МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

по дисциплине «Термоупругость»

Цель практических занятий по всему курсу:

Для подготовки студентов к самостоятельной работе в период выполнения магистерской диссертации при проведении практических занятий каждому студенту выдается индивидуальное задание, которое он должен выполнить самостоятельно. Одна из типовых задач решается совместно с преподавателем.

Темы практических занятий

1. Решение общих уравнений термоупругости.
2. Физические уравнения термоупругости.
3. Решение задач термоупругости при переменных упругих характеристиках.
4. Деформационная теория термопластичности.
5. Расчеты при укрупненных этапах нагружения.
6. Решение с использованием обобщенной теории неизотермического пластического течения.
7. Использование аппроксимирующих формул и упрощенный расчет неустановившейся стадии ползучести.
8. Решение связанной теории термоупругости.

Примеры решения задачи вариационным методом.

Пример 1. Применение метода Рэлея – Ритца рассмотрим задачу об изгибе свободно опертого по краям стержня постоянной изгибной жесткости EI длиной l, нагруженного равномерно распределенной поперечной нагрузкой q (рис. 1).

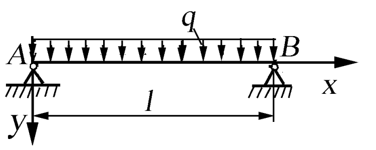

Рис. 1. Балка со свободно опертыми краями и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой

Для прогиба u_y применим выражение[1] $u_z = a\sin(\pi x/l)$, которое удовлетворяет следующим граничным условиям (прогибы и моменты на опорах в сечениях A и B) равны нулю, (см. рис. 45):

при $x = 0$ (сечение A) и $x = l$ (сечение B) $u_y = 0,\ \dfrac{d^2u_y}{dx^2} = 0.$

Потенциальная энергия изгиба стержня

$$W = \frac{1}{2EI}\int_0^l M_z^2 dx.$$

Но $EI\dfrac{d^2u_y}{dx^2} = M_z$, тогда

$$W = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2u_y}{dx^2}\right)^2 dx.$$

После подстановки $u_y = a\sin(\pi x/l)$ в выражение для W и интегрирования получим

$$W = \frac{EI}{2}\cdot\frac{l}{2}a^2\frac{\pi^4}{l^4}.$$

Работа внешних сил

[1] Нетрудно заметить, что u_z аппроксимируется таким образом, чтобы при $x = l/2$ прогиб был максимальный.

$$A = \int_0^l q u_y dx = qa \int_0^l \sin\frac{\pi x}{l} dx = 2qa\frac{l}{\pi}.$$

Окончательно для энергии Э получим

$$Э = \frac{EI}{2} \cdot \frac{l}{2} a^2 \frac{\pi^4}{l^4} - 2qa\frac{l}{\pi}.$$

Далее из условия $\partial Э / \partial a = 0$ получим значение параметра a – максимального прогиба стержня в середине пролета:

$$\frac{\partial Э}{\partial a} = \frac{EI}{2} \cdot \frac{a\pi^4}{l^3} - 2q\frac{l}{\pi} = 0,$$

откуда

$$a = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} = 0{,}013071\frac{ql^4}{EI}.$$

Как известно [8, 17], при интегрировании упругой линии балки[2]

$$EI\frac{d^2 u_y}{dx^2} = -\frac{ql}{2}x + \frac{qx^2}{2} \qquad (\kappa)$$

максимальный прогиб в середине пролета равен

$$\frac{5ql^4}{384EI} = 0{,}013021\frac{ql^4}{EI}.$$

Сравнение с решением, полученным вариационным методом (путем замены выражения для прогиба полуволной синусоиды) показывает, что ошибка составляет около 0,4 %.

Пример 2. Покажем использование метода Бубнова – Галеркина в задаче об изгибе балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой и свободно опертой по краям (см. рис. 45). Уравнение упругой линии оси балки при изгибе имеет вид

$$EI\frac{d^4 u_z}{dx^4} - q = 0.$$

Граничные условия задачи: при $x = 0,\ x = l$ прогибы и изгибающие моменты отсутствуют $u_z = 0,\ d^2u_z \big/ dx^2 = 0.$ В качестве аппроксимирующей функции прогиба балки, как и прежде, примем $u_z = a\sin(\pi x / l)$.

Так как $\dfrac{d^4 u_z}{dx^4} = a\dfrac{\pi^4}{l^4}\sin\dfrac{\pi x}{l}$, то, используя процедуру (9.24) (i=1), получим:

$$\int_0^l \left(EIa\frac{\pi^4}{l^4}\sin\frac{\pi x}{l} - q \right) dx = 0\,.$$

После интегрирования получим

$$EIa\frac{\pi^4}{l^4} \cdot \frac{l}{2} - q\frac{2l}{\pi} = 0.$$

Откуда $a = \dfrac{4ql^4}{\pi^5 EI} = 0{,}013071\dfrac{ql^4}{EI}.$

Таким образом, получен тот же результат, что и ранее при решении этой задачи методом Рэлея – Ритца.

---

[2] На рис. 1 координата y направлена вниз для того, чтобы максимальное перемещение u_z имело положительный знак, как и при решении методом Рэлея – Ритца.

Выполненные задания студенты оформляют в расчетно-пояснительную записку и защищаются преподавателю, тем самым определяется степень самостоятельности выполнения работы.

Разработал
д.т.н., профессор
кафедры ТД и ЭУ А.Н.Гоц