 + C_2, \end{aligned}$$

откуда

$$u_r = C_1 r + C_2 \frac{1}{r}. \quad (8.6)$$

Постоянные интегрирования  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий. Обычно давления на внутренней  $r = r_1$  и наружной  $r = r_2$  поверхностях цилиндра бывают заданы. В этом случае уравнения граничных условий можно записать в виде

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_1} &= -p_1; \\ (\sigma_r)_{r=r_2} &= -p_2, \end{aligned} \quad (8.7)$$

где  $p_1, p_2$  — внутреннее и наружное давления; знаки минус в условиях (8.7) определяются правилом знаков, выбранных для напряжений, по которому положительными считаются напряжения растяжения.

Поскольку

$$\frac{du_r}{dr} = C_1 - \frac{1}{r^2} C_2, \quad (8.8)$$

подставив (8.6) и (8.8) в уравнения (8.3), получим:

$$\sigma_r = \frac{EC_1}{1-\mu} - \frac{EC_2}{1+\mu} \cdot \frac{1}{r^2};$$

$$\sigma_\theta = \frac{EC_1}{1-\mu} + \frac{EC_2}{1+\mu} \cdot \frac{1}{r^2}.$$

Введем новые постоянные  $A$  и  $B$ , связанные с  $C_1$  и  $C_2$  зависимостями:

$$A = \frac{E}{1-\mu} C_1;$$

$$B = \frac{E}{1+\mu} C_2.$$

Тогда получим:

$$\sigma_r = A - B \frac{1}{r^2};$$

$$\sigma_\theta = A + B \frac{1}{r^2}. \quad (8.9)$$

Из выражений (8.9) находим, что

$$\sigma_r + \sigma_\theta = 2A = \text{const},$$

и, следовательно, продольная деформация

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_r + \sigma_\theta)$$

не зависит от радиуса  $r$ .

Таким образом, торцовые плоскости шайбы остаются плоскими и после деформации, и сделанное предположение о том, что длинный цилиндр можно рассматривать как набранный из отдельных независимо работающих шайб, является справедливым. Благодаря этому все формулы, которые будут получены ниже, в равной мере применимы как к длинным, так и к коротким цилиндрам.

Из граничных условий (8.7) следует:

$$A - B \frac{1}{r_1^2} = -p_1;$$

$$A - B \frac{1}{r_2^2} = -p_2,$$

откуда

$$A = \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2};$$

$$B = \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2}.$$

Используя эти значения постоянных, получим следующие общие формулы для напряжений в любой точке трубы:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \right\} \quad (8.10)$$

Для радиальных перемещений, выражая в формуле (8.6)  $C_1$  и  $C_2$  через  $A$  и  $B$ , окончательно имеем:

$$u_r = \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{p_1 r_1^2 - p_2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} r +$$

$$+ \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{(p_1 - p_2) r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r}. \quad (8.11)$$

В случае если цилиндр, кроме радиальных давлений, воспринимает еще и продольную силу  $N$ , то в поперечных сечениях его возникает напряжение

$$\sigma_z = \frac{N}{F} = \frac{N}{\pi(r_2^2 - r_1^2)}, \quad (8.12)$$

а к выражению для радиальных перемещений добавляется слагаемое

$$\Delta u_r = \varepsilon_r r = -\mu \frac{\sigma_z}{E} r.$$

Напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  при этом не изменяются.

Если напряжения на радиусе  $r$  цилиндра уже определены, то радиальное перемещение  $u_r$  может быть вычислено не по формуле (8.11),

а по более простой зависимости (8.13), которая непосредственно следует из формулы (8.1):

$$u_r = \varepsilon_\theta r = r \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_r - \mu \sigma_z). \quad (8.13)$$

В том случае когда задано не напряжение  $\sigma_z$ , а продольная деформация цилиндра  $\varepsilon_z$ , удобно воспользоваться формулой

$$u_r = r \left[ \frac{1-\mu^2}{E} \sigma_\theta - \frac{\mu(1+\mu)}{E} \sigma_r - \mu \varepsilon_z \right]. \quad (8.14)$$

Формула (8.14) получается путем исключения величины  $\sigma_z$  из выражения (8.13) и зависимости

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \mu \sigma_\theta - \mu \sigma_r).$$

Рассмотрим некоторые частные случаи нагружения цилиндра.

**А. Цилиндр нагружен только внутренним давлением:**  $p_1 = p$ ;  $p_2 = 0$ . Из зависимостей (8.10) и (8.11) напряжения и радиальные перемещения цилиндра определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{p r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right) = \frac{pk^2}{1-k^2} \left( 1 - \frac{r_2^2}{r^2} \right); \\ \sigma_\theta &= \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{p r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right) = \frac{pk^2}{1-k^2} \left( 1 + \frac{r_2^2}{r^2} \right); \end{aligned} \right\} \quad (8.15)$$

$$\begin{aligned} u_r &= \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} r + \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{pr_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} = \\ &= \frac{1-\mu}{E} \cdot \frac{pk^2}{1-k^2} r + \frac{1+\mu}{E} \cdot \frac{pr_1^2}{1-k^2} \cdot \frac{1}{r}, \end{aligned} \quad (8.16)$$

где  $k = r_1/r_2$ .

Проанализируем характер распределения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  по толщине толстостенной трубы при действии только внутреннего давления, используя зависимости (8.15).

При  $r \rightarrow 0$   $\sigma_r \rightarrow -\infty$ ;  $r \rightarrow \infty$   $\sigma_r \rightarrow pk^2/(1-k^2)$ .

Аналогично при  $r \rightarrow 0$   $\sigma_\theta \rightarrow -\infty$ ;  $r \rightarrow \infty$   $\sigma_\theta \rightarrow pk^2/(1-k^2)$ .

Асимптотами кривых  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  являются ось ординат и горизонтальная прямая на расстоянии  $pk^2/(1-k^2)$  от оси абсцисс.

Из зависимостей (8.15) и (8.16) напряжения и радиальные перемещения у внутренней поверхности цилиндра определяются выражениями

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_1} &= -p; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= p \frac{1+k^2}{1-k^2}; \\ (u_r)_{r=r_1} &= \frac{pr_1}{E} \left( \frac{1+k^2}{1-k^2} + \mu \right). \end{aligned} \quad (8.17)$$

Напряжения и перемещения у наружной поверхности цилиндра ( $r = r_2$ ) определяются формулами

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_2} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_2} &= p \frac{2k^2}{1-k^2}; \\ (u_r)_{r=r_2} &= \frac{pr_2}{E} \cdot \frac{2k^2}{1-k^2}. \end{aligned} \quad (8.17, a)$$

Эпюры напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в зависимости от радиуса приведены на рис. 62, на рис. 63 — то же при значении  $k = r_1/r_2 = 0,5$ .

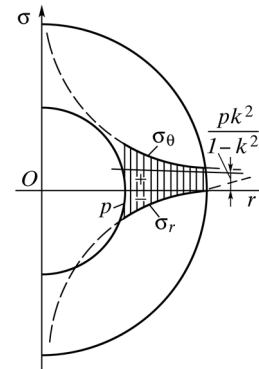


Рис. 62. Распределение радиальных  $\sigma_r$  и окружных  $\sigma_\theta$  напряжений в стенке трубы при действии внутреннего давления

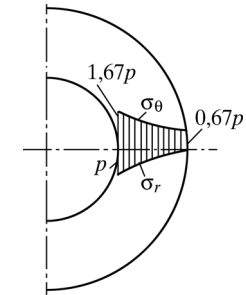


Рис. 63. Распределение радиальных  $\sigma_r$  и окружных  $\sigma_\theta$  напряжений в стенке трубы при  $k = 0,5$

Наиболее опасной является точка, лежащая у внутренней поверхности цилиндра, эквивалентное напряжение в которой, вычисленное по теории прочности О. Мора [6], равно:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_1 - \sigma_3$$

или

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_\theta - \sigma_r = p \left( \frac{1+k^2}{1-k^2} + \nu \right) \leq [\sigma], \quad (8.18)$$

где  $\nu = \sigma_{\text{тр}}/\sigma_{\text{тсж}}$ ;  $\sigma_{\text{тр}}$  и  $\sigma_{\text{тсж}}$  — пределы текучести материалов растяжения и сжатия, соответственно.

Если цилиндр дополнительно растягивается продольной силой (цилиндр поршневого двигателя, где внутреннее давление действует при ограничении с одной стороны головкой, а с другой — поршнем), то

$$N = p\pi r_1^2,$$

и в его поперечных сечениях возникают в соответствии с зависимостью (8.12) равномерно распределенные напряжения

$$\sigma_z = \frac{N}{\pi(r_2^2 - r_1^2)} = p \frac{k^2}{1-k^2}. \quad (a)$$

Расчет на прочность ведется по формуле (8.18).

Если материал цилиндра пластичный, то эквивалентное напряжение вычисляют согласно гипотезе прочности энергии формоизменения (гипотеза Губера — Мизеса — Генки) [7]:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma]. \quad (б)$$

При дополнительной продольной силе наиболее напряженная точка находится на внутренней поверхности. В окрестности этой точки (см. формулы (8.17) и (a)):

$$\sigma_r = -p = \sigma_3; \quad \sigma_\theta = p \frac{1+k^2}{1-k^2} = \sigma_1; \quad \sigma_z = p \frac{k^2}{1-k^2} = \sigma_2. \quad (в)$$

Подставив значения полученных главных напряжений в соотношение (б), получим:

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{p\sqrt{3}}{1-k^2} \leq [\sigma]. \quad (8.18, a)$$

Из соотношения (8.18, a) получим:

$$k^2 = \frac{r_1^2}{r_2^2} = \frac{1}{1 - \frac{p\sqrt{3}}{[\sigma]}}.$$

Анализируя полученную зависимость, можно увидеть, что при  $p = \frac{[\sigma]}{\sqrt{3}}$  отношение  $r_1/r_2$  обращается в бесконечность. Следовательно,

при  $p \geq \frac{[\sigma]}{3}$  эквивалентное напряжение во внутренних точках цилиндра будет больше допустимого напряжения при сколь угодно большой толщине стенки. Если же давление превысит величину  $p_T = \frac{\sigma_T}{\sqrt{3}}$ , то во

внутренних точках неизбежно возникнет пластическая деформация.

Это, однако, не значит, что при больших давлениях подобрать размеры цилиндра вообще невозможно. Пластическая деформация представляет опасность только тогда, когда она распространяется на всю толщину стенки. Ниже будет показано, каким образом возможно обеспечить прочность трубы.

При отсутствии продольной силы  $\sigma_z = \sigma_2 = 0$ , тогда согласно (б) и (в) получим

$$\sigma_{\text{экр}} = \frac{p\sqrt{3+k^4}}{1-k^2} \leq [\sigma]. \quad (8.18, б)$$

Сравнивая (8.18, a) и (8.18, б) можно заметить, что при отсутствии напряжения  $\sigma_z$  внутреннее давление в трубе может быть повышено.

Величины радиальных перемещений на внутреннем и наружном радиусах определяются по формулам (8.13) или (8.14) и в этом случае равны:

$$(u_r)_{r=r_1} = \frac{r_1}{E} \left( p \frac{1+k^2}{1-k^2} + \mu p - \mu p \frac{k^2}{1-k^2} \right) = \frac{pr_1}{E} \left( \frac{1+k^2 - \mu k^2}{1-k^2} + \mu \right);$$

$$(u_r)_{r=r_2} = \frac{pr_2}{E} \cdot \frac{2k^2 - \mu k^2}{1-k^2}.$$

**Б. Цилиндр нагружен только внешним давлением ( $p_2 = p$ ;  $p_1 = 0$ ).** В этом случае в соответствии с зависимостями (8.10) и (8.11) радиаль-

ные и окружные напряжения, а также радиальные перемещения определяются по формулам

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= -\frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} + \frac{pr_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} = -\frac{p}{1 - k^2} + \frac{pr_1^2}{1 - k^2} \cdot \frac{1}{r^2}; \\ \sigma_\theta &= -\frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{pr_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r^2} = -\frac{p}{1 - k^2} - \frac{pr_1^2}{1 - k^2} \cdot \frac{1}{r^2}; \end{aligned} \right\} \quad (8.19)$$

$$\begin{aligned} u_r &= -\frac{1 - \mu}{E} \cdot \frac{pr_2^2}{r_2^2 - r_1^2} r - \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{p_2 r_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r} = \\ &= -\frac{1 - \mu}{E} \cdot \frac{pr}{1 - k^2} - \frac{1 + \mu}{E} \cdot \frac{pr_1^2}{1 - k^2} \cdot \frac{1}{r}. \end{aligned} \quad (8.20)$$

Проанализируем характер распределения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  по толщине толстостенной трубы при действии только внешнего давления, используя зависимости (8.19).

При  $r \rightarrow 0$   $\sigma_r \rightarrow +\infty$ ;  $r \rightarrow \infty$   $\sigma_r \rightarrow -p/(1 - k^2)$ .

Аналогично при  $r \rightarrow 0$   $\sigma_\theta \rightarrow -\infty$ ;  $r \rightarrow \infty$   $\sigma_\theta \rightarrow -p/(1 - k^2)$ .

Асимптотами кривых  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  являются ось ординат и горизонтальная прямая на расстоянии  $-p/(1 - k^2)$  от оси абсцисс.

Эпюры напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в зависимости от радиуса приведены на рис. 64, на рис. 65 — то же при значении  $k = r_1/r_2 = 0,5$ .

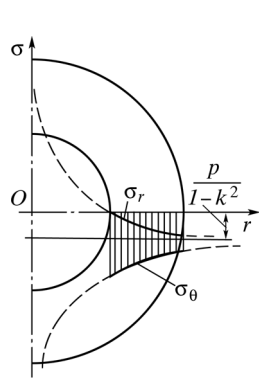


Рис. 64. Распределение радиальных  $\sigma_r$  и окружных  $\sigma_\theta$  напряжений в стенке трубы при действии внешнего давления

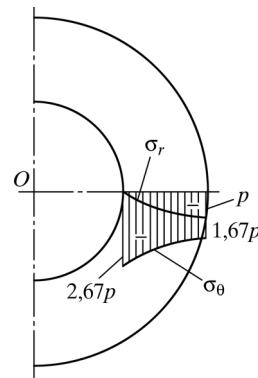


Рис. 65. Распределение радиальных  $\sigma_r$  и окружных  $\sigma_\theta$  напряжений в стенке трубы при  $k = r_1/r_2 = 0,5$

У внутренней поверхности цилиндра в соответствии с формулами (8.19) радиальные и окружные напряжения, а также перемещение на внутренней поверхности равны

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_1} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= -p \frac{2}{1 - k^2}; \\ (u_r)_{r=r_1} &= -\frac{pr_1}{E} \cdot \frac{2}{1 - k^2}, \end{aligned} \quad (8.21)$$

у наружной поверхности цилиндра:

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_2} &= -p; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_2} &= -p \frac{1 + k^2}{1 - k^2}; \\ (u_r)_{r=r_2} &= -\frac{pr_2}{E} \cdot \left( \frac{1 + k^2}{1 - k^2} - \mu \right). \end{aligned} \quad (8.22)$$

Как и при действии внутреннего давления, наиболее опасной является точка, лежащая у внутренней поверхности цилиндра, эквивалентное напряжение в которой, вычисленное по теории прочности О. Мора [7], равно ( $\sigma_1 = \sigma_r = 0$ ;  $\sigma_3 = \sigma_\theta = -p \frac{2}{1 - k^2}$ ):

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_r - \nu \sigma_\theta = p \frac{2\nu}{1 - k^2} \leq [\sigma]. \quad (8.23)$$

Заметим, что если вычислить окружное и радиальное напряжения для сплошного цилиндра ( $r_1 = 0$ ) в соответствии с формулами (8.19), то  $\sigma_r = \sigma_\theta = -p$ .

### 8.3. Расчет прессовых посадок при одинаковой длине сопрягаемых деталей

При прессовой или горячей посадке цилиндрических деталей прочное соединение этих деталей достигается за счет того, что внутренний диаметр охватывающей детали делается несколько меньшим, чем наружный диаметр охватываемой детали (величина разности

диаметров называется натягом  $\delta$ ). В результате после запрессовки на поверхности прилегания сопрягаемых деталей возникает контактное давление, обеспечивающее появление сил трения, препятствующих взаимному перемещению деталей. Если сопрягаемые путем прессовой посадки детали имеют одинаковую длину, то контактное давление равномерно распределено по поверхности касания, и для расчета можно воспользоваться теорией, изложенной в предыдущем параграфе.

Поскольку после соединения деталей внутренний диаметр охватываемой детали и наружный диаметр охватываемой детали становятся одинаковыми, очевидно, что сумма абсолютных значений радиальных перемещений обеих деталей, вызванных контактным давлением, равна разности радиусов посадочных поверхностей до запрессовки (т. е. половине натяга  $\delta$ ):

$$|u_{r_1}| + |u_{r_2}| = \frac{\delta}{2}. \quad (8.24)$$

Обозначим (рис. 66):

$d_1$  — внутренний диаметр запрессовываемой детали;

$d$  — диаметр посадочной поверхности детали;

$k_1 = d_1/d$  — отношение диаметров внутренней детали;

$E_1$  — модуль упругости материала внутренней детали;

$\mu_1$  — коэффициент Пуассона для материала внутренней детали;

$d_2$  — внешний диаметр охватываемой детали;

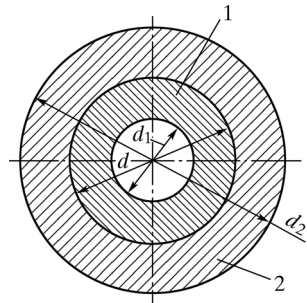


Рис. 66. Сопряжение двух деталей (1 и 2)

$k_2 = d/d_2$ ;  $E_2, \mu_2$  — соответствующие величины для охватываемой детали.

На основании формулы (8.22) радиальное перемещение на посадочной поверхности внутренней детали 1 (действует только внешнее давление) по абсолютной величине равно

$$|u_{r_1}| = \frac{pd}{2E_1} \left( \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right),$$

где  $p$  — контактное давление на посадочной поверхности.

На основании формулы (8.17) радиальное перемещение на внутренней поверхности охватываемой детали 2 (действует только внутреннее давление) равно

$$|u_{r_2}| = \frac{pd}{2E_2} \left( \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right).$$

Подставляя величины  $u_{r_1}$  и  $u_{r_2}$  в уравнение (8.24), определяем величину контактного давления  $p$ :

$$\frac{pd}{2E_1} \left( \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{pd}{2E_2} \left( \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right) = \frac{\delta}{2},$$

откуда

$$p = \frac{\frac{\delta}{d}}{\frac{1}{E_1} \left( \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_1 \right) + \frac{1}{E_2} \left( \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_2 \right)}. \quad (8.25)$$

Следует иметь в виду, что поверхность деталей никогда не бывает абсолютно гладкой, на ней всегда имеются следы обработки — гребешки. В процессе запрессовки эти гребешки обминаются, поэтому действительный натяг  $\delta$  всегда несколько меньше, чем определенный по замерам деталей до запрессовки (при шлифованных поверхностях разница между действительным и измеренным натягом составляет 10—20 мкм). Необходимо иметь в виду, что формула (8.25) выведена в предположении справедливости закона Гука и неприменима, если предел пропорциональности в одной из сопрягаемых деталей превзойден. В этом случае контактное давление оказывается меньшим, чем значение, полученное по формуле (8.25).

Если сопрягаемые детали изготавливаются из одинакового материала ( $E_1 = E_2 = E$ ;  $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ), то формула (8.25) упрощается. В этом случае

$$p = \frac{E(\delta/d)}{\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} + \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2}}. \quad (8.25a)$$

Если, наконец, внутренняя деталь представляет собой сплошной цилиндр ( $k_1 = 0$ ), то

$$p = E \frac{\delta}{d} \cdot \frac{1-k_2^2}{2}. \quad (8.25б)$$



Эквивалентное напряжение в деталях определяется по формулам (8.18) и (8.23). Усилие запрессовки можно найти по формуле

$$P = f p \pi d l, \quad (8.26)$$

где  $f$  — коэффициент трения;  $l$  — длина запрессовки.

Величина коэффициента трения при наличии смазки лежит в пределах 0,06—0,1. Рассмотрим запрессовку сплошного цилиндра диаметром  $d$  в деталь весьма больших размеров (запрессовка штифта). В этом случае  $k_1 = 0$  и  $k_2 \approx 0$ . Из формулы (8.25б) контактное давление

$$p = E(\delta/2d).$$

Около отверстия по внешней детали возникают напряжения (рис. 67)  $\sigma_r = -p$  и  $\sigma_\theta = p$  (см формулы (8.17)).

Поскольку в рассматриваемой точке  $\sigma_r = -\sigma_\theta$ , напряженное состояние представляет собой чистый сдвиг. Действительно, если выделить вблизи отверстия элементарный объем, то по граням его действуют главные напряжения  $\sigma_1 = \sigma_\theta = p$  и  $\sigma_2 = \sigma_r = -p$  (рис. 68).

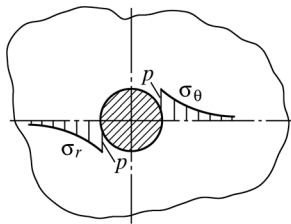


Рис. 67. Распределение напряжений около отверстия

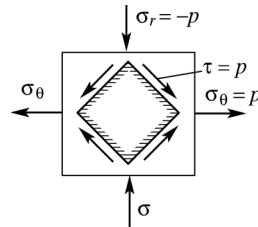


Рис. 68. Площадки с максимальными касательными напряжениями

Примем эти напряжения за исходные. Отсчитывая угол  $\alpha$  от направления  $\sigma_1$ , напишем формулы для  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  в произвольной площадке [8]

$$\sigma_\alpha = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \cos 2\alpha; \quad (8.27)$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} \sin 2\alpha. \quad (8.28)$$

Из (8.27) следует, что при  $\alpha = \pm 45^\circ$   $\cos 2\alpha = 0$  и  $\sigma_\alpha = 0$ ,  $\sin 2\alpha = \pm 1$  и касательные напряжения равны:

$$\tau_{\max/\min} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2} = \pm p.$$

Поскольку напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  изменяются по одинаковому закону (см. рис. 68) и отличаются только знаком, напряженное состояние чистого сдвига имеет место во всех точках наружной детали.

Эквивалентное напряжение из (8.18) ( $k = 0$ ):

$$\sigma_{\text{эkv}} = p(1 + \nu). \quad (8.29)$$

## 8.4. Скрепление цилиндров

### 8.4.1. Основные понятия

Из формулы (8.18), определяющей величину эквивалентного напряжения в опасной точке цилиндра, нагруженного внутренним давлением, видно, что это напряжение

$$\sigma_{\text{эkv}} = \sigma_\theta - \sigma_r = p \left( \frac{1 + k^2}{1 - k^2} + \nu \right)$$

не может быть меньше определенной величины, как бы ни изменялись размеры цилиндра. Действительно, даже при  $k = r_1/r_2 \rightarrow 0$ , что соответствует бесконечно большому наружному диаметру цилиндра (см. зависимость (8.29)), эквивалентное напряжение в опасной точке:

$$\sigma_{\text{эkv}} = p(1 + \nu).$$

Таким образом, если руководствоваться условием, что эквивалентное напряжение не должно достигать предела текучести  $\sigma_T$ , то невозможно изготовить цилиндр на давление большее, чем  $\sigma_T/(1 + \nu)$  (для стали  $\sigma_T/2$ , поскольку  $\nu = 1$ ) ни при каком выборе толщины его стенок. Причиной этого является то обстоятельство, что в толстостенных цилиндрах, нагруженных внутренним давлением, напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  очень быстро затухают с удалением от внутренней поверхности цилиндра и наружные слои материала являются малоактивными, поэтому утолщение стенок цилиндра не сопровождается пропорциональным увеличением его прочности.

В случае если цилиндр должен выдержать весьма большое давление, его делают составным из двух или более труб, которые с натягом надевают друг на друга (обычно с помощью горячей посадки). Окружные напряжения, возникающие при посадке, во внутренней трубе являются напряжениями сжатия, а во внешней — растяжения. Эпюры

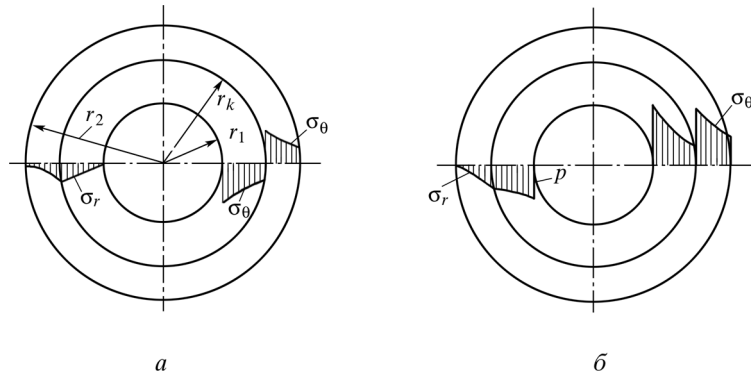


Рис. 69. Эпюры напряжений:

*a* — после запрессовки двух труб; *б* — при наличии внутреннего давления

распределения напряжений, возникающих после посадки, представлены на рис. 69, *a*. Если теперь составной цилиндр подвергнуть внутреннему давлению, то в нем возникнут дополнительные напряжения, причем в наружном цилиндре они будут складываться с начальными напряжениями посадки, а во внутреннем — вычитаться из них.

Суммарные эпюры напряжений после приложения давления будут иметь вид, примерно представленный на рис. 69, *б* (точная эпюра напряжений зависит от соотношений давлений запрессовки и внутреннего давления).

Таким образом, благодаря скреплению удастся разгрузить внутренние волокна цилиндра за счет более интенсивного использования наружных.

### 8.4.2. Расчет скрепленного цилиндра

Обозначим (см. рис. 69, *a*)  $k_1 = \frac{r_1}{r_k}$  — отношение внутреннего радиуса  $r_1$  к радиусу  $r_k$  посадочной поверхности;  $k_2 = \frac{r_k}{r_2}$  — отношение радиуса посадочной поверхности  $r_k$  к наружному радиусу цилиндра  $r_2$ ;  $k = \frac{r_1}{r_2} = k_1 k_2$  — отношение внутреннего радиуса  $r_1$  составного цилиндра к наружному  $r_2$ ;  $p_0$  — контактное давление после запрессовки при

отсутствии внутреннего рабочего давления  $p$ ;  $p_1$  — контактное давление на посадочной поверхности при наличии внутреннего давления.

Напряжения в опасной точке внутренней трубы, нагруженной изнутри давлением  $p$ , а снаружи давлением  $p_1$  (рис. 70), равны:

$$\begin{aligned} \sigma_r &= -p; \\ \sigma_\theta &= \frac{pk_1^2 - p_1}{1 - k_1^2} + \frac{p - p_1}{1 - k_1^2} = \\ &= p \frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - p_1 \frac{2}{1 - k_1^2}. \end{aligned}$$

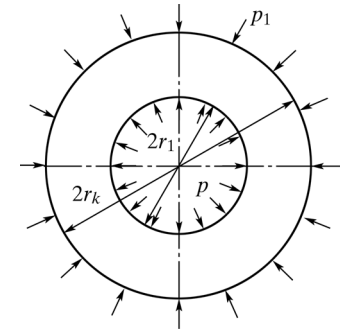


Рис. 70. Напряжение внутренней трубы

Соответственно, эквивалентное напряжение в этой точке определяется по формуле

$$\begin{aligned} \sigma_{\text{экв1}} &= \sigma_\theta - \nu\sigma_r = p \frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} - p_1 \frac{2}{1 - k_1^2} + \nu p = \\ &= p \left( \frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} + \nu \right) - p_1 \frac{2}{1 - k_1^2}. \end{aligned} \quad (8.30)$$

Для стальной трубы (при  $\nu = 1$ ):

$$\sigma_{\text{экв1}} = (p - p_1) \frac{2}{1 - k_1^2}. \quad (8.31)$$

Для внешней трубы, которая нагружена только контактным давлением  $p_1$  (рис. 71) на посадочной поверхности (при наличии внутреннего давления  $p$  в запрессованной трубе, см. рис. 69, *б*), эквивалентное напряжение в опасной точке определяется по формуле (8.18):

$$\sigma_{\text{экв2}} = p_1 \left( \frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2} + \nu \right). \quad (8.32)$$

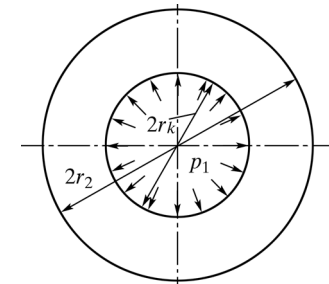


Рис. 71. Напряжение внешней трубы

Для стальной трубы (при  $\nu = 1$ ):

$$\sigma_{\text{экв2}} = p_1 \left( \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + 1 \right) = p_1 \frac{2}{1-k_2^2}. \quad (8.33)$$

Для того чтобы внешняя и внутренняя трубы составного цилиндра были равнопрочными, необходимо, чтобы  $\sigma_{\text{экв2}}$ , определяемое в общем случае по формуле (8.32), равнялось  $\sigma_{\text{экв1}}$ , определяемому по формуле (8.30). Это условие определяет желательную величину контактного давления между трубами при нагрузке цилиндра рабочим давлением  $p$ :

$$p \left( \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} + \nu \right) - p_1 \frac{2}{1-k_1^2} = p \left( \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \nu \right). \quad (a)$$

Отсюда

$$p \left( \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} + \nu \right) - p_1 \frac{2}{1-k_1^2} = p \left( \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \nu \right). \quad (8.34)$$

При  $\nu = 1$  (для стали) из зависимости (a):

$$p_1 \frac{2}{1-k_2^2} = (p - p_1) \frac{2}{1-k_1^2} \quad (б)$$

или из (8.34) и (б):

$$p_1 = p \frac{1-k_2^2}{2-k_1^2-k_2^2}. \quad (8.35)$$

Величину контактного давления после запрессовки  $p_0$  (при отсутствии рабочего давления  $p$ ) найдем, вычитая из давления  $p_1$  величину радиального напряжения на радиусе  $r_k$ , соответствующего действию внутреннего давления  $p$  на цельный цилиндр с наружным радиусом  $r_2$ . По формуле (8.10) (принимая в зависимости (8.10) обозначения  $p_1 = p, p_1 = 0$ ) найдем это напряжение:

$$|\sigma_r| = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} - \frac{pr_1^2 r_2^2}{r_2^2 - r_1^2} \cdot \frac{1}{r_k^2} = \frac{pr_1^2}{r_2^2 - r_1^2} \left( \frac{r_2^2}{r_k^2} - 1 \right)$$

или, используя принятые ранее обозначения:

$$|\sigma_r| = p \frac{k_1^2(1-k_2^2)}{1-k_1^2 k_2^2}. \quad (в)$$

Необходимое для обеспечения равнопрочности труб контактное давление, осуществляемое посадкой, согласно (8.35) и (в) равно:

$$p_0 = p_1 - |\sigma_r| = p \left[ \frac{1-k_2^2}{2-k_1^2-k_2^2} - \frac{k_1^2(1-k_2^2)}{1-k_1^2 k_2^2} \right]. \quad (8.36)$$

При заданных величинах внутреннего и наружного диаметров составного цилиндра наиболее выгодным является такой выбор диаметра посадки ( $2r_k$ ), который соответствует наименьшей величине эквивалентного напряжения. Чтобы не усложнять выводы, в дальнейшем будем использовать все зависимости только для стальных труб (при  $\nu = 1$ ).

При правильном в соответствии с формулами (8.35) и (8.36) выборе величины контактного давления эквивалентные напряжения во внутренней и наружной трубах (см. формулы (8.31) и (8.33)) одинаковы и равны:

$$\sigma_{\text{экв1}} = \sigma_{\text{экв2}} = (p - p_1) \frac{2}{1-k_1^2} = p_1 \frac{2}{1-k_2^2}.$$

Для дальнейшего вывода возьмем значение  $\sigma_{\text{экв2}}$  из (8.33), подставив в формулу только значение  $p_1$  из (8.35):

$$\sigma_{\text{экв}} = p \frac{1-k_2^2}{2-k_1^2-k_2^2} \cdot \frac{2}{1-k_2^2} = p \frac{2}{2-k_1^2-k_2^2}. \quad (г)$$

Так как отношение внутреннего радиуса составного цилиндра к наружному

$$k = \frac{r_1}{r_2} = \frac{r_1}{r_k} \cdot \frac{r_k}{r_2} = k_1 k_2$$

является заданным, заменяя  $k_2$  на  $k/k_1$ , можно эквивалентное напряжение  $\sigma_{\text{экв}}$  из (г) выразить только в зависимости от  $k_1$ :

$$\sigma_{\text{экв}} = p \frac{2}{2-k_1^2 - \frac{k}{k_1^2}}. \quad (д)$$

Для выбора наиболее оптимального радиуса посадочной поверхности из условий прочности составной трубы продифференцируем  $\sigma_{\text{экв}}$  из (д) по  $k_1$  и, приравнявая производную нулю, определим та-

кое значение  $k_1$ , которое будет соответствовать наименьшей величине  $\sigma_{\text{экв}}$ :

$$\frac{d\sigma_{\text{экв}}}{dk_1} = 2p \frac{2(k_1^4 - k^2)}{\left(2 - k_1^2 - \frac{k^2}{k_1^2}\right)^2 k_1^3} = 0$$

или

$$k_1^4 - k^2 = 0. \quad (e)$$

Из уравнения (e) находим  $k_1 = \sqrt{k}$ , т. е. при

$$r_k = \sqrt{r_1 r_2} \quad (8.37)$$

эквивалентное напряжение достигает минимума, равного

$$\sigma_{\text{экв}} = p \frac{2}{2 - k - \frac{k^2}{k}} = p \frac{1}{1 - k}. \quad (8.38)$$

Таким образом, при материале, одинаково работающем на растяжение и сжатие, выгодно в качестве посадочного диаметра составного цилиндра выбирать среднее геометрическое между внутренним и внешним его диаметрами.

Необходимая величина контактного давления, создаваемая при посадке, определяется в этом случае по формуле (8.36), которая при  $k_1 = k_2 = \sqrt{k}$  принимает вид

$$p_0 = p \left[ \frac{1 - k}{2 - k - k} - \frac{k(1 - k)}{1 - k^2} \right] = p \frac{1 - k}{2(1 + k)}, \quad (8.39)$$

где  $p$  — расчетное внутреннее давление (рабочее) в составном цилиндре.

Соответствующую величину натяга  $\delta$  можно найти по формуле (8.25, a), произведя в ней необходимые подстановки:

$$p_0 = \frac{E \frac{\delta}{d_k}}{\frac{1 + k_1^2}{1 - k_1^2} + \frac{1 + k_2^2}{1 - k_2^2}} = \frac{E \frac{\delta}{2r_k}}{\frac{1 + k}{1 - k} + \frac{1 + k}{1 - k}} = \frac{E\delta(1 - k)}{r_k(1 + k)},$$

с учетом (8.39) получим:

$$p \frac{1 - k}{2(1 + k)} = \frac{E\delta(1 - k)}{r_k(1 + k)}.$$

Отсюда

$$\delta = \frac{p}{E} 2r_k. \quad (8.40)$$

Если радиус посадочной поверхности выбран по зависимости (8.37), то при действии на составной цилиндр внутреннего давления  $p$  эквивалентное напряжение в опасной точке определяется формулой (8.38). Сравнивая эту величину со значением эквивалентного напряжения в несоставном цилиндре при действии только внутреннего рабочего давления  $p$  (формула (8.18) при  $\nu = 1$ ):

$$\sigma_{\text{экв.спл}} = p \left( \frac{1 + k^2}{1 - k^2} + 1 \right) = p \frac{2}{1 - k^2},$$

найдем, что их отношение равно:

$$\frac{\sigma_{\text{экв.сост}}}{\sigma_{\text{экв.спл}}} = \frac{p(1 - k^2)}{(1 - k)2p} = \frac{1 + k}{2}. \quad (8.41)$$

Таким образом, изготавливая толстостенный цилиндр составным, можно почти вдвое уменьшить величину эквивалентного напряжения. Составные цилиндры из двух насаженных друг на друга труб часто применяются в качестве стволов артиллерийских орудий и в других конструкциях, испытывающих высокое давление.

Метод скрепления цилиндров является, однако, не единственным методом, позволяющим повысить их несущую способность.

Такие же примерно результаты достигаются, если изготовленный цельный цилиндр подвергать нагрузке высоким внутренним давлением так, чтобы во внутренних волокнах цилиндра возникли пластические деформации. После разгрузки в цилиндре остаются остаточные напряжения, распределенные подобно напряжениям, возникшим при насадке цилиндров с натягом (внутренние кольцевые волокна сжаты, наружные — растянуты).

Остаточные напряжения у внутренней поверхности цилиндра имеют знак, обратный знаку напряжений, возникающих при воздействии на цилиндр внутреннего давления. Благодаря этому суммарные

напряжения в опасных зонах цилиндра снижаются, и прочность его увеличивается. Этот метод повышения несущей способности носит название автофреттирования, или автоскрепления цилиндра.

### 8.5. Расчет вращающихся дисков постоянной толщины

Рассмотрим расчет вращающихся дисков постоянной толщины (рис. 72). Если внешний диаметр диска  $r_2$  превосходит толщину диска  $h$  в четыре раза и более, то, как показало точное решение теории упругости [8], практически можно считать, что по толщине окружных и радиальных сечений диска напряжения распределены равномерно, а отдельные круговые слои диска, деформируясь одинаковым образом, не находятся в силовом взаимодействии друг с другом, т. е. имеет место плоское напряженное состояние.

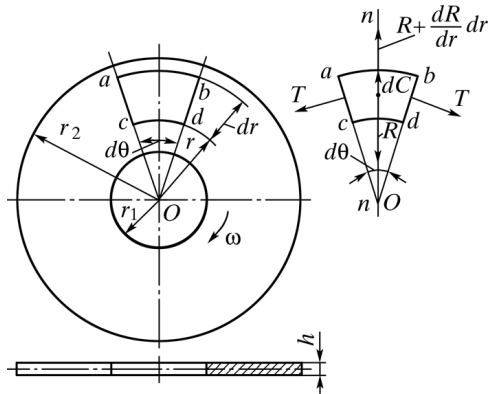


Рис. 72. Диск постоянной толщины

На основании изложенного в приведенном ниже инженерном методе расчета тонких дисков используются следующие допущения:

- напряжения распределены равномерно по толщине диска;
- в площадках, параллельных срединной плоскости диска (см. рис. 42, обозначены штриховой линией на поперечном сечении), напряжения отсутствуют.

Пусть диск постоянной толщины  $h$  с центральным отверстием вращается с постоянной угловой скоростью  $\omega$  вокруг центральной оси, нормальной к чертежу. Размеры диска указаны на рис. 72. Масса единицы объема (плотность) материала  $\rho$  (кг/м<sup>3</sup>).

Мысленно остановим диск, приложим ко всем его сечениям силы инерции и исследуем деформированное и напряженное состояние диска, считая его как бы находящимся в покое. Заметим, что рассматриваемая задача является осесимметричной, т. е. компоненты напряжений и деформации в точках диска, также как и перемещения, являются только функциями радиуса и от полярного угла не зависят.

Выделим двумя радиальными сечениями, образующими угол  $d\theta$ , и двумя окружными сечениями, отстоящими друг от друга на расстоянии  $dr$ , бесконечно малый элемент диска  $abcd$  (см. рис. 72), и, нагрузив его поверхностными и объемными силами, исследуем условия равновесия элемента. В силу симметрии элемента и нагрузки искажения углов элемента не произойдет, а поэтому касательных напряжений ни на одной из граней, ограничивающих выделенный элемент, не будет. Таким образом, по граням выделенного элемента  $ac = dr$  и  $bd = dr$  действуют окружные напряжения  $\sigma_\theta$ , а по радиальным граням  $ab = (r + dr)d\theta$  и  $cd = rd\theta$  — радиальные  $\sigma_r$ , которые являются главными напряжениями.

Таким образом, на рассматриваемый элемент  $abcd$  действуют силы:

- центробежная сила инерции:

$$dC = \rho h r d\theta dr \omega^2 = \rho h r^2 \omega^2 dr d\theta, \quad (8.42)$$

где  $\rho$  — плотность материала диска в кг/м<sup>3</sup>;  $\omega$  — угловая скорость в 1/с;

- радиальные силы:

$$R \text{ и } R + \frac{dR}{dr} dr,$$

где

$$R = \sigma_r h r d\theta; \quad (8.43)$$

- окружные силы:

$$T = \sigma_\theta h dr. \quad (8.44)$$

Выражения (8.42) и (8.43) составлены в предположении, что напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  постоянны по толщине диска.

Сумма проекций всех перечисленных сил (см. (8.42), (8.43)) на направление среднего радиуса  $nn$  (см. рис. 72) приводит к уравнению

$$dC - R + \left( R + \frac{dR}{dr} dr \right) - 2T \cos \left( 90^\circ - \frac{d\theta}{2} \right) = 0. \quad (8.45)$$

Заметим, если спроецировать все силы на направление, перпендикулярное  $mn$ , а также взять сумму моментов их относительно любой точки элемента  $abcd$ , то в этом случае придем к тождеству  $0 = 0$ .

Учитывая, что

$$dR = d(\sigma_r r) h d\theta, \text{ а } 2 \cos\left(90^\circ - \frac{d\theta}{2}\right) = 2 \sin \frac{d\theta}{2} \approx d\theta,$$

окончательно получим:

$$dC + \frac{dR}{dr} dr - T d\theta = 0$$

или

$$\rho h r^2 \omega^2 dr d\theta + \frac{d(\sigma_r r) h d\theta}{dr} dr - \sigma_\theta h dr d\theta = 0.$$

После сокращения получим:

$$\frac{d(\sigma_r r)}{dr} - \sigma_\theta + \rho r^2 \omega^2 = 0 \quad (8.46)$$

или

$$\frac{d\sigma_r}{dr} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho r \omega^2 = 0. \quad (8.46a)$$

Дифференциальное уравнение (8.45) включает две неизвестные функции  $\sigma_r(r)$  и  $\sigma_\theta(r)$ .

Выразим последние через одну функцию  $u_r(r)$ , представляющую собой радиальное перемещение точки на радиусе  $r$ , в окрестности которой выделен рассматриваемый элемент.

Длина окружности произвольного радиуса  $r$  до деформации составляла величину  $2\pi r$ ; после деформации длина этой же окружности равна  $2\pi(r + u_r)$ . Абсолютная деформация окружности радиуса  $r$  составляет  $2\pi(r + u_r) - 2\pi r = 2\pi u_r$ .

Тогда относительная окружная деформация  $\epsilon_\theta$  выражается через перемещение следующим образом:

$$\epsilon_\theta = \frac{2\pi u_r}{2\pi r} = \frac{u_r}{r}. \quad (8.47)$$

Поскольку радиальное смещение точек окружности радиуса  $r$  обозначили как  $u_r$ , радиальное смещение точек окружности диска  $r +$

$dr$  будет  $u_r + du_r$ . Следовательно, абсолютная деформация выделенного элемента  $dr$  будет равна  $du_r$ , а относительная радиальная деформация

$$\epsilon_r = \frac{du_r}{dr}. \quad (8.48)$$

Теперь в соответствии со второй принятой нами гипотезой, по которой напряжение является плоским, следуя закону Гука, используем формулы

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_\theta &= \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu \sigma_r); \\ \epsilon_r &= \frac{1}{E} (\sigma_r - \mu \sigma_\theta). \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Решая совместно уравнения (a) относительно  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$ , а также подставив значения  $\epsilon_r$  и  $\epsilon_\theta$  из зависимостей (8.47) и (8.48), окончательно получим:

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_\theta + \mu \epsilon_r) = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{u_r}{r} + \mu \frac{du_r}{dr} \right); \quad (8.49)$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} (\epsilon_r + \mu \epsilon_\theta) = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{du_r}{dr} + \mu \frac{u_r}{r} \right). \quad (8.50)$$

Для того чтобы можно было осуществить подстановку в уравнение (8.45, a) значений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  из (8.49) и (8.50), найдем предварительно  $d\sigma_r/dr$ . Пользуясь соотношением (8.50) имеем:

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \mu \frac{r \frac{du_r}{dr} - u_r}{r^2} \right). \quad (8.51)$$

Подставляя значения  $\sigma_r$ ,  $\sigma_\theta$  из (8.49), (8.50), а также  $d\sigma_r/dr$  из (8.51) в уравнение (8.46, a), получаем:

$$\begin{aligned} \frac{E}{1-\mu^2} \left( \frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{\mu}{r} \cdot \frac{du_r}{dr} - \mu \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{E}{(1-\mu^2)r} \left( \frac{du_r}{dr} + \mu \frac{u_r}{r} - \frac{u_r}{r} - \mu \frac{du_r}{dr} \right) + \rho r \omega^2 = 0. \end{aligned}$$



Разделив полученное уравнение на  $E/(1-\mu^2)$  и проведя необходимые преобразования, имеем:

$$\frac{d^2 u_r}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{du_r}{dr} - \frac{u_r}{r^2} = -\frac{1-\mu^2}{E} \rho r \omega^2$$

или

$$\frac{d}{dr} \left[ \frac{1}{r} \cdot \frac{d(u_r r)}{dr} \right] = -\frac{1-\mu^2}{E} \rho r \omega^2. \quad (8.52)$$

Интегрируя уравнение (8.52), имеем:

$$\frac{1}{r} \cdot \frac{d(u_r r)}{dr} = C_1 - \frac{1-\mu^2}{2E} \rho r^2 \omega^2$$

или

$$\frac{d(u_r r)}{dr} = 2C_1 r - \frac{1-\mu^2}{2E} \rho r^3 \omega^2.$$

Интегрируя второй раз, получаем:

$$u_r = C_1 r + \frac{C_2}{r} - \frac{1-\mu^2}{8E} \rho r^3 \omega^2. \quad (8.53)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий поставленной задачи.

После определения величины функции формулам (8.49) и (8.50) могут быть установлены значения напряжений  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  в зависимости от радиуса  $r$ .

Если

$$\frac{du_r}{dr} = C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1-\mu^2}{E} \rho \omega^2 r^2,$$

то

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ \frac{C_1}{r} + \frac{C_2}{r^2} - \frac{1-\mu^2}{8E} \rho \omega^2 r^2 + \mu C_1 - \mu \frac{C_2}{r^2} - \mu \frac{3}{8} \cdot \frac{1-\mu^2}{E} \rho \omega^2 r^2 \right];$$

$$\sigma_r = \frac{E}{1-\mu^2} \left[ C_1 - \frac{C_2}{r^2} - \frac{3}{8} \cdot \frac{1-\mu^2}{E} \rho \omega^2 r^2 + \mu C_1 + \mu \frac{C_2}{r^2} - \mu \frac{1-\mu^2}{8E} \rho \omega^2 r^2 \right].$$

После преобразований окончательно получим:

$$\sigma_\theta = \frac{C_1 E}{1-\mu} + \frac{C_2 E}{(1+\mu)r^2} - \frac{1+3\mu}{8} \rho \omega^2 r^2; \quad (8.54)$$

$$\sigma_r = \frac{C_1 E}{1-\mu} - \frac{C_2 E}{(1+\mu)r^2} - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r^2. \quad (8.55)$$

Рассмотрим частные случаи по расчету дисков постоянной толщины.

**Диск без отверстия.** Рассмотрим диск постоянной толщины без обода и центрального отверстия (рис. 73). Внешний радиус диска равен  $r_2$ .

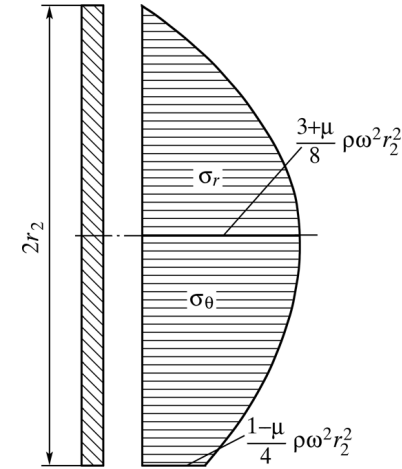


Рис. 73. Диск постоянной толщины без центрального отверстия и эпюры напряжений  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$ , возникающие в нем в связи с вращением

Решение (8.53) может существовать при  $C_2 = 0$ . В этом случае при  $r = 0$   $u_r = 0$ . Так как при  $r = r_2$   $(\sigma_r)_{r=r_2} = 0$ , из формулы (8.55) имеем:

$$\frac{C_1 E}{1-\mu} - \frac{3+\mu}{8} \rho \omega^2 r_2^2 = 0,$$

откуда

$$C_1 = \frac{(3+\mu)(1-\mu)}{8E} \rho \omega^2 r_2^2.$$

Тогда

$$\sigma_{\theta} = \frac{\rho\omega^2}{8} [(3+\mu)r_2^2 - (1+3\mu)r^2]; \quad (8.56)$$

$$\sigma_r = \frac{\rho\omega^2}{8} [(3+\mu)(r_2^2 - r^2)]. \quad (8.57)$$

Графики изменения напряжений  $\sigma_{\theta}$  и  $\sigma_r$  в зависимости от радиуса  $r$  представлены на рис. 73.

Из формул (8.56) и (8.57) следует, что  $\sigma_{\theta}$  и  $\sigma_r$  всегда положительны (см. также рис. 73) и увеличиваются по мере приближения к центру. Наибольшее напряжение растяжения возникает в центре (при  $r=0$ ):

$$\sigma_{\theta \max} = \sigma_{r \max} = \frac{(3+\mu)\rho\omega^2 r_2^2}{8}. \quad (8.58)$$

На внешнем радиусе  $r=r_2$  ( $\sigma_r$ ) $_{r=r_2} = 0$ , а окружное напряжение  $\sigma_{\theta}$ :

$$\sigma_{\theta} = \frac{(1-\mu)\rho\omega^2 r_2^2}{4}. \quad (8.59)$$

**Диск с отверстием.** Для диска с центральным отверстием без обода (рис. 74) имеем следующие граничные условия: при  $r=r_1$  ( $\sigma_r$ ) $_{r=r_1} = 0$ , а при  $r=r_2$  ( $\sigma_r$ ) $_{r=r_2} = 0$ . Другими словами, на внешнем и внутреннем радиусе нормальные радиальные напряжения  $\sigma_r$  должны обращаться в нуль.

Подставляя в формулу (8.55)  $r=r_1$  и  $r=r_2$ , получим систему уравнений относительно двух неизвестных  $C_1$  и  $C_2$ :

$$\frac{C_1 E}{1-\mu} - \frac{C_2 E}{(1+\mu)r_1^2} - \frac{3+\mu}{8} \rho\omega^2 r_1^2 = 0;$$

$$\frac{C_1 E}{1-\mu} - \frac{C_2 E}{(1+\mu)r_2^2} - \frac{3+\mu}{8} \rho\omega^2 r_2^2 = 0.$$

Решая совместно полученные уравнения относительно  $C_1$  и  $C_2$ , получаем:

$$C_1 = \frac{(3+\mu)(1-\mu)}{8E} \rho\omega^2 (r_1^2 + r_2^2) \quad (б)$$

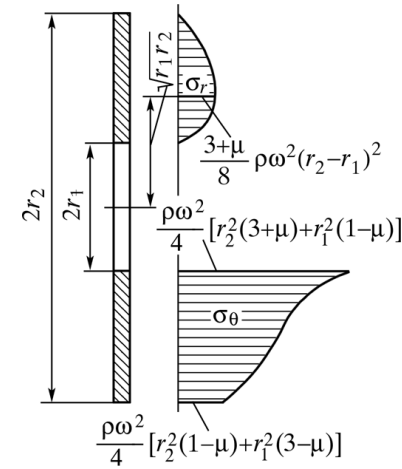


Рис. 74. Диск постоянной толщины с центральным отверстием и эпюры напряжений  $\sigma_{\theta}$  и  $\sigma_r$ , возникающие в нем в связи с вращением

и

$$C_2 = \frac{(3+\mu)(1+\mu)}{8E} \rho\omega^2 r_1^2 r_2^2. \quad (в)$$

Подставляя найденные значения  $C_1$  и  $C_2$  в формулы (8.54) и (8.55), получаем после преобразования окончательные выражения для определения  $\sigma_{\theta}$  и  $\sigma_r$ :

$$\sigma_{\theta} = \frac{(3+\mu)\rho\omega^2}{8} \left[ r_1^2 + r_2^2 + \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - \frac{1+3\mu}{3+\mu} r^2 \right]; \quad (8.60)$$

$$\sigma_r = \frac{(3+\mu)\rho\omega^2}{8} \left[ r_1^2 + r_2^2 - \frac{r_1^2 r_2^2}{r^2} - r^2 \right]. \quad (8.61)$$

Эпюры  $\sigma_{\theta}$  и  $\sigma_r$  для вращающегося диска постоянной толщины с центральным отверстием представлены на рис. 74.

Из (8.60) следует, что напряжение  $\sigma_{\theta}$  достигает наибольшего значения на внутреннем радиусе, где

$$\sigma_{\theta \max} = \frac{\rho\omega^2}{4} [r_2^2 (3+\mu) + r_1^2 (1-\mu)]. \quad (8.62)$$

Для определения максимального радиального напряжения  $\sigma_r$ , а также положения сечения, определяемого радиусом  $r$ , найдем  $d\sigma_r/dr$ , используя формулу (8.61):

$$\frac{d\sigma_r}{dr} = \frac{(3+\mu)\rho\omega^2}{8} \left[ -\frac{2rr_1^2r_2^2}{r^4} - 2r \right] = 0,$$

откуда

$$r_0 = \sqrt{r_1r_2}. \quad (8.63)$$

Таким образом, из (8.63) наибольшее напряжение  $\sigma_r$  возникает в точках окружного сечения на радиусе  $r = r_0$ :

$$\sigma_{r \max} = \frac{(3+\mu)\rho\omega^2}{8} (r_2 - r_1)^2. \quad (8.64)$$

Заметим, что  $\sigma_{\theta \max} > \sigma_{r \max}$ .

**Обод и диск с очень малым отверстием.** Этот диск может рассматриваться, как предыдущий (см. рис. 74), если радиусы  $r_1$  и  $r_2$  близки по величине. В этом случае диск обращается в тонкий обод радиусом  $R$ .

Формулы для определения  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$  получим как частные случаи формул (8.60) и (8.61), полагая в них  $r_1 = r_2 = R$ . Как и следовало ожидать:

$$\sigma_\theta = \rho\omega^2 R^2; \quad (8.65)$$

$$\sigma_r = 0.$$

Интересно отметить, что при  $r_1 \approx 0$  в радиальном сечении у кромки центрального прокола:

$$\sigma_\theta = \frac{(3+\mu)\rho\omega^2 r_2^2}{4}. \quad (8.66)$$

Из (8.66) следует, что для диска с проколом в центре окружное напряжение вдвое превышает  $\sigma_\theta$  для сплошного диска (см. формулу (8.58)).

Учитывая, что прокол можно рассматривать как источник местных напряжений, из сравнения формул (8.58) и (8.66) устанавливаем, что коэффициент концентрации напряжений в этом случае равен 2.

Полученные результаты по расчету дисков постоянной толщины с центральным отверстием могут быть широко использованы при

расчете шлифовальных кругов, которые часто изготавливаются в форме таких дисков.

Так как при вращении дисков с центральным отверстием наибольшие окружные напряжения  $\sigma_\theta$  возникают в радиальных сечениях у внутренней кромки, при установке шлифовальных кругов для надежности необходимо не только выполнить центральную посадку круга, но и не снижать его прочность.

Обычно шлифовальные круги зажимаются между плоскими кольцевыми фланцами. Под фланцы должна ставиться прокладка из упругого материала (картон, резина, кожа и др.), чтобы предохранить поверхность шлифовального круга от каких-либо повреждений в связи с нажимом фланцев. Одна из конструкций креплений такого рода приведена на рис. 75.

Круги диаметром 0,15 м и более, предназначенные для работы с окружными скоростями  $v \geq 15$  м/с, перед установкой на шлифовальный станок необходимо испытывать вращением при скорости, на 50 % превышающей максимально допустимую скорость, установленную для рабочего режима диска.

Шлифовальные круги на прочность испытывают вращением на специальном станке, обеспечивающем безопасное проведение этой операции.

В эксплуатационных условиях шлифовальные круги должны быть защищены специальными кожухами.

## 8.6. О некоторых противоречиях при расчете на прочность

При расчете на прочность толстостенных труб применялась в основном гипотеза прочности О. Мора. Однако в некоторых случаях использование ее приводит к противоречивым результатам.

Пусть, например, необходимо записать условие прочности для толстостенной трубы, у которой внутренний радиус  $r_1 \rightarrow 0$ , или в расчетной схеме будет использован стержень круглого поперечного сечения с внешним радиусом  $r_2$  (рис. 76).

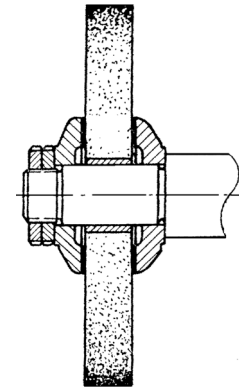


Рис. 75. Конструкция крепления шлифовального круга

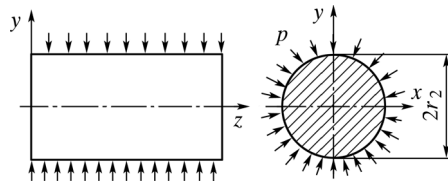


Рис. 76. Нагружение круглого стержня давлением  $p$  на боковую поверхность

Запишем в общем виде уравнения Ляме (см. формулы (8.9)):

$$\begin{aligned} \sigma_r &= A - B \frac{1}{r^2}; \\ \sigma_\theta &= A + B \frac{1}{r^2}, \end{aligned} \tag{a}$$

из которых следует, что при  $r_1 \rightarrow 0$   $\sigma_r \rightarrow \infty$ ,  $\sigma_\theta \rightarrow \infty$ . Другими словами, решения (a) имеют смысл только при  $B = 0$ , т. е. напряжения  $\sigma_r$  и  $\sigma_\theta$  постоянны по всему поперечному сечению стержня. Поскольку из граничных условий (см. рис. 35)  $(\sigma_r)_{r=r_2} = -p$ ,  $\sigma_r = \sigma_\theta = -p$ . Если для данного случая использовать гипотезу О. Мора, то для материалов, одинаково работающих на растяжение и сжатие, ( $\nu = 1$ ) получим:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sigma_r - \sigma_\theta = 0.$$

Таким образом, получим противоречивое решение, из которого следует, что стержень не разрушится при каком угодно большом давлении.

Если использовать гипотезу прочности энергии формоизменения (гипотеза Губера — Мизеса — Генки) [8, 9]:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]} \leq [\sigma], \tag{б}$$

то для расчетной схемы (см. рис. 76):

$$\sigma_r = -p = \sigma_3; \quad \sigma_\theta = -p = \sigma_2; \quad \sigma_z = 0 = \sigma_1. \tag{в}$$

Подставив значения главных напряжений из (б) в соотношение (в), получим:

$$\sigma_{\text{экр}} = \sqrt{\frac{1}{2} [(0 + p)^2 + (-p + p)^2 + (-p + 0)^2]} = p \leq [\sigma]. \tag{8.67}$$

Нетрудно заметить, что (8.67) — условие прочности стержня, растягиваемого продольной силой, когда напряжение  $\sigma_z = p$ . Между тем, как следует из расчетной схемы, вдоль оси  $z$  продольные силы отсутствуют. Воспользуемся принятым в механике деформированного твердого тела методом сечений (рис. 77), при котором мысленно разрежем тело двумя наклонными сечениями 1—1 и 2—2, расположенными на расстоянии  $dx$  друг от друга. Тогда получим значения  $\sigma_\alpha$  и  $\tau_\alpha$  в поперечном сечении отсеченной части  $A$  или в наклонных сечениях части  $C$ :

$$\begin{aligned} \sigma_\alpha &= -p \cos \alpha \\ \tau_\alpha &= -p \sin \alpha. \end{aligned} \tag{г}$$

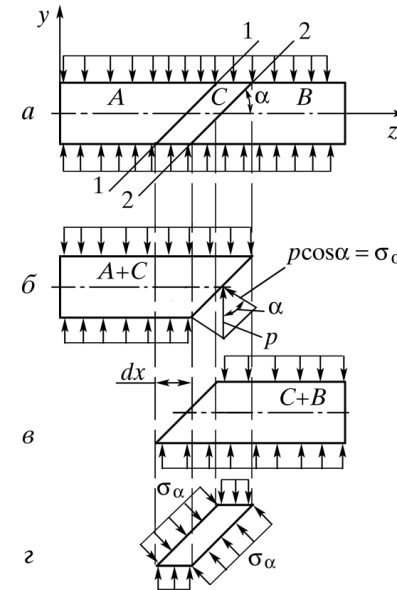


Рис. 77. Напряжения в наклонных сечениях круглого стержня при всестороннем сжатии

Из соотношения (a) следует, что при  $\alpha = 0$  нормальные напряжения в поперечном сечении стержня отсутствуют. Такое противоречие действительно существует. Метод сечений, позволяющий определять напряжения в плоскости воображаемого сечения по величине напряжений на поверхности стержня, не всегда приводит к правильной

картине истинных напряжений, существующих в микрообъемах материала.

Американский ученый-физик П.В. Бриджмен провел экспериментальные исследования, испытывая стальной стержень под статическим нарастающим давлением, равномерно распределенным по боковой поверхности; нагрузка по оси образца отсутствовала (см. рис. 76). В этих условиях по методу сечений получается  $\sigma_z = 0$ . Между тем, результаты испытаний показали, что при таком двухосном поперечном давлении деформация и разрушение образца происходят совершенно так же, как при действии осевой растягивающей нагрузки.

При нарастании нагрузки образец постепенно удлиняется, образуется шейка, и, наконец, получается разрыв, т. е. разрушение происходит по поперечному сечению, в котором метод сечений не обнаруживает никаких нормальных напряжений.

Если в данном случае определить то нормальное растягивающее напряжение  $\sigma_z$  на поверхности стержня, которое при одноосном осевом растяжении создавало бы такую же линейную деформацию по оси  $z$ , какая получается при сжатии стержня сплошной нагрузкой, действующей на его боковую поверхность, то по обобщенной формуле закона Гука

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E}(\sigma_z - \mu\sigma_x - \mu\sigma_y)$$

при  $\sigma_x = \sigma_y = -p$ ;  $\sigma_z = 0$ ; линейная деформация  $\varepsilon_z = \frac{2\mu p}{E}$ , и потому  $\sigma_z = \varepsilon_z E = 2\mu p$ . Если, например, принять для металла среднее значение  $\mu \approx 1/3$ , то искомое осевое растягивающее напряжение  $\sigma_z = \frac{2}{3} p$ .

При нарастании статической нагрузки на боковую поверхность стержня напряжение  $\sigma_z$  в продольных волокнах достигает наконец предельной величины, при которой происходит разрушение.

Чтобы разобраться в этих противоречиях, подтверждающихся экспериментально, обратимся к условиям равновесия кристаллической решетки монокристалла. Для пояснения рассмотрим предварительно конструкцию, составленную из шести прямых стержней (рис. 78), концы которых соединены шарнирами. При сжатии такого шестизвенника горизонтальными силами  $P$  пять стержней будут сжиматься, и только один вертикальный стержень будет растягиваться.

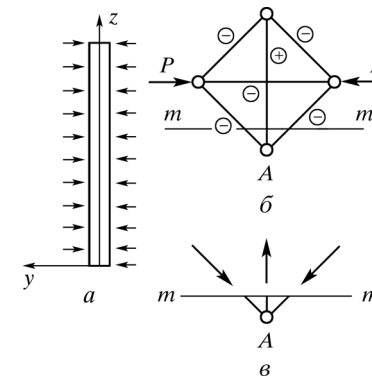


Рис. 78. Стержень, нагруженный по боковым поверхностям равномерным давлением (а), схема деформации решетки монокристалла (б) и усилия в узле А (б)

По условиям равновесия трех сил [10], действующих на нижний узел А:  $\sum X = 0$  и  $\sum Y = 0$  (см. рис. 78).

Подобным же образом распределяются внутренние усилия в отдельных кубических ячейках напряженных монокристаллов. Мысленно рассекая ячейку плоским сечением  $mm$ , перпендикулярным оси  $x$ , действительно получим  $\sum X = 0$  и  $\sum Y = 0$ , что, однако, не указывает на отсутствие внутренних сил взаимодействия между узлами кристаллической решетки. Это положение можно распространить и на всю решетку монокристалла в целом; оно же сохраняет силу и для тела поликристаллического строения по статистическим законам.

При одноосном растяжении бруса в продольных сечениях действительно напряжения  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ , если рассматривать всю площадь сечений в целом. Это, однако, не значит, что в пределах микрообъемов отсутствуют напряжения сил взаимодействия между частицами материала.

Процессы, происходящие в пределах микрообъемов, метод сечений не отражает. Между тем, эти внутренние напряжения, как показали опыты П. Бриджмена, в некоторых случаях могут приводить и к разрушению материала.

На приведенных примерах разъяснены следующие положения.

1. По напряжениям, имеющимся на поверхности бруса, метод сечений позволяет находить напряжения в произвольно расположенных сечениях, которыми мысленно отделяется какая-либо часть (или частица) объема стержня, на основе условий равновесия этой части. В результате определяются внутренние напряжения, действующие на

ту грань отделенной части бруса, которая совпадает с плоскостью вообразаемого сечения. Метод сечений основан на понятии о сплошной среде и имеет своим назначением определение напряжений в пределах макрообъемов. Поэтому он не может отражать истинную напряженность внутренних взаимосвязей в пределах микрообъемов вещества.

2. Определение внутренних напряжений не по условиям равновесия мысленно отделяемой части бруса, а по величине фактически получающейся деформации позволяет отразить напряжения микросвязей, получающиеся при упругой деформации.

3. В настоящее время еще не построена теория прочностных расчетов на основе дискретного строения твердых тел, хотя некоторые шаги в этом направлении уже сделаны. Между тем, первичные очаги нарушения прочности получают всегда в пределах микрообъемов, поэтому окончательное разрешение вопросов прочности может быть получено только на основе теории, построенной на базе дискретного строения вещества твердых тел.

## 8.7. Примеры расчетов толстостенных цилиндров

**Пример 1.** Спроектировать двухслойную трубу с рациональными размерами и проверить ее на прочность, пользуясь гипотезой прочности О. Мора. Материал трубы — сталь с допускаемым напряжением  $[\sigma] = 300$  МПа (модуль упругости материала  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа). Внутреннее давление в трубе  $p = 200$  МПа, внешнее  $p_2$  отсутствует. Внутренний радиус трубы  $r_1 = 8$  см = 0,08 м (рис. 79).

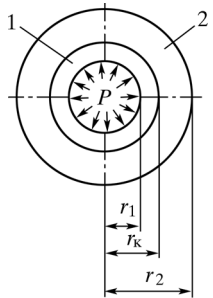


Рис. 79. Схема нагружения двухслойной трубы: 1, 2 — трубы

*Решение.* По формуле (8.38) эквивалентное напряжение достигает минимума для каждой из труб при условии их равнопрочности:

$$\sigma_{\text{эkv}} = p \frac{1}{1-k} \leq [\sigma],$$

где  $k = k_1/k_2$ .

Отсюда находим внешний радиус  $r_2$  внешней трубы:

$$k = \frac{r_1}{r_2} = 1 - \frac{p}{[\sigma]}$$

или

$$r_2 = \frac{r_1}{1 - p/[\sigma]} = \frac{8}{1 - 200/300} = 24 \text{ см} = 0,24 \text{ м}.$$

По формуле (8.37) находим радиус посадочной поверхности  $r_k$ :

$$r_k = \sqrt{r_1 r_2} = \sqrt{8 \cdot 24} \approx 13,856 \text{ см} = 0,13856 \text{ м}.$$

Примем значение радиуса посадочной поверхности  $r_2 = 0,14$  м. По формуле (8.40) найдем величину необходимого натяга:

$$\delta = \frac{p}{E} 2r_k = \frac{2 \cdot 0,14 \cdot 200}{2 \cdot 10^5} = 0,28 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

По формуле (8.39) находим величину контактного давления:

$$p_0 = p \frac{1-k}{2(1+k)} = 200 \cdot \frac{1 - 0,08/0,24}{2(1 + 0,08/-0,24)} = 49,99 \approx 50 \text{ МПа}.$$

Определяем напряжения от контактного давления  $p_0$  в стенках каждой из труб.

По формулам (8.21) радиальные и окружные напряжения на внутренней поверхности трубы 1 равны:

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_1} &= 0; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_1} &= -p_0 \frac{2}{1-k_1^2} = -50 \frac{2}{1 - (0,08/0,14)^2} = -148,6 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

По формулам (8.22) радиальные и окружные напряжения на наружной поверхности трубы 1 равны:

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_k} &= -p_0 = -50 \text{ МПа}; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_k} &= -p_0 \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} = -50 \frac{1 + (0,08/0,14)^2}{1 - (0,08/0,14)^2} = -98,5 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

По формулам (8.17) радиальные и окружные напряжения на внутренней поверхности трубы 2 равны:

$$\begin{aligned} (\sigma_r)_{r=r_k} &= -p_0 = -50 \text{ МПа}; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_k} &= p \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} = 50 \frac{1 + (0,14/0,24)^2}{1 - (0,14/0,24)^2} = 101,6 \text{ МПа}. \end{aligned}$$



По формулам (8.17, а) радиальные и окружные напряжения на наружной поверхности трубы 2 равны:

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = p \frac{2k_2^2}{1-k_2^2} = 50 \frac{2(0,14/0,24)^2}{1-(0,14/0,24)^2} = 51,6 \text{ МПа.}$$

Эпюры  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$  показаны на рис. 79 пунктирными линиями (значения напряжений в МПа показано в вершине эпюр).

Определим напряжения в стенке двухслойной трубы (как целой трубы) от действия внутреннего давления  $p = 200$  МПа. По формулам (8.15), (8.17) и (8.17, а) найдем напряжения  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$  на внутренней стенке трубы ( $r = r_1$ ), контактной поверхности ( $r = r_k$ ) и внешней поверхности ( $r = r_2$ ):

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p = -200 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = p \frac{1+k^2}{1-k^2} = 200 \frac{1+(8/24)^2}{1-(8/24)^2} = 250 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_r)_{r=r_k} = \frac{pk^2}{1-k^2} \left(1 - \frac{r_2^2}{r_k^2}\right) = \frac{200(0,08/0,24)^2}{1-(0,08/0,24)^2} \left(1 - \frac{0,24^2}{0,14^2}\right) = -48,5 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_k} = \frac{pk^2}{1-k^2} \left(1 + \frac{r_2^2}{r_k^2}\right) = \frac{200(0,08/0,24)^2}{1-(0,08/0,24)^2} \left(1 + \frac{0,24^2}{0,14^2}\right) = 98,5 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = p \frac{2k^2}{1-k^2} = 200 \frac{2(0,08/0,24)^2}{1-(0,08/0,24)^2} = 50 \text{ МПа.}$$

Эпюры  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$  показаны на рис. 80 сплошными линиями (значения напряжений в мегапаскалях показано в вершине эпюр).

Находим результирующие напряжения в стенке внутреннего цилиндра 1 (см. рис. 80):

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p = -200 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = -148,6 + 250 = 101,4 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_r)_{r=r_k} = -50 - 48,5 = -98,5 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_k} = -98,5 + 98,5 = 0.$$

Условие прочности для цилиндра 1 запишем в виде:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_\theta - \sigma_r = 101,4 + 200 = 301,4 \text{ МПа.}$$

Эквивалентное напряжение превышает допускаемое на

$$\frac{301,4 - 300}{300} 100\% = 0,5\%.$$

Находим результирующие напряжения в стенке внешнего цилиндра 2 (см. рис. 80):

$$(\sigma_r)_{r=r_k} = -50 - 48,5 = -98,5 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_k} = 101,6 + 98,5 = 200,1 \text{ МПа};$$

$$(\sigma_r)_{r=r_2} = 0;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_2} = 51,6 + 50 = 101,6 \text{ МПа.}$$

Условие прочности для цилиндра 2 запишем в виде

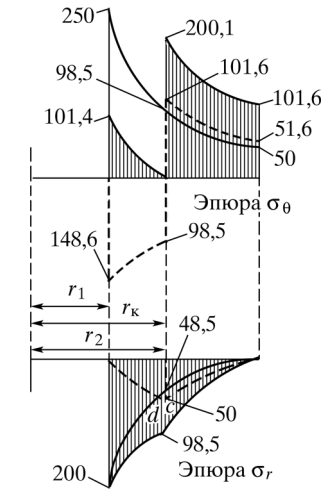
$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_\theta - \sigma_r = 200,1 + 98,5 = 298,6 \text{ МПа.}$$

Эквивалентное напряжение меньше допускаемого на величину

$$\frac{300 - 298,6}{300} \cdot 100\% = 0,5\%.$$

Незначительное отклонение от равной прочности материала в опасных точках цилиндров получилось в результате округления.

**Пример 2.** Определить радиальные  $\sigma_r$  и тангенциальные  $\sigma_\theta$  нормальные напряжения, а также граничное давление  $p$  на контактной поверхности, если на трубу из медного сплава ЛА80-3 с размерами  $r_1 = 0,1$  м;  $r_2 = 0,25$  м напрессована стальная труба с внешним радиусом  $r_3 = 0,4$  м с натягом  $\delta = 4 \cdot 10^{-4}$  м (рис. 81). При работе обе трубы нагреты равномерно до температуры  $t = 100$  °С. Для стали принять модуль упругости  $E_{\text{ст}} = 2 \cdot 10^5$  МПа; допускаемое напряжение  $[\sigma] = 350$  МПа; коэффициент линейного расширения  $\alpha_{\text{ст}} = 12,5 \cdot 10^{-6}$  1/град; коэффициент Пуассона  $\mu_{\text{ст}} = 0,3$ ; для сплава принять  $E_{\text{м}} = 1 \cdot 10^5$  МПа;  $\alpha_{\text{м}} = 16,5 \cdot 10^{-6}$  1/град;  $\mu_{\text{м}} = 0,34$ .



**Рис. 80.** Эпюры  $\sigma_\theta$  и  $\sigma_r$  при запрессовке и при наличии внутреннего давления

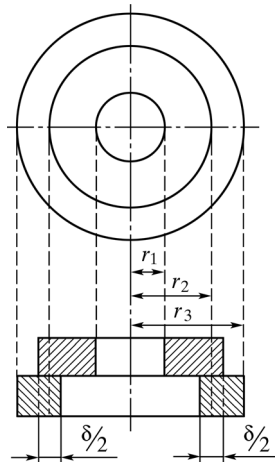


Рис. 81. Схема запрессовки

**Решение.** Так как после запрессовки стальной трубы на латунную они нагреваются равномерно на  $100\text{ }^\circ\text{C}$ , а коэффициенты линейного расширения этих материалов отличаются друг от друга, это равносильно увеличению натяга при запрессовке  $\Delta\delta = (\alpha_M - \alpha_{CT})\Delta t 2r_2 = (16,5 - 12,5) \cdot 10^{-6} \times 100 \cdot 2 \cdot 0,25 = 2 \cdot 10^{-4}\text{ м}$ . Теперь формулу (8.25) применительно к рис. 40 можно записать в виде:

$$p = \frac{[\delta + 2(\alpha_M - \alpha_{CT})\Delta t r_2]}{2r_2} \cdot \frac{1}{\frac{1}{E_M} \left( \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} - \mu_M \right) + \frac{1}{E_{CT}} \left( \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu_{CT} \right)},$$

где  $k_1 = r_1/r_2 = 0,1/0,25 = 0,4$ ;  $k_2 = r_2/r_3 = 0,25/0,4 = 0,625$ .

Определим давление на контактной поверхности:

$$p = \frac{[0,0004 + 2(0,0000165 - 0,0000125) \cdot 100 \cdot 0,25]}{2 \cdot 0,25} = 55\text{ МПа.}$$

$$\frac{1}{1 \cdot 10^5} \left( \frac{1+0,16}{1-0,16} - 0,34 \right) + \frac{1}{2 \cdot 10^5} \left( \frac{1+0,625^2}{1-0,625^2} + 0,3 \right)$$

Проверим прочность трубы из сплава ЛА80-3. Механические характеристики его:  $\sigma_{TP} = 200\text{ МПа}$ ;  $\sigma_{ТСЖ} = 250\text{ МПа}$ . Приняв запас прочности  $n_T = 1,5$ , найдем допускаемое напряжение сплава  $[\sigma] = \sigma_{TP}/1,5 = 133\text{ МПа}$ .

У внутренней поверхности латунной трубы (действует только давление запрессовки  $p$ ):

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = 0;$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = -p \frac{2}{1-k_1^2} = -55 \cdot \frac{2}{1-0,4^2} = -131\text{ МПа.}$$

Условие прочности для внутренней трубы выполняется:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = -\nu\sigma_\theta = (200/250) \cdot 131 = 105 \leq 133.$$

Для внешней стальной трубы (действует только внутреннее давление  $p = 55\text{ МПа}$ ):

$$(\sigma_r)_{r=r_1} = -p = -55\text{ МПа};$$

$$(\sigma_\theta)_{r=r_1} = p \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} = 55 \frac{1+0,625^2}{1-0,625^2} = 132\text{ МПа.}$$

В этом случае:

$$\sigma_{\text{ЭКВ}} = \sigma_\theta - \sigma_r = 132 - (-55) = 187 \leq [350]\text{ МПа.}$$

Условие прочности выполняется.

**Пример 3.** Найти граничное давление  $p$  на контактной поверхности двух запрессованных без натяга стальных труб, если на торцевую поверхность внутренней трубы действует осевое давление  $q = 50\text{ МПа}$  (рис. 82). Для расчета принять размеры:  $r_1 = 0,1\text{ м}$ ;  $r_2 = 0,25\text{ м}$ ;  $r_3 = 0,4\text{ м}$ .

**Решение.** При действии на торцевую поверхность внутренней трубы давления  $q = 50\text{ МПа}$  труба деформируется, а ее деформацию в окружном и радиальном направлениях ограничивает внешняя труба. Расчетная схема внутренней трубы 1 представлена на рис. 82, а внешней 2 — на рис. 83. Давление  $p$  определим из условия их совместного деформирования: радиальное перемещение внутренней трубы  $(u_{r1})_{r=r_2}$  будет равно радиальному перемещению внешней трубы  $(u_{r2})_{r=r_2}$ :  $(u_{r1})_{r=r_2} = (u_{r2})_{r=r_2}$ .

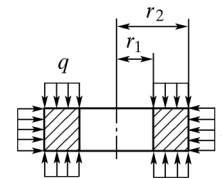


Рис. 82. Расчетная схема внутренней трубы

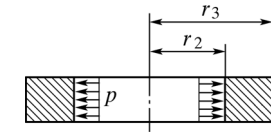


Рис. 83. Расчетная схема внешней трубы

Перемещения  $(u_{r1})_{r=r_2}$  и  $(u_{r2})_{r=r_2}$  определим, воспользовавшись зависимостью (8.13)

$$u_r = \varepsilon_\theta r = r \frac{1}{E} (\sigma_\theta - \mu\sigma_r - \mu\sigma_z). \quad (a)$$

Для трубы 1 (внутренней)  $\sigma_z = -q$ , а радиальное  $\sigma_r$  и окружное  $\sigma_\theta$  напряжения определим по формулам (8.22):

$$\begin{aligned}(\sigma_r)_{1r=r_2} &= -p; \\ (\sigma_\theta)_{1r=r_2} &= -p \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2}.\end{aligned}$$

Таким образом, перемещение на радиусе  $r = r_2$  для трубы 1 в соответствии с (a) запишем в виде:

$$(u_{r1})_{r=r_2} = r_2 \frac{1}{E} \left( -p \frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} + \mu p + \mu q \right). \quad (б)$$

Здесь, как обычно,  $k_1 = r_1/r_2$ .

Для трубы 2 (внешней) радиальное  $\sigma_r$  и окружное  $\sigma_\theta$  напряжения определим по формулам (8.22):

$$\begin{aligned}(\sigma_r)_{1r=r_2} &= -p; \\ (\sigma_\theta)_{1r=r_2} &= p \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2}.\end{aligned}$$

Перемещение на радиусе  $r = r_2$  для трубы 2 в соответствии с (a) запишем в виде:

$$(u_{r2})_{r=r_2} = r_2 \frac{1}{E} \left( p \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu p \right) = r_2 \frac{p}{E} \left( \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2} + \mu \right). \quad (в)$$

Приравняв соотношения (б) и (в) получим:

$$P = \frac{\mu q}{\frac{1+k_1^2}{1-k_1^2} + \frac{1+k_2^2}{1-k_2^2}} = \frac{0,3 \cdot 50}{\frac{1+(0,1/0,25)^2}{1-(0,1/0,25)^2} - \frac{1+(0,25/0,4)^2}{1+(0,25/0,4)^2}} = 6,8 \text{ МПа.}$$

**Пример 4.** Найти граничное давление  $p$  на контактной поверхности между стальным кольцом и абсолютно жесткой оболочкой ( $E = \infty$ ), если известны значения величин  $q = 20$  МПа;  $r_1 = 0,1$  м;  $r_2 = 0,2$  м и  $\mu = 0,3$  (рис. 84).

*Решение.* При действии на торцевую поверхность стального кольца давления  $q = 20$  МПа оно деформируется. Поскольку его деформация в окружном и радиальном направлениях ограничивается абсолютно жесткой оболочкой, на внешней поверхности возникает кон-

тактное граничное давление  $p$ . Расчетная схема кольца будет такой же, как и на рис. 84. Внешняя абсолютно жесткая оболочка является недеформируемой ( $E = \infty$ ).

Для кольца перемещение на внешнем радиусе  $r_2$  определим по зависимости (a). При этом  $\sigma_z = -q$ , а радиальное  $\sigma_r$  и окружное  $\sigma_\theta$  напряжения определим по формулам (8.22):

$$\begin{aligned}(\sigma_r)_{r=r_2} &= -p; \\ (\sigma_\theta)_{r=r_2} &= -p \frac{1+k^2}{1-k^2}.\end{aligned}$$

Перемещение на радиусе  $r = r_2$  для стального кольца в соответствии с (a) запишем в виде:

$$(u_r)_{r=r_2} = r_2 \frac{1}{E_{ст}} \left( -p \frac{1+k^2}{1-k^2} + \mu p + \mu q \right) = 0, \quad (г)$$

так это перемещение ограничивает абсолютно жесткая оболочка.

Здесь, как обычно,  $k = r_1/r_2$ .

Из уравнения (г) находим:

$$p = \frac{\mu q}{\frac{1+k^2}{1-k^2} - \mu} = \frac{0,3 \cdot 20}{\frac{1+(0,1/0,2)^2}{1+(0,1/0,2)^2} - 0,3} = 4,39 \text{ МПа.}$$

Заметим, что модуль упругости деформируемого кольца в определении контактного давления не используется.

### Контрольные вопросы

1. Какой вид напряженно-деформированного состояния возникает при нагружении толстостенной трубы внутренним давлением?
2. Как учитываются осевые напряжения при нагружении толстостенной трубы внутренним давлением?
3. Чему равно радиальное напряжение на внутреннем радиусе при нагружении толстостенной трубы внутренним давлением?
4. Чему равно радиальное напряжение на внешнем радиусе при нагружении толстостенной трубы внешним давлением?

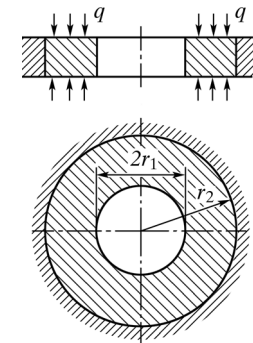


Рис. 84. Схема нагружения кольца

5. Как определяются радиальные напряжения при нагружении толстостенной трубы внутренним давлением?
6. Как учитываются радиальные напряжения при нагружении толстостенной трубы внешним давлением?
7. В окрестности какой точки поперечного сечения трубы возникают наибольшие напряжения при нагружении внутренним давлением?
8. В окрестности какой точки возникают наибольшие напряжения при нагружении внешним давлением?
9. Как определяется контактное давление при прессовой посадке двух сопрягаемых деталей?
10. Как вычисляется эквивалентное напряжение при прессовой посадке двух сопрягаемых деталей?
11. Почему при прессовой посадке двух труб увеличивается прочность внутренней трубы?
12. Какие методы повышают несущую способность толстостенной трубы?

## Раздел IV

# ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

## Глава 9

### ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

---

---

Математику можно определить как науку, в которой мы никогда не знаем, о чем говорим, и истинно ли то, о чем мы говорим.

*Б. Рассел*<sup>1</sup>

#### 9.1. Сущность вариационных методов решения дифференциальных уравнений

Решение большинства задач теории упругости сводится к интегрированию дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями. Точного решения очень многих важных для практики задач до сих пор не получено, так как удается решать их лишь приближенными методами, среди которых важное место занимают вариационные методы и прежде всего те, которые основаны на применении начала возможных перемещений Лагранжа.

В последние годы большое количество решений задач прикладной теории упругости получено с помощью метода конечных элементов, рассмотренного нами в главе 10.

Широкое использование вычислительных машин существенно увеличило возможности численных методов решения дифференци-

---

<sup>1</sup> Душенко К.В. Новая книга афоризмов. М.: ЭКСМО, 2010.

альных уравнений, таких как конечно-разностный метод (метод сеток), метод конечных объемов, метод граничных элементов и др.

В настоящей главе будут рассмотрены лишь наиболее часто применяемые при решении задач прикладной теории упругости вариационные методы (Рэля — Ритца, Бубнова — Галеркина, Канторовича — Власова).

Прежде чем излагать суть вариационных методов, поясним некоторые основные понятия. В инженерной практике наряду с задачами, в которых отыскивается экстремум некоторой функции  $y = f(x)$ , встречаются и такие, в которых необходимо отыскать экстремум такой переменной  $Z$ , которая сама зависит от выбора функции  $f(x)$ . Такие переменные  $Z$  называются *функционалами*.

В простейшем случае функционал  $Z$  представляется в виде интеграла  $Z = \int_a^b F(x, y, y') dx$ , где  $a, b$  определяют интервал изменения аргумента  $x$ .

Сравнивая функционал и функцию, можно заметить, что они являются переменными, однако первый зависит от вида функции  $y(x)$ , а вторая — от величины аргумента  $x$ . В одном случае, изменяя вид функции  $y(x)$ , т. е. варьируя саму функцию, мы изменяем величину функционала, а во втором — изменяя величину независимого переменного  $x$ , влияем на величину функции.

При отыскании экстремума функции мы отыскиваем такое значение аргумента  $x$ , которое сообщает функции  $y(x)$  максимум или минимум.

В вариационных задачах необходимо отыскать такой вид функции  $y(x)$ , при котором функционал  $Z$  приобретает максимальное или минимальное значение.

Классическим примером вариационной задачи служит задача о брахистохроне — линии быстрого ската, предложенная в 1696 г. И. Бернулли. Между точками  $A$  и  $B$ , не лежащими на вертикали, требуется провести линию, по которой материальная точка в минимальное время скатится из точки  $A$  в точку  $B$  (рис. 85). Здесь роль функционала выполняет время  $t$  перемещения из точки  $A$  в точку  $B$ , а уравнение  $y(x)$  кривой, проходящей через точки  $A$  и  $B$ , — искомая функция.

Рис. 85. Линия быстрого ската

Отметим, что методы решения вариационных задач, т. е. задач отыскания функций, сообщаю-

щих функционалу максимум или минимум, во многом сходны с исследованием функций на максимум и минимум.

В задачах на максимум и минимум независимому переменному  $x$  дается приращение  $\Delta x = x - x_1$ , равное дифференциалу  $dx$ . В вариационных задачах дается приращение (или вариация)  $\delta y$  искомой функции  $y(x)$ , равное  $\delta y = y(x) - y_1(x)$ .

Как в дифференциальном исчислении дифференциал функции представляет собой линейную по отношению к приращению аргумента  $\Delta x$  часть приращения функции, так и в вариационном исчислении вариация функционала  $\delta Z$  представляет собой линейную по отношению к вариации функции  $\delta y$  часть функционала.

Если функция  $y = f(x)$  достигает экстремума внутри заданного интервала значений аргумента  $x$ , дифференциал функции  $dy = 0$ . Аналогично, если функционал достигает экстремума, то его вариация равна нулю:  $\delta Z = 0$ .

Приближенные методы, которые позволяют найти решение задачи, минуя процесс интегрирования дифференциальных уравнений либо сводя их к решению системы алгебраических уравнений относятся к так называемым *прямым методам*.

Перейдем к непосредственному рассмотрению некоторых прямых вариационных методов.

## 9.2. Метод Рэля — Ритца

Метод Рэля — Ритца является одним из наиболее мощных прямых методов вариационного исчисления. Он основан на использовании известного из курса теоретической механики принципа возможных перемещений: для того, чтобы система, подчиненная идеальным удерживающим связям, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех приложенных к ней сил на всяком возможном перемещении равнялась нулю.

Пусть работа внешних сил (объемных и поверхностных) на каком-либо возможном перемещении равна  $\delta A$ . Под действием внешних сил происходит деформация упругого тела, а внутренние силы при этом выполняют работу  $\delta U$ , которая представляет собой приращение потенциальной энергии системы на том же возможном перемещении (взятом с обратным знаком по отношению к работе внеш-

них сил). Тогда принцип возможных перемещений для тела, находящегося в равновесии, можно представить следующим образом:

$$\delta A - \delta U = 0. \quad (a)$$

Определим значения  $\delta A$  и  $\delta U$  из условия, что на систему действуют объемные силы  $X$ ,  $Y$  и  $Z$ , а также поверхностные силы  $X_v$ ,  $Y_v$  и  $Z_v$  ( $v$  — нормаль к некоторой поверхности  $s$ , на которой действуют указанные поверхностные силы). Дадим частицам тела возможные перемещения, составляющие которых  $\delta u_x$ ,  $\delta u_y$ ,  $\delta u_z$ . Подсчитаем работу внешних сил на этих возможных перемещениях. Элементарная работа составляющей объемных сил  $X$ , приходящейся на единицу объема, равна произведению этой силы на объем бесконечно малого элемента  $dxdydz$  и на возможное перемещение  $\delta u_x$  в направлении этой силы:

$$X \cdot dxdydz \cdot \delta u_x.$$

Аналогично определим элементарные работы составляющих объемных сил  $Y$  и  $Z$  (и в направлении этих сил) на соответствующих возможных перемещениях  $\delta u_y$  и  $\delta u_z$ :

$$Y \cdot dxdydz \cdot \delta u_y; \quad Z \cdot dxdydz \cdot \delta u_z.$$

Работа, производимая объемными силами во всем объеме тела  $V$ , равна интегралу по этому объему от суммы элементарных работ, совершаемых каждой из составляющих объемной силы:

$$\iiint_V (X\delta u_x + Y\delta u_y + Z\delta u_z) dxdydz. \quad (б)$$

Элементарная работа составляющей поверхностных сил  $p_{xv}$ , которая действует на бесконечно малом элементе поверхности  $ds$ , равна произведению равнодействующей этой составляющей на площадке  $ds$  на возможное перемещение  $\delta u_x$  в направлении этой составляющей:

$$p_{xv} \cdot ds \cdot \delta u_x.$$

Аналогично определяются и элементарные работы двух других составляющих поверхностных сил:

$$p_{yv} \cdot ds \cdot \delta u_y; \quad p_{zv} \cdot ds \cdot \delta u_z.$$

Работа, производимая поверхностными силами, действующими на всей поверхности тела  $s$ , равна интегралу по всей поверхности тела

от суммы элементарных работ, совершаемых каждой из составляющих поверхностных сил:

$$\iint_s (p_{xv}\delta u_x + p_{yv}\delta u_y + p_{zv}\delta u_z) ds. \quad (в)$$

Таким образом, возможная работа всех внешних сил на возможных перемещениях равна сумме работ объемных ( $\delta$ ) и поверхностных ( $\theta$ ) сил:

$$\begin{aligned} \delta A = & \iiint_V (X\delta u_x + Y\delta u_y + Z\delta u_z) dxdydz + \\ & + \iint_s (p_{xv}\delta u_x + p_{yv}\delta u_y + p_{zv}\delta u_z) ds. \end{aligned} \quad (г)$$

При вычислении возможной работы внешних сил варьировались только перемещения  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$ , а объемные и поверхностные силы оставались постоянными, поэтому оператор  $\delta$  в формуле (г) можно вынести из-под знаков интегралов, сделав общим для обоих интегралов:

$$\begin{aligned} \delta A = & \delta \left[ \iiint_V (Xu_x + Yu_y + Zu_z) dxdydz + \right. \\ & \left. + \iint_s (p_{xv}\delta u_x + p_{yv}\delta u_y + p_{zv}\delta u_z) ds \right]. \end{aligned} \quad (д)$$

Поскольку потенциальная энергия, накапливаемая в упругом теле, вычисляется по формуле  $U = \iiint_s W dxdydz$  [1], приращение потенциальной энергии  $\delta U$  в формуле (а) равно:

$$\delta U = \iiint_V \delta W dxdydz, \quad (е)$$

где  $W = \frac{1}{2}(\sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{yz} \gamma_{yz} + \tau_{zx} \gamma_{zx})$  — удельная потенциальная энергия.

Представляя в соотношении (а) оператор  $\delta$  общим для обоих слагаемых, получаем:

$$\delta(A - U) = 0. \quad (ж)$$



Выражение, стоящее в скобках, представляет собой работу всех внешних и внутренних сил, приложенных к телу. Эта величина, взятая с обратным знаком, является потенциальной энергией системы внешних и внутренних сил, действующих на упругое тело:

$$\mathcal{E} = U - A. \quad (9.1)$$

Вводя это обозначение вместо условия (ж), получаем следующее соотношение:

$$\delta \mathcal{E} = 0. \quad (з)$$

Так как первая вариация  $\delta$  с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка равна первому дифференциалу, вместо условий (е) можно написать

$$d\mathcal{E} = 0.$$

Полученное условие означает, что при равновесии упругой системы потенциальная энергия  $\mathcal{E}$  достигает экстремального значения.

На основании теоремы Лагранжа — Дирихле [10] можно сформулировать следующий принцип минимума потенциальной энергии: *из всех мыслимых перемещений упругого тела перемещения, удовлетворяющие условиям устойчивого равновесия, сообщают потенциальной энергии системы минимальное значение.*

Таким образом, потенциальная энергия системы  $\mathcal{E}$  (9.1):

$$\mathcal{E} = U - A = \min. \quad (9.2)$$

При этом потенциальная энергия, накапливаемая в упругом теле, определяется по формуле (ж), а работа объемных и поверхностных сил согласно формуле (д):

$$A = \iiint_V (Xu_x + Yu_y + Zu_z) dx dy dz + \iint_s (p_{xy} \delta u_x + p_{yv} \delta u_y + p_{zv} \delta u_z) ds. \quad (и)$$

В соответствии с методом Рэлея — Ритца представим перемещения  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  в виде ряда функций, каждая из которых удовлетворяет геометрическим граничным условиям. Пусть, например,

$$u_x = \sum_k a_k \varphi_k(x, y, z); \quad u_y = \sum_k b_k \psi_k(x, y, z); \quad u_z = \sum_k c_k \chi_k(x, y, z), \quad (9.3)$$

где  $\varphi_k$ ,  $\psi_k$ ,  $\chi_k$  — функции, удовлетворяющие граничным условиям, а  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  — произвольные параметры, подлежащие определению из условий стационарности энергии ( $з$ ) ( $k = 1, 2, 3, \dots, n$ ).

Потенциальная энергия деформаций  $W$  может быть представлена через перемещения  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$ . Действительно, если в уравнении (е) [1]

$$W = \frac{1}{2} [\lambda \theta^2 + 2G(\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]$$

компоненты деформации заменить через перемещения  $u_x$ ,  $u_y$  и  $u_z$  согласно формулам Коши [1], а также использовать постоянные Ламе:

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}; \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

то после преобразований получим для  $W$  следующее выражение:

$$W = G \left[ \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_y}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{\mu}{1-2\mu} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)^2 \right]. \quad (9.4)$$

Теперь полная энергия системы  $\mathcal{E}$  может быть представлена как некоторая функция параметров  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ , т. е.

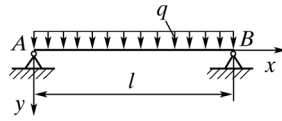
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}(a_k, b_k, c_k).$$

Как следует из (и), работа внешних сил  $A$  является линейной функцией параметров  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ , а приращение потенциальной энергии  $U$ , как и потенциальная энергия  $\mathcal{E}$  (что следует из (9.4)) является квадратичной функцией этих же параметров.

Из условия стационарности энергии  $\delta \mathcal{E} = 0$ , имея в виду, что все параметры  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$  произвольны, следует, что нулю должны равняться частные производные от энергии  $\mathcal{E}$  по всем варьируемым параметрам  $a_k$ ,  $b_k$ ,  $c_k$ , т. е.

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a_k} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial b_k} = 0; \quad \frac{\partial \mathcal{E}}{\partial c_k} = 0. \quad (9.5)$$

В итоге получим столько уравнений, сколько произвольных параметров содержится в выражениях (9.3).



**Рис. 86.** Балка со свободно опертыми краями и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой

В качестве примера применения метода Рэлея — Ритца рассмотрим задачу об изгибе свободно опертого по краям стержня постоянной изгибной жесткости  $EI$  длиной  $l$ , нагруженного равномерно распределенной поперечной нагрузкой  $q$  (рис. 86).

Для прогиба  $u_y$  применим выражение<sup>1</sup>  $u_z = a \sin(\pi x/l)$ , которое удовлетворяет следующим граничным условиям (прогибы и моменты на опорах в сечениях  $A$  и  $B$ ) равны нулю (см. рис. 86):

$$\text{при } x=0 \text{ (сечение } A) \text{ и } x=l \text{ (сечение } B) \text{ } u_y = 0, \frac{d^2 u_y}{dx^2} = 0.$$

Потенциальная энергия изгиба стержня:

$$W = \frac{1}{2EI} \int_0^l M_z^2 dx.$$

Но  $EI \frac{d^2 u_y}{dx^2} = M_z$ , тогда

$$W = \frac{EI}{2} \int_0^l \left( \frac{d^2 u_y}{dx^2} \right)^2 dx.$$

После подстановки  $u_y = a \sin(\pi x/l)$  в выражение для  $W$  и интегрирования получим:

$$W = \frac{EI}{2} \cdot \frac{l}{2} a^2 \frac{\pi^4}{l^4}.$$

Работа внешних сил:

$$A = \int_0^l q u_y dx = qa \int_0^l \sin \frac{\pi x}{l} dx = 2qa \frac{l}{\pi}.$$

<sup>1</sup> Нетрудно заметить, что  $u_z$  аппроксимируется таким образом, чтобы при  $x=l/2$  прогиб был максимальный.

Окончательно для энергии  $\mathcal{E}$  получим:

$$\mathcal{E} = \frac{EI}{2} \cdot \frac{l}{2} a^2 \frac{\pi^4}{l^4} - 2qa \frac{l}{\pi}.$$

Далее из условия  $\partial \mathcal{E} / \partial a = 0$  получим значение параметра  $a$  — максимального прогиба стержня в середине пролета:

$$\frac{\partial \mathcal{E}}{\partial a} = \frac{EI}{2} \cdot \frac{\pi^4}{l^3} a - 2q \frac{l}{\pi} = 0,$$

откуда

$$a = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} = 0,013071 \frac{ql^4}{EI}.$$

Как известно [8, 17], при интегрировании упругой линии балки<sup>1</sup>

$$EI \frac{d^2 u_y}{dx^2} = -\frac{ql}{2} x + \frac{qx^2}{2} \quad (\kappa)$$

максимальный прогиб в середине пролета равен:

$$\frac{5ql^4}{384EI} = 0,013021 \frac{ql^4}{EI}.$$

Сравнение с решением, полученным вариационным методом (путем замены выражения для прогиба полувошной синусоиды), показывает, что ошибка составляет около 0,4 %.

Таким образом, метод Рэлея — Ритца позволяет заменить задачу о нахождении решения дифференциального уравнения (например, ( $\kappa$ )) задачей о нахождении минимума потенциальной энергии. Такая замена возможна в связи с тем, что как дифференциальное уравнение ( $\kappa$ ) прогиба упругой линии балки, так и вариационное уравнение ( $\mathcal{E}$ ) являются уравнениями равновесия упругого тела. Покажем, что вариационное уравнение ( $\mathcal{E}$ ) включает дифференциальные уравнения равновесия и условия на поверхности. Рассматривая вариационное уравнение ( $\mathcal{E}$ ) в форме:

$$\delta \mathcal{E} = \delta U - \delta A = 0, \quad (\lambda)$$

<sup>1</sup> На рис. 86 координата  $y$  направлена вниз для того, чтобы максимальное перемещение  $u_z$  имело положительный знак, как и при решении методом Рэлея — Ритца.

внесем в него выражения потенциальной энергии ( $e$ ), подставив компоненты деформаций. Кроме того, учтем, что в соответствии с формулами Коши:

$$\delta \varepsilon_x = \delta \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_x);$$

.....

$$\delta \gamma_{xy} = \delta \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_x) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_y);$$

.....

В результате получим:

$$\begin{aligned} & \iiint_V \left\{ \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_x) + \sigma_y \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_y) + \sigma_z \frac{\partial}{\partial z} (\delta u_z) + \right. \\ & + \tau_{xy} \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_x) + \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_y) \right] + \tau_{yz} \left[ \frac{\partial}{\partial z} (\delta u_y) + \frac{\partial}{\partial y} (\delta u_z) \right] + \\ & \left. + \tau_{zx} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_z) + \frac{\partial}{\partial z} (\delta u_x) \right] \right\} dx dy dz - \\ & - \iiint_V (X \delta u_x + Y \delta u_y + Z \delta u_z) dx dy dz - \\ & - \iint_s (p_{xv} \delta u_x + p_{yv} \delta u_y + p_{zv} \delta u_z) ds = 0. \end{aligned} \quad (м)$$

Возьмем первый из тройных интегралов в уравнении (м) и проинтегрируем его по частям по  $x$ :

$$\iiint_V \sigma_x \frac{\partial}{\partial x} (\delta u_x) dx dy dz = \iint_s \sigma_x \delta u_x dy dz - \iiint_V \frac{\partial}{\partial x} \sigma_x \delta u_x dx dy dz. \quad (н)$$

В правой части соотношения (н) первый интеграл — поверхностный интеграл второго типа. Его можно преобразовать в поверхностный интеграл первого типа по известной из курса математического анализа формуле

$$\iint_s (P dy dz + Q dz dx + R dx dy) = \iint_s (Pl + Qm + Rn) ds. \quad (о)$$

Здесь функции  $P = P(x, y, z)$ ,  $Q = Q(x, y, z)$ ,  $R = R(x, y, z)$  должны быть непрерывными вместе с первыми частными производными внутри объема  $V$ , ограниченного некоторой поверхностью  $s$ ;  $l, m, n$  — на-

правляющие косинусы нормали к поверхности  $s$ ;  $ds$  — дифференциал поверхности  $s$ .

Используя соотношение (о), преобразовываются и остальные восемь первых тройных интегралов в уравнении (м). После их преобразования и группировки по составляющим возможных перемещений вместо уравнения (м) получаем:

$$\begin{aligned} & \iint_s [\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - p_{xv}] \delta u_x + \\ & + (\tau_{yx} + \sigma_y m + \tau_{yz} n - p_{yv}) \delta u_y + (\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n - p_{zv}] ds - \\ & - \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X \right) \delta u_x + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \delta u_y + \right. \\ & \left. + \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \delta u_z \right] dx dy dz = 0. \end{aligned} \quad (9.6)$$

В полученном уравнении возможные перемещения  $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$  ничем между собой не связаны. Поэтому, чтобы уравнение (9.6) обращалось в тождество при любых значениях возможных перемещений, должны обращаться в нуль коэффициенты при этих возможных перемещениях, стоящие в скобках. Таким образом, получим шесть уравнений: три уравнения представляют собой (под интегралом по поверхности) условия на поверхности:

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n; \end{aligned} \right\}$$

а следующие три уравнения — дифференциальные уравнения равновесия:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Следовательно, вариационное уравнение (9.6) включает в себе дифференциальные уравнения равновесия и статические граничные условия. Отсюда следует, что при использовании вариационного уравнения (9.6) для приближенного решения задач при выборе функций  $\varphi_k, \psi_k, \chi_k$  обязательными являются только геометрические граничные условия, а статические граничные условия и дифференциальные уравнения равновесия удовлетворяются автоматически.

Рассмотрим применение Рэлея — Ритца к решению задач изгиба пластин. Пусть, например, прямоугольная пластинка со сторонами  $a, b$  и толщиной  $h$  свободно опирается по контуру и нагружена равномерно распределенным давлением  $q = q_0$ .

Решение задачи об изгибе пластинки методом Рэлея — Ритца состоит в следующем. Приближенное значение функции прогибов срединной плоскости пластинки  $u_z(x, y)$  выбираем в виде двойного ряда

$$u_z = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (n)$$

Функции:

$$\varphi_{kl} = \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b}; \quad (m, n = 1, 2, 3, \dots, \infty).$$

Как было показано в (9.3), данные функции удовлетворяют всем граничным условиям шарнирного опирания пластинки: и геометрическим, и статическим.

Для определения коэффициентов ряда  $a_{mn}$  подсчитаем потенциальную энергию системы (см. формулу (7.44)):

$$U = \frac{D}{2} \iint_s (\nabla^2 u_z)^2 dx dy = \frac{D}{2} \iint_s \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)^2 dx dy.$$

Подсчитаем оператор Лапласа над функцией (n)  $u_{zmn}(x, y)$ :

$$\begin{aligned} \nabla^2 w_{mn} &= \frac{\partial^2 u_{zmn}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_{zmn}}{\partial y^2} = \\ &= -\pi^2 \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Подставив полученное выражение в формулу для потенциальной энергии  $U$ , получим:

$$U = \frac{\pi^4 D}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right]^2 dx dy. \quad (9.7)$$

Возведение в квадрат двойного ряда, стоящего под интегралом в квадратных скобках, равносильно перемножению двух многочленов, где каждый член первого ряда умножается на каждый член второго ряда. Чтобы отличить члены одного ряда от членов другого ряда, в одном из них индексы  $k$  и  $l$  заменим соответственно на  $c$  и  $d$ . Тогда выражение, стоящее в квадратных скобках под интегралом в формуле (9.7), сведется к следующему ряду:

$$\begin{aligned} &\left[ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right]^2 = \\ &= \left[ \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \right] \times \\ &\times \left[ \sum_{c=1}^m \sum_{d=1}^n a_{cd} \left( \frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \sin \frac{c\pi x}{a} \sin \frac{d\pi y}{b} \right] = \\ &= \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \sum_{c=1}^m \sum_{d=1}^n \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} a_{cd} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \left( \frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \times \\ &\times \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b} \sin \frac{c\pi x}{a} \sin \frac{d\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Подставим полученное решение в формулу (9.7). Меняя порядок интегрирования и суммирования, а также вынося постоянные величины за знак интеграла, получаем:

$$\begin{aligned} U &= \frac{\pi^4 D}{2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \sum_{c=1}^m \sum_{d=1}^n a_{kl} a_{cd} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right) \left( \frac{c^2}{a^2} + \frac{d^2}{b^2} \right) \times \\ &\times \int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{c\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{l\pi y}{b} \sin \frac{d\pi y}{b} dy. \quad (9.8) \end{aligned}$$

Подсчитаем входящие сюда интегралы. Первый из них равен:

$$\int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{c\pi x}{a} dx = \begin{cases} = 0 & \text{при } k \neq c; \\ \neq 0 & \text{при } k = c. \end{cases}$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл отличен от нуля только при  $k = c$  и равен:

$$\int_0^a \sin^2 \frac{k\pi x}{a} dx = \frac{a}{2}. \quad (9.9)$$

Рассматривая второй интеграл в формуле (9.8) и решив его аналогично первому, получаем:

$$\int_0^a \sin \frac{l\pi y}{b} \sin \frac{d\pi y}{b} dy = \begin{cases} = 0 & \text{при } l \neq d; \\ \neq 0 & \text{при } l = d. \end{cases}$$

Следовательно, рассматриваемый интеграл отличен от нуля только при  $l = d$  и равен:

$$\int_0^b \sin^2 \frac{l\pi y}{b} dy = \frac{b}{2}. \quad (9.10)$$

Подставляя полученные значения интегралов (9.9) и (9.10) в формулу (9.8) и учитывая, что они отличны от нуля только при значении индексов суммирования  $c = k$  и  $d = l$ , находим:

$$U = \frac{\pi^4 Dab}{8} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl}^2 \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2. \quad (9.11)$$

Работу внешних сил при изгибе пластинки под действием поперечной нагрузки можно подсчитать по формуле (2), пренебрегая объемными силами, а из составляющих поверхностных сил отлична от нуля только одна —  $p_v = q$ . Подставляя это выражение в формулу (2) и выбирая элемент поверхности  $ds$  в виде прямоугольника со сторонами  $dx$  и  $dy$ , получаем работу внешних сил при изгибе пластинки:

$$A = \iint_{00}^ab qu_z dx dy = q \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl} \int_0^a \sin \frac{k\pi x}{a} dx \int_0^b \sin \frac{l\pi y}{b} dy.$$

Интегрируя, получаем (четные индексы дадут значения коэффициентов  $a_{kl} = 0$ ):

$$A = \frac{4qab}{\pi^2} \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n \frac{a_{kl}}{kl}; \quad (k = 1, 3, 5, \dots, m; l = 1, 3, 5, \dots, n). \quad (9.12)$$

Подставив соотношения (9.11) и (9.12) в формулу (9.1), сохраняя в том и другом ряду только члены, содержащие нечетные индексы  $k$  и  $l$ :

$$\mathcal{E} = \sum_k \sum_l \left[ \frac{\pi^4 Dab}{8} a_{kl}^2 \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2 - \frac{4qab}{\pi^2} \cdot \frac{a_{kl}}{kl} \right];$$

$$(k = 1, 3, 5, \dots, m; l = 1, 3, 5, \dots, n).$$

Коэффициенты  $a_{kl}$  нужно выбирать так, чтобы потенциальная энергия системы имела минимум, а значит, должны выполняться условия (9.5). Применительно к пластинкам оно в данном случае примет вид:

$$\frac{\partial \mathcal{E}_{mn}}{\partial a_{kl}} = 0. \quad (9.13)$$

$$(k = 1, 3, 5, \dots, m; l = 1, 3, 5, \dots, n).$$

Вычисляя производные полученной функции  $\mathcal{E}$  по  $a_{kl}$  и приравняв их нулю, находим:

$$\mathcal{E} = \sum_k \sum_l \left[ \frac{\pi^4 Dab}{8} 2a_{kl} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2 - \frac{4qab}{\pi^2} \cdot \frac{1}{kl} \right]; \quad (9.14)$$

$$(k = 1, 3, 5, \dots, m; l = 1, 3, 5, \dots, n).$$

После деления соотношения (9.14) на величину  $ab$  получаем следующую систему уравнений для определения постоянных  $a_{kl}$ :

$$\frac{\pi^4 D}{4} a_{kl} \left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2 - \frac{4q}{\pi^2 kl} = 0;$$

$$(k = 1, 3, 5, \dots, m; l = 1, 3, 5, \dots, n),$$

откуда находим значения постоянных коэффициентов ряда ( $n$ ):

$$a_{kl} = \frac{16q}{\pi^6 Dkl} \frac{1}{\left( \frac{k^2}{a^2} + \frac{l^2}{b^2} \right)^2};$$

$$(k = 1, 3, 5, \dots, m; l = 1, 3, 5, \dots, n).$$

Если ограничиться одним членом ряда, то в итоге получим:

$$a_{11} = \frac{16q}{\pi^6 D} \frac{a^4}{(1 + a^2/b^2)^2}.$$

Подставим значение коэффициентов  $a_{kl}$  в уравнение прогибов (9) и вынесем за знак суммы постоянный множитель  $a^4$ :

$$u_z = \frac{16qa^4}{\pi^4 D} \sum_k \sum_l \frac{\sin \frac{k\pi x}{a} \sin \frac{l\pi y}{b}}{kl \left( k^2 + \frac{a^2}{b^2} l^2 \right)^2}; \quad (9.15)$$

$$(k = 1, 3, 5, \dots, m; l = 1, 3, 5, \dots, n).$$

Если в формуле (9.15) взять бесконечно большое число членов, т. е. положить  $m = n = \infty$ , то получим решение задачи, совпадающее с точным [3, 4].

Возьмем приближенное решение, ограничиваясь одним членом ряда. Тогда из формулы (9.14) получим:

$$u_{z11} = \frac{16qa}{\pi^6 D} \cdot \frac{\sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}}{\left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2}. \quad (9.16)$$

Максимальный прогиб срединной плоскости возникает в центре пластинки при  $x = a/2$   $y = b/2$ , где он равен:

$$\max u_{z11} = \frac{16qa^4}{\pi^6 D} \cdot \frac{1}{\left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2}.$$

В случае квадратной пластинки, когда  $a/b = 1$ , максимальный прогиб:

$$\max u_{z11} = \frac{4qa^4}{\pi^6 D}.$$

Подставляя в это соотношение выражение цилиндрической жесткости  $D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$  и принимая коэффициент Пуассона  $\mu = 0,3$ ,

находим:

$$\max u_{z11} = \frac{4qa^4}{\pi^6 Eh^3} 12(1-\mu^2) = 0,0455 \frac{qa^4}{Eh^3}.$$

Это приближенное отличается от точного, равного:  $\max w = 0,0443 \frac{qa^4}{Eh^3}$ , всего на 2,7 %.

Погонные изгибающие моменты найдем по формулам (7.9). Подставляя в эти формулы функцию прогибов в первом приближении (9.16), получаем:

$$M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \cdot \frac{1 + \mu \frac{a^2}{b^2}}{\left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

$$M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \cdot \frac{\frac{a^2}{b^2} + \mu}{\left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Максимальные изгибающие моменты возникают в центре пластинки при  $x = a/2$  и  $y = b/2$ , где они равны:

$$\max M_x = \frac{16qa^2}{\pi^4} \cdot \frac{1 + \mu \frac{a^2}{b^2}}{\left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2};$$

$$\max M_y = \frac{16qa^2}{\pi^4} \cdot \frac{\frac{a^2}{b^2} + \mu}{\left( 1 + \frac{a^2}{b^2} \right)^2}.$$

В случае квадратной пластинки, т. е. при отношении сторон  $a/b = 1$ , находим:

$$\max M_x = \max M_y = \frac{4qa^2}{\pi^4} (1 + \mu) = 0,0535 qa^2.$$

Точное значение максимальных изгибающих моментов для квадратной пластинки, приводимое в справочниках, равно:

$$\max M = 0,0479 qa^2.$$



Следовательно, максимальный изгибающий момент для квадратной пластинки, подсчитанный в первом приближении, отличается от точного значения на 11,7 %. Поэтому при вычислении изгибающих моментов в рассматриваемой пластинке следует брать еще несколько членов ряда (9.15). Еще менее точный результат получается при вычислении в первом приближении погонных поперечных сил.

### 9.3. Метод Бубнова — Галеркина

#### 9.3.1. Обобщенный метод Бубнова — Галеркина

Если в вариационном уравнении (9.6) вместо вариаций перемещений  $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$  подставить выражения

$$\delta u_x = \sum_k \delta a_k \varphi_k(x, y, z); \quad \delta u_y = \sum_k \delta b_k \psi_k(x, y, z);$$

$$\delta u_z = \sum_k \delta c_k \chi_k(x, y, z)$$

и учесть, что вариации параметров  $\delta a_k, \delta b_k, \delta c_k$  произвольны и линейно независимы между собой, то в связи с этим каждый член, имеющий множители  $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$  уравнения (9.6), должен быть равен нулю. В результате получим систему из трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} & \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial xy} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} + X \right) \varphi_k(x, y, z) dx dy dz - \right. \\ & \left. - \iint_s [(\sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n - p_{xy}) \varphi_k(x, y, z)] ds = 0; \right. \\ & \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \psi_k(x, y, z) dx dy dz - \right. \\ & \left. - \iint_s (\tau_{yx} + \sigma_y m) + \tau_{yz} n - p_{yv} \right] \psi_k(x, y, z) ds = 0; \\ & \iiint_V \left[ \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \chi_k(x, y, z) dx dy dz - \right. \\ & \left. - \iint_s (\tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n - p_{zv}) \chi_k(x, y, z) \right] ds = 0; \end{aligned} \right\} \quad (9.17)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Полученные уравнения и есть уравнения *обобщенного метода Бубнова — Галеркина*.

В основе этого метода, как и метода Рэлея — Ритца, лежит принцип возможных перемещений. Выражения для перемещений (9.6) при использовании обобщенного метода Бубнова — Галеркина могут, как и в методе Рэлея — Ритца, не удовлетворять силовым граничным условиям: достаточно лишь выполнение кинематических граничных условий на части поверхности  $s$ .

Таким образом, обобщенный метод Бубнова — Галеркина и метод Рэлея — Ритца являются двумя различными формами записи принципа возможных перемещений. Их использование приводит к одной и той же системе разрешающих уравнений для определения неизвестных параметров  $a_k, b_k, c_k$  в выражении (9.6).

И все же в вычислительном отношении обобщенный метод Бубнова — Галеркина проще, поскольку позволяет сразу выписать систему разрешающих уравнений без вычисления потенциальной энергии.

Процедура применения обобщенного метода Бубнова — Галеркина для решения задач теории упругости на базе использования уравнений (9.17) состоит в следующем. Сначала задаемся компонентами перемещений  $u_x, u_y, u_z$  в форме рядов (9.6). Используя далее кинематические соотношения между перемещениями  $u_x, u_y, u_z$  и деформациями (формулы Коши), определяем компоненты деформации  $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$ .

Подставляя найденные значения компонентов деформации в закон Гука (или принятый физический закон связи между компонентами деформаций и компонентами напряжений), получаем выражения для компонентов напряжений  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  в каждой точке тела как некоторые сложные функции неизвестных параметров  $a_k, b_k, c_k$ .

Подставляя теперь найденные выражения для компонентов напряжения  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$  непосредственно в уравнения метода (9.16) и выполняя все необходимые операции (дифференцирование и интегрирование по объему и части поверхности тела), находим необходимое число алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов  $a_k, b_k, c_k$ .

Для линейной задачи, т. е. когда материал тела подчиняется закону Гука и используются соотношения линейной теории упругости, эта система уравнений линейна.

### 9.3.2. Метод Бубнова — Галеркина

Если выбранные выражения для перемещений наряду с кинематическими граничными условиями удовлетворяют также и силовым условиям (7.9), то в уравнениях (9.17) поверхностные интегралы исчезают, и они принимают следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} \iiint_V \left( \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \varphi_k(x, y, z) dx dy dz &= 0; \\ \iiint_V \left( \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \psi_k(x, y, z) dx dy dz &= 0; \\ \iiint_V \left( \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z \right) \chi_k(x, y, z) dx dy dz &= 0; \end{aligned} \right\} \quad (9.18)$$

$$(k = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений, основанный на использовании зависимостей вида (9.18), предложили в 1913 г. И.Г. Бубнов в своем отзыве на одну из работ С.П. Тимошенко и независимо от него в 1915 г. Б.Г. Галеркин.

Уравнения (9.18) принято называть *уравнениями метода Бубнова — Галеркина* [8]. Они получены из принципа возможных перемещений, в силу чего может показаться, что этот метод применим лишь для краевых задач, связанных с некоторой вариационной проблемой.

Можно показать, что указанный метод применим для приближенного решения дифференциальных уравнений, не обязательно связанных с какой-либо вариационной проблемой [11].

Пусть рассматриваемая краевая задача описывается дифференциальным уравнением  $2m$ -го порядка (в некотором объеме  $V$ ):

$$L^{(2m)}[u_z(x, y, z)] - q(x, y, z) = 0 \quad (9.19)$$

при граничных условиях (на некоторой поверхности  $s$ )

$$Q_i[u_z(x, y, z)] = f_i(x, y, z) \quad (i = 1, 2, \dots, m), \quad (9.20)$$

где  $L^{(2m)}$  и  $Q_i$  — заданные дифференциальные операторы;  $q(x, y, z)$  и  $f_i(x, y, z)$  — заданные функции<sup>1</sup>.

<sup>1</sup> В качестве уравнения (9.19) можно представить, например, уравнение упругой линии балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. 86).

При приближенном решении дифференциального уравнения (9.18) запишем выражение для  $u_z(x, y, z)$  в форме суммы:

$$u_z(x, y, z) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x, y, z). \quad (9.21)$$

Систему линейно независимых функций  $\varphi_i(x, y, z)$  выберем так, чтобы все граничные условия (9.20) тождественно выполнялись. Параметры  $a_i$  подлежат определению.

Дальнейшее решение основано на свойстве ортогональности функций. В курсе математического анализа дается следующее определение ортогональности функций: если имеется семейство непрерывных функций

$$\psi_0(x), \psi_1(x), \psi_2(x), \dots, \psi_k(x), \dots, \psi_n(x) \quad (a)$$

и интеграл от произведения любых двух различных функций этого семейства в промежутке  $[a, b]$  равен нулю:

$$\int_a^b \psi_k(x) \psi_l(x) dx = 0, \quad (9.22)$$

то функции (a) образуют в промежутке  $[a, b]$  ортогональную систему.

Например, семейство тригонометрических функций

$$\cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots, \cos nx, \sin nx \quad (b)$$

является ортогональной системой в промежутке  $[-\pi, +\pi]$ .

Действительно интегралы

$$\left. \begin{aligned} \int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos lx dx &= 0 \quad (k \neq l); \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin lx dx &= 0 \quad (k \neq l); \\ \int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos lx dx &= 0 \quad (k \neq l). \end{aligned} \right\} \quad (в)$$

Это исчерпывает все возможные варианты комбинирования двух различных функций семейства (b) и доказывает, что оно образует ортогональную систему в промежутке  $[-\pi, +\pi]$ .

На основании леммы из курса математического анализа следует, что если одна из функций тождественно равна нулю, например  $\psi_k(x) \equiv 0$ , то она ортогональна ко всем без исключения функциям, так как условие (9.22) выполняется. В качестве примера такой функ-

ции можно привести уравнение упругой линии балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. 86).

Продифференцировав уравнение упругой линии ( $\kappa$ ) дважды, получим:

$$\Psi_k(x) = EIu_z^{IV} - q = 0. \quad (z)$$

Эта функция — тождественный нуль при любых значениях  $x$ , и, следовательно,

$$\int_0^l (EIu_z^{IV} - q)\psi_i(x)dx \equiv 0. \quad (9.23)$$

Здесь интеграл берется вдоль всей длины балки  $l$ , а значит, функция ( $z$ ) ортогональна в промежутке  $[0, l]$  к любой функции.

Если функцию  $u_z(x)$  заменить ее приближенным значением в форме ряда (9.20)  $u_z(x, y, z) = \sum_{i=1}^n a_i \varphi_i(x, y, z)$ , то функция ( $z$ ) уже не будет тождественно равна нулю, а значит, и не будет ортогональна в промежутке (вдоль прямой)  $[0, l]$  к любой функции ряда (9.21).

Можно потребовать, чтобы полученная функция была ортогональна хотя бы к ограниченному классу функций, например  $\varphi_i$ , составляющих ряд (9.20), т. е. чтобы

$$\int_0^l (EIu_z^{IV} - q)\varphi_i(x)dx = 0; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n). \quad (9.24)$$

В результате получаем  $N$  линейных уравнений для определения постоянных параметров  $a_i$ , входящих в ряд (9.21).

На использовании системы уравнений (9.24) для определения постоянных параметров  $a_i$  основан метод Бубнова — Галеркина.

Решение (9.23) можно трактовать по-другому с точки зрения начала возможных перемещений. Действительно, уравнение (9.23) можно расписать в таком виде:

$$\int_0^l EIu_z^{IV}\psi_i(x)dx - \int_0^l q(x)\psi_i(x)dx \equiv 0.$$

Полученное равенство можно трактовать как интегральное условие равенства нулю работ внутренних  $\int_0^l EIu_z^{IV}\psi_i(x)dx$  и внеш-

них  $\int_0^l q(x)\psi_i(x)dx$  сил (и моментов) на соответствующих возможных перемещениях. С этой точки зрения равенство (9.23) не будет удовлетворено ввиду приближенного выбора функции для  $u_z$ . Условие же равенства нулю работ суммы работ внутренних и внешних нагрузок на возможных перемещениях можно записать в виде

$$\int_0^l (EIu_z^{IV} - q)\delta a_i \varphi_i(x)dx = 0; \quad (i = 1, 2, 3, \dots, n).$$

Так как  $\delta a_i$  — произвольная вариация и не равна нулю, вынося ее из-под знака интеграла, получим решение (9.24).

Покажем использование метода Бубнова — Галеркина в задаче об изгибе балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой и свободно опертой по краям (см. рис. 45). Уравнение упругой линии оси балки при изгибе имеет вид:

$$EI \frac{d^4 u_z}{dx^4} - q = 0.$$

Граничные условия задачи: при  $x=0$ ,  $x=l$  прогибы и изгибающие моменты отсутствуют  $u_z = 0$ ,  $d^2 u_z / dx^2 = 0$ . В качестве аппроксимирующей функции прогиба балки, как и прежде, примем  $u_z = a \sin(\pi x/l)$ .

Так как  $\frac{d^4 u_z}{dx^4} = a \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi x}{l}$ , используя процедуру (9.24) ( $i=1$ ), получим:

$$\int_0^l \left( EIa \frac{\pi^4}{l^4} \sin \frac{\pi x}{l} - q \right) dx = 0.$$

После интегрирования получим:

$$EIa \frac{\pi^4}{l^4} \cdot \frac{l}{2} - q \frac{2l}{\pi} = 0,$$

$$\text{откуда } a = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} = 0,013071 \frac{ql^4}{EI}.$$

Таким образом, получен тот же результат, что и ранее при решении этой задачи методом Рэлея — Ритца.

Все рассуждения, приведенные для функции одного аргумента, можно применить и к функции двух и более аргументов. В качестве примера такой задачи рассмотрим изгиб прямоугольной в плане пластинки, свободно опертой всеми четырьмя кромками. Будем полагать, что пластинка нагружена равномерно распределенным поперечным давлением  $q = q_0$ . Размеры пластинки в направлении осей  $x$  и  $y$  равны, соответственно,  $a$  и  $b$ .

Дифференциальное уравнение срединной поверхности при изгибе имеет вид:

$$D\nabla^4 u_z - q = 0.$$

Для двумерной задачи уравнение метода Бубнова — Галеркина примет вид:

$$\int_0^a \int_0^b (D\nabla^4 u_z - q) \delta u_z dx dy = 0. \quad (9.25)$$

В первом приближении для прогиба пластинки примем выражение  $u_z = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$ .

Тогда

$$\begin{aligned} D\nabla^4 u_z &= D \left( \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} \right) = \\ &= Da_{11} \pi^4 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}, \end{aligned}$$

$$\text{а } \delta u_z = \delta a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}.$$

Так как  $a_{11}$  — неопределенный параметр,  $\delta a_{11}$  — произвольная вариация этого параметра, используя метод Бубнова — Галеркина, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b [Da_{11} \pi^4 \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} - q_0] \times \\ \times \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy = 0. \end{aligned} \quad (9.26)$$

После интегрирования (9.26) получим:

$$Da_{11} \frac{\pi^4 ab}{4} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 - q_0 \frac{4ab}{\pi^2} = 0$$

или

$$a_{11} = \frac{16q_0 a^4}{\pi^6 D(1 + a^2/b^2)^2}. \quad (9.27)$$

В результате решения задачи методом Бубнова — Галеркина мы получили ту же величину для параметра  $a_{11}$ , что и ранее при решении задачи методом Рэлея — Ритца.

Рассмотрим решение этой же задачи во втором приближении. Пусть

$$u_z = a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}.$$

При этом

$$\begin{aligned} D\nabla^4 u_z - q_0 &= D\pi^4 \left[ a_{11} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \right. \\ &\left. + a_{13} \left( \frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} - q_0 \right] = X; \end{aligned} \quad (9.28)$$

$$\delta u_z = \delta a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \delta a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b}. \quad (9.29)$$

Подставляя (9.28) и (9.29) в (9.25), имеем:

$$\int_0^a \int_0^b X \left( \delta a_{11} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} + \delta a_{13} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} \right) dx dy = 0.$$

Учитывая, что  $a_{11}$  и  $a_{13}$  являются независимыми варьируемыми параметрами, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} dx dy &= 0; \\ \int_0^a \int_0^b X \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{3\pi y}{b} dx dy &= 0. \end{aligned} \quad (9.30)$$

После интегрирования (9.30) имеем следующие выражения:

$$a_{11} = \frac{16q_0 a^4}{\pi^6 D(1 + a^2/b^2)^2}; \quad a_{13} = \frac{16q_0 a^4}{3\pi^6 D(1 + 9a^2/b^2)^2}.$$

Нетрудно заметить, что если в решении ( $n$ ) Рэлея — Ритца взять только два члена ряда  $a_{11}$  и  $a_{13}$ , то их значения совпадают с полученным.

В задачах строительной механики и теории упругости дифференциальные уравнения, которые подлежат интегрированию, часто представляют собой уравнения равновесия. Так было, например, в рассмотренных выше задачах, где методом Бубнова — Галеркина интегрировались дифференциальные уравнения упругой оси стержня и упругой срединной поверхности пластинки при поперечном изгибе. Эти уравнения (9.24) и (9.25) являются уравнениями равновесия элемента стержня и элемента пластинки, соответственно. При этом вариация искомой функции  $\delta u_z$  представляет собой возможное перемещение, а уравнение (9.26) может трактоваться как вариационное уравнение Лагранжа при условии, что массовые силы отсутствуют, а работа поверхностных сил на возможных перемещениях равна нулю. Для того чтобы работа поверхностных сил на возможных перемещениях была равна нулю, необходимо, чтобы функции, аппроксимирующие перемещения точек тела, удовлетворяли не только геометрическим, но и статическим граничным условиям.

В рассмотренных нами примерах решения задачи методами Рэлея — Ритца и Бубнова — Галеркина используются одни и те же аппроксимирующие функции прогиба, причем эти функции удовлетворяют всем геометрическим (по краям пластинки при  $x = 0$ ,  $x = a$ ,  $y = 0$ ,  $y = b$  — перемещения  $u_z = 0$ ), а также статическим (при  $x = 0$ ,  $x = a$  —  $\partial^2 u_z / \partial x^2 = 0$ , а при  $y = 0$ ,  $y = b$  —  $\partial^2 u_z / \partial y^2 = 0$ ) условиям задачи.

Поскольку и в том, и в другом методе уравнение решаемой задачи, в конечном счете, сводится к одному и тому же вариационному уравнению Лагранжа, естественно, что при одинаковых аппроксимирующих прогиб  $u_z$  функциях результаты решения задачи методом Рэлея — Ритца и Бубнова — Галеркина будут совпадать.

В большинстве случаев использование метода Бубнова—Галеркина при решении такого рода задач приводит к менее громоздким выкладкам, чем применение метода Рэлея — Ритца. Однако следует помнить, что в случае применения метода Бубнова — Галеркина в той форме, которая была нами рассмотрена, функция  $u_z$  обязательно должна удовлетворять как геометрическим, так и статическим граничным условиям.

В случае изгиба гибких пластин их поведение описывается двумя уравнениями — совместности деформаций и равновесия, из которых

получено уравнение Софи Жермен. При этом возможно применение метода Бубнова — Галеркина либо по способу П.Ф. Папковича, либо по способу В.З. Власова.

В первом случае задаются только видом аппроксимирующей функции прогиба  $u_z$ , удовлетворяющей соответствующим граничным условиям, а функцию напряжений  $\varphi$  определяют интегрированием дифференциального уравнения Софи Жермен (совместности деформаций). Затем найденную функцию  $\varphi$  и выбранную функцию  $u_z$  подставляют в уравнение равновесия и к нему уже применяют процедуру Бубнова — Галеркина, которая была описана выше,

Во втором случае (при решении задачи по способу В.З. Власова) необходимо задаваться видом обеих функций  $u_z$  и  $\varphi$ , подставлять их в уравнения Софи Жермен и применять процедуру Бубнова — Галеркина к обоим уравнениям. Функции  $\varphi$  и  $u_z$  должны обязательно удовлетворять всем геометрическим и статическим условиям задачи. Не останавливаясь на вопросе о сходимости процесса, отметим, что при определенных условиях ряды, которыми аппроксимируются функции  $u_z$  и  $\varphi$ , сходятся к истинному решению задачи при безграничном увеличении числа членов ряда.

#### 9.4. Метод Канторовича — Власова

В 1933 г. Л.В. Канторовичем предложен метод приближенного решения задачи о минимуме двойного интеграла, который позволяет свести решение двумерной задачи к задаче одномерной. Позже, в 1946 г., идея метода Л.В. Канторовича применена В.З. Власовым к решению задач строительной механики пластин и оболочек. Для сведения двумерной задачи изгиба пластин и оболочек к одномерной функция прогиба представляется в виде суммы произведений функций, одна из которых по одной переменной считается известной (задается), а другая (по другой переменной) подлежит определению.

Уравнения равновесия для пластин получены им из вариационного уравнения Лагранжа — начала возможных перемещений.

Таким образом, в отличие от метода Бубнова — Галеркина, при котором интегрирование дифференциального уравнения сводится к решению системы алгебраических уравнений, по методу Канторовича — Власова интегрирование дифференциального уравнения в частных производных заменяется интегрированием системы обыкновен-



ных дифференциальных уравнений. Если задача линейная, то получается система обыкновенных линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Рассмотрим на примерах решения задач изгиба жестких пластин существо метода Канторовича — Власова и его отличие от метода Бубнова — Галеркина.

Представим прогиб пластинки  $u_z$  в виде ряда:

$$u_z = \sum_{n=1}^{\infty} Y_m(y) \varphi_m(x), \quad (9.31)$$

где  $\varphi_m(x)$  — известные функции, удовлетворяющие заданным граничным условиям на краях пластинки при  $x = 0$  и  $x = a$ . В качестве функции  $\varphi(x)$  В.З. Власов предлагает принимать так называемые балочные функции, т. е. формы собственных колебаний балки при тех же граничных условиях, что и у пластинки.

Например, если пластинка свободно оперта на кромки ( $x = 0$  и  $x = a$ ), то в качестве функций  $\varphi_m(x)$  следует брать выражение  $\sin \frac{m\pi x}{a}$ .

Тогда распределенную по поверхности пластинки нагрузку  $q(x, y)$  также можно представить в виде ряда:

$$q(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a}. \quad (9.32)$$

Далее применим процедуру Бубнова — Галеркина к уравнениям равновесия пластинки, т. е.

$$\int_0^a [D\nabla^4 u_z - q(x, y)] \sin \frac{m\pi x}{a} dx = 0.$$

Так как

$$D\nabla^4 u_z - q(x, y) = D \sum_{m=1}^{\infty} \left[ Y_m^{IV}(y) - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m''(y) + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m(y) \right] \sin \frac{m\pi x}{a} - \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) \sin \frac{m\pi x}{a},$$

после интегрирования и сокращения получим:

$$D \sum_{m=1}^{\infty} \left[ Y_m^{IV}(y) - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m''(y) \right] - \sum_{m=1}^{\infty} q_m(y) = 0. \quad (9.33)$$

Поскольку функции  $Y_m(y)$  являются линейно независимыми, то из (9.32) следует:

$$Y_m^{IV}(y) - 2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} Y_m''(y) + \frac{m^4 \pi^4}{a^4} Y_m(y) = \frac{q_m(y)}{D}. \quad (9.34)$$

В рассмотренном нами примере оказалось, что в результате применения метода Власова мы получили уравнение (9.34), совпадающее с тем, которое было получено ранее по методу М. Леви. Это объясняется тем, что пример относится к случаю, когда две стороны пластинки свободно оперты. Именно в этом случае функция  $\varphi(x)$  может быть представлена рядом синусов. При других случаях опирания пластинки, когда метод М. Леви не может быть применен, можно использовать для решения задачи метод Власова.

Рассмотрим, например, случай изгиба квадратной пластинки, защемленной по контуру, равномерно распределенной поперечной нагрузкой  $q(x, y) = q_0$  (рис. 87). Представим прогиб срединной плоскости в виде

$$u_z = Y(y) \varphi(x), \quad (9.35)$$

где  $\varphi(x) = 1 - \cos \frac{2\pi x}{a}$ .

Функция  $\varphi(x)$  удовлетворяет заданным граничным условиям: при  $x = 0$  и  $x = a$   $u_z = 0$ ,  $\partial u_z / \partial x = 0$ . Если подставить функцию  $\varphi(x)$  в уравнение Софи Жермен, то получим

$$\begin{aligned} X &= D \left( \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} \right) - q_0 = \\ &= D \left[ Y^{IV}(y) \left( 1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) + 2 \left( \frac{2\pi}{a} \right)^2 Y''(y) \cos \frac{2\pi x}{a} - \right. \\ &\quad \left. - Y(y) \left( \frac{2\pi}{a} \right)^4 \cos \frac{2\pi x}{a} \right] - q_0. \end{aligned} \quad (9.36)$$

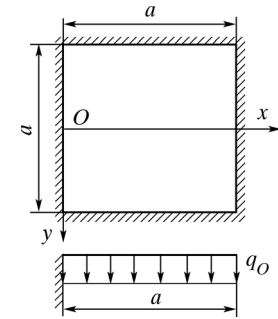


Рис. 87. Квадратная пластинка с жестко закрепленными краями



Применяя процедуру Бубнова — Галеркина к уравнению (9.36), получим:

$$\int_0^a X \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right) dx = 0. \quad (9.37)$$

Подставляя вместо  $X$  выражение (9.36) и производя интегрирование, получим следующее обыкновенное линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами:

$$Y^{IV}(y) - \frac{2}{3} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2 Y''(y) + \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^4 Y(y) = \frac{2}{3} \frac{q_0}{D}. \quad (9.38)$$

Введем обозначение  $k^2 = \frac{1}{3} \left(\frac{2\pi}{a}\right)^2$ . Тогда (9.38) можно записать в виде:

$$Y^{IV}(y) - 2k^2 Y''(y) + 3k^4 Y(y) = \frac{2}{3} \frac{q_0}{D}. \quad (9.39)$$

Корни характеристического уравнения  $r_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) оказываются комплексными:

$$r_{1,2} = \pm \left(1,355 \frac{\pi}{a} + 0,698 \frac{\pi}{a} i\right);$$

$$r_{3,4} = \pm \left(1,355 \frac{\pi}{a} - 0,698 \frac{\pi}{a} i\right).$$

Общее решение уравнения (9.39) запишем в виде суммы общего решения однородного уравнения и частного решения неоднородного уравнения

$$\begin{aligned} Y(y) = & C_1 \operatorname{ch} \left(1,355 \frac{\pi y}{a}\right) \cos \left(0,698 \frac{\pi y}{a}\right) + \\ & + C_2 \operatorname{ch} \left(1,355 \frac{\pi y}{a}\right) \sin \left(0,698 \frac{\pi y}{a}\right) + \\ & + C_3 \operatorname{sh} \left(1,355 \frac{\pi y}{a}\right) \cos \left(0,698 \frac{\pi y}{a}\right) + \\ & + C_4 \operatorname{sh} \left(1,355 \frac{\pi y}{a}\right) \sin \left(0,698 \frac{\pi y}{a}\right) + \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D}. \end{aligned} \quad (9.40)$$

Примем во внимание то, что в силу симметрии рассматриваемой задачи функция  $Y(y)$  должна быть симметричной.

Тогда из (9.39) следует, что  $C_2 = C_3 = 0$ , и для  $Y(y)$  получим выражение:

$$\begin{aligned} Y(y) = & C_1 \operatorname{ch} \left(1,355 \frac{\pi y}{a}\right) \cos \left(0,698 \frac{\pi y}{a}\right) + \\ & + C_4 \operatorname{sh} \left(1,355 \frac{\pi y}{a}\right) \sin \left(0,698 \frac{\pi y}{a}\right) + \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D}. \end{aligned} \quad (9.41)$$

Постоянные  $C_1$  и  $C_4$  найдем из граничных условий.

При  $y = a/2$   $Y(y) = 0$  и  $Y'(y) = 0$ . Для  $C_1$  и  $C_4$  получим следующие значения:

$$C_1 = -0,501 \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D}; \quad C_2 = -0,0057 \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D}.$$

Подставляя найденные выражения для  $C_1$  и  $C_4$  в (9.40) и принимая во внимание (9.35), получим следующее выражение для функции прогибов  $u_z$ :

$$\begin{aligned} u_z = & \frac{q_0 a^4}{8\pi^4 D} \left[ 1 - 0,501 \operatorname{ch} \left(1,355 \frac{\pi y}{a}\right) \cos \left(0,698 \frac{\pi y}{a}\right) - \right. \\ & \left. - 0,0057 \operatorname{sh} \left(1,355 \frac{\pi y}{a}\right) \sin \left(0,698 \frac{\pi y}{a}\right) \right] \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a}\right). \end{aligned} \quad (9.42)$$

Максимальный прогиб в центре квадратной пластинки при  $x = a/2$  и  $y = 0$  оказывается равным:  $u_{z \max} = 0,00128 q_0 a^4 / D$ , что отличается от точного значения менее чем на 2 %.

### Контрольные вопросы

1. Что понимается под прямыми вариационными методами?
2. В чем суть метода Рэлея — Ритца?
3. Какие требования предъявляются к аппроксимирующим функциям для перемещений в методе Рэлея — Ритца?
4. В чем состоит приближенность метода Рэлея — Ритца?
5. В чем заключается идея метода Бубнова — Галеркина?
6. Удовлетворяются ли уравнения равновесия при использовании метода Бубнова — Галеркина?
7. Какие требования к выбору аппроксимирующих функций для перемещений предъявляются при применении метода Бубнова — Галеркина?

## Глава 10

# ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Гораздо труднее увидеть проблему, чем найти ее решение. Для первого требуется воображение, а для второго только умение.

*Д. Бернал*<sup>1</sup>

### 10.1. Основные соотношения теории упругости в матричной форме

#### 10.1.1. Пространственная задача

В основе любого метода расчета на прочность, в том числе метода конечных элементов (МКЭ), лежат уравнения теории упругости.

Так как при применении МКЭ используются матричные методы, представим основные соотношения теории упругости, которые используются при определении напряженно-деформированного состояния, в матричной форме, используя выводы, полученные в работе [1].

**Статические соотношения.** Как известно [1], к статическим соотношениям относятся дифференциальные уравнения равновесия (уравнения Навье):

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y &= 0; \\ \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10.1)$$

<sup>1</sup> Душенко К.В. Новая книга афоризмов. М.: ЭКСМО, 2010.

и формулы для напряжений в наклонных площадках

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m + \tau_{xz} n; \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m + \tau_{yz} n; \\ p_{zv} &= \tau_{zx} l + \tau_{zy} m + \sigma_z n. \end{aligned} \right\} \quad (10.2)$$

Здесь  $\sigma_x, \tau_{yx}, \tau_{zx}$  — компоненты напряжений в площадке, перпендикулярной оси  $x$ ;  $\tau_{xy}, \sigma_y, \tau_{zy}$  — компоненты напряжений в площадке, перпендикулярной оси  $y$ ;  $\tau_{xz}, \tau_{yz}, \sigma_z$  — компоненты напряжений в площадке, перпендикулярной оси  $z$ ;  $l, m, n$  — косинусы углов между внешней нормалью к наклонной площадке и координатными осями  $x, y, z$ ;  $p_{xv}, p_{yv}, p_{zv}$  — проекции полного напряжения в наклонной площадке на координатные оси  $x, y, z$ .

Если наклонная площадка совпадает с граничной поверхностью с нормалью  $v$ , то  $p_{xv}, p_{yv}, p_{zv}$  можно рассматривать как составляющие вектора поверхностной нагрузки.

Напомним, что равенства (10.2) устанавливают связь между поверхностными силами и компонентами напряжений вблизи поверхности тела, другими словами, выражают так называемые статические граничные условия.

Введем следующие матрицы-столбцы:

$$\left\{ \sigma_x \right\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{yx} \\ \tau_{zx} \end{Bmatrix}; \quad \left\{ \sigma_y \right\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \\ \tau_{zy} \end{Bmatrix}; \quad \left\{ \sigma_z \right\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \\ \sigma_z \end{Bmatrix};$$

$$\left\{ R \right\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix}; \quad \left\{ p \right\} = \begin{Bmatrix} p_{xv} \\ p_{yv} \\ p_{zv} \end{Bmatrix}. \quad (a)$$

Тогда с учетом (a) равенства (10.1) и (10.2) могут быть представлены матричными соотношениями [12, 13]:

$$\frac{\partial \left\{ \sigma_x \right\}}{\partial x} + \frac{\partial \left\{ \sigma_y \right\}}{\partial y} + \frac{\partial \left\{ \sigma_z \right\}}{\partial z} + \left\{ R \right\} = 0; \quad (10.3)$$

$$\left\{ p \right\} = \left\{ \sigma_x \right\} l + \left\{ \sigma_y \right\} m + \left\{ \sigma_z \right\} n. \quad (10.4)$$

В правильности полученных соотношений (10.3) и (10.4) можно убедиться, если использовать операции дифференцирования и сложения матриц.

**Геометрические соотношения (формулы Коши).** Они устанавливают связь между компонентами деформации и перемещений. Если деформации и перемещения малы, то между ними имеет место линейная зависимость, выражаемая уравнениями Коши

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u_x}{\partial x}; & \gamma_{xy} &= \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial u_y}{\partial y}; & \gamma_{yz} &= \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}; \\ \varepsilon_z &= \frac{\partial u_z}{\partial z}; & \gamma_{zx} &= \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z}. \end{aligned} \right\} \quad (10.5)$$

Здесь  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, u_x, u_y, u_z$  — относительные линейные деформации и перемещения в направлении осей  $x, y, z$ , соответственно;  $\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$  — относительные угловые деформации между соответствующими направлениями (по направлению координатных осей  $x, y, z$ ).

Соотношения (10.5) можно представить одним матричным равенством:

$$\{\varepsilon\} = \{L\}\{u\}, \quad (10.6)$$

где

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{Bmatrix}; \quad \{L\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix}. \quad (б)$$

Через  $\{L\}$  в (10.6) обозначен матричный дифференциальный оператор. Соответственно,  $\{\varepsilon\}$  и  $\{u\}$  — матрицы-столбцы относительных деформаций и перемещений.

Как известно [12, 13, 14, 15], компоненты матрицы  $\{\varepsilon\}$  связаны между собой шестью дифференциальными соотношениями, которые называются условиями совместности (или неразрывности) деформаций Сен-Венана:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}; & \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} - \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y \partial z}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{yz}}{\partial y \partial z}; & \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial z \partial x}; \\ \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 \gamma_{zx}}{\partial z \partial x}; & \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \gamma_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \gamma_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \gamma_{xy}}{\partial z} \right) &= 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial x \partial y}. \end{aligned} \right\}$$

**Физические соотношения.** Сюда относятся соотношения, устанавливающие связь между напряжениями и деформациями. В пределах упругости эта связь выражается законом Гука, согласно которому компоненты деформации являются линейными функциями компонент напряжения. Для изотропного тела закон Гука имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned} \right\} \quad (10.7)$$

где  $E$  — модуль упругости материала;  $G$  — модуль сдвига;  $\mu$  — коэффициент Пуассона; упругие постоянные материала  $E, G$  и  $\mu$  связаны между собой равенством  $E = 2(1 + \mu)G$ .

Введем матрицу-столбец напряжений  $\{\sigma\}$  (для экономии места используем строчечную запись, как мы условились):

$$\{\sigma\} = |\sigma_x \quad \sigma_y \quad \sigma_z \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}|,$$

а также значения матрицы-столбца относительных деформаций  $\{\varepsilon\}$ , запишем (10.7) в форме одного матричного равенства:

$$\{\varepsilon\} = \{\Phi\}\{\sigma\}, \quad (10.8)$$

где

$$\{\Phi\} = \frac{1}{E} \begin{vmatrix} 1 & -\mu & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & 1 & -\mu & 0 & 0 & 0 \\ -\mu & -\mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{vmatrix}. \quad (10.9)$$

Матрицу  $\{\Phi\}$  обычно называют матрицей упругих постоянных, или матрицей упругости.

Закон Гука можно представить в так называемой форме Ляме (обратная форма закона Гука):

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_x; & \tau_{xy} &= G\gamma_{xy}; \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_y; & \tau_{yz} &= G\gamma_{yz}; \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2\mu\varepsilon_z; & \tau_{zx} &= G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (10.10)$$

Здесь

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)} = \frac{2\mu G}{1-2\mu}; \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \quad (10.11)$$

Константы  $\lambda$  и  $G$  называются упругими постоянными Ляме.

В матричной форме соотношение (10.10) имеет вид:

$$\{\sigma\} = \{\kappa\}\{\varepsilon\}; \quad (10.12)$$

$$\{\kappa\} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{vmatrix} 1-\mu & \mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1-\mu & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & \mu & 1-\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{vmatrix}. \quad (10.13)$$

Очевидно, что матрица  $\{\kappa\}$  является обратной матрице  $\{\Phi\}$  и также будет матрицей упругих коэффициентов:

$$\{\kappa\} = \{\Phi\}^{-1}.$$

Как было доказано ранее [1], совокупность дифференциальных уравнений равновесия (10.3), геометрических (10.6) и физических ((10.8) или (10.12)) соотношений образует систему из 15 уравнений, в которые входят шесть компонент напряжения, шесть компонент деформации и три компоненты перемещения. Таким образом, получается замкнутая система уравнений.

Соотношения (10.6) выступают в качестве статических граничных условий.

### 10.1.2. Плоская задача

Существует широкий класс важных в практическом отношении задач, в которых перемещения, деформации и напряжения зависят лишь от двух координат —  $x$  и  $y$ . Этот класс задач под общим названием «плоская задача теории упругости» подразделяется на плоскую деформацию и обобщенное напряженное состояние [1, 13].

Если в процессе нагружения все точки тела перемещаются только параллельно одной плоскости (например, плоскости  $xOy$ ), то соответствующее деформированное состояние называется *плоской деформацией*.

Таким образом, для плоской деформации имеем:

$$u_x = u_x(x, y); \quad u_y = u_y(x, y); \quad u_z = 0.$$

В соответствии с уравнениями Коши (10.5), деформации  $\varepsilon_z$ ,  $\gamma_{yz}$ ,  $\gamma_{zx}$  оказываются равными нулю, а из закона Гука (10.10) вытекает, что касательные напряжения  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{zx}$  также равны нулю. Остальные компоненты деформации и напряжения являются функциями только координат  $x$  и  $y$ .

Если же тонкая пластинка, параллельная плоскости  $xOy$ , нагружена объемными и поверхностными (только по контуру) силами, параллельными ее плоскости и равномерно распределенными по толщине, то такое напряженное состояние называется *обобщенным плоским напряженным состоянием*.

В этом случае можно пренебречь компонентами напряжения  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ , а  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  считать постоянными по толщине:

$$\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0;$$

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y).$$

Из закона Гука (10.7) имеем, что при обобщенном плоском напряженном состоянии деформации сдвига  $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ , а остальные компоненты деформации представляются как функции только координат  $x$  и  $y$ .

Выпишем основные уравнения теории упругости применительно к плоской задаче. Из трех дифференциальных уравнений равновесия (10.1) остаются два; в матричной записи они имеют вид:

$$\frac{\partial\{\sigma_x\}}{\partial x} + \frac{\partial\{\sigma_y\}}{\partial y} + \{R\} = 0, \quad (10.14)$$

$$\text{где } \{\sigma_x\} = \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \tau_{yx} \end{Bmatrix}; \quad \{\sigma_y\} = \begin{Bmatrix} \tau_{xy} \\ \sigma_y \end{Bmatrix}; \quad \{R\} = \begin{Bmatrix} X \\ Y \end{Bmatrix}.$$

Для напряжений в наклонных площадках из (10.2) имеем:

$$\left. \begin{aligned} p_{xv} &= \sigma_x l + \tau_{xy} m, \\ p_{yv} &= \tau_{yx} l + \sigma_y m. \end{aligned} \right\} \quad (10.15)$$

Матричная форма статических граничных условий будет:

$$\{p\} = \{\sigma_x\}l + \{\sigma_y\}m, \quad (10.16)$$

где  $\{p\} = |p_{xv} \ p_{yv}|$ .

Из уравнений Коши (10.5) остаются только три соотношения:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u_x}{\partial x}; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial u_y}{\partial y}; \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}. \quad (10.17)$$

Обозначив для плоской задачи

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}; \quad \{L\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{Bmatrix}; \quad \{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}, \quad (10.18)$$

соотношения (10.17) с учетом (10.18) принимают, как и (10.6), вид:

$$\{\varepsilon\} = \{L\}\{u\}.$$

Однако в этом случае значение матриц  $\{\varepsilon\}$ ,  $\{L\}$ ,  $\{u\}$  берется из (10.18).

Из условия совместности деформаций (10.7) остается только одно соотношение:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y}. \quad (10.19)$$

Закон Гука по-прежнему можно записать в форме (10.8)  $\{\varepsilon\} = \{\Phi\}\{\sigma\}$  или в форме (10.12):  $\{\sigma\} = \{\kappa\}\{\varepsilon\}$ , где  $\{\sigma\} = |\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}|$ .

При этом для плоской задачи имеем:

$$\{\kappa\} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)} \begin{Bmatrix} 1-\mu & \mu & 0 \\ \mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\mu}{2} \end{Bmatrix}; \quad (10.20)$$

$$\{\Phi\} = \frac{1+\mu}{E} \begin{Bmatrix} 1-\mu & -\mu & 0 \\ -\mu & 1-\mu & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{Bmatrix}, \quad (10.21)$$

а для обобщенного плоского напряженного состояния:

$$\{\kappa\} = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{Bmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{Bmatrix}; \quad (10.22)$$

$$\{\Phi\} = \frac{1}{E} \begin{Bmatrix} 1 & -\mu & 0 \\ -\mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1+\mu) \end{Bmatrix}. \quad (10.23)$$

Как отмечалось ранее [1, 13], в случае плоской деформации нормальное напряжение  $\sigma_z$  отлично от нуля, но оно не имеет самостоятельного значения, поскольку выражается через  $\sigma_x$  и  $\sigma_y$ :

$$\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y).$$

Точно так же в обобщенном плоском напряженном состоянии деформация  $\varepsilon_z$  может быть найдена через  $\varepsilon_x$  и  $\varepsilon_y$ :

$$\varepsilon_z = -\frac{1}{1-\mu}(\varepsilon_x + \varepsilon_y).$$

Решение плоской задачи теории упругости удобно выполнять в напряжениях [1]. При постоянных объемных силах  $X$  и  $Y$  оно сводится к отысканию некоторой функции  $\varphi(x, y)$ , удовлетворяющей бигармоническому уравнению:

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Напряжения вычисляются через функцию  $\varphi(x, y)$  посредством формул:

$$\sigma_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad \sigma_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad \tau_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}.$$

Кроме того, полученные решения должны удовлетворять еще граничным условиям (10.2) на боковой поверхности.

## 10.2. Основные понятия метода конечных элементов

### 10.2.1. Дискретизация тела

Метод конечных элементов является мощным современным средством приближенного решения разнообразных задач математической физики, ориентированным на эффективное использование ЭВМ. В задачах теории упругости он позволяет распространить принципы расчета стержневых систем на случай непрерывных тел и сложных конструкций. При этом его можно трактовать как специфическую форму метода Рэлея — Ритца, что дает ключ к теоретическому обоснованию метода конечных элементов.

Рассмотрим тело, которое нагружено произвольной нагрузкой. С помощью секущих плоскостей (или криволинейных поверхностей) разобьем его на отдельные части (рис. 88). Получаемые подобласти имеют хотя и малые, но все же конечные размеры, откуда и происходит их название «конечные элементы».

Таким образом, непрерывное тело представляется в виде совокупности конечных элементов, жесткостные свойства каждого из которых рассматриваются затем независимо от остальных. На границах между конечными элементами выбираются некоторые точки — узлы; перемещения узлов в направлении координатных осей (а иногда и производные от перемещений) принимаются в качестве основных не-

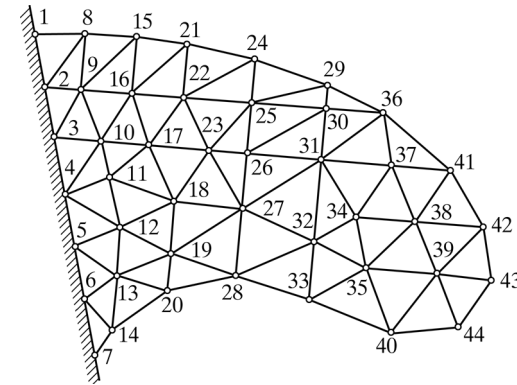


Рис. 88. Пример разбиения на элементы двумерного тела и нумерация узлов

известных. Такое решение в строительной механике называют методом перемещений. Существует разновидность метода конечных элементов, в которой в качестве основных неизвестных принимают силы взаимодействия между элементами (метод сил); возможна также смешанная формулировка.

Поскольку за основные неизвестные принимаются узловые перемещения, этот метод может быть легко реализован для стержневых систем. Для случая непрерывных (сплошных) тел возникает целый ряд затруднений, которые можно преодолеть лишь с помощью некоторых введенных гипотез.

Прежде всего встает вопрос о том, как найти перемещения (а следовательно, деформации и напряжения) внутри каждого конечного элемента, зная перемещения принадлежащих ему узлов. Для случая стержневых систем расчет может базироваться на использовании технической теории растяжения, изгиба и кручения бруса, которая позволяет выразить перемещения и напряжения в любом сечении бруса через узловые перемещения. Для сплошного тела эта задача может быть решена только приближенно, если сделать те или иные предположения о характере поля перемещений в элементе. Точнее, необходимо выбрать некоторые функции, которые смогли бы аппроксимировать поле перемещений внутри конечного элемента по известным узловым перемещениям. Выбор аппроксимирующих функций является одним из наиболее ответственных и важных этапов в методе конечных элементов. Заметим, что такая функция не может являться единственно возможной, поскольку это зависит также от погрешно-



сти вычисления, возможности вычисления концентраторов напряжений и т. д.<sup>1</sup>. Если такой выбор сделан, то, как будет показано ниже, деформированное и напряженное состояние элемента будет однозначно определяться узловыми перемещениями. Поэтому под *конечным элементом* следует понимать не просто некоторую малую область тела, а область тела в совокупности с заданными в ней аппроксимирующими функциями.

Вторая трудность возникает при объединении конечных элементов в единую систему (для всего тела). Если бы мы рассчитывали стержневые конструкции, то объединение производилось путем составления уравнений равновесия для узловых точек, в которых конструктивные элементы соединяются друг с другом. В сплошном теле число точек соединения между узловыми точками бесконечно. Поэтому, задаваясь распределением перемещений внутри каждого конечного элемента, тем самым задаем и распределение напряжений во всех его точках, в том числе и в узловых. Однако на границах раздела смежных элементов напряжения, найденные для каждого из них независимо, не будут совпадать. Следовательно, не будет обеспечено выполнение условий равновесия на всей поверхности раздела конечных элементов.

Чтобы обойти возникшее затруднение, можно напряжения, действующие по границе каждого элемента, условно заменить эквивалентными сосредоточенными узловыми силами; тогда уравнения равновесия узловых сил в направлении узловых перемещений (или координатных осей) могут быть составлены обычным образом (как равенство нулю суммы проекций узловых сил на выбранное направление).

При этом для каждого элемента *эквивалентные узловые силы определяются из условия: производимая ими на узловых перемещениях работа должна равняться работе действительных напряжений на перемещениях точек граничной поверхности элемента*.

Еще одна трудность связана с нагружением упругого тела распределенными поверхностными и объемными силами. *Эти силы могут быть учтены также заменой их на эквивалентные узловые силы, если их работа на действительных перемещениях будет равна работе узловых сил на соответствующих узловых перемещениях*.

<sup>1</sup> В работе [16] только для девяти различных типов конечных элементов приводится свыше 20 аппроксимирующих функций.

После введения указанных упрощений тело можно рассматривать как дискретную систему, т. е. как совокупность элементов, соединенных между собой в узловых точках. Разбиение конструкции на подобласти и выбор аппроксимирующих функций для каждой из них можно осуществить различными способами. При этом должны быть учтены особенности геометрии тела и обеспечена хорошая аппроксимация перемещений, деформаций и напряжений для всего тела в целом. В этом случае решение, полученное по методу конечных элементов, будет в пределе (при уменьшении размеров элементов) стремиться к точному.

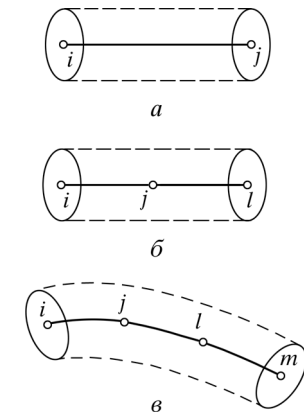
### 10.2.2. Типы конечных элементов

При решении задачи методом конечных элементов используются конечные элементы различных типов.

Простейшим среди элементов является одномерный элемент. Схематически он обычно изображается в виде отрезка (рис. 89, а), хотя и имеет поперечное сечение. Площадь поперечного сечения может изменяться по длине, но во многих встречающихся задачах она считается постоянной.

Наиболее часто такой элемент используется в одномерных задачах распространения тепла и в задачах строительной механики при расчете стержневых систем.

Простейший одномерный элемент имеет два узла, по одному на каждом конце. Элементами более высокого порядка являются трехузловые (квадратичные) и четырехузловые (кубические)<sup>1</sup>. На рис. 89, б и в изображены такие элементы. Одномерный элемент может быть криволинейным (рис. 89, в) при условии, что длина дуги входит в уравнения, определяющие элементы. При построении дискретной модели двумерной области (например, плоской задачи



**Рис. 89.** Одномерные конечные элементы: а — линейный двухузловой; б — квадратичный трехузловой; в — кубический четырехузловой

<sup>1</sup> Как будет показано ниже, название конечных элементов (квадратичное или кубическое) определяется видом аппроксимирующей функции.

теории упругости) используются два основных семейства элементов: треугольники и четырехугольники. Стороны линейных элементов каждого семейства представляют собой прямые линии (рис. 89, а).

Квадратичные и кубические элементы могут иметь как прямолинейные, так и криволинейные стороны или те, и другие. Возможность моделирования криволинейных границ достигается добавлением узлов в середину сторон элементов. Оба семейства элементов могут быть использованы одновременно внутри области, если только они имеют одинаковое число узлов на стороне (см. рис. 90, в). Толщина элемента может быть или постоянной, или являться функцией координат.

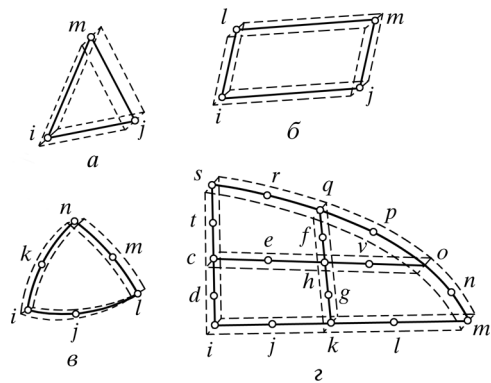


Рис. 90. Некоторые двумерные конечные элементы: а — треугольный, 3 узла; б — прямоугольный, 4 узла; в — криволинейный треугольный, 6 узлов; г — сочетание элементов

Наиболее часто встречающимися трехмерными элементами являются тетраэдр и параллелепипед (рис. 91). В обоих случаях линейные элементы ограничены прямолинейными сторонами (плоскостями), тогда как элементы более высокого порядка могут иметь в качестве границ криволинейные поверхности. При разбиении трехмерного тела трудно наглядно представить расположение элементов в дискретной модели, поэтому более желательным из этих двух типов элементов является параллелепипед.

На рис. 92 показан другой вид элементов, которые используются при рассмотрении осесимметричных тел. Эти элементы подобны двумерному треугольнику и позволяют учесть изменение напряжений или деформаций вдоль третьей координаты.

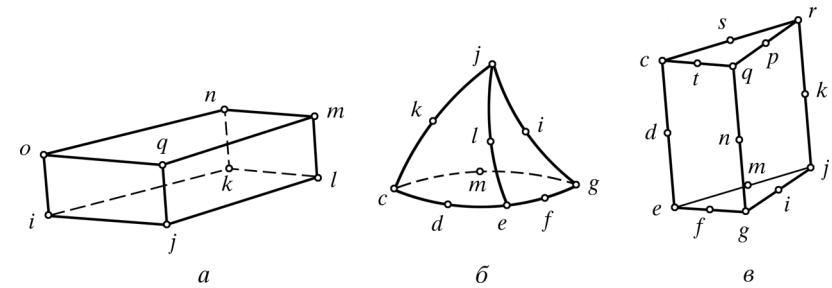


Рис. 91. Некоторые трехмерные конечные элементы: а — параллелепипед, 8 узлов; б — тетраэдр, 10 узлов; в — пентаэдр, 15 узлов

Действительно, в случае симметричной задачи, к которой сводится расчет, например, днища поршня бензинового двигателя, втулки и клапана, конечно-элементная модель образуется поворотом на 360° треугольника (см. рис. 92) или прямоугольника, являясь, таким образом, телом вращения. Важно подчеркнуть, что осесимметричные задачи относятся к классу двумерных, так как переменными служат только две координаты  $r$  и  $x$ , хотя аппроксимируемая область является пространственной.

После выбора в соответствии с классом задачи типа элемента производится разбиение тела на элементы и нумерация элементов и их узлов. На рис. 93 приведен пример разбиения меридионального сечения клапана на элементы треугольного типа. При разбиении тело

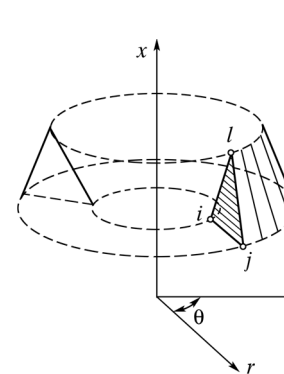


Рис. 92. Осесимметричный конечный элемент (трехузловой линейный кольцевого типа)

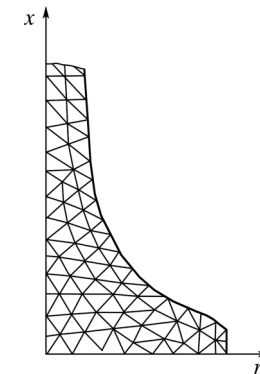


Рис. 93. Разбивка на конечные элементы треугольного типа меридионального сечения клапана

сначала делится на зоны с каким-либо характерным признаком (особенностью геометрии, нагружения, свойствами материала и т. д.).

Равномерное разбиение, когда все элементы имеют одинаковую форму и размеры, обычно не производится, потому что при решении задач механики твердого тела необходимо учитывать концентрацию напряжений, температурные градиенты и т. п. Так, например, при расчете днища головки цилиндров потребуется более мелкая разбивка в районах межклапанных перемычек и отверстия под форсунку. Точно так же при расчете поршня потребуется более мелкая разбивка на конечные элементы в районе кольцевых канавок. Возможность варьировать размеры элемента — важное достоинство метода конечных элементов. Наиболее простой способ существенного изменения размеров элементов заключается в применении четырехугольных подобластей с неравным числом узлов на противоположных сторонах.

### 10.2.3. Перемещения, деформации и напряжения в конечном элементе

Рассмотрим типовой конечный элемент упругого тела, имеющий узлы  $i, j, \dots$ . Обозначим через  $v_i, v_j, \dots$  матрицы перемещений соответствующих узлов. Количество элементов в этих матрицах зависит от характера задачи. Так, в случае пространственной задачи матрица  $v_r$  обычно включает три компоненты:

$$\{v_r\} = \begin{Bmatrix} v_{rx} \\ v_{ry} \\ v_{rz} \end{Bmatrix},$$

где  $v_{rx}, v_{ry}, v_{rz}$  — проекции перемещений узла  $r$  на координатные оси  $x, y, z$  (рис. 94).

В плоской задаче компонентами матрицы  $\{v_r\}$  будут  $v_{rx}, v_{ry}$ . В некоторых конечных элементах матрицы  $\{v_r\}$  содержат помимо линейных также и угловые перемещения или производные от перемещений. Все узловые перемещения элемента образуют матрицу-столбец<sup>1</sup>:

$$\{v^e\} = \{v_i\} \{v_j\} \dots$$

<sup>1</sup> В матрице  $\{v^e\}$  индекс «e» означает, что данный параметр относится к единичному конечному элементу.

Рассмотрим теперь произвольную точку внутри элемента. Перемещения этой точки в направлении координатных осей образуют матрицу-столбец, которую обозначим  $\{u\}$ :

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{Bmatrix},$$

где  $u_x, u_y, u_z$  — смещение рассматриваемой точки в направлении осей  $x, y, z$  (см. рис. 94).

В плоской задаче матрица  $\{u\}$  содержит два элемента. Подчеркнем, что компоненты матрицы  $\{u\}$  представляют собой функции координат.

Как говорилось выше, в методе конечных элементов принимается допущение, согласно которому перемещения всех точек элемента однозначно определяются его узловыми перемещениями. В матричных обозначениях это означает существование равенства:

$$\{u\} = \{\alpha\}\{v^e\}. \quad (10.24)$$

Здесь  $\{\alpha\}$  — прямоугольная матрица, в которой количество строк равно числу компонент матрицы  $\{u\}$ , а количество столбцов — числу компонент матрицы  $\{v^e\}$ . Элементами матрицы  $\{\alpha\}$  являются некоторые функции координат (аппроксимирующие функции). Выбор подходящих функций, как отмечалось ранее, представляет собой важный этап в методе конечных элементов. Для некоторых элементов этот вопрос будет рассмотрен ниже. На данном этапе изучения теоретических основ метода конечных элементов будем предполагать, что аппроксимирующие функции нам уже известны.

Воспользовавшись формулами Коши, можно выразить деформации в каждой точке конечного элемента через его узловые перемещения. По формуле (10.6) имеем:  $\{\epsilon\} = \{L\}\{u\}$ , что с учетом (10.24) дает:  $\{\epsilon\} = \{L\}\{\alpha\}\{v^e\}$ . Эту связь между  $\{\epsilon\}$  и  $\{v^e\}$  будем записывать в виде:

$$\{\epsilon\} = \{\beta\}v^e, \quad (10.25)$$

где через  $\{\beta\}$  обозначена прямоугольная матрица

$$\{\beta\} = \{L\}\alpha. \quad (10.26)$$

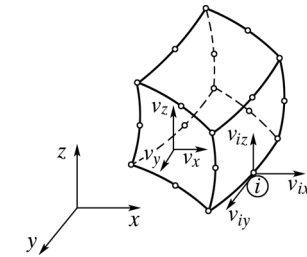


Рис. 94. Трехмерный 20-узловой конечный элемент в общей системе координат

Число строк матрицы  $\{\beta\}$  равно числу компонент матрицы  $\{\epsilon\}$ .

В общем случае пространственного тела, когда матрица  $\{u\}$  содержит три компонента  $u_x, u_y, u_z$ , из зависимости (10.24) следует, что матрицу  $\{\alpha\}$  можно представить в виде:

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \\ \{\alpha_z\} \end{Bmatrix}. \quad (10.27)$$

В этой записи  $\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$  — матрицы-строки, элементами которых являются известные аппроксимирующие функции. Матричный оператор  $\{L\}$  дается в этом случае выражением

$$\{\beta\} = \{L\}\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x & 0 & 0 \\ 0 & \partial/\partial y & 0 \\ 0 & 0 & \partial/\partial z \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial z & \partial/\partial y \\ \partial/\partial z & 0 & \partial/\partial x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\partial\alpha_x\}/\partial x \\ \{\partial\alpha_y\}/\partial y \\ \{\partial\alpha_z\}/\partial z \\ \{\partial\alpha_y\}/\partial x + \{\partial\alpha_x\}/\partial y \\ \{\partial\alpha_z\}/\partial y + \{\partial\alpha_y\}/\partial z \\ \{\partial\alpha_z\}/\partial x + \{\partial\alpha_x\}/\partial z \end{Bmatrix}. \quad (10.28)$$

В плоской задаче компонентами  $\{u\}$  будут перемещения  $u_x, u_y$ , а матрица  $\{\alpha\}$  имеет, соответственно, две строки:

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \end{Bmatrix}. \quad (10.29)$$

Матрица  $\{L\}$  в этом случае определяется выражением:

$$\{\beta\} = \{L\}\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \partial/\partial x & 0 \\ 0 & \partial/\partial y \\ \partial/\partial y & \partial/\partial x \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\partial\alpha_x\}/\partial x \\ \{\partial\alpha_y\}/\partial y \\ \{\partial\alpha_y\}/\partial x + \{\partial\alpha_x\}/\partial y \end{Bmatrix}. \quad (10.30)$$

Воспользуемся далее законом Гука в так называемой форме Ляме (обратная форма закона Гука)  $\{\sigma\} = \{\kappa\}\{\epsilon\}$ , где  $\{\sigma\}$  — матрица-столбец напряжений;  $\{\kappa\}$  — матрица упругих постоянных. Подставляя сюда соотношение  $\{\epsilon\} = \{\beta\}\{v^e\}$ , имеем:

$$\{\sigma\} = \{\kappa\}\{\beta\}\{v^e\}. \quad (10.31)$$

Формулы (10.24), (10.25), (10.31) показывают, что при известной матрице аппроксимирующих функций  $\{\alpha\}$  напряженное и деформированное состояние конечного элемента однозначно определяется узловыми перемещениями  $\{v^e\}$ .

#### 10.2.4. Матрица жесткости конечного элемента

Рассмотрим упругое равновесие деформированного конечного элемента. Внешними нагрузками для него являются напряжения, возникающие на его границе в результате взаимодействия со смежными элементами, объемные силы  $\{R\}$  и, возможно, поверхностные нагрузки  $\{p\}$  (если часть его поверхности совпадает с поверхностью, ограничивающей тело). Предположим, что узловые перемещения  $\{v^e\}$  получили произвольные бесконечно малые приращения, определяемые матрицей

$$\{\delta v^e\} = |\delta v_i \ \delta v_j \ \dots|.$$

Поскольку перемещения  $\{u\}$  точек элемента связаны с узловыми перемещениями равенством  $\{u\} = \{\alpha\}\{v^e\}$ , они получают приращения  $\{\delta u\} = \{\alpha\}\{\delta v^e\}$ . Работу внешних нагрузок на перемещениях  $\{\delta u\}$  обозначим через  $\delta A^e$ , а изменение потенциальной энергии деформации конечного элемента — через  $\delta U^e$ . Согласно принципу возможных перемещений должно выполняться равенство  $\delta U^e = \delta A^e$ .

Заменим напряжения, определяемые (10.8) на поверхности элемента, эквивалентными им сосредоточенными узловыми силами, действующими в направлении узловых перемещений:

$$\{P^e\} = |P_i^e \ P_j^e \ \dots|,$$

где  $|P_i^e \ P_j^e \ \dots|$  — матрицы сил для узлов  $i, j, \dots$ .

Объемные  $\{R\}$  и поверхностные  $\{p\}$  силы также заменим эквивалентными узловыми силами:

$$\{\tilde{P}^e\} = |\{\tilde{P}_i^e\} \ \{\tilde{P}_j^e\} \ \dots|.$$

Силы  $\{P^e\} + \{\tilde{P}^e\}$  будем считать эквивалентными действительным нагрузкам, если их работа на перемещениях  $\{\delta v^e\}$  равна  $\delta A^e$ , т. е. если выполняется равенство

$$\delta A^e = \{\delta v^e\}^T (\{P^e\} + \{\tilde{P}^e\}). \quad (10.32)$$

Подсчитаем теперь изменение потенциальной энергии  $\delta U^e$ , если узловые перемещения получили бесконечно малые перемещения  $\{\delta v^e\} = |\{\delta v_i\} \{\delta v_j\} \dots|$ . Так как деформации связаны с узловыми перемещениями  $\{v^e\}$  соотношением  $\{\epsilon\} = \{\beta\}\{v^e\}$ , изменение узловых перемещений вызовет приращение деформаций

$$\{\delta\epsilon\} = \{\beta\}\{\delta v^e\}. \quad (10.33)$$

Поскольку вариация удельной потенциальной энергии деформации определяется как [1]  $\delta W = \{\delta\epsilon\}^T \{\sigma\}$ , проинтегрировав по всему объему конечного элемента  $\tau^e$ , окончательно имеем:

$$\delta U^e = \int_{\tau^e} \delta W d\tau = \int_{\tau^e} \{\delta\epsilon\}^T \{\sigma\} d\tau,$$

где  $\tau^e$  — объем, занимаемый конечным элементом.

Подставив в подинтегральное выражение (10.31) и (10.33), получим:

$$\delta U^e = \int_{\tau^e} (\{\beta\}\{\delta v^e\})^T \{\kappa\}\{\beta\}\{v^e\} d\tau.$$

В силу постоянства элементов матриц  $\{\delta v^e\}$  и  $\{v^e\}$  их можно вынести за знак интеграла:

$$\delta U^e = \{\delta v^e\}^T \left[ \int_{\tau^e} \{\beta\}^T \{\kappa\} \{\beta\} d\tau \right] \{v^e\}.$$

Выражение, заключенное в квадратные скобки, представляет собой квадратную матрицу (в силу перемножения матриц  $\{\beta\}^T$  и  $\{\beta\}$ ). Ее элементы получаются интегрированием элементов симметричной матрицы  $\{\beta\}^T \{\kappa\} \{\beta\}$ . Введем обозначение:

$$\{k^e\} = \int_{\tau^e} \{\beta\}^T \{\kappa\} \{\beta\} d\tau. \quad (10.34)$$

Тогда выражение для  $\delta U^e$  можно представить в виде:

$$\delta U^e = \{\delta v^e\}^T \{k^e\} \{v^e\}. \quad (10.35)$$

Приравнявая (10.32) к (10.35) и учитывая независимость элементов матрицы  $\{\delta v^e\}$ , получаем:

$$\{\delta v^e\}^T \{k^e\} \{v^e\} = \{\delta v^e\}^T (\{P^e\} + \{\tilde{P}^e\})$$

или

$$\{k^e\} \{v^e\} = \{P^e\} + \{\tilde{P}^e\}. \quad (10.36)$$

Данное соотношение связывает узловые силы с узловыми перемещениями, а поэтому матрицу  $\{k^e\}$ , определяемую по уравнению (10.34), можно назвать матрицей жесткости конечного элемента. Из (10.34) следует, что при известной геометрии конечного элемента (интегрирование по  $\tau^e$ ) и заданных упругих характеристиках материала матрица жесткости вполне определяется выбором аппроксимирующих функций.

Матрица узловых перемещений имеет блочную структуру (квази-матрица)  $\{\delta v^e\} = |\{\delta v_i\} \{\delta v_j\} \dots|$ , поскольку каждый из компонентов может быть разложен по координатным осям. В соответствии с выражением  $\{\epsilon\} = \{\beta\}\{v^e\}$  матрицу  $\{\beta\}$  можно также разбить на блоки:

$$\{\beta\} = |\{\beta_i\} \{\beta_j\} \dots|.$$

Тогда на основании (10.34) получим:

$$\{k^e\} \mathcal{B} = \int_{\tau^e} \begin{vmatrix} \{\beta_i\}^T \\ \{\beta_j\}^T \\ \vdots \end{vmatrix} \{k\} |\{\beta_i\} \{\beta_j\} \dots| d\tau.$$

Из этой записи вытекает следующее блочное представление матрицы жесткости конечного элемента:

$$\{k^e\} = \begin{vmatrix} \{k_{ii}^e\} \{k_{ij}^e\} \\ \{k_{ji}^e\} \{k_{jj}^e\} \\ \dots \end{vmatrix}, \quad (10.37)$$

где

$$\{k_{rs}^e\} = \int_{\tau^e} \{\beta_r\}^T \{\kappa\} \{\beta_s\} d\tau. \quad (10.38)$$

### 10.2.5. Понятие о физическом смысле матрицы жесткости

Для того чтобы определить физический смысл матрицы жесткости, рассмотрим балку на двух опорах (рис. 95, а). Найдем вертикальное перемещение точки приложения силы  $P_1 \Delta_{11}$ , используя, например, метод начальных параметров [17].



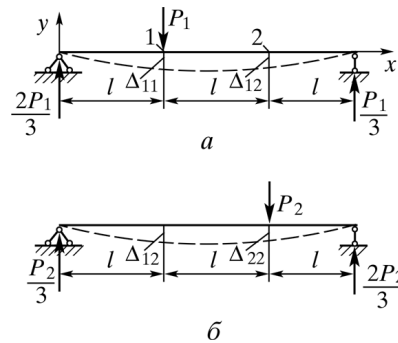


Рис. 95. Перемещения от сил:

$a$  — первого состояния  $P_1$ ;  $b$  — второго состояния  $P_2$

Если принять, что момент инерции поперечного сечения балки равен  $J$ , а модуль упругости материала балки  $E$ , то уравнение для определения вертикальных перемещений в произвольной точке  $x$  может быть записано в виде (см. рис. 95,  $a$ , где, кроме приложенной силы, приведены реакции на левой и правой опорах):

$$EJ\Delta = EJ\Delta_0 + EJ\theta_0 x + \frac{2P_1}{3} \frac{x^3}{6} - \frac{P(x-l)^3}{6}, \quad (a)$$

где  $\Delta_0$ ,  $\theta_0$  — начальный прогиб (вертикальное перемещение левого конца балки) и начальный угол поворота при  $x = 0$  (из граничных условий  $\Delta_0 = 0$ ).

Начальный угол поворота  $\theta_0$  найдем из граничных условий, так как при  $x = 3l$  вертикальное перемещение  $\Delta = 0$ :

$$EJ\Delta = EJ\theta_0(3l) + \frac{2P_1}{3} \frac{(3l)^3}{6} - \frac{P(2l)^3}{6} = 0,$$

откуда получим  $EJ\theta_0 = -\frac{5l^2}{9}$ .

Подставив в уравнение (а) последовательно  $x = l$  и  $x = 2l$ , найдем вертикальные перемещения в сечениях 1 и 2, соответственно:

$$\Delta_{11} = -\frac{4P_1 l^3}{9EJ}; \quad \Delta_{12} = -\frac{7P_1 l^3}{18EJ}. \quad (б)$$

Знак «минус» означает, что вертикальное перемещение происходит против направления оси  $y$  (см. рис. 95,  $a$ ).

Если взять абсолютное значение перемещения  $\Delta_{11}$  из выражения (б), то из этой формулы можно найти силу, необходимую для создания перемещения  $\Delta_{11}$ :

$$P_1 = \frac{9EJ}{4l^3} \Delta_{11} \quad \text{или} \quad P_1 = k_{11} \Delta_{11},$$

где  $k_{11} = \frac{9EJ}{4l^3}$ .

Коэффициент  $k_{11}$  называется *коэффициентом жесткости* двухопорной балки в сечении 1. Если положить  $\Delta_{11} = 1$ , то сила  $P_1$  будет равна  $k_{11}$ . Отсюда вытекает физический смысл коэффициента жесткости:  $k_{11}$  есть сила, которую необходимо приложить в сечении 1, чтобы прогиб в этом сечении равнялся единице.

Пусть далее к двухопорной балке приложены силы, как показано на рис. 95. Перемещения  $\Delta_{11}$ ,  $\Delta_{12}$ ,  $\Delta_{21}$ ,  $\Delta_{22}$  представляют собой:

$\Delta_{11}$  — перемещение по направлению силы  $P_1$  от действия этой же силы;

$\Delta_{12}$  — перемещение по направлению силы  $P_1$  от действия силы  $P_2$ ;

$\Delta_{21}$  — перемещение по направлению силы  $P_2$  от действия силы  $P_1$ ;

$\Delta_{22}$  — перемещение по направлению силы  $P_2$  от действия силы  $P_2$ .

Работу силы  $P_1$  первого состояния на вызванных ею перемещениях обозначим  $A_{11}$ , а величина ее равна:

$$A_{11} = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2}. \quad (в)$$

Аналогично работа силы  $P_2$  второго состояния на вызванных ею перемещениях равна:

$$A_{22} = \frac{P_2 \Delta_{22}}{2}. \quad (г)$$

Рассмотрим теперь случай статического нагружения той же системы (см. рис. 95) силами  $P_1$  и  $P_2$  в такой последовательности. Сначала к системе прикладывается статически нарастающая сила  $P_1$  (рис. 96,  $a$ ). Когда процесс ее статического нарастания закончен (прогиб под силой  $P_1$  равен  $\Delta_{11}$ ), на систему начинает действовать также статически нарастающая сила  $P_2$  (см. рис. 96,  $a$ ).

В процессе нарастания силы  $P_2$  от нуля до ее конечного значения сила  $P_1$ , оставаясь постоянной, она перемещается вниз на величину



дополнительного прогиба  $\Delta_{12}$  и, следовательно, совершает дополнительную работу, равную  $A_{12} = P_1 \Delta_{12}$ .

Полная работа сил первого состояния при последовательном нагружении системы силами  $P_1$  и  $P_2$  с учетом (в) и (з) равна:

$$A = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2} + \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} + P_1 \Delta_{12}. \quad (д)$$

При этом можно изменить порядок приложения сил. Сначала к системе прикладывается статически нарастающая сила  $P_2$  (рис. 96, б). Когда процесс ее статического нарастания закончен (прогиб под силой  $P_2$  равен  $\Delta_{22}$ ), на систему начинает действовать также статически нарастающая сила  $P_1$  (см. рис. 96, а). В процессе нарастания силы  $P_1$  от нуля до ее конечного значения сила  $P_2$ , оставаясь постоянной, перемещается вниз на величину дополнительного прогиба и, следовательно, совершает дополнительную работу, равную  $A_{21} = P_2 \Delta_{21}$ .

Полная работа сил второго состояния (см. рис. 96, б) при последовательном нагружении системы силами  $P_2$  и  $P_1$  с учетом (в) и (з) равна

$$A = \frac{P_1 \Delta_{11}}{2} + \frac{P_2 \Delta_{22}}{2} + P_2 \Delta_{21}. \quad (е)$$

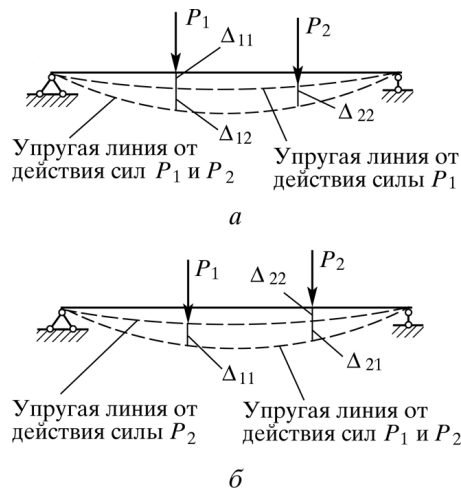


Рис. 96. Упругая линия балки при действии: а — сил первого состояния  $P_1$  и  $P_2$ ; б — второго состояния  $P_2$  и  $P_1$

Так как выполненная работа не зависит от порядка приложения сил (деформация находится в пределах упругости), приравнявая друг другу выражения (д) и (е), получаем:

$$P_1 \Delta_{12} = P_2 \Delta_{21}. \quad (10.39)$$

Таким образом, *работа сил первого состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами второго состояния, равна работе сил второго состояния на перемещениях по их направлениям, вызванных силами первого состояния.*

Этот вывод носит название *теоремы о взаимности работ, или теоремы Бетти.*

Из (10.39) можно получить другое заключение. Рассмотрим два состояния системы. В первом состоянии к системе приложена сила  $P_1 = 1$ , а во втором — сила  $P_2 = 1$  (рис. 97).

Обозначим перемещения, вызванные единичными силами (или моментами) знаком  $\delta$  — в отличие от перемещений, вызванных силами и моментами, не равными единице, обозначаемых знаком  $\Delta$ . В соответствии с этим перемещение в рассматриваемой системе по направлению единичной силы  $P_2 = 1$  (в сечении 2, см. рис. 97, а) в первом состоянии (т. е. вызванное силой  $P_1 = 1$ ) обозначим  $\delta_{21}$ , а перемещение по направлению единичной силы  $P_1 = 1$  (в сечении 1) во втором состоянии (т. е. вызванное силой  $P_2 = 1$ ) —  $\delta_{12}$ .

Из (10.39) получим:

$$P_1 \delta_{12} = P_2 \delta_{21},$$

но так как  $P_1 = P_2 = 1$ ,  $\delta_{12} = \delta_{21}$  или в общем случае действия любых единичных сил:

$$\delta_{mn} = \delta_{nm}. \quad (10.40)$$

Равенство (10.40) носит название теоремы о взаимности перемещений (*теоремы или принципа Максвелла*): *для двух единичных состояний упругой системы перемещение по направлению первой единичной силы, вызванное второй единичной силой, равно перемещению по направлению второй силы, вызванному первой силой.*

Таким образом, если на двухопорную балку действуют силы  $P_1$  и  $P_2$  (рис. 98) (порядок приложения этих сил роли не играет), то перемещение сечения 1 под силой  $P_1$  равно сумме  $\Delta_1 = \Delta_{11} + \Delta_{12}$ , а сечения 2

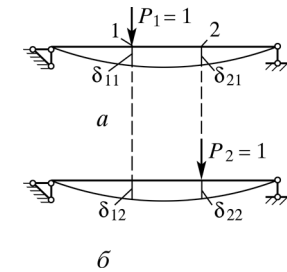
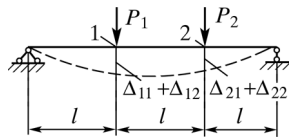


Рис. 97. Нагружение балки единичными силами: а — в сечении 1; б — в сечении 2

Рис. 98. Перемещения под действием двух сил  $P_1$  и  $P_2$ 

под силой  $P_2$  —  $\Delta_2 = \Delta_{21} + \Delta_{22}$  (см. рис. 98). Но поскольку  $\Delta_{11} = P_1 \delta_{11}$ ;  $\Delta_{12} = P_2 \delta_{12}$ ;  $\Delta_{22} = P_2 \delta_{22}$ ;  $\Delta_{21} = P_1 \delta_{21}$ ,

$$\Delta_1 = \delta_{11} P_1 + \delta_{12} P_2; \quad (10.41)$$

$$\Delta_2 = \delta_{21} P_1 + \delta_{22} P_2,$$

где  $\delta_{ij}$  ( $i, j = 1, 2$ ) — перемещение в направлении  $\Delta_i$  под действием единичной силы, направленной по  $P_j$ .

Величины  $\delta_{ij}$ , называемые коэффициентами влияния, зависят от геометрических параметров балки и от модуля упругости материала. Действительно, из уравнения (б) найдем:

$$\delta_{11} = \delta_{22} = \frac{4l^3}{9EI}; \quad \delta_{12} = \delta_{21} = \frac{7l^3}{18EI}.$$

Из рис. 98 следует, что  $\Delta_{11} = (4P_1 l^3)/(9EI)$ ;  $\Delta_{12} = (7P_2 l^3)/(18EI)$ ;  $\Delta_{21} = (7P_1 l^3)/(18EI)$ ;  $\Delta_{22} = (4P_2 l^3)/(9EI)$ . Таким образом, суммарное перемещение под каждой силой равно:

$$\Delta_1 = \frac{4P_1 l^3}{9EI} + \frac{7P_2 l^3}{18EI}; \quad \Delta_2 = \frac{7P_1 l^3}{18EI} + \frac{4P_2 l^3}{9EI}.$$

Из (10.41) следует, что связь между перемещениями и силами в матричной форме:

$$\{v\} = \{\delta\} \{P\}. \quad (10.42)$$

Здесь введены матрицы-столбцы сил и перемещений:

$$\{P\} = \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix}; \quad \{v\} = \begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix},$$

а через  $\{\delta\}$  обозначена матрица податливости:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} \\ \delta_{21} & \delta_{22} \end{Bmatrix}.$$

Если воспользоваться зависимостью (10.42), то суммарные вертикальные перемещения точек 1 и 2 (см. рис. 89) будут равны:

$$\begin{Bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4l^3}{9EI} & \frac{7l^3}{18EI} \\ \frac{7l^3}{18EI} & \frac{4l^3}{9EI} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} P_1 \\ P_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{4P_1 l^3}{9EI} & \frac{7P_2 l^3}{18EI} \\ \frac{7P_1 l^3}{18EI} & \frac{4P_2 l^3}{9EI} \end{Bmatrix}.$$

Если принять, что перемещения  $\{v\}$  известны, то из (10.42) можно найти силы  $\{P\}$ , вызывающие эти перемещения:

$$\delta^{-1} v = P.$$

Полагая  $k = \delta^{-1}$ , придадим последнему равенству вид:

$$kv = P.$$

Введенная здесь матрица  $\{k\}$  имеет размер  $2 \times 2$  и называется матрицей жесткости рассматриваемой системы. Согласно теореме Максвелла о взаимности перемещений (10.40) матрица податливости  $\{\delta\}$  является симметричной. Поэтому обратная к ней матрица  $\{k\}$  будет также симметричной. В общем случае на произвольное упругое тело действует система  $m$  сил (рис. 99), которую представим матрицей-столбцом

$$P = |P_1 \ P_2 \ P_3 \ \dots \ P_m|.$$

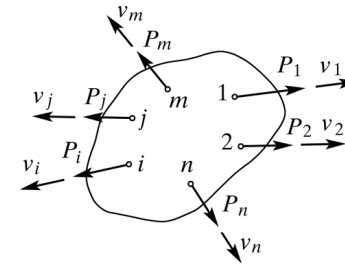


Рис. 99. Нагружение упругого тела произвольной системой сил

Пусть перемещения  $\{v\}$  точек приложения сил  $\{P\}$  (узловые точки) в направлении этих сил образуют матрицу

$$v = |v_1 \ v_2 \ v_3 \ \dots \ v_m|.$$

Здесь принято, что все перемещения  $\{v\}$  отличны от нуля. Если в некоторых из рассмотренных точек тело закреплено, то соответ-

вующие элементы матрицы  $\{v\}$  будут равны нулю. Например, если рассмотреть вертикальные перемещения сечений балки, показанной на рис. 98, то перемещения на левой и правой опорах будут равны нулю.

Предположим, что перемещения  $\{v\}$  заданы; тогда силы, необходимые для создания этих перемещений, определяются для линейно-упругого тела соотношением

$$P = kv. \quad (10.43)$$

Матрица  $\{k\}$ , связывающая силы  $\{P\}$  с соответствующими им перемещениями  $\{v\}$ , называется матрицей жесткости рассматриваемого тела.

Представим (10.43) в развернутом виде:

$$\begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ P_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ P_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \dots & k_{1j} & \dots & k_{1m} \\ k_{21} & k_{22} & \dots & k_{2j} & \dots & k_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{i1} & k_{i2} & \dots & k_{ij} & \dots & k_{im} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ k_{m1} & k_{m2} & \dots & k_{mj} & \dots & k_{mm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ v_i \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_m \end{pmatrix} \quad (10.44)$$

и выпишем  $i$ -ю строку этого матричного равенства:

$$\{P_i\} = k_{i1}v_1 + k_{i2}v_2 + \dots + k_{ij}v_j + \dots + k_{im}v_m. \quad (ж)$$

Физический смысл коэффициента  $k_{ij}$  можно выяснить, полагая перемещения в равенстве (ж)  $v_j = 1$ , а все остальные перемещения равными нулю; тогда получим  $P_{ij} = k_{ij}$ .

Отсюда следует, что коэффициент жесткости  $k_{ij}$  представляет собой силу, возникающую в узловой точке  $i$ , когда перемещение  $v_j$  равно единице, а все остальные перемещения равны нулю. Иначе говоря, если закрепить тело во всех узлах, кроме узла  $j$ , и приложить такую силу  $P_j$ , чтобы перемещение  $v_j$  равнялось единице, то реакция на тело в узловой точке  $j$  будет равна  $k_{ij}$  (при этом величина самой силы  $P_i$  определит значение коэффициента  $k_{ij}$ ).

Применяя теорему Бетти (10.39) о взаимности работ внешних сил, можно показать, что матрица жесткости всегда симметрична.

Если силы  $P_i$  имеют произвольные направления, то удобно разложить эти силы по координатным осям  $x, y, z$  и ввести для каждого узла  $i$  матрицу-столбец сил  $\{P_i\} = |P_{ix} \ P_{iy} \ P_{iz}|$ . Тогда  $v_j$  будет также матрицей-столбцом, элементы которой — перемещения узла  $i$  по координатным осям:  $\{v_i\} = |v_{ix} \ v_{iy} \ v_{iz}|$ . Связь между силами и перемещениями по-прежнему можно определять соотношением вида (10.44) только элементами  $\{k_{ij}\}$  матрицы  $\{k\}$ , которая теперь уже является квазиматрицей (блочной матрицей). Заметим, что элементами этой блочной матрицы будут квадратные подматрицы размером  $3 \times 3$ .

### 10.2.6. Учет внеузловой нагрузки

Выведем теперь зависимость для вычисления матрицы  $\{\bar{P}^e\}$ , которая определяет узловые силы, эквивалентные объемным и поверхностным силам. Рассмотрим такой конечный элемент, часть поверхности которого совпадает с внешней поверхностью, ограничивающей тело.

Придадим узловым перемещениям конечного элемента  $\{v^e\}$  возможные бесконечно малые приращения  $\{\delta v^e\}$ . Как известно, приращения перемещений  $\{\delta u\}$  точек внутри конечного элемента определяются при этом формулой  $\{\delta u\} = \{\alpha\} \{\delta v^e\}$ . Вычислим работу  $\delta \bar{A}^e$  объемных сил  $\{R\}$ , действующих на некоторой поверхности  $\tau^e$ , а также поверхностных сил  $\{p\}$ , действующих на некоторой поверхности  $\omega^e$ , на перемещениях  $\{\delta u\}$ . Поскольку матрицы  $\{R\}$ ,  $\{p\}$  и  $\{\delta u\}$  — матрицы-столбцы, для их перемножения необходимо транспонировать матрицу  $\{\delta u\}$  и проинтегрировать<sup>1</sup> полученные значения на поверхности  $\tau^e$  и по объему  $\omega^e$ :

$$\delta \bar{A}^e = \int_{\tau^e} \{\delta u\}^T \{R\} d\tau + \int_{\omega^e} \{\delta u\}^T \{p\} d\omega. \quad (a)$$

Внося в зависимость (a) значение  $\{\delta u\} = \{\alpha\} \{\delta v^e\}$ , получим:

$$\delta \bar{A}^e = \{\delta v^e\}^T \left( \int_{\tau^e} \{\alpha\}^T \{R\} d\tau + \int_{\omega^e} \{\alpha\}^T \{p\} d\omega \right). \quad (б)$$

<sup>1</sup> Интегрировать здесь необходимо потому, что в общем случае  $\{R\}$ ,  $\{p\}$  и  $\{\delta u\}$  могут изменяться внутри элемента.

Поскольку узловые силы  $\{\bar{P}^e\}$  должны быть эквивалентны объемным и поверхностным силам, их работа на узловых перемещениях:

$$\delta \tilde{A}^e = \{\delta v^e\}^T \{\tilde{P}^e\} \quad (e)$$

должна быть равна действительной работе объемных и поверхностных сил на соответствующих перемещениях или равна (б):

$$\{\delta v^e\}^T \{\tilde{P}^e\} = \{\delta v^e\}^T \left( \int_{\tau^e} \{\alpha\}^T \{R\} d\tau + \int_{\omega^e} \{\alpha\}^T \{p\} d\omega \right).$$

Это приводит к равенству:

$$\{\tilde{P}^e\} = \int_{\tau^e} \{\alpha\}^T \{R\} d\tau + \int_{\omega^e} \{\alpha\}^T \{p\} d\omega. \quad (10.45)$$

Учитывая, что матрица  $\{v^e\}$  — квазиматрица или имеет блочную структуру  $\{v^e\} = |\{v_i\} \{v_j\} \dots|$  (каждый компонент такой матрицы определяет перемещения по трем направлениям  $x, y, z$ ), в соотношении  $\{u\} = \{\alpha\} \{v^e\}$  матрица  $\{\alpha\}^1$  также может быть представлена в блочном виде (в зависимости от числа узлов)  $\{\alpha\} = |\{\alpha_i\} \{\alpha_j\} \dots|$ . Тогда узловые силы  $\{\bar{P}^e\}$  также можно представить в блочном виде:

$$\{\tilde{P}^e\} = |\{\tilde{P}_i^e\} \{\tilde{P}_j^e\} \dots|,$$

где

$$\{\tilde{P}_r^e\} = \int_{\tau^e} \{\alpha_r\}^T \{R\} d\tau + \int_{\omega^e} \{\alpha_r\}^T \{p\} d\omega \quad (r = i, j, \dots). \quad (10.46)$$

Формула (10.46) определяет вклад, который вносит каждый конечный элемент в эквивалентные силы в узле  $r$ . Аналогично приводятся к узловым силам нагрузки, приложенные к другим конечным элементам (с учетом их расположения — внутри или на поверхности упругого тела). Суммируя вклады отдельных элементов, найдем для каждого узла  $r$  матрицу

$$\{\tilde{P}_r\} = \sum_r \{\tilde{P}_r^e\}. \quad (10.47)$$

Здесь знак  $\sum_r$  означает суммирование по всем элементам, сходящимся в узле  $r$ .

<sup>1</sup> Заметим, что вид матрицы  $\{\alpha\}$  нами пока не определен.

Заметим, что в случае равномерно распределенных объемных и поверхностных сил внеузловая нагрузка может учитываться довольно просто введением матрицы уравнивающих сил — матрицы, которая содержит реакции на элемент от действия внеузловой нагрузки при полном закреплении узлов. Так, например, для треугольного плоского элемента толщиной  $h$  от объемных сил в каждом из трех узлов по соответствующему направлению прикладывается сила

$$\tilde{R}^e = \frac{1}{3} F^e h \rho,$$

где  $F^e$  — площадь конечного элемента;  $\rho$  — его плотность.

Для такого же элемента, у которого на некоторой грани  $i-j$  действует равномерно распределенная нагрузка  $q$ , внеузловые силы в узлах  $i$  и  $j$  будут равны  $\frac{ql}{2}$ , где  $l$  — расстояние между узлами  $i$  и  $j$ . Если в узле сходится несколько элементов, то узловые силы от каждого из них суммируются.

### 10.2.7. Определение узловых перемещений

После выполнения дискретизации упругого тела можно теперь составить уравнения равновесия узлов и прийти к системе уравнений относительно перемещений  $v = |v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n|$ , где  $n$  — общее число узлов при принятой схеме дискретизации. Если в узлах тела приложены сосредоточенные силы, то из них можно образовать матрицу  $P = |P_1 \ P_2 \ \dots \ P_n|$ . Типовой элемент  $\{P_r\}$  этой матрицы представляет собой подматрицу сил, действующих в узле  $r$  в направлении перемещений  $v_r$ .

Узловые силы, эквивалентные внеузловой нагрузке, также объединим в матрицу  $\tilde{P} = |\tilde{P}_1 \ \tilde{P}_2 \ \dots \ \tilde{P}_n|$ . Отметим, что  $\{P_j\}$  может также являться матрицей, если узловые силы раскладываются на направление координатных осей.

Уравнение равновесия для каждого узла составляются теперь согласно соотношению (10.48). Объединяя все эти уравнения, получим зависимость между внешними узловыми силами и узловыми перемещениями в виде:

$$\{K\} \{v\} = \{P\} + \{\tilde{P}\}. \quad (10.48)$$

Здесь  $\{K\}$  — матрица жесткости всего тела, которая может быть представлена в форме

$$K = \begin{Bmatrix} \{k_{11}\} & \{k_{12}\} & \dots & \{k_{1n}\} \\ \{k_{21}\} & \{k_{22}\} & \dots & \{k_{2n}\} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \{k_{n1}\} & \{k_{n2}\} & \dots & \{k_{nn}\} \end{Bmatrix}. \quad (10.49)$$

Типовая подматрица  $\{k_{rs}\} = \sum_e k_{rs}^e$  получается, как и прежде, суммированием подматриц  $\{k_{rs}^e\}$  по всем конечным элементам, содержащим одновременно узлы  $r$  и  $s$ .

Составление матрицы жесткости упругого тела поясним на простейшем примере. Пусть плоская область (рис. 100) разделена нами на четыре конечных элемента  $a, b, c, d$ . Номера узлов обозначены цифрами (1, 2, 3, 4, 5).

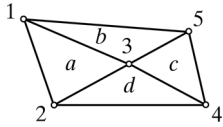


Рис. 100. Плоское тело, состоящее из четырех конечных элементов

В соответствии с п. 10.6 запишем матрицы жесткости отдельных конечных элементов из выделенной группы в блочном виде. Напомним, что  $\{k_{ij}\}$  представляет собой силу, возникающую в узловой точке  $i$ , когда перемещение  $v_j$  равно единице, а остальные — нулю. Поэтому для плоской задачи подматрица  $\{k_{ij}\}$  имеет порядок  $2 \times 2$ , для трехмерной —  $3 \times 3$ . В общем виде имеем:

$$\{k^a\} = \begin{Bmatrix} \{k_{11}^a\} & \{k_{12}^a\} & \{k_{13}^a\} \\ \{k_{21}^a\} & \{k_{22}^a\} & \{k_{23}^a\} \\ \{k_{31}^a\} & \{k_{32}^a\} & \{k_{33}^a\} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}; \quad \{k^b\} = \begin{Bmatrix} \{k_{11}^b\} & \{k_{13}^b\} & \{k_{15}^b\} \\ \{k_{31}^b\} & \{k_{33}^b\} & \{k_{35}^b\} \\ \{k_{51}^b\} & \{k_{53}^b\} & \{k_{55}^b\} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 1 \\ 3 \\ 5 \end{matrix};$$

$$\{k^c\} = \begin{Bmatrix} \{k_{33}^c\} & \{k_{34}^c\} & \{k_{35}^c\} \\ \{k_{43}^c\} & \{k_{44}^c\} & \{k_{45}^c\} \\ \{k_{53}^c\} & \{k_{54}^c\} & \{k_{55}^c\} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}; \quad \{k^d\} = \begin{Bmatrix} \{k_{22}^d\} & \{k_{24}^d\} & \{k_{23}^d\} \\ \{k_{42}^d\} & \{k_{44}^d\} & \{k_{43}^d\} \\ \{k_{32}^d\} & \{k_{34}^d\} & \{k_{33}^d\} \end{Bmatrix} \begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 3 \end{matrix}.$$

В написанных матрицах цифры сбоку и снизу определяют номера узлов каждого элемента, если обход проводится против хода часовой

стрелки, начиная с наименьшего номера. В общем случае обход проводится, как уславливаются заранее.

Матрица (квазиматрица) жесткости всего тела (см. рис. 100) в соответствии с общим числом узлов имеет в блочной записи порядок  $5 \times 5$ . Суммируя подматрицы отдельных конечных элементов, имеющих одинаковые индексы, получим:

$$K = \begin{Bmatrix} Xk_{11}^a + \{k_{11}^b\} & \{k_{12}^a\} & \{k_{13}^a\} + \{k_{13}^b\} & 0 & \{k_{15}^b\} \\ \{k_{21}^a\} & \{k_{22}^a\} + \{k_{22}^d\} & \{k_{23}^a\} + \{k_{23}^d\} & \{k_{24}^d\} & 0 \\ \{k_{31}^a\} + \{k_{31}^b\} & \{k_{32}^a\} + \{k_{32}^d\} & \{k_{33}^a\} + \{k_{33}^b\} + \{k_{33}^d\} & \{k_{34}^a\} + \{k_{34}^d\} & \{k_{35}^b\} + \{k_{35}^d\} \\ 0 & \{k_{42}^d\} & \{k_{43}^a\} + \{k_{43}^d\} & \{k_{44}^a\} + \{k_{44}^d\} & \{k_{45}^d\} \\ \{k_{51}^b\} & 0 & \{k_{53}^b\} + \{k_{53}^d\} & \{k_{54}^d\} & \{k_{55}^b\} + \{k_{55}^d\} \end{Bmatrix}$$

Дадим некоторые пояснения к формированию приведенной выше матрицы жесткости системы (см. рис. 100). Узел 3 является общим для всех четырех конечных элементов. Поэтому подматрица  $\{k_{33}\}$  будет суммой соответствующих подматриц всех четырех элементов. Узел 1 принадлежит элементам  $a$  и  $b$ , вследствие чего  $\{k_{11}\} = \{k_{11}^a\} + \{k_{11}^b\}$ . Узел 2 принадлежит элементам  $a$  и  $d$ , вследствие чего  $\{k_{22}\} = \{k_{22}^a\} + \{k_{22}^d\}$  и т. д. Наконец, такие узлы, как 1 и 4, 2 и 5, непосредственно не связаны между собой ни одним из элементов, поэтому  $\{k_{14}\} = 0$ ;  $\{k_{25}\} = 0$ .

В уравнении (10.48) матрицу узловых перемещений  $\{v\}$  разделим на две подматрицы:

$$\{v\} = \begin{Bmatrix} \{v_\alpha\} \\ \{v_\beta\} \end{Bmatrix}.$$

В подматрицу  $\{v_\beta\}$  включаются известные из граничных условий перемещения; все неизвестные перемещения составляют подматрицу  $\{v_\alpha\}$ . Аналогично представляются и матрицы сил:

$$\|P\| = \begin{Bmatrix} \{P_\alpha\} \\ \{P_\beta\} \end{Bmatrix}; \quad \|\tilde{P}\| = \begin{Bmatrix} \{\tilde{P}_\alpha\} \\ \{\tilde{P}_\beta\} \end{Bmatrix}.$$

Если заданные перемещения  $\{v_\beta\} = 0$ , то приходим к уравнению

$$\{k_{\alpha\alpha}\} \{v_\alpha\} = \{P_\alpha\} + \{\tilde{P}_\alpha\}, \quad (10.50)$$

решение которого дает матрицу неизвестных узловых перемещений.

Матрица  $\{k_{\alpha\alpha}\}$  получается из матрицы жесткости  $\{K\}$  вычеркиванием строк и столбцов, соответствующих известным перемещениям. После определения узловых перемещений

$$\{v_{\alpha}\} = \{k_{\alpha\alpha}\}^{-1} [\{P_{\alpha}\} + \{\tilde{P}_{\alpha}\}]$$

по формулам (10.25) и (10.29) можно вычислить деформации и напряжения в каждом конечном элементе.

### 10.3. Конечные элементы сплошной среды

#### 10.3.1. Плоский треугольный элемент

В п. 10.2.2 показаны некоторые из конечных элементов для решения плоской задачи теории упругости, а также для расчета трехмерных тел. Основное различие между ними заключается в характере аппроксимации перемещений, а также в способе описания геометрии. Естественно, что наилучшим способом считается выбор таких аппроксимирующих функций, в которых описание геометрии и деформации производится в помощью одних и тех же соотношений. Это позволяет построить одно-, дву- и трехмерные конечные элементы произвольной конфигурации, обеспечивающие совместность конечно-элементной модели.

Рассмотрим простейший конечный элемент, применяемый для решения плоской задачи теории упругости, — треугольный с тремя узлами, расположенными в вершинах треугольника (рис. 101). Матрицы перемещений для каждого узла состоят из двух компонент<sup>1</sup>. Так, для узла  $i$  имеем:

$$\{v_i\} = \begin{Bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \end{Bmatrix}.$$

При составлении матрицы  $\{v^e\}$  условимся обходить узлы против часовой стрелки. Тогда  $\{v^e\} = \{\{v_i\} \{v_j\} \{v_m\}\}$ .

<sup>1</sup> Мы не рассматриваем характеристики каждого конечного элемента в местной системе координат, а также матрицу преобразования координат для перехода к общей системе [16], поскольку в современных вычислительных комплексах это делается автоматически. В переводной литературе местную систему координат называют локальной, а общую — глобальной.

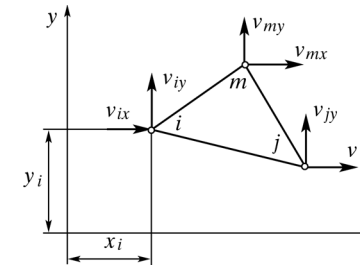


Рис. 101. Треугольный конечный элемент в общей системе координат

Точки конечного элемента получают перемещения  $u_x$ ,  $u_y$  в направлении осей  $x$ ,  $y$ . Поэтому матрица  $\{u\}$  имеет вид

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}.$$

Для получения матрицы  $\{\alpha\}$ , связывающей  $\{u\}$  и  $\{v^e\}$ , предположим, что перемещения  $u_x$  и  $u_y$  в пределах конечного элемента аппроксимируются простейшим законом:

$$u_x = f_1 + f_2x + f_3y; \quad u_y = f_4 + f_5x + f_6y, \quad (10.51)$$

где  $f_r$  — некоторые постоянные ( $r = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ).

В вершинах треугольника перемещения  $u_x$  и  $u_y$  должны совпадать с узловыми перемещениями. Это дает шесть уравнений для определения постоянных  $f_r$  ( $r = 1..6$ ):

$$\left. \begin{aligned} f_1 + f_2x_i + f_3y_i &= v_{ix}; \\ f_1 + f_2x_j + f_3y_j &= v_{jx}; \\ f_1 + f_2x_m + f_3y_m &= v_{mx}; \end{aligned} \right\} (a) \quad \left. \begin{aligned} f_4 + f_5x_i + f_6y_i &= v_{iy}; \\ f_4 + f_5x_j + f_6y_j &= v_{jy}; \\ f_4 + f_5x_m + f_6y_m &= v_{my}. \end{aligned} \right\} (б)$$

Решая первую группу уравнений (а), приходим к следующим соотношениям:

$$\begin{aligned} f_1 &= \frac{1}{2F^e} (c_i v_{ix} + c_j v_{jx} + c_m v_{mx}); \\ f_2 &= \frac{1}{2F^e} (b_i v_{ix} + b_j v_{jx} + b_m v_{mx}); \\ f_3 &= \frac{1}{2F^e} (a_i v_{ix} + a_j v_{jx} + a_m v_{mx}), \end{aligned} \quad (10.52)$$



где

$$\begin{aligned} a_i &= x_m - x_j; & a_j &= x_i - x_m; & a_m &= x_j - x_i; \\ b_i &= y_j - y_m; & b_j &= y_m - y_i; & b_m &= y_i - y_j; \\ c_i &= x_j y_m - x_m y_j; & c_j &= x_m y_i - x_i y_m; & c_m &= x_i y_j - x_j y_i. \end{aligned} \quad (10.53)$$

Выражения для  $f_4, f_5$  и  $f_6$  имеют вид:

$$\begin{aligned} f_4 &= \frac{1}{2F^e} (c_i v_{iy} + c_j v_{jy} + c_m v_{my}); \\ f_5 &= \frac{1}{2F^e} (b_i v_{iy} + b_j v_{jy} + b_m v_{my}); \\ f_6 &= \frac{1}{2F^e} (a_i v_{iy} + a_j v_{jy} + a_m v_{my}). \end{aligned} \quad (10.54)$$

В выражении (10.52) и (10.54) величина  $F^e$  — площадь треугольника  $ijm$  (см. рис. 92) и может быть вычислена через координаты узлов  $x_r$  и  $y_r$  ( $r = i, j, m$ ) с помощью определителя:

$$2F^e = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_m & y_m \end{vmatrix}. \quad (10.55)$$

Если раскрыть определитель (10.55), то с учетом (10.53) получим:

$$2F^e = c_i + c_j + c_m. \quad (10.56)$$

Подставляя (10.52) в формулы (10.51), получим:

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1}{2F^e} [(c_i + b_i x + a_i y)v_{ix} + (c_j + b_j x + a_j y)v_{jx} + \\ &+ (c_m + b_m x + a_m y)v_{mx}]; \end{aligned} \quad (10.57)$$

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{1}{2F^e} [(c_i + b_i x + a_i y)v_{iy} + (c_j + b_j x + a_j y)v_{jy} + \\ &+ (c_m + b_m x + a_m y)v_{my}]. \end{aligned} \quad (10.58)$$

Формулы (10.57) и (10.58) позволяют найти перемещения  $u_x$  и  $u_y$  в любой точке конечного элемента через его узловые перемещения  $x_r$  и  $y_r$  ( $r = i, j, m$ ).

Представим (10.57) и (10.58) в матричной форме:

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \end{Bmatrix} \{\mathbf{v}^e\},$$

где

$$\begin{aligned} \{\alpha_x\} &= \frac{1}{2F^e} [(c_i + b_i x + a_i y) \quad 0 \quad (c_j + b_j x + a_j y) \quad 0 \mapsto \\ &\mapsto (c_m + b_m x + a_m y) \quad 0]; \end{aligned} \quad (б)$$

$$\begin{aligned} \{\alpha_y\} &= \frac{1}{2F^e} [0 \quad (c_i + b_i x + a_i y) \quad 0 \quad (c_j + b_j x + a_j y) \mapsto \\ &\mapsto 0 \quad (c_m + b_m x + a_m y)]. \end{aligned} \quad (в)$$

Равенства (б) и (в) перепишем в другой форме, поскольку подматрицы  $\{\alpha_x\}$  и  $\{\alpha_y\}$  можно представить в виде блоков, зависящих от координат узловых точек конечного элемента:

$$\{\alpha_x\} = \begin{Bmatrix} \{\alpha_{xi}\} & \{\alpha_{xj}\} & \{\alpha_{xm}\} \end{Bmatrix}; \quad \{\alpha_y\} = \begin{Bmatrix} \{\alpha_{yi}\} & \{\alpha_{yj}\} & \{\alpha_{ym}\} \end{Bmatrix}, \quad (10.59)$$

где

$$\{\alpha_{xr}\} = \begin{Bmatrix} \psi_r & 0 \end{Bmatrix}; \quad \{\alpha_{yr}\} = \begin{Bmatrix} 0 & \psi_r \end{Bmatrix}; \quad (10.60)$$

$$\psi_r = \frac{1}{2F^e} (c_r + b_r x + a_r y) \quad (r = i, j, m). \quad (10.61)$$

Формулы (10.59)–(10.61) определяют искомую матрицу аппроксимирующих функций:

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \{\alpha_x\} \\ \{\alpha_y\} \end{Bmatrix},$$

которую представим в блочном виде зависящих от координат узловых точек

$$\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \{\alpha_i\} & \{\alpha_j\} & \{\alpha_m\} \end{Bmatrix},$$

где

$$\{\alpha_r\} = \begin{Bmatrix} \psi_r & 0 \\ 0 & \psi_r \end{Bmatrix} \quad (r = i, j, m).$$

Далее по (10.30) вычисляем матрицу  $\{\beta\}$ :

$$\{\beta\} = \begin{vmatrix} \partial\{\alpha_x\}/\partial x \\ \partial\{\alpha_y\}/\partial x \\ \partial\{\alpha_y\}/\partial x + \partial\{\alpha_x\}/\partial y \end{vmatrix}.$$

С учетом (10.59)—(10.61) получим:

$$\{\beta\} = |\beta_i \ \beta_j \ \beta_m|,$$

где

$$\{\beta_r\} = \frac{1}{2F^e} \begin{vmatrix} b_r & 0 \\ 0 & a_r \\ a_r & b_r \end{vmatrix} \quad (r = i, j, m). \quad (10.62)$$

В данном случае элементы матрицы  $\{\beta\}$  не зависят от координат. Это означает, что деформации (следовательно, и напряжения) в пределах рассматриваемого конечного элемента постоянны, а при переходе от одного элемента к другому они изменяются скачком.

Теперь найдем матрицу жесткости элемента, пользуясь формулой

$$\{k^e\} = \int_{\tau^e} \{\beta\}^T \{\kappa\} \{\beta\} d\tau.$$

Поскольку матрица  $\{\beta\}$  представлена в стандартной блочной форме, в соответствии с (10.37), (10.38) для матрицы жесткости рассматриваемого треугольного элемента получим:

$$\{k^e\} = \begin{vmatrix} \{k_{ii}^e\} & \{k_{ij}^e\} & \{k_{im}^e\} \\ \{k_{ji}^e\} & \{k_{jj}^e\} & \{k_{jm}^e\} \\ \{k_{mi}^e\} & \{k_{mj}^e\} & \{k_{mm}^e\} \end{vmatrix},$$

где типовая подматрица

$$\{k_{rs}^e\} = \int_{\tau^e} \{\beta_r\}^T \{\kappa\} \{\beta_s\} d\tau.$$

Подынтегральное выражение не зависит здесь от координат и может быть вынесено за знак интеграла. В случае обобщенного плоского напряженного состояния рассматриваемый конечный элемент представляет собой пластину. Если его толщина постоянна и равна  $h^e$ , то

объем элемента  $\tau^e$  площадью  $F^e$  равен  $F^e h^e$ . Таким образом, в этом случае

$$\{k_{rs}^e\} = F^e h^e \{\beta_r\}^T \{\kappa\} \{\beta_s\} \quad (r, s = i, j, m). \quad (10.63)$$

Формулой (10.63) можно воспользоваться для вычисления матрицы жесткости конечного элемента гладкой пластины. Элементы типовой подматрицы  $\{k_{rs}^e\}$  представим в аналитической форме. Как известно, для обобщенного плоского напряженного состояния матрица упругости имеет вид

$$\{\kappa\} = \frac{E}{(1-\mu^2)} \begin{vmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{vmatrix}.$$

Подставляя в выражение для  $\{k_{rs}^e\}$  формулы для отдельных подматриц, получаем:

$$\begin{aligned} \{k_{rs}^e\} &= F^e h^e \frac{1}{2F^e} \begin{vmatrix} b_r & 0 & a_r \\ 0 & a_r & b_r \end{vmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} \begin{vmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\mu}{2} \end{vmatrix} \frac{1}{2F^e} \begin{vmatrix} b_s & 0 \\ 0 & a_s \\ a_s & b_s \end{vmatrix} = \\ &= \frac{Eh^e}{4F^e(1-\mu^2)} \begin{vmatrix} b_r b_s + \frac{1-\mu}{2} a_r a_s & \mu b_r a_s + \frac{1-\mu}{2} a_r b_s \\ \mu a_r b_s + \frac{1-\mu}{2} b_r a_s & a_r a_s + \frac{1-\mu}{2} b_r b_s \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (10.64)$$

В работе [12] матрица упругости  $\{\kappa\}$  представлена в виде двух слагаемых:

$$\{\kappa\} = \{\kappa_E\} + \{\kappa_G\},$$

где

$$\{\kappa_E\} = \frac{E}{1-\mu^2} \begin{vmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}; \quad \{\kappa_G\} = G \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}. \quad (10.65)$$

Здесь модуль сдвига  $G$ :

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Тогда

$$\{k_{rs}^e\} = \{k_{rs}^e\}_E + \{k_{rs}^e\}_G, \quad (10.66)$$

где

$$\{k_{rs}^e\}_E = F^e h^e \{\beta_r\}^T \{\kappa_E\} \{\beta_s\}; \quad \{k_{rs}^e\}_G = F^e h^e \{\beta_r\}^T \{\kappa_G\} \{\beta_s\}. \quad (d)$$

Подставляя в (d) формулы для отдельных подматриц, получаем:

$$\{k_{rs}^e\}_E = \frac{Eh^2}{4(1-\mu^2)F^e} \begin{vmatrix} b_r b_s & \mu b_r a_s \\ \mu a_r b_s & a_r a_s \end{vmatrix}; \quad (10.67)$$

$$\{k_{rs}^e\}_G = \frac{Gh^e}{4F^e} \begin{vmatrix} a_r a_s & a_r b_s \\ b_r a_s & b_r b_s \end{vmatrix}. \quad (10.68)$$

Матрицы  $\{k_{rs}^e\}_E$ ,  $\{k_{rs}^e\}_G$  представляют собой вклады, даваемые, соответственно, деформациями от действия нормальных напряжений и деформациями сдвига в матрицу  $\{k_{rs}^e\}$ .

Для того чтобы получить матрицу жесткости для случая плоской деформации, следует принять  $h^e = 1$  и заменить в (10.64) и (10.67) модуль упругости  $E$  на  $E/(1-\mu^2)$ , а коэффициент Пуассона  $\mu$  — на  $\mu/(1-\mu)$ .

Перемещения  $u_x$  и  $u_y$ , определяемые выражением (10.31), изменяются по линейному закону вдоль любой прямой в плоскости  $xu$ , в том числе по сторонам треугольника. Линейная функция полностью определяется какими-либо двумя ее параметрами. Значит, перемещения  $u_x$  и  $u_y$  на каждой стороне треугольника будут однозначно определены, если известны их значения в узлах, лежащих на соответствующей стороне. Так как узловые перемещения являются общими для соседних элементов, при переходе от одного элемента к другому перемещения не будут иметь разрыва. Следовательно, треугольные элементы с линейным полем перемещений относятся к категории совместных.

Недостатком рассмотренного элемента считается то, что напряжения в пределах треугольника постоянны, и поэтому для получения достаточной точности решения часто приходится использовать весьма густую сетку (особенно в областях с быстро меняющимся напряженным состоянием). Это может привести к системе уравнений слишком высокого порядка и, соответственно, к чрезмерным затратам времени на решение задачи. Тем не менее этот элемент широко используется, поскольку он очень прост и позволяет составлять конечно-элементные модели для плоских тел довольно сложной конфигурации (например, шатуна поршневого двигателя [18]).

### 10.3.2. Совместный прямоугольный элемент

Рассмотрим прямоугольный четырехузловой плоский элемент (рис. 102). Матрица узловых перемещений такого элемента может быть записана в виде:

$$\{v^e\} = \{v_i\} \quad \{v_j\} \quad \{v_l\} \quad \{v_m\},$$

где

$$\{v_r\} = \begin{vmatrix} v_{rx} \\ v_{ry} \end{vmatrix} \quad (r = i, j, l, m).$$

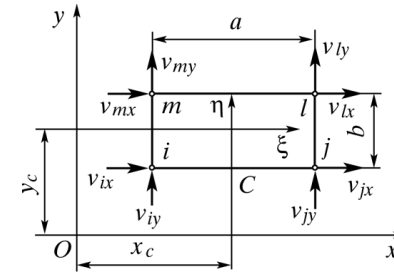


Рис. 102. Прямоугольный четырехузловой плоский элемент

Для приближенного представления поля перемещений конечного элемента возьмем функции

$$u_x = f_1 + f_2 x + f_3 y + f_4 xy; \quad u_y = f_5 + f_6 x + f_7 y + f_8 xy, \quad (10.69)$$

в которых содержится восемь постоянных. Для их определения можно так же, как и в случае треугольного элемента, записать в каждом узле условия равенства перемещений перемещения  $u_x$  и  $u_y$  их узловым значениям. Тогда снова появятся две группы уравнений относительно неизвестных  $f_1, f_2, f_3, f_4$  через перемещения  $v_{rx}$  ( $r = i, j, l, m$ ), а  $f_5, f_6, f_7, f_8$  — через  $v_{ry}$ . В этом случае матрица аппроксимирующей функции  $\{\alpha\} = \{\alpha_i\} \quad \{\alpha_j\} \quad \{\alpha_l\} \quad \{\alpha_m\}$  будет иметь такие же блоки, как и в случае треугольного элемента:

$$\{\alpha_r\} = \begin{vmatrix} \psi_r & 0 \\ 0 & \psi_r \end{vmatrix}, \quad (10.70)$$

где через  $\psi_r$  обозначены некоторые функции координат.

В работе [12] показано, что, используя (10.70),  $\psi_r$  можно найти путем подбора. Для этого запишем зависимость  $\{u\} = \{\alpha\} \{v^e\}$  в развернутом виде

$$\begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_l & 0 & \psi_m & 0 \\ 0 & \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_l & 0 & \psi_m \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} v_{ix} \\ v_{iy} \\ v_{jx} \\ v_{jy} \\ v_{lx} \\ v_{ly} \\ v_{mx} \\ v_{my} \end{Bmatrix}. \quad (10.71)$$

Из полученного матричного соотношения после перемножения получим следующее выражение для  $u_x$ :

$$u_x = \psi_i v_{ix} + \psi_j v_{jx} + \psi_l v_{lx} + \psi_m v_{mx}. \quad (a)$$

Представим, что  $v_{ix} = 1$ , а перемещения остальных узлов равны нулю. Тогда из (a) получим, что  $u_x = \psi_i$ . Следовательно,  $\psi_i$  — функция координат  $x$  и  $y$ , которая дает распределение перемещений в конечном элементе при единичном смещении узла  $i$  и при неподвижных остальных узлах. Обобщая эти рассуждения, можно сказать, что каждая из функций  $\psi_r$  дает распределение перемещений в конечном элементе (рис. 103) при единичном смещении узла  $r$  и при неподвижных остальных узлах.

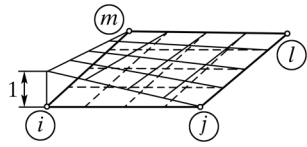


Рис. 103. Схема деформации конечного элемента

Чтобы записать функции  $\psi_r$ , перейдем к системе безразмерных координат  $\xi$  и  $\eta$ , начало которой находится в центре масс (точка C) прямоугольника (см. рис. 103). Примем

$$\begin{aligned} \xi &= 2(x - x_c)/a; \\ \eta &= 2(y - y_c)/b, \end{aligned} \quad (б)$$

где  $a$  и  $b$  — размеры сторон прямоугольника;  $x_c$  и  $y_c$  — координаты его центра масс.

Тогда новые координаты  $\xi$  и  $\eta$  будут принимать на сторонах прямоугольного конечного элемента значения  $\pm 1$ . Так, например, для узла  $i$  можем записать

$$\begin{aligned} x_c &= x_i + a/2; \quad y_c = y_i + b/2; \quad \xi_i = \frac{2[x_i - (x_i + a/2)]}{a} = -1; \\ \eta_i &= \frac{2[y_i - (y_i + b/2)]}{b} = -1. \end{aligned}$$

Таким образом, в новой системе  $\xi\eta$  узловые точки имеют координаты:  $\xi_i = -1$ ;  $\eta_i = -1$ ;  $\xi_j = 1$ ;  $\eta_j = -1$ ;  $\xi_l = 1$ ;  $\eta_l = 1$ ;  $\xi_m = -1$ ;  $\eta_m = 1$ .

Учитывая, что перемещения согласно (10.69) должны изменяться по линейному закону вдоль прямых  $x = \text{const}$  или  $y = \text{const}$ , можно функции  $\psi_r$  искать в виде произведений  $(1 \pm \xi)(1 \pm \eta)$ . Условия в узлах будут удовлетворены, если в каждой узловой точке принять значения  $\psi_r$  ( $r = i, j, l, m$ ):

$$\begin{aligned} \psi_i &= (1 - \xi)(1 - \eta)/4; & \psi_j &= (1 + \xi)(1 - \eta)/4; \\ \psi_l &= (1 + \xi)(1 + \eta)/4; & \psi_m &= (1 - \xi)(1 + \eta)/4. \end{aligned} \quad (в)$$

Действительно, если, например, в первое соотношение из (в) подставить значения  $\xi_i = -1$  и  $\eta_i = -1$ , то получим из (a)  $u_x = v_{ix}$  и т. д.

Поэтому все эти функции можно записать с помощью одного выражения (с учетом того, что  $\xi_r$  и  $\eta_r$  в каждом узле принимают значения  $\pm 1$ ):

$$\psi_r = (1 + \xi_r \xi)(1 + \eta_r \eta)/4 \quad (r = i, j, l, m). \quad (10.72)$$

Вычислим далее матрицу  $\{\beta\} = \{\beta_i\} \{\beta_j\} \{\beta_l\} \{\beta_m\}$ . По формуле (10.30) имеем:

$$\{\beta\} = \begin{Bmatrix} \{\partial \alpha_x\}/\partial x \\ \{\partial \alpha_y\}/\partial y \\ \{\partial \alpha_x\}/\partial x + \{\partial \alpha_y\}/\partial y \end{Bmatrix},$$

где  $\{\alpha_x\}$  и  $\{\alpha_y\}$  — соответственно, первая и вторая строки матрицы  $\{\alpha\}$ .

Из соотношения (б) получим  $dx = (a/2)d\xi$ ;  $dy = (b/2)d\eta$ . Учитывая блочную структуру матрицы  $\{\alpha\}$  (см. формулу (10.48)), для типовой подматрицы  $\{\beta_r\}$  получим:

$$\{\beta_r\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \psi_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial \psi_r}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial y} & \frac{\partial \psi_r}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{2}{a} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} & 0 \\ 0 & \frac{2}{b} \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} \\ \frac{2}{b} \frac{\partial \psi_r}{\partial \eta} & \frac{2}{a} \frac{\partial \psi_r}{\partial \xi} \end{Bmatrix}. \quad (г)$$

Подставляя в (z) значения  $\psi_r$  из (49), получим:

$$\{\beta_r\} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \xi_r(1 + \eta_r \eta) / a & 0 \\ 0 & \eta_r(1 + \xi_r \xi) / b \\ \eta_r(1 + \xi_r \xi) / b & \xi_r(1 + \eta_r \eta) / a \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_r(\eta) & 0 \\ 0 & a_r(\xi) \\ a_r(\xi) & b_r(\eta) \end{vmatrix}, \quad (10.73)$$

где

$$a_r(\xi) = \eta_r(1 + \xi_r \xi) / b; \quad b_r(\eta) = \xi_r(1 + \eta_r \eta) / a. \quad (10.74)$$

Тогда матрица жесткости рассматриваемого конечного элемента для случая обобщенного плоского напряженного состояния:

$$\{k^e\} = \begin{vmatrix} \{k_{ii}^e\} & \{k_{ij}^e\} & \{k_{il}^e\} & \{k_{im}^e\} \\ \{k_{ji}^e\} & \{k_{jj}^e\} & \{k_{jl}^e\} & \{k_{jm}^e\} \\ \{k_{li}^e\} & \{k_{lj}^e\} & \{k_{ll}^e\} & \{k_{lm}^e\} \\ \{k_{mi}^e\} & \{k_{mj}^e\} & \{k_{ml}^e\} & \{k_{mv}^e\} \end{vmatrix},$$

где

$$\{k_{rs}^e\} = \int_{\tau^e} \{\beta_r\}^T \{\kappa\} \{\beta_s\} d\tau = \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\beta_r\}^T \{\kappa\} \{\beta_s\} d\xi d\eta. \quad (10.75)$$

Также как и в случае треугольного элемента, удобно разбить подматрицу  $\{k_{rs}^e\} = \{k_{rs}^e\}_E + \{k_{rs}^e\}_G$ .

Здесь

$$\{k_{rs}^e\}_E = \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\beta_r\}^T \{\kappa_E\} \{\beta_s\} d\xi d\eta;$$

$$\{k_{rs}^e\}_G = \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\beta_r\}^T \{\kappa_G\} \{\beta_s\} d\xi d\eta,$$

где матрицы упругих коэффициентов  $\{\kappa_E\}$  и  $\{\kappa_G\}$  определены равенствами (10.65). Подстановка выражений для  $\{\kappa_E\}$ ,  $\{\beta_r\}$  и  $\{\beta_s\}$  в формулу для  $\{k_{rs}^e\}_E$  дает:

$$\{k_{rs}^e\}_E = \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_r & 0 & a_r \\ 0 & a_r & b_r \end{vmatrix} \frac{E}{1-\mu^2} \begin{vmatrix} 1 & \mu & 0 \\ \mu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \times \\ \times \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_s & 0 \\ 0 & a_s \\ a_s & b_s \end{vmatrix} d\xi d\eta = \frac{Ehab}{16(1-\mu^2)} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{vmatrix} b_r b_s & \mu b_r a_s \\ \mu a_r b_s & a_r a_s \end{vmatrix} d\xi d\eta.$$

Вычислим необходимые интегралы, учитывая (10.74):

$$\int_{-1}^1 a_r(\xi) d\xi = \frac{\eta_r}{b} \int_{-1}^1 (1 + \xi_r \xi) d\xi = \frac{2\eta_r}{b};$$

$$\int_{-1}^1 a_r(\xi) a_s(\xi) d\xi = \frac{\eta_r \eta_s}{b^2} \int_{-1}^1 (1 + \xi_r \xi)(1 + \xi_s \xi) d\xi = \\ = \frac{\eta_r \eta_s}{b^2} \left( 1 + \frac{\xi_r \xi_s}{3} \right).$$

Аналогично вычисляются интегралы по  $\eta$  от  $b_r(\eta)$  и от произведения  $b_r(\eta) b_s(\eta)$ :

$$\int_{-1}^1 b_r(\eta) d\eta = \frac{\xi_r}{a} \int_{-1}^1 (1 + \eta_r \eta) d\eta = \frac{2\xi_r}{a};$$

$$\int_{-1}^1 b_r(\eta) b_s(\eta) d\eta = \frac{\xi_r \xi_s}{a^2} \int_{-1}^1 (1 + \eta_r \eta)(1 + \eta_s \eta) d\eta = \\ = \frac{\xi_r \xi_s}{a^2} \left( 1 + \frac{\eta_r \eta_s}{3} \right).$$

В итоге для  $\{k_{rs}^e\}_E$  имеем:

$$\{k_{rs}^e\}_E = \frac{Eh}{4(1-\mu^2)} \begin{vmatrix} c\xi_r \xi_s (1 + \eta_r \eta_s / 3) & \mu \xi_r \eta_s \\ \mu \eta_r \xi_s & (1/c)\eta_r \eta_s (1 + \xi_r \xi_s / 3) \end{vmatrix}, \quad (10.76)$$

где  $c = b/a$  — отношение сторон элемента.

Подобным же образом находим:

$$\{k_{rs}^e\}_G = \frac{abh}{4} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_r & 0 & a_r \\ 0 & a_r & b_r \end{vmatrix} G \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \times \\ \times \frac{1}{2} \begin{vmatrix} b_s & 0 \\ 0 & a_s \\ a_s & b_s \end{vmatrix} d\xi d\eta = \frac{Ghab}{16} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \begin{vmatrix} a_r a_s & a_r b_s \\ b_r a_s & b_r b_s \end{vmatrix} d\xi d\eta,$$

откуда

$$\{k_{rs}^e\}_G = \frac{Gh}{4} \begin{vmatrix} (1/c)\eta_r \eta_s (1 + \xi_r \xi_s / 3) & \eta_r \xi_s \\ \xi_r \eta_s & c\xi_r \xi_s (1 + \eta_r \eta_s / 3) \end{vmatrix}. \quad (10.77)$$

В рассмотренном прямоугольнике перемещения  $u_x$  и  $u_y$ , определяемые формулой (10.69), изменяются по линейному закону вдоль прямых  $x = \text{const}$  или  $y = \text{const}$  и, в частности, вдоль его сторон. Рассуждая так же, как и в случае треугольных элементов, заключаем отсюда, что введенные выше прямоугольные конечные элементы являются совместными.

Заметим, что они совместны также с треугольными элементами, так как перемещения вдоль сторон изменяются по линейному закону.

Треугольные и прямоугольные конечные элементы одни из простейших. Однако прямоугольный конечный элемент при одинаковом числе узлов (т. е. при одинаковом порядке полученных уравнений) дает более точное решение, чем при идеализации тела прямоугольными элементами. Однако с помощью одних только прямоугольников можно идеализировать лишь такие области, которые ограничены прямыми линиями, параллельными осям  $x$  и  $y$ . Для более сложных областей можно использовать прямоугольные элементы в сочетании с треугольными, но это усложняет подготовку исходных данных. Поэтому для расчета тел произвольной формы обычно применяют конечные элементы в виде четырехугольников произвольной формы.

В работе [13] показано, что прямоугольный конечный элемент дает заниженное значение при определении углов поворота, т. е. является слишком жестким.

Источником чрезмерной жесткости конечного элемента при изгибе является появление деформаций сдвига  $\gamma_{xy}$ , которые в точном решении равны нулю. Для удовлетворительного решения необходимо увеличить количество конечных элементов или использовать так называемый несовместный элемент [13]. При составлении конечно-элементной модели сложной формы часто приходится использовать разнообразные конечные элементы [19–22], поскольку аппроксимировать детали сложной формы простейшими элементами часто не удастся. Достаточно подробно об этом можно прочитать в книге [16].

### 10.3.3. Четырехузловой изопараметрический элемент

Часто приходится рассматривать четырехугольный конечный элемент произвольной формы (рис. 104). Построим систему аппроксимирующих функций, обеспечивающих совместность элементов. Как было показано ранее, для этого необходимо, чтобы вдоль каждой стороны элемента перемещения  $u_x$  и  $u_y$  изменялись по линейному закону.

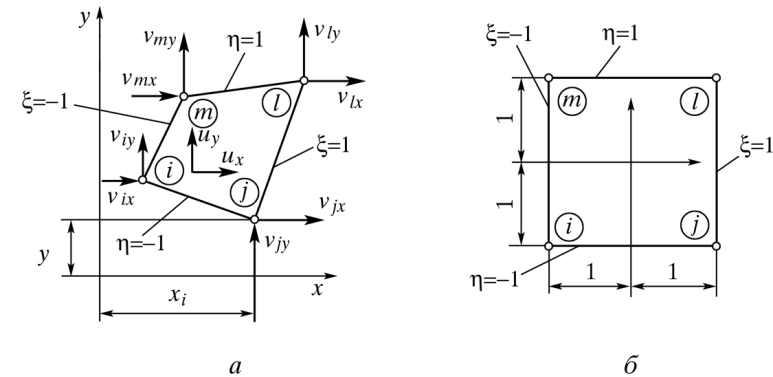


Рис. 104. Четырехузловой изопараметрический элемент: а — произвольной формы; б — квадрат со стороной, равной 2

Введем вспомогательный квадрат со стороной, равной двум, и отнесем его к системе безразмерных координат  $\xi$  и  $\eta$ , начало которой помещается в середине квадрата (см. рис. 104, б). На сторонах квадрата переменные  $\xi$  и  $\eta$  принимают значения  $\pm 1$ . Пусть требуется аппроксимировать в пределах какую-либо функцию  $\Phi(\xi, \eta)$ , для которой известны ее значения  $\Phi_i, \Phi_j, \Phi_l, \Phi_m$  в угловых точках. Для квадратного конечного элемента (см. рис. 104, б) такую аппроксимацию мы уже проводили с помощью функций (10.72):

$$\psi_r = (1 + \xi_r \xi)(1 + \eta_r \eta)/4 \quad (r = i, j, l, m),$$

которые уже использовались ранее для аппроксимации перемещений в плоском треугольном конечном элементе. Функция  $\psi_r$ , определяемая таким образом, принимает единичное значение в узле  $r$  и обращается в нуль во всех остальных узлах, изменяясь вдоль сторон квадрата по линейному закону. Функции  $\psi_r$  называют иногда функциями формы [23].



Выражение

$$\begin{aligned} \Phi(\xi, \eta) = & \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\Phi_i + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)\Phi_j + \\ & + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\Phi_l + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\Phi_m \end{aligned} \quad (10.78)$$

дает такую аппроксимацию функции  $\Phi$ , которая удовлетворяет граничным условиям в узловых точках. При этом  $\Phi(\xi, \eta)$  изменяется по линейному закону вдоль прямых  $\xi = \text{const}$  или  $\eta = \text{const}$ , в том числе вдоль сторон квадрата.

Подставим теперь в соответствие каждой точке квадрата некоторую точку исходного четырехугольника, полагая  $x = x(\xi, \eta)$  и  $y = y(\xi, \eta)$ . В вершинах четырехугольника функции  $x(\xi, \eta)$  и  $y(\xi, \eta)$  должны совпадать с координатами узлов. Используя свойства аппроксимации (10.78), можно сразу записать искомые зависимости:

$$\begin{aligned} x = & \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)x_i + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)x_j + \\ & + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)x_l + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)x_m; \\ y = & \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)y_i + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)y_j + \\ & + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)y_l + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)y_m. \end{aligned} \quad (10.79)$$

Примем, например,  $\xi = 1$ . Тогда из (10.79) получим:

$$\begin{aligned} x = & \frac{1}{2}(1-\eta)x_j + \frac{1}{2}(1+\eta)x_l; \\ y = & \frac{1}{2}(1-\eta)y_j + \frac{1}{2}(1+\eta)y_l. \end{aligned} \quad (10.80)$$

Эти соотношения определяют уравнение прямой в плоскости  $x, y$ . При  $\eta = -1$  имеем  $x = x_j, y = y_j$ , а при  $\eta = +1$  получим также  $x = x_l, y = y_l$ . Следовательно, изменяя  $\eta$  от  $-1$  до  $+1$ , получаем координаты узловых точек, которые ограничивают одну из сторон четырехугольника. Рассуждая подобным образом, нетрудно убедиться, что формулы (10.79) действительно дают отображение квадрата на рассматриваемый четырехугольник.

Переходя далее к аппроксимации перемещений  $u_x, u_y$ , выразим их также через переменные  $\xi, \eta$ . Это позволяет получить функции с требуемыми свойствами:

$$\begin{aligned} u_x = & \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)v_{ix} + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)v_{jx} + \\ & + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)v_{lx} + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)v_{mx}; \\ u_y = & \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)v_{iy} + \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)v_{jy} + \\ & + \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)v_{ly} + \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)v_{my}. \end{aligned} \quad (10.81)$$

Рассмотрим, например, характер изменения перемещения  $u_x$  вдоль стороны  $jl$ , полагая снова  $\xi = 1$ . Из (10.81) имеем:

$$u_x = \frac{1}{2}(1-\eta)v_{ix} + \frac{1}{2}(1+\eta)v_{lx}. \quad (10.82)$$

Отсюда видно, что во-первых, при  $\eta = -1$  и  $\eta = 1$  (т. е. в узлах  $j$  и  $l$ ) перемещение  $u_x$  совпадает с  $v_{jx}$  и  $v_{lx}$ . Во-вторых, формулы (10.80) и (10.82) определяют в пространстве  $x, y$  и  $u_x$  прямую, заданную в параметрическом виде:

$$x = a_1 + a_2\eta; \quad y = b_1 + b_2\eta; \quad u_x = c_1 + c_2\eta.$$

Из полученного соотношения следует, что вдоль стороны  $jl$  перемещение  $u_x$  изменяется по линейному закону. Аналогичные рассуждения показывают, что формулы, аналогичные (10.82), обеспечивают аппроксимацию перемещений внутри конечного элемента с линейным законом изменения вдоль всех сторон.

Полагая

$$\{u\} = \begin{Bmatrix} u_x \\ u_y \end{Bmatrix}; \quad \{v^e\} = \begin{Bmatrix} \{v_i\} \\ \{v_j\} \\ \{v_l\} \\ \{v_m\} \end{Bmatrix},$$

где квазиматрица  $\{v_r\} = \begin{Bmatrix} v_{rx} \\ v_{ry} \end{Bmatrix}$  ( $r = i, j, l, m$ ), представим (10.81) в матричном виде:

$$\{u\} = \{\alpha\} \{v^e\}.$$

Здесь  $\{\alpha\} = \begin{Bmatrix} \{\alpha_i\} \\ \{\alpha_j\} \\ \{\alpha_l\} \\ \{\alpha_m\} \end{Bmatrix}$ , а типовая подматрица  $\{\alpha_r\}$  включает функ-

ции (10.72):

$$\{\alpha_r\} = \begin{Bmatrix} \{\alpha_{rx}\} \\ \{\alpha_{ry}\} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \psi_r & 0 \\ 0 & \psi_r \end{Bmatrix}.$$

Матрица  $\{\beta\}$  имеет вид:

$$\{\beta\} = \begin{Bmatrix} \{\beta_i\} \\ \{\beta_j\} \\ \{\beta_l\} \\ \{\beta_m\} \end{Bmatrix}.$$

При этом типовая подматрица  $\{\beta_r\}$  из строк матрицы  $\{\alpha_r\}$  по формуле

$$\{\beta_r\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\{\alpha_{rx}\}}{\partial x} \\ \frac{\partial\{\alpha_{ry}\}}{\partial y} \\ \frac{\partial\{\alpha_{ry}\}}{\partial x} + \frac{\partial\{\alpha_{rx}\}}{\partial y} \end{Bmatrix},$$

откуда следует:

$$\{\beta_r\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial\psi_r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial\psi_r}{\partial y} \\ \frac{\partial\psi_r}{\partial y} & \frac{\partial\psi_r}{\partial x} \end{Bmatrix}. \quad (10.83)$$

Входящие в (10.83) производные  $\partial\psi_r/\partial x$  и  $\partial\psi_r/\partial y$  нельзя найти непосредственным дифференцированием, так как  $\psi_r$  не зависит в явном виде от переменных  $x$  и  $y$ . Можно было бы воспользоваться правилом дифференцирования сложных функций, но при этом у нас от-

сутствует явная зависимость переменных  $\xi, \eta$  от  $x$  и  $y$ , поскольку в (10.79) имеется только обратная зависимость.

Поэтому для вычисления требуемых производных необходимо воспользоваться формулами

$$\begin{aligned} \frac{\partial\psi_r}{\partial\xi} &= \frac{\partial\psi_r}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial\xi} + \frac{\partial\psi_r}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial\xi}; \\ \frac{\partial\psi_r}{\partial\eta} &= \frac{\partial\psi_r}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial\eta} + \frac{\partial\psi_r}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial\eta}. \end{aligned}$$

Полученные зависимости запишем в матричном виде:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial\psi_r}{\partial\xi} \\ \frac{\partial\psi_r}{\partial\eta} \end{Bmatrix} = \{J(\xi, \eta)\} \begin{Bmatrix} \frac{\partial\psi_r}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi_r}{\partial y} \end{Bmatrix}. \quad (10.84)$$

В соотношении (10.84)  $\{J(\xi, \eta)\}$  обозначена так называемая *матрица Якоби*:

$$\{J(\xi, \eta)\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial\xi} & \frac{\partial y}{\partial\xi} \\ \frac{\partial x}{\partial\eta} & \frac{\partial y}{\partial\eta} \end{Bmatrix}, \quad (10.85)$$

Элементы матрицы Якоби в (10.85) легко находятся по (10.79). Поскольку левая часть равенства (10.84) легко может быть определена из (10.72), найти искомые производные можно из равенства (10.84), умножив слева левую и правую части его на обратную матрицу  $\{J(\xi, \eta)\}^{-1}$ . В итоге получим:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial\psi_r}{\partial x} \\ \frac{\partial\psi_r}{\partial y} \end{Bmatrix} = \{J(\xi, \eta)\}^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial\psi_r}{\partial\xi} \\ \frac{\partial\psi_r}{\partial\eta} \end{Bmatrix}. \quad (10.86)$$

В соотношении (10.86):

$$\frac{\partial\psi_r}{\partial\xi} = \frac{\xi_r}{4} (1 + \eta_r \eta); \quad \frac{\partial\psi_r}{\partial\eta} = \frac{\xi_r}{4} (1 + \xi_r \xi).$$

В матрицу  $\{J(\xi, \eta)\}$  входят функции:

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{4} [-(1-\eta)x_i + (1-\eta)x_j + (1+\eta)x_l - (1+\eta)x_m];$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4} [-(1-\xi)x_i - (1+\xi)x_j + (1+\xi)x_l + (1-\xi)x_m];$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{4} [-(1-\eta)y_i + (1-\eta)y_j + (1+\eta)y_l - (1+\eta)y_m];$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4} [-(1-\xi)y_i - (1+\xi)y_j + (1+\xi)y_l + (1-\xi)y_m].$$

Вычисление матрицы жесткости рассматриваемого элемента проводится на ПЭВМ с помощью численного интегрирования. При этом матрицу  $\{\beta\}$  определяют в отдельных точках области в соответствии с используемым правилом интегрирования. В этих точках определяют матрицу  $\{J(\xi, \eta)\}$ , а затем обратную к ней матрицу  $\{J(\xi, \eta)\}^{-1}$ . В тех же точках по (10.86) вычисляют матрицу производных  $\partial \psi_r / \partial x$  и  $\partial \psi_r / \partial y$  ( $r = i, j, l, m$ ), из которых может быть сформирована матрица  $\{\beta\}$  в соответствии с (10.83).

Типовой блок  $\{k_{rs}^e\}$  матрицы жесткости  $\{k^e\}$  находится по формуле

$$\{k_{rs}^e\} = \int_{\tau^e} \{\beta_r\}^T \{\kappa\} \{\beta_s\} d\tau,$$

где интегрирование ведется по всему объему  $\tau^e$  конечного элемента. Интегрирование легче проводить по переменным  $\xi, \eta$ , поскольку при этом получаются простые пределы (от  $-1$  до  $+1$ ). В работе [23] показано, что для переменных  $\xi, \eta$  элементарный объем выражается в виде:

$$d\tau = h | \{J(\xi, \eta)\} | d\xi d\eta,$$

где  $h$  — толщина элемента, а  $| \{J(\xi, \eta)\} |$  — определитель матрицы Якоби, называемой *якобианом*. Таким образом, в случае обобщенного плоского напряженного состояния матрицу  $\{k_{rs}^e\}$  находим по формуле

$$\{k_{rs}^e\} = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\beta_r\}^T \{\kappa\} | \{J(\xi, \eta)\} | d\xi d\eta. \quad (10.87)$$

В существующих программах по расчету МКЭ интегрирование проводится ПЭВМ.

Приведение распределенных нагрузок к узловым силам выполняется обычным образом. Так, если в плоскости элемента действуют объемные силы  $\{\bar{R}\}$ , то их заменяют узловыми по формуле

$$\{\tilde{P}^e\} = \int_{\tau^e} \{\alpha\}^T \{\bar{R}\} d\tau.$$

Полагая, что

$$\{\tilde{P}^e\} = \begin{Bmatrix} \{\tilde{P}_i^e\} \\ \{\tilde{P}_j^e\} \\ \{\tilde{P}_l^e\} \\ \{\tilde{P}_m^e\} \end{Bmatrix},$$

после перехода к интегрированию по  $\xi, \eta$  в плоскости элемента приходим к следующему выражению для типовой подматрицы эквивалентных узловых сил:

$$\{\tilde{P}_r^e\} = h \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \{\alpha_r\}^T \{\bar{R}\} | \{J(\xi, \eta)\} | d\xi d\eta; \quad (10.88)$$

$(r = i, j, l, m).$

Матрица  $\{\alpha_r\}$  в (10.88) в точках интегрирования находится по формулам (10.72).

Получаемые таким образом конечные элементы будут совместными. Характерной особенностью здесь является то, что для задания перемещений  $u_x, u_y$  и координат  $x, y$  через безразмерные координаты  $\xi, \eta$  используются одинаковые выражения. Это предполагает, что для определения геометрии конечного элемента требуется столько же параметров (координат узлов  $x_r, y_r$ ), сколько параметров (узловых перемещений  $v_{rs}, v_{ry}$ ) необходимо для задания поля перемещений. Такие элементы называются *изопараметрическими*. Если геометрия совместных элементов определяется меньшим числом параметров, чем поле перемещений, то такие конечные элементы называют иногда *субпараметрическими* [23].

Аналогично для расчета пространственных тел используются трехмерные конечные элементы, простейшим из которых является тетраэдр с четырьмя узлами [14, 16, 23].

### Контрольные вопросы

1. Какой смысл вкладывается в понятие «конечный элемент»?
2. Как в методе конечных элементов учитываются внешние и объемные силы?
3. Каким образом определяются перемещения произвольных точек конечного элемента?
4. Что такое матрица жесткости конечного элемента?
5. Каков физический смысл матрицы жесткости конечного элемента?
6. Как определяются узловые перемещения?
7. Каковы достоинства и недостатки плоского треугольного конечного элемента?
8. В чем состоит смысл совместного прямоугольного конечного элемента?
9. Какие конечные элементы называются изопараметрическими?
10. Что представляет собой матрица Якоби?
11. Что называют якобианом?

### Заключение

---

Будь оптимистом, приступая к работе, и скептиком — заканчивая ее.

*Л. Хирифельд<sup>1</sup>*

В учебном пособии приведены основные понятия классической математической теории упругости, а также некоторые численные методы решения краевых задач, в частности, сеточные. Для лучшего усвоения излагаемого материала приведены примеры решения плоской задачи теории упругости для прямоугольных односвязных областей в полиномах и методом конечных разностей.

Принимая во внимание, что студенты только что закончили изучение курса «Механика материалов и конструкций» («Сопrotивление материалов»), в котором особенно подробно рассматривалась проблема внутренних сил, в приложении автор дает краткое объяснение метода сил в применении к замкнутым контурам. Это требуется для решения методом конечных разностей балки-стенки.

Изложены также методы решения прикладных задач теории упругости: расчет тонких пластинок и прессовых посадок. Подобные задачи встречаются при конструировании и расчете деталей тепловых двигателей, например, при расчете поршневой головки шатуна поршневого двигателя.

Рассмотрены также вариационные методы расчета, которые широко используются не только при прочностных расчетах конструкций. В частности, многие инженерные расчеты нестационарных процессов, гидродинамики и газовой динамики успешно проводятся именно благодаря использованию вариационных методов [24].

Наконец, рассмотрены основы метода конечных элементов. Большие универсальные программы (например, система ANSYS [25]), реализующие метод конечных элементов, позволяют расчетчику значительно упростить введение исходных данных. Однако пользователь также должен стремиться к сокращению исходной информации путем наиболее рациональной идеализации конструкции. В на-

---

<sup>1</sup> Душенко К.В. Новая книга афоризмов. М.: ЭКСМО, 2010.

стоящем пособии вопросы реализации конечных элементов на ПЭВМ не затронуты, поскольку они достаточно полно освещены в литературе [13, 14, 16, 23, 25].

Выражаю свою искреннюю признательность официальным рецензентам, а также коллегам по работе, оказавшим неоценимую помощь при подготовке рукописи.

Заранее благодарю читателей, которые выскажут свои замечания и пожелания по дальнейшему улучшению излагаемых в пособии разделов, и прошу направлять их по адресу:

600000, г. Владимир, ул. Горького, д. 87, Владимирский государственный университет им. А.В.Г и Н.Г Столетовых, кафедра «Тепловые двигатели и энергетические установки».

E-mail: hotz@mail.ru; hotz@vlsu.ru

## Библиография

### К разделу I

1. *Гоц А.Н.* Кинематика и динамика кривошипно-шатунного механизма поршневых двигателей: учеб. пособие. Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006.
2. *Гоц А.Н.* Анализ уравновешенности и методы уравновешивания автомобильных и тракторных двигателей: учеб. пособие. Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2007.
3. *Базанчук Г.А.* 100 лет специальности «Двигатели внутреннего сгорания» в МГТУ им. Н.Э. Баумана / Г.А. Базанчук [и др.]; под ред. Н.А. Ивашенко. М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2007.
4. *Савин Г.Н.* Основы плоской задачи моментной теории упругости. Киев: Изд-во Киевского гос. ун-та, 1965.
5. *Безухов Н.И.* Основы теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высш. шк., 1968.
6. *Глушков Г.С., Синдеев В.А.* Курс сопротивления материалов. М.: Высш. шк., 1965.
7. *Гоц А.Н.* Расчеты на прочность деталей ДВС при напряжениях, переменных во времени: учеб. пособие. Владимир: Владим. гос. ун-т, 2005.
8. *Лейбензон Л.С.* Курс теории упругости. 2-е изд. М.: Гостехиздат, 1947.
9. *Самуль В.И.* Основы теории упругости и пластичности: учеб. пособие. М.: Высш. шк., 1970.
10. *Корн Г., Корн Т.* Справочник по математике для научных работников и инженеров / под ред. И.Г. Арамановича; пер. с англ. М.: Наука, 1968.
11. *Жемочкин Б.Н.* Теория упругости: учеб. пособие. 2-е изд. М.: Гостройиздат, 1957.
12. *Безухов Н.И.* Примеры и задачи по теории упругости, пластичности и ползучести. М.: Высш. шк., 1965.
13. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / пер. с нем. С.В. Фомина. 3-е изд. М.: Наука, 1965.
14. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости / под ред. Г.С. Шапиро; пер. с англ. М.И. Рейтмана. 2-е изд. М.: Наука, 1979.
15. *Теребушко О.И.* Основы теории упругости и пластичности. М.: Наука, 1984.
16. *Вырубов Д.И.* Двигатели внутреннего сгорания: конструирование и расчет на прочность поршневых и комбинированных двигателей / Д.И. Выру-

- бов [и др.]; под ред. А.С. Орлина, М.Г. Круглова. 4-е изд. М.: Машиностроение, 1984.
17. Самарский А.А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
  18. Киселев В.А. Плоская задача теории упругости: учеб. пособие. М.: Высш. шк., 1976.
  19. Годунов С.К., Рябенький В.С. Разностные схемы. М.: Наука, 1977.
  20. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений: в 2 т. М.: Физматгиз, 1962.
  21. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. М.: Наука, 1968.
  22. Постнов В.А. Численные методы расчета судовых конструкций. Л.: Судостроение, 1977.
  23. Глявин Ю.В., Мокеев И.И., Пономарев М.Г. Строительная механика элементов машин. Горький: Изд-во ГПИ, 1969.
  24. Варвак П.М. Развитие и приложение метода сеток к расчету пластинок: в 2 ч. Киев: АН УССР. Ч. 1. 1949; Ч. 2. 1952.
  25. Гоц А.Н., Ворожцов Л.А. Об одном способе нагружения бесконечного плоского тела с эллиптическим отверстием // АН УССР. Прикладная механика. Т. VII. Вып. 11. 1971. С. 16—19.
  26. Гоц А.Н., Ворожцов Л.А. Частные решения одной обратной краевой задачи плоской теории упругости // Строительная механика и расчет сооружений. 1972. № 1. С. 12—16.

## К разделу II

1. Гоц А.Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении: учеб. пособие. В 2 ч. Ч. 1. Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2009.
2. Филоненко-Бородич М.М. Теория упругости. М.: Физматгиз, 1959.
3. Галеркин Б.Г. Упругие тонкие плиты. М.: Госстройиздат, 1933.
4. Варвак П.М., Губерман И.О., Мирошниченко М.М. Таблицы для расчета прямоугольных плит. Киев: Изд-во АН УССР, 1959.
5. Пономарев С.Д. Расчеты на прочность в машиностроении: в 3 т. Т. 2 / С.Д. Пономарев и др.; под ред. С.Д. Пономарева. М.: Машгиз, 1958.
6. Коллинз Дж. Повреждение материалов в конструкциях. Анализ, предсказание, предотвращение / пер. с англ. М.: Мир, 1984.
7. Пономарев С.Д. Расчеты на прочность в машиностроении: в 3 т. Т. 1 / С.Д. Пономарев и др.; под ред. С.Д. Пономарева. М.: Машгиз, 1956.
8. Смирнов А.Ф. Сопrotивление материалов / А.Ф. Смирнов и др.; под ред. А.Ф. Смирнова. М.: Высш. шк., 1968.
9. Пономарев С.Д. Расчеты на прочность в машиностроении: в 3 т. Т. 3 / С.Д. Пономарев и др.; под ред. С.Д. Пономарева. М.: Машгиз, 1959.
10. Тарг С.М. Краткий курс теоретической механики. М.: Физматгиз, 1963.

11. Михлин С.М. Численная реализация вариационных методов. М.: Наука, 1966.
12. Филлин А.П. Матрицы в статике стержневых систем и некоторые элементы использования ЭЦВМ. Стройиздат, 1966.
13. Образцов И.Ф., Савельев Л.М., Хазанов Х.С. Метод конечных элементов в задачах строительной механики летательных аппаратов. М.: Высш. шк., 1985.
14. Сегерлинд Л. Применение метода конечных элементов. М.: Мир, 1979.
15. Борзин Ю.В., Гоц А.Н. Матричные методы расчета конструкций: в 2 ч. Ч. 1. Статика плоских стержневых систем. Линейные задачи. Владимир: ВПИ, 1977.
16. Сахаров А.С. Метод конечных элементов в механике твердых тел / А.С. Сахаров и др.; под ред. А.С. Сахарова и И. Альтенбаха. Лейпциг: ФЭБ Фахбухферлаг, 1982.
17. Дарков А.В., Шапиро Г.С. Сопrotивление материалов. 3-е изд. М.: Высш. шк., 1969.
18. Гоц А.Н. Расчеты на прочность деталей ДВС при напряжениях, переменных во времени. Владимир: Ред.-издат. комплекс ВлГУ, 2005.
19. Гоц А.Н., Папонов О.А., Фомин В.К. Повышение надежности поршня с воздушным охлаждением // Двигателестроение. 1988. № 10. С. 23—27.
20. Гоц А.Н., Григорьев О.А., Некрасов С.И. Снижение теплонпряженности головки цилиндров дизеля с воздушным охлаждением // Двигателестроение. 1988. № 7. С. 13—17.
21. Гоц А.Н., Вольфович А.С., Григорьев О.А. Анализ теплонпряженного состояния деталей ДВС с использованием МКЭ // Системный анализ динамики и прочности машин: Сб. тр. Иркутск: ВИНТИ, 1988. С. 45—49.
22. Гоц А.Н., Григорьев О.А., Уваров С.Ю. Основные принципы построения автоматизированной системы расчетов прочности ДВС // Автоматизация, конструирование и проектирование технологических процессов в машиностроении: Сб. докл. V Междунар. конф. Пловдив, 1988. С. 24—27.
23. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике / пер. с англ. под ред. Б.Е. Победри. М.: Мир, 1975.
24. Шехтер Р.С. Вариационный метод в инженерных расчетах / пер. с англ. М.: Мир, 1971.
25. Применение системы ANSYS к решению задач механики сплошной среды: практ. рук. / под ред. А.К. Любимова. Нижний Новгород: Изд-во Нижегородского гос. ун-та, 2006.



Приложение

# РАСЧЕТ ЗАМКНУТЫХ КОНТУРОВ<sup>1</sup>

## 1.1. Замкнутые контуры с одноосной симметрией

Плоские стержневые системы, имеющие вид жесткого замкнутого контура, представляют собой безопорную конструкцию, работающую под действием самоуравновешенной нагрузки. Решение системы такого рода возможно только с помощью разреза. Теоретически для получения основной системы можно производить разрез заданного замкнутого контура в любом сечении, однако и в этих случаях разрез по линии симметрии позволяет сократить решение.

Рассмотрим, например, прямоугольный замкнутый контур (рис. П1, а), нагруженный двумя сосредоточенными равными и прямо противоположными силами  $P$ .

Заданная система симметрична относительно двух взаимно перпендикулярных осей, нагрузка же симметрична только относительно одной вертикальной оси. В подобных случаях для образования основной системы целесообразно применять разрез по линии симметрии как рамы, так и нагрузки и только в одном месте (рис. П1, б). Удобнее делать разрез в сечении, наиболее удаленном от нагрузки, так как в противном случае эпюры изгибающих моментов  $M_p$  захватывают большую часть стержней, что может усложнить подсчеты перемещений по правилу Верещагина при определении коэффициентов канонических уравнений<sup>2</sup>.

Представив себе деформацию заданной системы, вызываемую действующей нагрузкой в случае разреза по центральному сечению нижнего стержня, согласно рис. 1, б, заключаем, что в плоскости разреза существуют только осевые силы и изгибающие моменты, поперечные же силы отсутствуют. На первом этапе выбора основной системы можно приложить в сечении разреза все три силы.

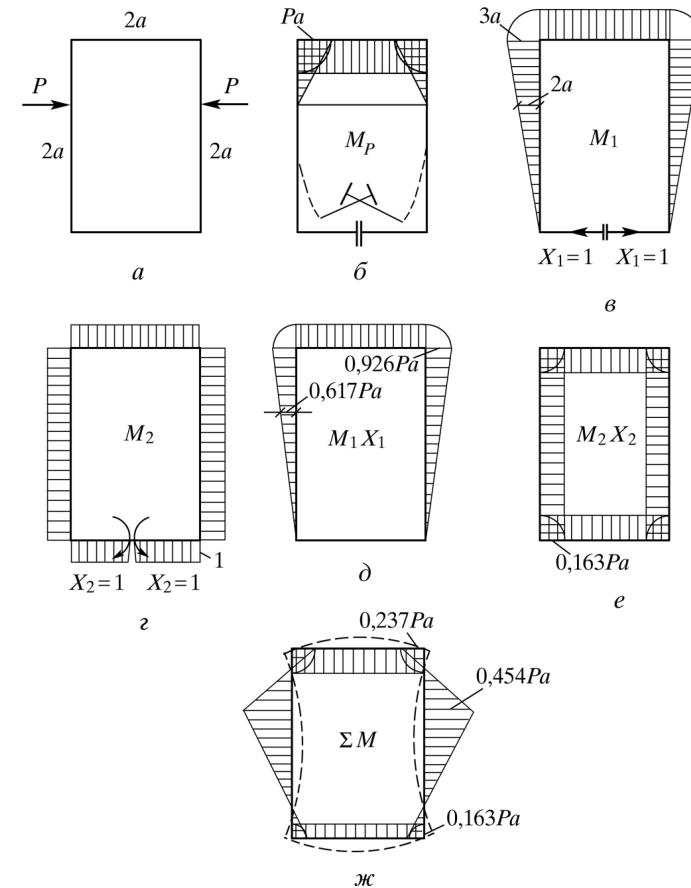


Рис. П1. Схема расчета замкнутого контура с одноосной симметрией

Однако при определении коэффициентов канонического уравнения метода сил автоматически получим, что поперечные силы отсутствуют. Следовательно, для решения потребуется система двух канонических уравнений с двумя неизвестными продольной силой  $X_1$  и изгибающим моментом  $X_2$ .

Система канонических уравнений для этих двух неизвестных будет иметь вид [6]:

$$\begin{cases} \delta_{11} X_1 + \delta_{12} X_2 + \Delta_{1,P} = 0; \\ \delta_{21} X_1 + \delta_{22} X_2 + \Delta_{2,P} = 0. \end{cases} \quad (a)$$

<sup>1</sup> Расчет замкнутых контуров методом сил рассматривается в курсе «Механика материалов и конструкций».

<sup>2</sup> Предполагается, что студенты уже прослушали курс «Механика материалов и конструкций» и знакомы с расчетом статически неопределимых систем методом сил и умеют составлять канонические уравнения (см., например, [6]).

Первое из уравнений системы представляет собой сумму относительных линейных перемещений в направлении оси условно разрезанного стержня (в направлении сил  $X_1$ ), а второе — сумму относительных угловых перемещений, получающихся при условном разрезе (в направлении моментов  $X_2$ ). Другими словами, при действии неизвестных пока сил  $X_1$  и моментов  $X_2$  основная система (с разрезом по нижнему стержню, см. рис. П1, б) будет эквивалентна заданной (см. рис. П1, а), т. е. сечения в разрезе не будут иметь ни линейных, ни угловых перемещений.

На рис. П1, б, в и г построены эпюры моментов  $M_p$ ,  $M_1$  и  $M_2$ . Напомним, что после построения эпюр  $M_p$ ,  $M_1$  и  $M_2$  необходимо определить перемещения от действия каждой неизвестной силы или, другими словами, для определения  $\delta_{11}$  в (а) перемножить эпюру  $M_1$  саму на себя, для  $\delta_{12} = \delta_{21}$   $M_1$  — на  $M_2$ , а далее — для определения  $\Delta_{1,p}$  и  $\Delta_{2,p}$  необходимо  $M_p$  перемножить соответственно на  $M_1$  и  $M_2$ , используя, например, правило Верещагина. Оно гласит, что линейное или угловое перемещение определяется разделенным на жесткость стержня произведением площади эпюры, построенной от заданной нагрузки, на ординату второй эпюры от единичной нагрузки, получившуюся под центром тяжести первой эпюры. Обе эпюры должны иметь общую длину  $l$ .

Вычисляя перемещения по этому правилу, определяем коэффициенты системы канонических уравнений (а):

$$EI\delta_{11} = \frac{1}{2} 3a \cdot 3a \cdot \frac{2}{3} 3a \cdot 2 + 3a \cdot 2a \cdot 3a = 36a^2;$$

$$EI\delta_{22} = 2 \cdot 3a \cdot 1 + 2 \cdot 2a \cdot 1 = 10a;$$

$$EI\delta_{12} = EI\delta_{21} = 2 \cdot \frac{1}{2} 3a \cdot 3a \cdot 1 + 3a \cdot 2a \cdot 1 = 15a^2;$$

$$EI\Delta_{1,p} = -\frac{1}{2} Pa \cdot a \cdot \frac{8}{3} a \cdot 2 - Pa \cdot 2a \cdot 3a = -\frac{26}{3} Pa^3;$$

$$EI\Delta_{2,p} = -\frac{1}{2} Pa \cdot a \cdot 1 \cdot 2 - Pa \cdot 2a \cdot 1 = -3Pa^2.$$

Система канонических уравнений (а) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} 36a^2 X_1 + 15a^2 X_2 &= \frac{26}{3} Pa^3; \\ 15a^2 X_1 + 10a X_2 &= 3Pa^2. \end{aligned} \right\} \quad (б)$$

Решение системы (б) дает величины:

$$X_1 = \frac{25}{81} P = 0,309P \quad \text{и} \quad X_2 = -\frac{22}{135} Pa = -0,163Pa.$$

На рис. П1, д и е построены эпюры  $M_1 X_1$ ,  $M_2 X_2$ , а на рис. П1, ж — суммарная эпюра для заданной статически неопределимой системы, которая строится суммированием ординат от заданной нагрузки, а также найденных нагрузок  $X_1$  и  $X_2$ :  $\sum M = M_p + M_1 X_1 + M_2 X_2$ . Проверка правильности построения эпюры  $\sum M$  проводится путем перемножения этой эпюры с любой единичной. Если суммарная эпюра сложной формы, то перемножать можно эпюры  $M_p$ ,  $M_1 X_1$ ,  $M_2 X_2$ , например, на эпюру  $M_2$  (ординаты ее постоянны). В нашем случае угловое перемещение в сечении разреза (см. рис. П1) равно:

$$\begin{aligned} EI\theta &= -2 \frac{1}{2} Pa \cdot a \cdot 1 - Pa \cdot 2a \cdot 1 + 2 \frac{1}{2} 0,926Pa \cdot 2a \cdot 1 + 0,926Pa \cdot 2a \cdot 1 - \\ &\quad - 2 \cdot 0,163Pa \cdot 2a \cdot 1 - 2 \cdot 0,163Pa \cdot 3a \cdot 1 = -4,63 + 4,63 \equiv 0. \end{aligned}$$

Таким образом, решение проведено правильно.

Наибольший изгибающий момент  $M_{\max} = 0,454Pa$  получается в сечениях, совпадающих с точками приложения сосредоточенных сил  $P$ . Напомним, что по суммарной эпюре моментов можно представить себе форму стержней после деформации (эпюра моментов строится на сжатой стороне стержня, а нулевая точка на эпюре моментов соответствует месту перегиба упругой линии). На рис. П1, ж форма упругой линии показана пунктиром.

## 1.2. Замкнутые контуры с двухосной симметрией

В тех частных случаях, когда заданный замкнутый контур симметричен относительно двух взаимно перпендикулярных осей как по конструкции, так и по составу нагрузки, для решения целесообразно применять сквозной разрез по линии симметрии, разделяя контур на две отдельные части. Например, система дана в виде квадратного замкнутого контура (рис. П2, а), а стержни, составляющие контур, — постоянной жесткости. Рама загружена самоуравновешенной сплошной нагрузкой, равномерно распределенной по боковым стержням, и решается с помощью основной системы, показанной на рис. П2, б. По условиям симметрии, неизвестные силовые факторы в этом слу-

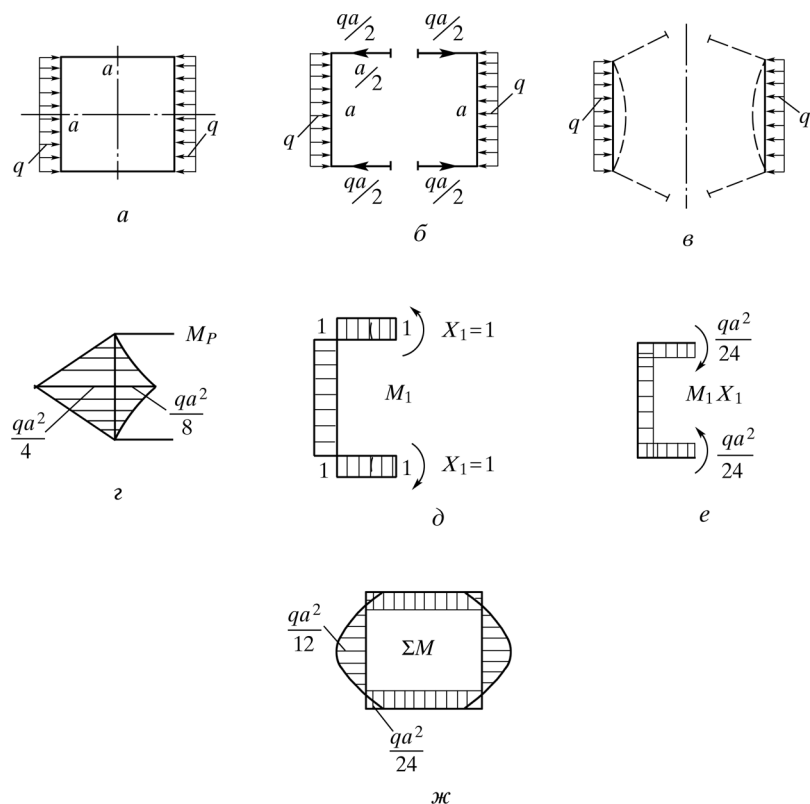


Рис. П2. Метод решения замкнутого контура с двухосной симметрией

чае получатся в верхнем и нижнем сечении одинаковыми, причем осевые силы  $N = qa/2$  определяются непосредственно по схеме основной системы как силы, уравновешивающие заданную нагрузку.

На рис. П2, в после условного разреза заданная система показана в деформированном состоянии. Согласно предыдущему замечаем, что в данном случае в плоскости разреза могут существовать изгибающие моменты  $M_1$ , а поперечные силы отсутствуют.

В итоге в рассматриваемом случае приходим к следующим выводам:

- в плоскости разреза не может быть поперечных сил вследствие симметрии;
- осевые силы определяются непосредственно по условиям равновесия основной системы под заданной нагрузкой (в данном случае они равны нулю);

- изгибающие моменты  $X_1$  определяются из канонического уравнения

$$\delta_{11} X_1 + \Delta_{1,P} = 0. \quad (a)$$

Тем самым замкнутый контур, являющийся по определению трижды статически неопределимой системой, в данном частном случае решается как система с одним лишним неизвестным.

На рис. П2, г, д построены эпюры моментов  $M_p$ ,  $M_1$  для левой половины основной системы, показанной на рис. П2, в (эпюра  $M_p$  построена по правилам расслоения — относительно среднего сечения определяются моменты отдельно от продольной силы и распределенной нагрузки).

Согласно эпюрам по правилу Верещагина получим:

$$EI\delta_{11} = 4 \cdot 1 \cdot \frac{a}{2} = 2a;$$

$$EI\Delta_{1,P} = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{qa^2}{4} \cdot \frac{a}{2} - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{qa^2}{8} \cdot \frac{a}{2} = \frac{qa^3}{12},$$

а потому согласно (a):

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1,P}}{\delta_{11}} = -\frac{qa^3}{12 \cdot 2a} = -\frac{qa^2}{24}.$$

Вследствие симметрии вычисления производили только на половину системы.

На рис. П2, е построена эпюра  $M_1 X_1$ , и на рис. П2, ж — эпюра  $\Sigma M$ , ординаты которой получены на прежних основаниях по формуле  $\Sigma M = M_p + M_1 X_1$ .

Если сквозной разрез заданной системы (рис. П3, а) сделать по другой оси симметрии и тоже представить полученную таким образом основную систему в деформированном состоянии (рис. П3, б), то можно прийти к заключению, что в плоскости разреза в заданной системе могут существовать только моменты  $M$ , продольные же и поперечные силы отсутствуют. Эпюра  $M_p$  для основной системы построена на рис. П3, в, а от единичного момента  $M_1$  — на рис. П3, г. Следует обратить внимание, что если по ходу решения мы захотели бы теперь в плоскости разреза приложить осевые силы  $X = 1$ , то это оказалось невозможным, так как в пределах отдельно взятой половины основной системы такие силы не смогли уравновеситься.

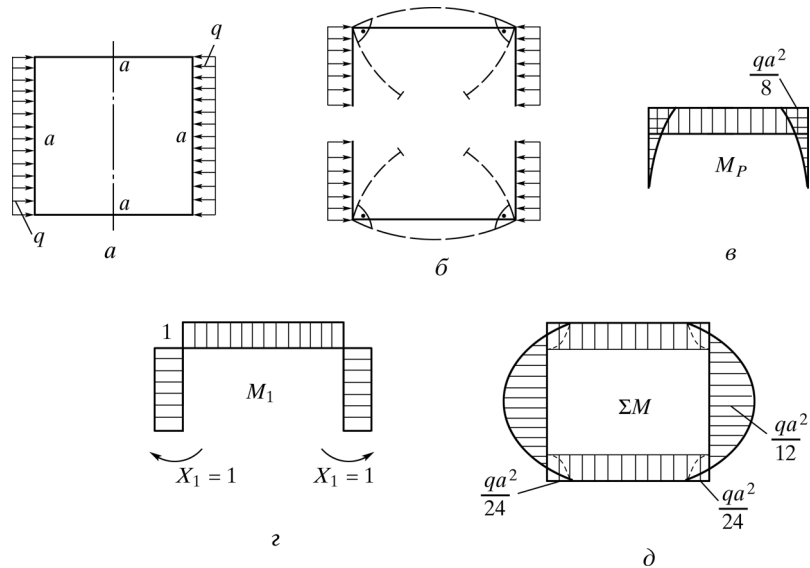


Рис. П3. Варианты выбора основной системы при двухосной симметрии

При обоих вариантах решения суммарная эпюра изгибающих моментов получается, конечно, одинаковой (рис. П3, д).

Подобным же образом решаются замкнутые круговые контуры (как кривой брус большой кривизны).

## Оглавление

Предисловие .....	3
-------------------	---

### ЧАСТЬ 1

#### Раздел I. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Глава 1. ТЕОРИЯ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ .....	7
--	---

1.1. Объект изучения. Основные принципы классической теории упругости .....	7
1.2. Силы и напряжения .....	11
1.3. Дифференциальные уравнения равновесия .....	15
1.4. Напряжения на наклонных площадках. Условия на поверхности .....	20
1.5. Исследование напряженного состояния в данной точке тела при известном для нее тензоре напряжений .....	22
1.6. Главные напряжения .....	24
1.7. Инварианты тензора напряжений .....	29
1.8. Наибольшие касательные напряжения .....	31
1.9. Октаэдрические напряжения .....	33

Глава 2. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ ДЕФОРМАЦИЙ .....	37
---	----

2.1. Составляющие перемещения и деформации. Зависимость между ними .....	37
2.2. Объемная деформация .....	41
2.3. Уравнения неразрывности деформаций .....	44
2.4. Граничные условия .....	48
2.5. Начальные условия .....	49

<b>Глава 3. ЗАВИСИМОСТЬ МЕЖДУ НАПРЯЖЕНИЯМИ И ДЕФОРМАЦИЯМИ. ОБОБЩЕННЫЙ ЗАКОН ГУКА</b> . . . . .	51
3.1. Выражение составляющих деформации через составляющие напряжения . . . . .	51
3.2. Выражение составляющих напряжений через составляющие деформации . . . . .	54
3.3. Работа упругих сил. Потенциальная энергия деформации . . . . .	57
<b>Глава 4. О РЕШЕНИИ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ</b> . . . . .	62
4.1. Основные уравнения теории упругости и способы их решения . . . . .	62
4.2. Решение задачи теории упругости в перемещениях . . . . .	65
4.3. Решение задачи теории упругости в напряжениях при постоянстве объемных сил . . . . .	68
4.4. Теорема единственности. Методы решения задач теории упругости . . . . .	71
4.5. Задачи для решения по Разделу I . . . . .	73

## Раздел II. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

<b>Глава 5. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПРЯМОУГОЛЬНЫХ КООРДИНАТАХ</b> . . . . .	80
5.1. Плоская деформация . . . . .	80
5.2. Обобщенное плоское напряженное состояние . . . . .	84
5.3. Решение плоской задачи в напряжениях. Функция напряжений . . . . .	85
5.4. Методы решения плоской задачи для прямоугольных односвязных областей . . . . .	88
5.4.1. Решение плоской задачи в полиномах . . . . .	89
5.4.2. Решение плоской задачи в тригонометрических рядах . . . . .	94
5.4.3. Понятие о методе конечных разностей (методе сеток) для решения плоской задачи . . . . .	99
5.5. Расчет балок-стенок . . . . .	106

5.6. Порядок расчета балки-стенки методом конечных разностей . . . . .	114
5.7. Другие сеточные методы решения плоской задачи теории упругости . . . . .	123
<b>Глава 6. ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ПОЛЯРНЫХ КООРДИНАТАХ</b> . . . . .	134
6.1. Основные уравнения плоской задачи в полярных координатах . . . . .	134
6.2. Простое радиальное напряженное состояние . . . . .	137
6.3. Клин, нагруженный в вершине сосредоточенной силой . . . . .	139
6.4. Сжатие клина . . . . .	141
6.5. Действие сосредоточенной силы, приложенной к границе полуплоскости . . . . .	144
6.6. Приложение теории плоской задачи к определению напряжений в основании фундамента . . . . .	145
6.7. Функция напряжений для плоской задачи в полярных координатах . . . . .	147
6.8. Осесимметричные задачи. Решение в перемещениях . . . . .	148

## ЧАСТЬ 2

### Раздел III. ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ УПРУГОСТИ

<b>Глава 7. ИЗГИБ ТОНКИХ ПЛАСТИНОК</b> . . . . .	152
7.1. Основные понятия и гипотезы . . . . .	152
7.2. Перемещения и деформации в пластинке . . . . .	154
7.3. Напряжения в пластинке . . . . .	156
7.4. Усилия в пластинке . . . . .	160
7.5. Выражение напряжений через усилия . . . . .	165
7.6. Дифференциальное уравнение изогнутой срединной поверхности пластинки . . . . .	166
7.7. Условия на контуре пластинки . . . . .	169
7.8. Эллиптическая пластинка . . . . .	173
7.9. Прямоугольная пластинка. Решение Навье . . . . .	177
7.10. Прямоугольная пластинка. Решение Леви . . . . .	187

7.11. Основные уравнения изгиба круглой пластинки . . . . .	191
7.12. Осесимметричные задачи изгиба круглой пластинки . . . . .	193
7.13. Потенциальная энергия при изгибе пластинки . . . . .	200
<b>Глава 8. РАСЧЕТ СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ДЕТАЛЕЙ . . . . .</b>	<b>205</b>
8.1. Цели и задачи расчета . . . . .	205
8.2. Расчет толстостенных цилиндров, нагруженных равномерно распределенным по длине давлением (задача Ляме) . . . . .	206
8.3. Расчет прессовых посадок при одинаковой длине сопрягаемых деталей . . . . .	217
8.4. Крепление цилиндров . . . . .	221
8.4.1. Основные понятия . . . . .	221
8.4.2. Расчет скрепленного цилиндра . . . . .	222
8.5. Расчет вращающихся дисков постоянной толщины . . . . .	228
8.6. О некоторых противоречиях при расчете на прочность . . . . .	237
8.7. Примеры расчетов толстостенных цилиндров . . . . .	242
<b>Раздел IV. ПРИБЛИЖЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПРИКЛАДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ</b>	
<b>Глава 9. ВАРИАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ . . . . .</b>	<b>251</b>
9.1. Сущность вариационных методов решения дифференциальных уравнений . . . . .	251
9.2. Метод Рэлея — Ритца . . . . .	253
9.3. Метод Бубнова — Галеркина . . . . .	268
9.3.1. Обобщенный метод Бубнова — Галеркина . . . . .	268
9.3.2. Метод Бубнова — Галеркина . . . . .	270
9.4. Метод Канторовича — Власова . . . . .	277
<b>Глава 10. ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ . . . . .</b>	<b>282</b>
10.1. Основные соотношения теории упругости в матричной форме . . . . .	282
10.1.1. Пространственная задача . . . . .	282
10.1.2. Плоская задача . . . . .	287

10.2. Основные понятия метода конечных элементов . . . . .	290
10.2.1. Дискретизация тела . . . . .	290
10.2.2. Типы конечных элементов . . . . .	293
10.2.3. Перемещения, деформации и напряжения в конечном элементе . . . . .	296
10.2.4. Матрица жесткости конечного элемента . . . . .	299
10.2.5. Понятие о физическом смысле матрицы жесткости . . . . .	301
10.2.6. Учет внеузловой нагрузки . . . . .	309
10.2.7. Определение узловых перемещений . . . . .	311
10.3. Конечные элементы сплошной среды . . . . .	314
10.3.1. Плоский треугольный элемент . . . . .	314
10.3.2. Совместный прямоугольный элемент . . . . .	321
10.3.3. Четырехузловой изопараметрический элемент . . . . .	327
<b>Заключение . . . . .</b>	<b>335</b>
<b>Библиография . . . . .</b>	<b>337</b>
<b>Приложение. Расчет замкнутых контуров . . . . .</b>	<b>340</b>
1.1. Замкнутые контуры с одноосной симметрией . . . . .	340
1.2. Замкнутые контуры с двухосной симметрией . . . . .	343



**Гоц Александр Николаевич**

**Численные методы расчета  
в энергомашиностроении**

*Учебное издание*

*Издание не подлежит маркировке  
в соответствии с п. 1 ч. 1 ст. 11 ФЗ № 436-ФЗ*

Выпускающий редактор *Г.Г. Семенова*  
Корректор *Л.А. Шитова*  
Компьютерная верстка *И.В. Кондратьевой*  
Оформление серии *А. Сильванович*

Подписано в печать 24.04.2014. Формат 60×90/16.  
Гарнитура «Таймс». Усл. печ. л. 22,0. Уч.-изд. л. 22,7.  
Печать офсетная. Бумага офсетная. Тираж 300 экз.  
Заказ №

Издательство «ФОРУМ»  
101990, Москва — Центр, Колпачный пер., д. 9а  
Тел./факс: (495) 625-32-07, 625-52-43  
E-mail: forum-knigi@mail.ru

**Отдел продаж издательства «ФОРУМ»:**

101990, Москва — Центр, Колпачный пер., д. 9а  
Тел./факс: (495) 625-52-43  
E-mail: forum-ir@mail.ru  
www.forum-books.ru

*Книги издательства «ФОРУМ»  
вы также можете приобрести:*

*Отдел продаж «ИНФРА-М»*  
127282, Москва, ул. Полярная, д. 31в  
Тел.: (495) 380-05-40 (доб. 252)  
Факс: (495) 363-92-12

*Отдел «Книга-почтой»*  
E-mail: podpiska@infra-m.ru;  
books@infra-m.ru