

## **КУРС ЛЕКЦИЙ**

Для изучения дисциплины «Термоупругость» на кафедре разработаны учебные пособия, имеющие гриф УМО «Допущено УМО вузов России по образованию в области энергетики и электротехники в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 13.04.03 – Энергетическое машиностроение» программа «Двигатели внутреннего сгорания». Это следующие пособия.

### **В 5 семестре:**

1. Гоц, А.Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении: учеб. пособие./ А.Н. Гоц. – 3-е изд., испр. и доп. – М.:ФОРУМ; инфра-м, 2015. – 352 с.
2. Гоц, А.Н. Расчеты на прочность деталей ДВС при напряжениях, переменных во времени: учебное пособие./А.Н. Гоц. – 2-е изд., испр. и доп. Владим. гос. ун-т имени А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ.– 2011 – 140 с.
3. Гоц, А.Н. Расчеты на прочность деталей ДВС при напряжениях, переменных во времени: учебное пособие./ А.Н. Гоц. – 3-е изд., испр. и доп. – М.:ФОРУМ; инфра-м, 2013. – 208 с.
4. Гоц, А.Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении: учеб. пособие./ А.Н. Гоц. В 2 ч., ч.1, Владим. гос. ун-т имени А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012. – 151 с.
5. Гоц, А.Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении: учеб. пособие./ А.Н. Гоц. В 2 ч., ч.2, Владим. гос. ун-т имени А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2013. – 151 с.

### **В 6 семестре:**

1. Гоц, А.Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении: учеб. пособие./ А.Н. Гоц. – 3-е изд., испр. и доп. – М.:ФОРУМ; инфра-м, 2015. – 352 с.
2. Гоц, А.Н. Расчеты на прочность деталей ДВС при напряжениях, переменных во времени: учебное пособие./ А.Н. Гоц. – 3-е изд., испр. и доп. – М.:ФОРУМ; инфра-м, 2013. – 208 с.
3. Гоц, А.Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении: учеб. пособие./ А.Н. Гоц. В 2 ч., ч.2, Владим. гос. ун-т имени А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012. – 180 с.
4. Гоц А.Н. Крутильные колебания коленчатых валов автомобильных и тракторных двигателей: учеб. пособие / А. Н. Гоц; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2008. – 200 с.

В связи с этим, последовательность изложения курса «Численные методы в энергомашиностроении» на лекциях будет дана блоками и основана на приведенных выше учебных пособий, которые в достаточном количестве имеются в библиотеке ВлГУ.

### **В 5 семестре**

**Блок 1 (4 часа).** Методы расчета на прочность деталей ДВС при нагрузках, переменных во времени. Детерминированные модели усталостной долговечности при стационарном нагружении. Определения коэффициента запаса прочности при одноосном напряженном состоянии. Определения коэффициента запаса прочности при сложном напряженном состоянии.

**Цель лекций** по этому блоку – освоение студентами основных понятий и методов расчета при переменных напряжениях по известным детерминированным моделям усталостной долговечности.

Для этого из учебного пособия [1] или [2] должны быть изложены разделы на с. 6-12; 49-61; 85-95; 99-103.

На лекциях будут изложены основные понятия, которыми мы будем оперировать в дальнейшем при расчете деталей, испытывающих переменные напряжения, а также вывод основных формул, основанных на детерминированных моделях долговечности.

Описательные разделы учебных пособий (без выводов формул и зависимостей) следует перенести на самостоятельное изучение или в период консультаций студентов по первому циклу заданий курсового проекта. Ниже приводится перечень таких вопросов.

Основные законы прочности при переменных напряжениях. Предел выносливости и опытное его определение. Понятие о физической природе процесса усталостного разрушения, Обнаружение усталостных трещин. Влияние различных факторов (степени несимметрии цикла, концентрации напряжений и абсолютных размеров детали, качества обработки поверхности) на величину предела выносливости. Практические мероприятия, принимаемые для повышения усталостной прочности материалов.

На лекциях необходимо показать, что детали поршневых двигателей, а также многие детали машин в эксплуатационных условиях подвергаются действию переменных напряжений, многократно изменяющихся во времени. Такие напряжения испытывают, например, коленчатые валы, шатуны, шатунные болты, головки цилиндров двигателей внутреннего сгорания, поршневые штоки паровых машин, валики коробок скоростей, рессоры, клапанные пружины и другие детали. По результатам экспериментальных исследований и анализам многочисленных поломок деталей машин показано, что при переменных нагрузках все материалы, из которых изготавливаются детали, разрушаются при напряжениях значительно меньших, чем при постоянных нагрузках. В большинстве

случаев разрушающее напряжение может быть ниже не только предела прочности, но и предела текучести или даже упругости материала.

Предел прочности  $\sigma_b$  и предел текучести  $\sigma_t$ , полученные из статических испытаний, не могут являться характеристиками прочности материала при переменных напряжениях. При расчетах на прочность в машиностроении все большее значение приобретает другая характеристика прочности материала, а именно, **предел усталости**, или **выносливости**, определяемый на основе испытаний материала при переменных напряжениях. Можно отметить, что общепринятый термин **усталость**, введенный более полувека назад, с точки зрения терминологии, по-видимому, не самый удачный, поскольку явление разрушения при переменных напряжениях значительно отличается от биологической усталости. До сих пор не обнаружено появление каких-либо прогрессирующих изменений в свойствах материала в процессе переменного нагружения, а разрушение зачастую может происходить внезапно без заметных признаков его приближения. Кроме того, во время «отдыха», когда на деталь не действует никакая нагрузка, не происходит «залечивание» или исчезновение эффектов предварительного циклического нагружения, т. е. повреждения в процессе усталости **накапливаются** и, как правило, являются необратимыми. Другими словами, появившиеся при циклическом нагружении трещины не только не исчезают, а могут развиваться дальше даже при меньших напряжениях.

Как показывают многочисленные исследования, разрушение при переменных напряжениях начинается с образования в наиболее напряженном сечении детали микротрещин, которые, постепенно развиваясь при нагружении, проникают вглубь поперечного сечения, объединяясь в макротрещины, тем самым все более ослабляя его. Это, в конце концов, приводит к разрушению детали по наиболее ослабленному сечению.

Свойство понижения прочности материала при переменных напряжениях за счет прогрессивно развивающихся микротрещин называется **усталостью материала**. Свойство материала сопротивляться разрушению от усталости называют **выносливостью**.

Усталость охватывает две значительно отличающиеся друг от друга области циклического нагружения и деформирования, в каждой из которых разрушение является, по-видимому, следствием действия различных физических механизмов. Одна из этих областей – циклическое нагружение, при котором во время каждого цикла возникают значительные пластические деформации. Эта область характеризуется большими по величине нагрузками и малыми долговечностями, т. е. небольшим числом циклов до усталостного разрушения. Обычно эта область называется **малоцикловой или деформационной усталостью**.

Другая область – циклическое нагружение, при котором деформация во время

каждого цикла в значительной степени упруга. Для этой области характерны малые нагрузки и большие долговечности, т. е. большое число циклов до разрушения. Эта область обычно называется **многоцикловой усталостью**. Малоцикловая усталость обычно ассоциируется с областью, для которой число циклов до разрушения не превышает  $10^4 \dots 10^5$ , а многоцикловая усталость с областью, которая характеризуется долговечностью  $10^6 \dots 10^8$  циклов. Под долговечностью понимается число циклов до разрушения образца (или до появления трещины заданных размеров).

Для уменьшения вариантов расчетов на лекции показано, что проведенный расчет коэффициентов  $\psi_\sigma$  и  $\psi_\tau$ , учитывающих влияние средних напряжений на предельные амплитудные напряжения, для наиболее используемых в двигателестроении сталей и высокопрочных чугунов позволяют просто вычислять запасы прочности. Точно также вычислен коэффициент постоянства нагружения  $\chi$ , который в нашей справочной литературе используется редко, но он позволяет вычислить положение рабочих циклов напряжений и выбрать методы расчета – по усталостному разрушению или текучести. Это уменьшает объем расчетов, так как не требуется проводить определение запасов прочности по двум видам разрушения.

**Блок 2 (4 часа).** Теория напряженного состояния. Дифференциальные уравнения равновесия. Напряжение в наклонных площадках. Главные напряжения. Геометрическая теория деформаций. Уравнения неразрывности деформаций.

**Цель лекций** по этому блоку – освоение студентами основных понятий и методов определения напряженного и деформированного состояния в теории упругости.

Этот блок охватывает главу 1 и 2 учебного пособия [3], с. 10-31 и 38-50. Для самостоятельного изучения рекомендуется пп. 1.7, 1.8, 1.9; 2.4, 2.5.

Численные методы расчета в энергомашиностроении позволяют решать следующие основные проблемы.

- Разработку методов определения величины и характера распределения напряжений и деформаций, возникающих в конструкциях поршневых двигателей при действии заданных внешних сил. Решение этой проблемы применительно к отдельным элементам выполняется с использованием соответствующих методов сопротивления материалов, теории упругости, теории пластичности и других разделов механики деформируемого твердого тела.
- Исследование допускаемых напряжений: изучение факторов, влияющих на прочность основных деталей поршневого двигателя в процессе его эксплуатации, установление уровней предельно допустимых напряжений, деформаций и перемещений с полным учетом всех факторов, влияющих на прочность.
- Разработку методов расчета долговечности деталей особенно в условиях действия высоких температур, а также нагрузок, действующих циклически.

- Разработку методов численного решения напряженно-деформированного состояния наиболее нагруженных деталей тепловых двигателей с использованием методов конечных элементов, сеточного и др.

Ввиду сложности основных проблем численных методов адекватность полученных результатов может быть получена только при экспериментальных исследованиях как модельных, так и натурных.

Степень и глубина разработки указанных основных проблем численных методов расчета деталей поршневых двигателей различны. Наиболее строго и полно решена, пожалуй, первая проблема. Однако с точки зрения получения окончательных результатов все три проблемы имеют одинаковое значение. Действительно, если даже допущена неточность в определении величины внешних нагрузок или допускаемых напряжений, результат практически один и тот же – конструкция в зависимости от знака ошибки будет иметь либо избыточную прочность, а следовательно, и массу, либо окажется недостаточно прочной. Поэтому главной задачей при расчете деталей поршневых двигателей является расширение исследований по указанным проблемам.

Следует показать, что *механика деформируемого твердого тела* – наука, изучающая напряженно-деформированное состояние реальных тел при силовом и температурном воздействиях. Она разрабатывает методы, которые используются при расчетах прочности и проектировании самых разнообразных инженерных сооружений: поршневых двигателей, самолетов, космических кораблей, машин и т. д. Эта наука служит также основой многих технологических процессов: гибки,ковки, обработки материалов резанием, давлением.

Используемый в механике деформируемого твердого тела математический аппарат базируется на общих законах механики и ряде упрощающих допущений, а также понятий.

Сечением тела называется любая мысленно проведенная поверхность, разделяющая тело на две части. Каждому сечению соответствуют две совпадающие внутренние поверхности, принадлежащие расположенным по разные стороны от сечения частям тела.

Одним из таких свойств, которым в той или иной мере обладают все конструкционные материалы, является *свойство упругости*, т. е. способность тела, изготовленного из такого материала, восстанавливать свои первоначальные размеры и форму после снятия внешних нагрузок. Частный, но очень важный для практики случай упругости – это линейно-упругое тело Гука (линейная зависимость между напряжениями и деформациями для каждой температуры независимо от времени).

При этом первоначальное состояние тела предполагается ненапряженным; оно обычно именуется *естественным* состоянием тела. Предположение о естественном состоянии тела исключает из рассмотрения начальные напряжения, характер и величина которых,

как правило, нам неизвестны и зависят от истории возникновения тела.

Идеально упругое тело предполагается *сплошным*, т. е. твердое тело способно заполнять объем без всяких пустот и после деформации. Таким образом, допущение о *сплошности* полагает, что материал представляет собой сплошную среду – континуум, не имеющую дискретной (молекулярной, атомной) структуры, характерной для любого реального тела. Допущение о сплошности позволяет ввести понятие напряженно-деформированного состояния в окрестности точки тела и записать условия равновесия элемента тела в виде дифференциальных уравнений. Кроме того, это допущение позволяет считать перемещения точек тела при деформации непрерывными и дифференцируемыми функциями координат и выразить компоненты деформаций через производные этих функций.

Полученное в результате допущения о сплошности абстрактное тело наделяют некоторыми механическими свойствами, аппроксимирующими способность реальных тел сопротивляться деформированию.

Идеально упругое тело принимается *однородным*. Это значит, что во всех точках тело под действием одних и тех же напряжений деформируется одинаково. Предположение об *однородности* позволяет считать величины, характеризующие упругие свойства тела, постоянными по всему объему тела.

Идеально упругое тело предполагается *изотропным*. Под этим подразумевается, что упругие свойства тела одинаковы по всем направлениям, проведенным из данной точки, а любая плоскость, проходящая через частицу тела, является для нее плоскостью симметрии. Если эти свойства одинаковы во всех частицах тела, то приходим к понятию однородного изотропного тела.

Реальные тела в той или иной степени отличаются от рассматриваемой модели. Поэтому приемлемость решений, получаемых в теории упругости, для реальных тел зависит от того, насколько эти тела можно считать вполне упругими, сплошными, однородными и изотропными.

Использование допущения об упругости в дополнение к допущению о сплошности привело к образованию большого самостоятельного раздела механики деформируемого твердого тела – *теории упругости*.

В классической теории упругости принимается, что перемещения тела малы по сравнению с его линейными размерами, а относительные удлинения и углы сдвига малы по сравнению с единицей.

Малость деформаций и линейная зависимость между напряжениями и деформациями позволяет применять *принцип независимости действия сил*. Этот принцип при действии на

тело группы сил дает возможность подсчитать воздействие каждой силы в отдельности с последующим сложением полученных результатов.

Все внешние силы, действующие на твердое тело, можно разбить на две группы: поверхностные и объемные.

*Поверхностные силы* – это результат контакта двух тел. Они распределены по поверхности тела, например, давление газов на поршень, давление воды на плотину и т. д. Поверхностные силы характеризуются *интенсивностью*, т. е. величиной силы, приходящейся на единицу площади поверхности, на которой распределена эта сила. Если размеры площади, на которой действует сила, малы по сравнению с размерами тела, то такой площадью можно пренебречь и считать, что сила приложена в точке. Такую силу называют *сосредоточенной*.

*Объемные силы* действуют в каждой точке тела. К ним относятся, например, силы инерции.

Показать, что если около данной точки мысленно вырезать несколько бесконечно малых параллелепипедов, грани которых различным образом ориентированы по отношению к осям координат, то, очевидно, компоненты напряжений для одного такого элементарного параллелепипеда будут отличными от компонентов для другого, так как напряжения зависят от направления рассматриваемой площадки, проходящей через заданную точку. Однако также очевидно, что независимо от способа вырезания элемента около заданной точки при подстановке значений его компонентов напряжений в уравнение на наклонной площадке получаются одни и те же значения главных напряжений для всех таких элементарных параллелепипедов. *Главные напряжения* в данной точке существуют, и *величины их* независимы от метода их нахождения, т. е. они *инвариантны* по отношению к преобразованию координатной системы. Привести основное уравнение для определения главных напряжений.

**Блок 3 (4 часа).** Обобщенный закон Гука. Основные уравнения теории упругости и способы их решения. Теорема единственности, Методы решения задач теории упругости. Методы решения плоской задачи теории упругости для односвязных областей.

**Цель лекций** для этого блока – для совместного рассмотрения теории напряжений и теории деформации установить зависимости между напряжениями и деформациями. Эти зависимости носят физический характер, поэтому их иногда называют физическими уравнениями теории упругости. Действительно, рассматривая изучаемые в курсе сопротивления материалов диаграммы растяжения различных материалов, заключаем, что зависимости напряжение – деформация определяются свойствами материалов.

Этот блок охватывает главу 3, 4 и 5 учебного пособия [3], с. 52-55; 62-65; 68-71; 75-83. Для самостоятельного изучения рекомендуется пп. 3.3; 4.2, 4.3, 5.4.2.

Для совместного рассмотрения теории напряжений и теории деформации необходимо установить зависимости между напряжениями и деформациями. Эти зависимости носят физический характер, поэтому их иногда называют физическими уравнениями теории упругости. Действительно, рассматривая изучаемые в курсе сопротивления материалов диаграммы растяжения различных материалов, заключаем, что зависимости напряжение – деформация определяются свойствами материалов.

Ограничиваясь малыми деформациями упругого тела, связь между напряжениями и деформациями можно принять линейной. При этом в общем случае каждая составляющая напряжения может зависеть от всех составляющих деформации

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= a_{11}\varepsilon_x + a_{12}\varepsilon_y + a_{13}\varepsilon_z + a_{14}\gamma_{xy} + a_{15}\gamma_{yz} + a_{16}\gamma_{zx}, \\ \sigma_y &= a_{21}\varepsilon_x + a_{22}\varepsilon_y + a_{23}\varepsilon_z + a_{24}\gamma_{xy} + a_{25}\gamma_{yz} + a_{26}\gamma_{zx}, \\ \sigma_z &= a_{31}\varepsilon_x + a_{32}\varepsilon_y + a_{33}\varepsilon_z + a_{34}\gamma_{xy} + a_{35}\gamma_{yz} + a_{36}\gamma_{zx}, \\ \tau_{xy} &= a_{41}\varepsilon_x + a_{42}\varepsilon_y + a_{43}\varepsilon_z + a_{44}\gamma_{xy} + a_{45}\gamma_{yz} + a_{46}\gamma_{zx}, \\ \tau_{yz} &= a_{51}\varepsilon_x + a_{52}\varepsilon_y + a_{53}\varepsilon_z + a_{54}\gamma_{xy} + a_{55}\gamma_{yz} + a_{56}\gamma_{zx}, \\ \tau_{zx} &= a_{61}\varepsilon_x + a_{62}\varepsilon_y + a_{63}\varepsilon_z + a_{64}\gamma_{xy} + a_{65}\gamma_{yz} + a_{66}\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Коэффициенты  $a_{mn}$  называются упругими постоянными и в общем случае их оказывается 36.

Рассматривая только обратимые процессы деформирования, т. е. такие, при которых после снятия нагрузок форма и размеры тела полностью восстанавливаются, можно убедиться, что между коэффициентами  $a_{mn}$  существует зависимость  $a_{nm} = a_{mn}$ . Тогда количество упругих постоянных окажется равным 21.

В случае изотропного тела формулы (a) не должны изменяться при любых преобразованиях координат. Преобразуя координаты путем поворота осей на  $180^\circ$ , можно установить, что нормальные напряжения не связаны с угловыми деформациями, а касательные напряжения не связаны с линейными деформациями. Кроме того, касательные напряжения не связаны с угловыми деформациями в других плоскостях. После поворотов осей на  $90^\circ$  и на произвольный угол число упругих постоянных сокращается до двух. В качестве упругих постоянных можно взять постоянные, известные из курса сопротивления материалов.

При испытании стержня на растяжение установлена пропорциональность между нормальным напряжением и линейной деформацией в одном направлении

$$\varepsilon = \sigma/E,$$

называемая законом Гука. Входящая сюда упругая постоянная  $E$  называется *модулем упругости*.

Также экспериментально установлен закон, связывающий линейные деформации в



продольном  $\varepsilon_x$  и поперечном  $\varepsilon_y$  направлениях:

$$\varepsilon_y = -\mu\varepsilon_x. \quad (б)$$

Входящая в уравнение (б) вторая упругая постоянная  $\mu$  называется коэффициентом Пуассона.

При испытании на чистый сдвиг установлена пропорциональность между касательным напряжением и угловой деформацией в плоскости действия этого напряжения

$$\gamma = \tau/G. \quad (в)$$

Здесь появляется уже третья упругая постоянная  $G$ , называемая модулем *сдвига*. Однако модуль сдвига не является новой независимой упругой постоянной, так как он выражается через первые две известной из курса сопротивления материалов зависимостью

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}.$$

Чтобы установить зависимости между составляющими деформации и составляющими напряжений при объемном напряженном состоянии, выделим из тела бесконечно малый параллелепипед и рассмотрим действие только нормальных напряжений  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\sigma_z$ . Разницей между напряжениями на противоположных гранях можно пренебрегать, так как она дает деформации более высокого порядка малости.

Воспользуемся принципом независимости действия сил. Так, при действии силы  $P_x = \sigma_x dydz$  вдоль оси  $x$  напряжение  $\sigma_x$  вызывает одновременно три линейные деформации: по линии действия силы получается линейная деформация  $\varepsilon_x = \sigma_x/E$ , а по направлениям, перпендикулярным направлению  $P_x$ , — линейные деформации  $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\mu \frac{\sigma_x}{E}$ .

При одновременном действии трех растягивающих нагрузок получится девять линейных деформаций, суммирующихся по направлению каждой из трех осей  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Получающиеся по каждому из этих направлений деформации могут быть объединены следующим образом.

Связь между угловыми деформациями и касательными напряжениями согласно закону Гука при сдвиге (в) можно представить независимо для каждой из трех плоскостей, параллельных координатным плоскостям:

$$\gamma_{xy} = \tau_{xy}/G; \quad \gamma_{yz} = \tau_{yz}/G; \quad \gamma_{zx} = \tau_{zx}/G. \quad (г)$$

Суммируя линейные деформации в направлении каждой оси (см. табл. 3), получим суммарные линейные деформации в трех взаимно перпендикулярных направлениях  $x$ ,  $y$ ,  $z$ , а также используя (г), получим шесть формул *обобщенного закона Гука*.

Они выражают линейную зависимость между составляющими деформации и составляющими напряжений в изотропном упругом теле

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}, \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G}, \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G}. \end{aligned} \right\}$$

Формулы обобщенного закона Гука в цилиндрической системе координат  $x, \theta, r$  получаем из полученной формулы простой заменой индексов  $x, y, z$  соответственно на индексы  $x, \theta, r$

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \mu(\sigma_\theta + \sigma_r)], \quad \gamma_{x\theta} = \frac{\tau_{x\theta}}{G}, \\ \varepsilon_\theta &= \frac{1}{E} [\sigma_\theta - \mu(\sigma_r + \sigma_x)], \quad \gamma_{\theta r} = \frac{\tau_{\theta r}}{G}, \\ \varepsilon_r &= \frac{1}{E} [\sigma_r - \mu(\sigma_x + \sigma_\theta)], \quad \gamma_{rx} = \frac{\tau_{rx}}{G}. \end{aligned} \right\}$$

В теории упругости часто используют обратную форму закона Гука, которая имеет вид (вывод см. [3], пп. 3.2).

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_x, \quad \tau_{xy} = G\gamma_{xy}, \\ \sigma_y &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_y, \quad \tau_{yz} = G\gamma_{yz}, \\ \sigma_z &= \lambda\theta + 2G\varepsilon_z, \quad \tau_{zx} = G\gamma_{zx}. \end{aligned} \right\}$$

Эти формулы называют *обратной формой закона Гука*.

После вывода обобщенного закона Гука рассматривается работа упругих сил и потенциальная энергия деформации (вывод см. [3], пп. 3.3).

**Блок 4 (4 часа).** Решение плоской задачи в тригонометрических рядах. Понятие о методе конечных разностей (метод сеток) для решения плоской задачи. Порядок расчета балки-стенки методом конечных разностей. Другие сеточные методы решения плоской задачи теории упругости (см. [3], пп. 5.4., 5.5, 5.6, 5.7) .

**Цель лекций** для этого блока – показать приближенное решения основных уравнений теории упругости для определения напряженно-деформированного состояния упругого тела.

Если при каком-либо напряженном состоянии тела перемещения всех его точек могут происходить только в двух направлениях, т. е. только в одной плоскости, то такая деформация называется *плоской*. Примером может служить тело, помещенное между двумя абсолютно твердыми плитами, расстояние между которыми остается неизменным, и сжимаемое силами, параллельными плоскостям плит.

В таких же условиях фактически оказывается тело, размеры которого в одном направлении, например в направлении оси  $z$ , очень велики (например длинном цилиндрическом катке, длинной пластинке и т. д.).

Если такое длинное в направлении, например, оси  $z$  тело нагружено силами (рис. 17), не меняющимися по длине тела и перпендикулярными к этому направлению, то часть его, находящаяся на значительном расстоянии от концов, фактически будет подвергаться плоской деформации.

Перемещения всех точек деформированного тела в таком случае происходят в плоскостях, перпендикулярных к длине тела.

Все уравнения теории упругости значительно упрощаются, если напряжения параллельны одной плоскости. Так, в задаче о тонкой пластинке, нагруженной по боковой поверхности силами, параллельными ее основаниям и равномерно распределенными по ее толщине (см. рис.), возможны упрощения, аналогичные упрощениям в задаче о плоской деформации.

Этот случай называется *обобщенным плоским напряженным состоянием*.

На основаниях пластинки напряжения  $\sigma_z$ ,  $\tau_{yz}$  и  $\tau_{xz}$  равны нулю, а так как она тонкая, то можно считать, что  $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{xz} = 0$  по всему объему пластинки. По той же причине остальные напряжения можно считать постоянными по толщине пластинки, т. е.

не зависящими от координаты  $z$ . Таким образом, в тонкой пластинке, нагруженной силами, параллельными плоскости  $xOy$ , возникает напряженное состояние, для которого

$$\sigma_x = \sigma_x(x, y); \quad \sigma_y = \sigma_y(x, y); \quad \tau_{xy} = \tau_{xy}(x, y).$$

В отношении напряжений обобщенное плоское напряженное состояние отличается от плоской деформации условием  $\sigma_z = 0$ . Переходя к деформациям с помощью третьей формулы закона Гука, получаем, что деформация

$$\varepsilon_z = -\frac{\mu}{E}(\sigma_x + \sigma_y).$$

Поскольку  $\varepsilon_z \neq 0$ , то основания пластинки не остаются плоскими, а будут искривляться.

При этих предположениях основные уравнения плоской деформации: дифференциальные уравнения равновесия, условия на поверхности, формулы Коши и уравнение неразрывности деформаций (53) сохраняют такой же вид и в задаче об обобщенном плоском напряженном состоянии, а формулы закона Гука примут следующий вид:

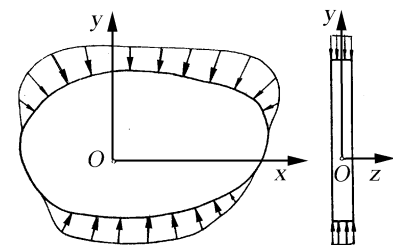


Рис. Обобщенное плоское напряженное состояние

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= (\sigma_x - \mu \sigma_y) / E; \\ \varepsilon_y &= (\sigma_y - \mu \sigma_x) / E; \\ \gamma_{xy} &= \frac{2(1 + \mu)}{E} \tau_{xy}. \end{aligned} \right\}$$

Тело называется *односвязным*, когда оно полностью занимает объем внутри одной замкнутой внешней поверхности. Если объем, занятый телом, заключен между двумя замкнутыми поверхностями, одна из которых полностью размещается внутри другой и образует внутреннюю полость в теле, то такое тело называется *двухсвязным*. При наличии двух, трех таких полостей тело называется соответственно *трех-, четырехсвязным* и т. п. Всякий открытый в обе стороны (сквозной) канал в теле также увеличивает степень связности тела на единицу.

Тело считается заданным, если известны его границы (ограничивающие поверхности) и заданы некоторые механические свойства его материала.

Отыскание бигармонической функции, удовлетворяющей условиям на контуре прямоугольной области, возможно различными методами. На лекциях ограничимся рассмотрением лишь некоторых из них: решение плоской задачи в полиномах, решение плоской задачи в тригонометрических рядах, решение плоской задачи при помощи конечных разностей.

В более сложных случаях расчета прямоугольной пластинки в качестве функции напряжений для плоской задачи  $\varphi(x, y)$  можно применять тригонометрические ряды. Исследуем для этого следующую тригонометрическую функцию:

$$\varphi = Y \cos \alpha x, \quad (a)$$

где  $Y$  – функция, зависящая только от координаты  $y$ ;

$$\alpha = n\pi/L, \quad (б)$$

$L$  – длина пластинки в направлении оси  $x$ .

Исследуем, при каких условиях функция  $\varphi(x, y)$  является бигармонической, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Подсчитаем четвертые производные от функции  $\varphi(x, y)$

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} = \alpha^4 Y \cos \alpha x, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} = -\alpha^2 Y'' \cos \alpha x, \quad \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = Y^{IV} \cos \alpha x.$$

Подставляя эти производные в бигармоническое уравнение, получаем:

$$\alpha^4 Y \cos \alpha x - 2\alpha^2 Y'' \cos \alpha x + Y^{IV} \cos \alpha x = 0$$

или

$$\cos \alpha x (Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) = 0.$$

Это уравнение обращается в тождество при любых значениях аргумента  $x$ , если  $Y(y)$  удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$Y^{IV} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения можно представить с помощью гиперболических функций в виде [3]

$$Y = A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y.$$

Подставляя это выражение в (а), получим:

$$\varphi(x, y) = \cos \alpha x (A_n \operatorname{ch} \alpha y + B_n y \operatorname{ch} \alpha y + C_n \operatorname{sh} \alpha y + D_n y \operatorname{sh} \alpha y).$$

Полученная функция бигармоническая и может быть использована для решения плоской задачи.

Аналогично можно показать, что функция

$$\varphi(x, y) = \sin \alpha x (A'_n \operatorname{ch} \alpha y + B'_n y \operatorname{ch} \alpha y + C'_n \operatorname{sh} \alpha y + D'_n y \operatorname{sh} \alpha y)$$

также является бигармонической и может быть применена для решения плоской задачи.

При поиске количественного описания физического явления обычно вводят в рассмотрение некоторую систему обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными, справедливую в определенной области, и налагают на эту систему подходящие краевые и начальные условия. На этой стадии математическая модель замкнута, и для практических применений требуется только найти решение для конкретного множества числовых данных. Здесь, однако, возникают основные трудности, так как точному решению существующими математическими методами поддаются лишь уравнения самого простого вида внутри геометрически тривиальных границ. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами являются одним из немногих примеров, для которых имеются стандартные процедуры решения, но даже здесь при большом числе зависимых переменных встречаются значительные трудности.

Чтобы преодолеть эти трудности и иметь возможность воспользоваться ПЭВМ, необходимо преобразовать задачу к чисто алгебраической форме, включающей только основные арифметические операции. Для достижения этой цели могут быть использованы различные виды дискретизации непрерывной задачи, определенной дифференциальными уравнениями. При этом бесконечное множество чисел, представляющих неизвестную функцию или функции, заменяется конечным числом неизвестных параметров, и для этого процесса, вообще говоря, требуется некоторая форма аппроксимации. Среди

различных возможных видов дискретизации одним из простейших является процесс перехода к конечным разностям. Рассмотрим основные понятия этого процесса, что позволит сформулировать суть метода.

Точное решение бигармонического уравнения  $\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = 0$  плоской задачи во многих случаях оказывается очень сложным. Для его решения можно применить приближенный метод конечных разностей. Его еще часто называют конечно-разностным, или методом сеток [3]. Идея метода состоит в том, чтобы решение плоской задачи через функцию напряжений  $\varphi$ , определяемую бигармоническим уравнением, свести к алгебраическим уравнениям.

В методе конечных разностей частные производные бигармонического уравнения *приближенно* заменяются конечными разностями, в результате чего оно превращается в алгебраическое.

Другие сеточные методы решения задач теории упругости можно перенести на самостоятельное изучение. Погрешности метода конечных разностей уменьшаются с увеличением количества узловых точек, однако при этом значительно возрастает объем вычислений. Так, при решении системы с восемью уравнениями приходится выполнять операций в шесть раз больше, чем при решении системы с четырьмя уравнениями.

Ряд погрешностей можно избежать, если удастся подобрать такое напряженное состояние, которое удовлетворяло бы во всех точках тела дифференциальным уравнениям равновесия и граничным условиям на поверхности тела. При таком подходе решение задачи будет зависеть лишь от того, насколько точно будут соблюдаться уравнения сплошности тела.

**Блок 5 (2 часа).** Плоская задача теории упругости в полярных координатах. Простое радиальное напряженное состояние. Функции напряжений для плоской задачи в полярных координатах (см. [3], пп.6.1 – 6.8).

**Цель лекций** для этого блока – показать методы решения задач теории упругости для тел, описываемых окружностью или частью ее.

При решении плоской задачи встречаются тела, ограниченные поверхностями кругового цилиндра с радиально расходящимися плоскостями. В этих случаях переход от декартовой системы координат к полярной значительно упрощает решение.

Выведем основные уравнения плоской задачи в полярных координатах: дифференциальные уравнения равновесия, уравнение сплошности, формулы Коши и формулы обобщенного закона Гука.

Вырежем из пластинки толщиной, равной единице, элемент  $abcd$  (рис. 37). Для этого проведем радиус  $Oab$  под произвольным углом  $\theta$  к оси абсцисс, затем дадим углу

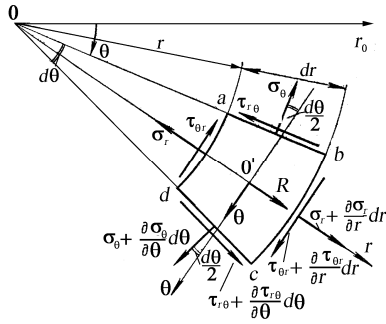


Рис. Равновесие элементарного объема в полярной системе координат

бесконечно малое приращение  $d\theta$  и проведем радиус  $Odc$ . Произвольным радиусом  $Oa = r$  проведем дугу  $ad$ , затем дадим радиусу  $r$  приращение  $ab = dr$  и проведем вторую дугу  $bc$ . Стороны полученного элемента имеют следующие размеры:

$$ab = cd = dr; \quad ad = rd\theta, \quad bc = (r + dr)d\theta.$$

На гранях этого элемента действуют следующие составляющие напряжений:  $\sigma_r$  — радиальное нормальное,  $\sigma_\theta$  — тангенциальное нормальное напряжение,  $\tau_{\theta r} = \tau_{r\theta}$  — касательные напряжения.

Дифференциальные уравнения равновесия в полярной системе координат получим как частный случай уравнений равновесия в цилиндрической системе координат.

Если положить  $\sigma_x = 0$ ;  $\tau_{xr} = \tau_{\theta r} = 0$ , то получим

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial r} + \frac{2\tau_{\theta r}}{r} + \theta &= 0; \\ \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + R &= 0. \end{aligned} \right\}$$

Особенностью этих уравнений является наличие в знаменателе  $r$ . Чем ближе к началу координат расположена рассматриваемая точка, тем быстрее будут возрастать слагаемые, содержащие множитель  $1/r$ . Поэтому уравнения (143) неприемлемы для точек, лежащих в начале координат.

Преобразуем к полярным координатам уравнение сплошности в плоской задаче. В декартовых координатах уравнение сплошности имело такой вид:

$$\nabla^2(\sigma_x + \sigma_y) = 0. \quad (a)$$

Сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам в плоской задаче является инвариантом. Действительно, подставляя в первый инвариант напряженного состояния  $\sigma_z = 0$ , получим, что при обобщенном плоском напряженном состоянии инвариантной величиной будет

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y.$$

При плоской деформации напряжение  $\sigma_z = \mu(\sigma_x + \sigma_y)$  и инвариантной величиной является

$$S_1 = \sigma_x + \sigma_y + \mu(\sigma_x + \sigma_y) = (1 + \mu)(\sigma_x + \sigma_y).$$

Таким образом, в плоской задаче в каждой точке сумма нормальных напряжений по двум взаимно перпендикулярным площадкам есть величина постоянная, и можно составить следующее тождество:

$$\sigma_x + \sigma_y \equiv \sigma_r + \sigma_\theta.$$

Заменяя с помощью этого тождества напряжения в формуле (а), получаем уравнение сплошности для плоской задачи в полярной системе координат:

$$\nabla^2(\sigma_r + \sigma_\theta) = 0.$$

В развернутом виде это уравнение имеет вид

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \right) (\sigma_r + \sigma_\theta) = 0.$$

Формулы Коши можно получить как частный случай формул, сохраняя в них только составляющие деформаций и перемещений в плоскости  $\theta\theta r$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r}; \\ \varepsilon_r &= \frac{\partial u_r}{\partial r}; \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial u_r}{\partial \theta}. \end{aligned} \right\}$$

Здесь  $u_r$  – составляющая перемещения вдоль оси  $r$ , а  $u_\theta$  – составляющая перемещения, перпендикулярная к оси  $r$ .

Формулы закона Гука для обобщенного плоского напряженного состояния в полярных координатах также получим как частный случай, сохраняя только составляющие напряжений и деформаций, действующие в плоскости  $\theta\theta r$ :

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_\theta &= (\sigma_\theta - \mu\sigma_r)/E; \\ \varepsilon_r &= (\sigma_r - \mu\sigma_\theta)/E; \\ \gamma_{\theta r} &= \frac{2(1+\mu)}{E} \tau_{\theta r}. \end{aligned} \right\}$$

При решении многих задач приходится иметь дело с напряженным состоянием, при котором во всех точках напряженного тела действуют только радиальные нормальные напряжения  $\sigma_r$ ,

а остальные составляющие напряжений  $\sigma_\theta = \tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = 0$ ,  $R = \theta = 0$ . Такое напряженное состояние называется простым радиальным напряженным состоянием.

В случае простого радиального напряженного состояния первое уравнение системы (143) обратится в тождество, а второе – уравнение равновесия и уравнение сплошности (145) – значительно упростятся



$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r}{r} &= 0; \\ \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial \theta^2} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Систему уравнений (a) можно проинтегрировать в общем виде. Для этого применим метод Фурье. Представим напряжение  $\sigma_r(r, \theta)$ , являющееся функцией двух переменных  $r$  и  $\theta$ , в виде произведения двух функций

$$\sigma_r = \varphi \cdot \psi, \quad (б)$$

одна из которых  $\varphi(r)$  является функцией только одного переменного  $r$ , а другая  $\psi(\theta)$  – одного переменного  $\theta$ .

Использование полученного решения необходимо показать на примере клина, нагруженного в вершине сосредоточенной силой (см.[3], пп. 6.3-6.6.).

Решение плоской задачи в полярных координатах в напряжениях заключается в отыскании трех функций:  $\sigma_r(r, \theta)$ ,  $\sigma_\theta(r, \theta)$  и  $\tau_{r\theta}(r, \theta)$  с помощью трех уравнений: двух уравнений равновесия и уравнения сплошности, удовлетворяющих условиям на поверхности.

Аналогично тому как это было сделано при решении плоской задачи в декартовых координатах, решение плоской задачи в полярных координатах можно свести к отысканию одной функции напряжений  $\varphi(r, \theta)$ . Введем эту функцию так, чтобы напряжения выражались через нее следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \theta^2}; \\ \sigma_\theta &= \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2}; \\ \tau_{r\theta} &= -\frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \theta} \right). \end{aligned} \right\}$$

Подставляя эти соотношения в уравнения равновесия (143), убеждаемся, что при отсутствии объемных сил уравнения равновесия обращаются в тождества.

#### **В 6 семестре используются пособия:**

1. Гоц, А.Н. Расчеты на прочность деталей ДВС при напряжениях, переменных во времени: учебное пособие./ А.Н. Гоц. – 3-е изд., испр. и доп. – М.:ФОРУМ; инфра-м, 2013. – 208 с.

2. Гоц, А.Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении: учеб. пособие./ А.Н. Гоц. В 2 ч., ч.2, Владим. гос. ун-т имени А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012. – 180 с.

3. Гоц А.Н. Крутильные колебания коленчатых валов автомобильных и тракторных двигателей: учеб. пособие / А. Н. Гоц; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2008. – 200 с.

**Блок 1 (2 часа).** Свободные крутильные колебания. Основные понятия. Одномассовая система. Двухмассовая система. Трехмассовая система. Многомассовая система. Расчет частот свободных колебаний методом остатка.

Изложение материала лекции соответствует главе 2 учебного пособия [3].

**Цель лекции** – ознакомить студентов с основными понятиями, принятыми при расчете колебаний.

Крутильные колебания могут быть двух видов: собственные, или свободные, и вынужденные.

*Собственные, или свободные,* колебания крутильной системы происходят тогда, когда система, выведенная из состояния покоя, совершает движение под действием только моментов сил упругости вала и моментов сил инерции связанных с ним масс, т. е. без воздействия на систему внешних сил и моментов. Характер собственных крутильных колебаний определяется формой, моментами инерции масс, приведенными к оси коленчатого вала, а также крутильной жесткостью коленчатого вала.

Вследствие того что при крутильных колебаниях систем всегда имеют место внутренние (гистерезис, изменение структуры материала) и внешние (трение относительно внешней среды) сопротивления, свободные колебания с течением времени прекращаются (затухают).

*Вынужденные* крутильные колебания системы возникают во время работы двигателя вследствие действия на коленчатый вал периодически изменяющихся крутящих моментов, вызывающих переменные упругие деформации скручивания отдельных участков вала. Характер вынужденных колебаний определяется величиной и периодичностью действия нагружающих вал моментов, а также величиной и характером изменения моментов сопротивлений колебаниям.

Закономерные напряжения, вызываемые крутильными и изгибными колебаниями, при недостаточной прочности коленчатого вала могут привести к усталостной его поломке. Расчеты и экспериментальные исследования показывают, что в коленчатых валах изгибные колебания обычно менее опасны, чем крутильные, поэтому в первом приближении изгибные колебания можно не учитывать.

Обычно расчет на крутильные колебания сводится к определению напряжений в коленчатом валу при резонансе, т. е. при совпадении частоты возбуждающей силы с одной из частот собственных колебаний крутильной системы вала. Если возникает необходимость в уменьшении возникающих напряжений, то на коленчатом валу устанавливают гаситель колебаний (демпфер).

Для расчета на крутильные колебания действительную (сложную) колеблющуюся систему подвижных элементов КШМ двигателя, а иногда и трансмиссии заменяют упрощенной системой, состоящей из одного или нескольких цилиндрических валов с насаженными на них дисками (сосредоточенными массами). При этом необходимо, чтобы основные динамические свойства упрощенной расчетной модели соответствовали действительной системе. Для выполнения этого условия необходимо равенство для расчетной модели и действительной системы, во-первых, кинетической и потенциальной энергии при крутильных колебаниях; во-вторых, моментов сил упругости соответственно для участков коленчатого вала от носка и маховика, передаваемых через сечение, где возникает максимальный угол закручивания вала (узловую точку). Для составления расчетных схем на кафедре «Тепловые двигатели и энергетические установки» ВлГУ разработана программа расчета на ЭВМ приведенных длин эквивалентной системы, моментов инерции при приведении масс.

Расчет коленчатого вала на крутильные колебания можно условно разделить на следующие этапы:

- замены реальной системы коленчатого вала, а иногда и трансмиссии упрощенной расчетной или эквивалентной системой;
- определения частот и относительных амплитуд свободных колебаний расчетной системы при отсутствии периодически меняющихся внешних нагрузок на вал;
- гармонического анализа крутящих моментов от сил газов и сил инерции, действующих на колена вала, а также оценки моментов внутренних сопротивлений двигателя;
- определения резонансных режимов и амплитуд колебаний масс расчетной системы при резонансе;
- определения напряжений и запаса прочности коленчатого вала с учетом крутильных колебаний;
- изыскания возможностей устранения или уменьшения недопустимо больших напряжений, возникающих от крутильных колебаний.

Рассматриваемая при расчете приведенная упрощенная колеблющаяся система по собственным частотам и формам крутильных колебаний в динамическом отношении должна быть эквивалентной действительной системе, что обеспечивается, как было сказано ранее, равенством как потенциальных, так и кинетических энергий обеих систем.

Эквивалентную систему принято считать состоящей из отрезков цилиндрического вала постоянного диаметра, не обладающего массой, но имеющего крутильную жесткость участков действительного вала  $GI_p$  ( $G$  – модуль упругости материала вала второго рода;  $I_p$  – полярный момент инерции, определяемый, как правило, по диаметру коренных шеек), а также из сосредоточенных масс, при выборе которых учтены массы всех подвижных элементов рассматриваемой системы (маховик, валы, колена, шатуны, поршни, а иногда и детали трансмиссии).

Обычно такое допущение несущественно влияет на результаты расчета. Приведение действительной колеблющейся системы к эквивалентной расчетной сводится к определению *приведенных длин* и *приведенных моментов инерции*. При этом приведении для большей точности расчетов желательно учитывать не только подвижные элементы двигателя, связанные с его коленчатым валом (детали кривошипно-шатунного механизма и цилиндропоршневой группы), но и подвижные элементы трансмиссии, не изолированные от крутильных колебаний двигателя упругим элементом или карданным валом.

**Блок 2 (2 часа).** Анализ форм колебаний. Расчет эквивалентной системы коленчатых валов автомобильных и тракторных двигателей

**Цель лекции** – научить студентов анализировать формы колебаний.

### Одномассовая система

На выведенную из состояния равновесия одномассовую крутильную систему (рис. 17, а) одновременно действуют два противоположно направленные и взаимно уравнивающиеся момента: момент сил инерции диска  $M_{\text{и}} = -I \frac{d^2\varphi}{dt^2} = -I\ddot{\varphi}$  и момент сил упругости вала  $M_{\text{у}} = c\varphi$ , где  $I$  – момент инерции массы диска относительно оси вращения;  $c = (GI_p)/l$  – коэффициент жесткости вала при кручении;  $I_p$  – полярный момент инерции сечения вала;  $\varphi$  – текущее значение угла поворота сечения вала под сосредоточенной массой. Из условия равновесия

$$-M_{\text{и}} + M_{\text{у}} = 0. \quad (30)$$

Подставив в (30) значения  $M_{\text{и}}$  и  $M_{\text{у}}$ , получим дифференциальное уравнение свободных колебаний одномассовой эквивалентной системы (рис. 17, б):

$$I\ddot{\varphi} + c\varphi = 0$$

или 
$$\ddot{\varphi} + \omega_c^2 \varphi = 0, \quad (31)$$

где  $\omega_c = \sqrt{c/I}$  – круговая частота свободных угловых колебаний,  $\text{с}^{-1}$  (число колебаний в  $2\pi$  с).

Как известно, общее решение уравнения (30) имеет вид:

$$\varphi = a \sin(\omega_c t + \varepsilon), \quad (32)$$

где  $a$  – амплитуда свободных угловых колебаний, рад;  $\varepsilon$  – начальная фаза, рад;  $t$  – время от начала отсчета.

Период одного полного колебания равен  $T = 2\pi / \omega_c$ , а собственная частота колебаний (число колебаний в секунду)  $f_c = 1/T = \omega_c / (2\pi) = 0,159\omega_c, \text{с}^{-1}$  (герц) или число колебаний в минуту  $n_c = 60f_c = 60 \cdot 0,159\omega_c = 9,55\omega_c \text{ мин}^{-1}$ .

Как видно из полученных уравнений, свободные крутильные колебания (без затухания) являются гармоническими, причем круговая частота  $\omega_c$ , период  $T$  и частота этих колебаний  $f_c$  зависят только от коэффициента жесткости  $c$  крутильной системы и момента инерции колеблющейся массы  $I$ , но не зависят от начальной амплитуды. Следовательно, при предварительном закручивании системы на разные углы амплитуды свободных крутильных колебаний будут различными, а период и частота останутся одними и теми же.

Откладывая по длине эквивалентного вала угловые амплитуды (максимальные угловые отклонения), можно получить график свободных крутильных колебаний вала (рис. 17, в).

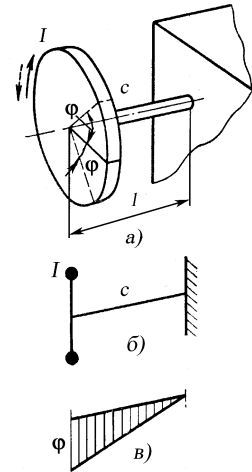


Рис. 17. Одномассовая крутильная система: а – крутильная система; б – эквивалентная система; в – условная диаграмма амплитудных значений при кручении вала

### Вопросы для самопроверки

1. Что называется коэффициентом жесткости участка вала?
2. Дайте определение круговой частоты свободных угловых колебаний. Какая размерность этой величины?

3. Что такое период крутильных колебаний?
4. Как составляется дифференциальное уравнение свободных крутильных колебаний?

### 2.3. Двухмассовая система

Расчетная схема приведенной крутильной системы одноколенного вала с маховиком одноцилиндрового двигателя может быть представлена как двухмассовая (рис. 18, а).

Свободные колебания двухмассовой системы можно представить как колебания с одной общей собственной частотой двух одномассовых систем (рис. 18, б). Поэтому собственная круговая частота колебаний системы

$$\omega_c = \sqrt{c_1/I_1} = \sqrt{c_2/I_2}.$$

Общая податливость вала, соединяющего массы как системы с последовательно соединенными упругими элементами, равна:

$$1/c_{1,2} = 1/c_1 + 1/c_2 = 1/(\omega_c^2 I_1) + 1/(\omega_c^2 I_2).$$

После преобразований находим собственную частоту колебаний двухмассовой системы

$$n_c = 9,55\omega_c = 9,55\sqrt{\frac{c_{1,2}(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}, \text{ мин}^{-1}$$

$$\text{или } f_c = 0,159\omega_c = 0,159\sqrt{\frac{c_{1,2}(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}}, \text{ с}^{-1}.$$

График угловых колебаний сечений вала по его длине характеризует так называемую форму свободных колебаний (рис. 18, в). При возникновении свободных крутильных колебаний обе массы системы колеблются в разные стороны относительно сечения, которое в эквивалентной системе и графике угловых амплитуд (рис. 18, б и в) отмечено точкой  $k$ . Ее называют узловой точкой.

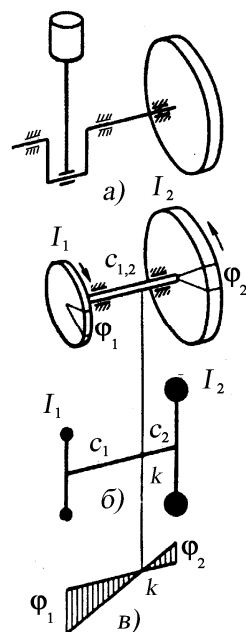


Рис. 18. Двухмассовая крутильная система: а – крутильная система; б – эквивалентная система; в – форма колебаний

### Вопросы для самопроверки

1. Сколько частот свободных колебаний определяется для двухмассовой крутильной системы?
2. Что называют узловой точкой?
3. Что называется круговой частотой собственных колебаний?

### 2.4. Трехмассовая система

Рассмотрим определение частот свободных колебаний трехмассовой системы (рис. 19). Если в одноцилиндровом двигателе (см. рис. 18, а) учесть шкив, установленный на носке коленчатого вала, то при составлении эквивалентной системы придем к трехмассовой крутильной системе. Далее будет показано, что для упрощения расчетов возможно уменьшение числа масс крутильной системы.

Обозначим моменты сил упругости участков вала между первой и второй, второй и третьей массами соответственно

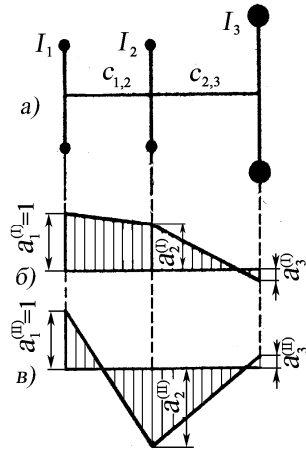


Рис. 19. Трехмассовая крутильная система: а – эквивалентная система; б – одноузловая форма колебаний; в – двухузловая форма колебаний

$$M_{y1,2} = c_{1,2} (\varphi_1 - \varphi_2)$$

и

$$M_{y2,3} = c_{2,3} (\varphi_2 - \varphi_3),$$

где  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  и  $\varphi_3$  – углы поворота при крутильных колебаниях первой, второй и третьей масс.

Из условия равенства моментов сил инерции и упругости для каждой из масс получим дифференциальные уравнения, характеризующие свободные колебания трехмассовой системы:

$$\left. \begin{aligned} I_1 \ddot{\varphi}_1 + c_{1,2} (\varphi_1 - \varphi_2) &= 0; \\ I_2 \ddot{\varphi}_2 - c_{1,2} (\varphi_1 - \varphi_2) + c_{2,3} (\varphi_2 - \varphi_3) &= 0; \\ I_3 \ddot{\varphi}_3 - c_{2,3} (\varphi_2 - \varphi_3) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (33)$$

Решения этих уравнений могут быть найдены в форме

$$\left. \begin{aligned} \varphi_1 &= A_1 \sin(\omega_c t + \varepsilon); \\ \varphi_2 &= A_2 \sin(\omega_c t + \varepsilon); \\ \varphi_3 &= A_3 \sin(\omega_c t + \varepsilon). \end{aligned} \right\}$$

Эти решения содержат четыре неизвестных:  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $A_3$  – амплитуды крутильных колебаний каждой из масс, а также  $\omega_c$  – собственную частоту колебаний трехмассовой системы. Таким образом, число неизвестных на единицу больше числа уравнений. Однако выход из этого положения достаточно простой. Мы можем значение одной из амплитуд, например  $A_1$ , задать произвольно.

Чтобы исключить из решения  $A_1$ , разделим все три решения на эту величину и введем обозначения относительных амплитуд

$$A_1/A_1 = a_1 = 1; \quad A_2/A_1 = a_2; \quad A_3/A_1 = a_3.$$

Подставив эти решения в дифференциальные уравнения (33) и сократив последние на  $\sin(\omega_c t + \varepsilon)$ , получим систему трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} -I_1 \omega_c^2 + c_{1,2} (1 - a_2) &= 0; \\ -I_2 \omega_c^2 - c_{1,2} (1 - a_2) + c_{2,3} (a_2 - a_3) &= 0; \\ -I_3 \omega_c^2 - c_{2,3} (a_2 - a_3) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (34)$$

Из первого уравнения следует, что

$$a_2 = 1 - \frac{I_1}{c_{1,2}} \omega_c^2. \quad (35)$$

Подставив значение  $a_2$  в третье уравнение системы (34), получим:

$$a_3 = \frac{a_2}{1 - \frac{I_3}{c_{2,3}} \omega_c^2} = \frac{1 - \frac{I_1}{c_{1,2}} \omega_c^2}{1 - \frac{I_3}{c_{2,3}} \omega_c^2}. \quad (36)$$

Сложив три уравнения системы (34) и подставив в них значения  $a_2$  и  $a_3$ , после преобразований получим частотное уравнение:

$$\frac{I_1 I_2 I_3}{c_{1,2} c_{2,3}} \omega_c^4 + \left( \frac{I_1 I_2 + I_1 I_3}{c_{1,2}} + \frac{I_3 I_1 + I_3 I_2}{c_{2,3}} \right) \omega_c^2 + (I_1 + I_2 + I_3) = 0. \quad (37)$$

Решая биквадратное уравнение (37), можно определить собственные круговые частоты  $\omega_c$ . Два из четырех корней этого уравнения положительные: обозначим соответствующие им частоты  $\omega_{cI}$  и  $\omega_{cII}$ .

Подставляя последовательно эти положительные значения  $\omega_{cI}$  и  $\omega_{cII}$  в зависимости (35) и (36), получим по два различных значения относительных амплитуд как для  $a_2$ , так и для  $a_3$ , соответствующие двум формам свободных колебаний. Эти формы колебаний можно описать двумя графиками относительных угловых амплитуд (см. рис. 19, б, в).

Колебания с частотой  $\omega_{cI}$  при  $\omega_{cI} < \omega_{cII}$  называются первым главным видом колебаний. При этом амплитуды относятся между собой как  $A_1^I : A_2^I : A_3^I = 1 : a_2^I : a_3^I$ .

Отложив на графике относительные амплитуды угловых колебаний отдельных масс и соединив их ломаной линией, получим форму колебаний, имеющую один узел колебаний (см. рис. 19, б).

Колебания с более высокой частотой  $\omega_{cII}$  называются вторым главным видом колебаний. Эта форма колебаний (см. рис. 19, в) имеет два узла колебаний и поэтому называется двухузловой.

Отношения амплитуд колебаний будут следующими:  $A_1^{II} : A_2^{II} : A_3^{II} = 1 : a_2^{II} : a_3^{II}$ .

В общем случае система будет совершать свободные колебания, являющиеся результатом сложения главных колебаний первого и второго видов.

Для самостоятельного изучения рекомендуется [2] пп. 7.9, 7.10, 7.11 и 7.12.

**Блок 3 (2 часа).** Вынужденные крутильные колебания. Анализ возбуждающих моментов.

**Цель лекции.** Ознакомить студентов с вынужденными колебаниями.

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КРУТИЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ

### 3.1. Основные понятия

Под вынужденными крутильными колебаниями понимают установившиеся угловые колебания упругой крутильной системы, происходящие под действием возбуждающего периодического момента. Периодическое движение обладает тем

свойством, что оно полностью воспроизводится по истечении некоторого промежутка времени, называемого периодом движения.



Рис. 23. Сложение двух гармонических движений различных частот: 1 –  $a \sin \omega t$ ; 2 –  $(a/2) \sin 2\omega t$ ; 3 – суммарное (негармоническое)

Всякое гармоническое движение есть движение периодическое, но не всякое периодическое движение является гармоническим. Например, на рис. 23 изображено движение, представляющее собой наложение двух колебаний, совершающихся по закону синуса, но имеющих различные частоты:

$$\varphi = a \sin \omega t + \frac{a}{2} \sin 2\omega t.$$

Таким образом, сложение двух гармонических движений

1 –  $a \sin \omega t$  и 2 –  $(a/2) \sin 2\omega t$  приводит к движению, которое является периодическим, но не является гармоническим (см. рис. 23).

Известно, что периодическая функция  $f(t)$  с частотой  $\omega$  может быть разложена на ряд синусоид с частотами  $\omega, 2\omega, 3\omega, 4\omega \dots k\omega$ :

$$f(t) = A_0 + A_1 \sin(\omega t + \varphi_1) + A_2 \sin(2\omega t + \varphi_2) + A_3 \sin(3\omega t + \varphi_3) + \dots + A_k \sin(k\omega t + \varphi_k) + \dots, \quad (44)$$

где предполагается, что  $f(t)$  повторяет свои значения по истечении каждого промежутка  $T=2\pi/\omega$ . Амплитуды различных колебаний  $A_1, A_2, A_3 \dots$  и их начальные фазы  $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots$  могут быть определены аналитически, если вид функции  $f(t)$  задан. Написанный ряд (44) известен под названием ряда Фурье.

Отметим, что не всякая периодическая функция  $f(t)$  может быть разложена в ряд Фурье, а лишь удовлетворяющая условиям Дирихле: она в рассматриваемом промежутке ограничена, причем этот промежуток может быть разбит на конечное число частей, в каждой из которых данная функция непрерывна и монотонна.

Второй член называется основной или первой гармоникой функции  $f(t)$  и вообще последовательно  $(k+1)$ -й член с частотой  $k\omega$  называется  $k$ -й гармоникой функции  $f(t)$ . Нетрудно заметить, что при разложении периодической функции  $f(t)$  на ряд синусоид с различными амплитудами, начальными фазами и периодами каждая из них укладывается в период исходной кривой разное число раз: 1, 2, 3.... Это математические гармоники 1-го, 2-го, 3-го и т. д. порядков.

Так как

$$\sin(k\omega t + \varphi_k) = \sin k\omega t \cos \varphi_k + \cos k\omega t \sin \varphi_k,$$

то написанный ряд можно представить еще так:

$$f(t) = a_1 \sin \omega t + a_2 \sin 2\omega t + \dots + a_k \sin k\omega t + \dots + b_0 + b_1 \cos \omega t + b_2 \cos 2\omega t + \dots + b_k \cos k\omega t + \dots \quad (45)$$

Постоянный член  $b_0$  представляет собой “среднюю” высоту кривой  $f(t)$  за время одного колебания. Для кривой, которая на протяжении одного периода отклоняется от нулевой линии на одинаковое расстояние в ту и другую сторону, член  $b_0$  равен нулю. Амплитуды  $a_1, a_2, \dots, a_k, \dots, b_1, b_2, \dots, b_k, \dots$  в (45) могут быть определены по формулам



$$b_0 = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) dt; a_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \sin k\omega t dt; b_k = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \cos k\omega t dt. \quad (46)$$

С помощью формул (46) мы имеем возможность найти  $a_0$ ,  $a_k$  и  $b_k$  для любой заданной периодической кривой, удовлетворяющей условиям Дирихле, т.е. провести ее гармонический анализ.

Это относится и к кривой крутящего момента поршневого двигателя, так как вынужденные крутильные колебания происходят с частотой возбуждающего момента. Амплитуда крутильных колебаний отдельных масс при вынужденных колебаниях зависит от соотношения частот гармоник возбуждающих моментов  $k\omega$  и свободных колебаний  $\omega_{ci}$ , а также от соотношения величин возбуждающего момента и момента сопротивления. При равенстве частоты одного из гармонических возбуждающих моментов одной из частот собственных колебаний системы  $k\omega = \omega_{ci}$  возникают резонансные колебания с большой амплитудой.

### Вопросы для самопроверки

1. Каким условиям должна соответствовать периодическая функция для ее разложения в ряд Фурье?
2. Будет ли гармоническим движением сложение двух гармонических движений?
3. Что называется  $k$ -й гармоникой периодической функции?

### 3.2. Анализ возбуждающих моментов

Крутильные колебания валов возникают вследствие неравномерности крутящего момента, которая в основном объясняется тем, что на каждое колено вала действуют непостоянные крутящие моменты, возникающие в результате действия сил газов и сил инерции.

Неравномерность крутящего момента на коленах вала двигателя зависит от тактности двигателя, масс возвратно-поступательно движущихся деталей кривошипного механизма, частоты вращения коленчатого вала и нагрузки на двигатель (сил газов), а для всего двигателя – и от числа цилиндров, а также их расположения.

На рис. 24 изображены кривые крутящих моментов в функции угла поворота коленчатого вала, возникающих от сил газов (кривая 1), от сил инерции (кривая 2) и от суммы этих сил (кривая 3) для одного цилиндра четырехтактного двигателя. Крутящий момент от сил газов, а следовательно, и суммарный крутящий момент полностью проходит цикл изменения за время двух оборотов коленчатого вала, т. е. за время поворота вала на угол  $4\pi$ .

Таким образом, период  $T$  крутящего момента одноцилиндрового четырехтактного двигателя, вращающегося с угловой скоростью  $\omega = (\pi n)/30$ , равен  $T = (4\pi)/\omega = 120/n$ , с.

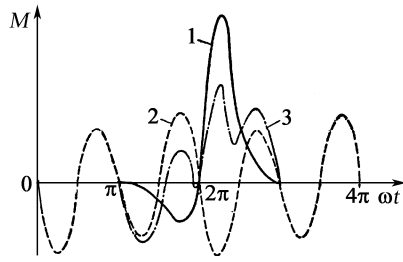


Рис. 24. Кривая крутящих моментов в зависимости от угла поворота кривошипов: 1 – от сил газов; 2 – от сил инерции; 3 – от суммы сил газовых и инерционных

Для двухтактного двигателя период будет в 2 раза меньшим:  $T = (2\pi)/\omega = 60/n$ , с.

Протекание крутящего момента, как видно из рис. 24, имеет периодический, но не синусоидальный (гармонический) характер.

Для того чтобы сделать доступным математическое исследование влияния такого сложного по форме крутящего момента на крутильные колебания коленчатого вала, периодическую кривую, характеризующую крутящий момент, действующий на каждое колено, обычно проводят его гармонический анализ, выделив гармоники, оказывающие наибольшее влияние на амплитуду крутильных колебаний. Как было показано ранее, гармонический анализ – процесс разложения сложной периодической кривой на гармонические составляющие – гармоники.

Каждая гармоническая составляющая крутящего момента (гармоника) возбуждает колебания крутильной системы. Для любого сечения вала, суммируя отдельные угловые отклонения от равновесного положения, вызываемые этими гармониками, можно найти суммарное отклонение вала, которое соответствует действию заданного крутящего момента.

Так как крутящий момент изменяется по периодическому закону, гармонические составляющие любого порядка должны укладываться в основной периоде целое число раз. При исследовании крутильных колебаний порядок гармоник обычно определяют не по периоду рабочего процесса, совершающегося в четырехтактном двигателе в течение двух оборотов коленчатого вала, а по периоду, соответствующему времени одного оборота коленчатого вала, т. е. порядок гармоник определяется числом периодов гармонического момента в течение одного оборота коленчатого вала. У четырехтактных двигателей вместо так называемых математических гармоник 1, 2, 3-го и т.д. порядков используют так называемые моторные гармоники  $\frac{1}{2}$ , 1,  $1\frac{1}{2}$ -го и т.д. порядков. У четырехтактных двигателей цикловая угловая скорость в 2 раза меньше угловой скорости коленчатого вала (цикл протекает за два оборота), а в двухтактных – равна ей.

Возмущающий момент от действия газовых сил и сил инерции в  $i$ -м цилиндре представим в виде

$$M_i = \sum_{k=0,5}^N M_{i,k}^a \sin(k\omega t + \beta_{i,k} + k\delta_i) = \sum_{k=0,5}^N (P_i \sin k\omega t + L_i \cos k\omega t); \quad (47)$$

$$P_i = M_{i,k}^a \cos(\beta_{i,k} + k\delta_i); L_i = M_{i,k}^a \sin(\beta_{i,k} + k\delta_i),$$

где  $N$  – число гармоник (для четырехтактных двигателей – 0,5; 1,0; 1,5; ...  $N$ , двухтактных – 1, 2,0, ...,  $N$ );  $M_{i,k}^a$  – амплитуда  $k$ -й гармоники возмущающего момента  $M_i$ , действующего в  $i$ -м цилиндре от газовых и инерционных сил, Н·м;  $\beta_{i,k}$  – ее фазовый угол, град;  $\delta_i$  – угол поворота коленчатого вала между вспышками в первом и  $i$ -м цилиндрах двигателя, град.

### Вопросы для самопроверки

1. Какой цикл изменения крутящего момента от газовых сил у четырехтактного двигателя? А у двухтактного?
2. Какой цикл изменения крутящего момента от сил инерции поршневого двигателя?
3. Проанализируйте по рис. 24, чему равно среднее значение момента сил инерции за период  $4\pi$ ?
4. От чего зависит неравномерность крутящего момента на коленах вала поршневого двигателя?
5. Почему ввели понятие моторных гармоник и чем они отличаются от математических?
6. Как определяется угол поворота коленчатого вала между вспышками в первом и  $i$ -м цилиндрах?

**Блок 4 (2 часа).** Методика и алгоритм гармонического анализа кривой крутящего момента ДВС. Работа гармонического крутящего момента поршневого двигателя. Энергия, рассеиваемая при крутильных колебаниях. Вынужденные колебания одномассовой системы с сопротивлением.

В [3] для самостоятельного изучения рекомендуется пп. 3.1- 3.3.

#### Методика и алгоритм гармонического анализа кривой крутящего момента ДВС

Рассмотрим методику и алгоритм гармонического анализа кривой крутящего момента для определения амплитудных значений гармонических составляющих момента газовых сил  $M_g$ , момента сил инерции  $M_j$  и суммарного момента  $\bar{M} = \bar{M}_g + \bar{M}_j$ , а также фазовых углов  $\beta_g$  и  $\beta_j$  моментов  $M_g$  и  $M_j$  соответственно. Часто при расчетах рекомендуется ограничиваться гармоническим анализом только  $M_g$  [6]. Однако, как показывают расчеты, пренебрежение силами инерции в случае резонанса 1, 2 и 4-й гармоник дает значения углов закручивания от крутильных колебаний, заниженные на 15 – 20 % [13, 14].

Если использовать для гармонического анализа метод наименьших квадратов [15, 16], то он приводит к следующей вычислительной процедуре. Пусть  $f(\varphi)$ <sup>1</sup> – периодическая функция, заданная на отрезке  $[0, 2l]$  таблицей своих значений в равноотстоящих дискретных точках  $\varphi_i = 2li/n$  ( $i=0, 1, \dots, n-1$ ). Коэффициенты тригонометрического многочлена

$$T_N(\varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^N \left( A_k \cos \frac{\pi k \varphi}{l} + B_k \sin \frac{\pi k \varphi}{l} \right), \quad (48)$$

осуществляющего наилучшее приближение  $f(\varphi)$  в среднем квадратическом, вычисляются по формулам Бесселя:

---

<sup>1</sup> В расчетах принимается, что  $\varphi = \omega t$ .

$$A_0 = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi_i); \quad A_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi_i) \cos \frac{\pi k \varphi_i}{l};$$

$$B_k = \frac{2}{n} \sum_{i=0}^{n-1} f(\varphi_i) \sin \frac{\pi k \varphi_i}{l},$$
(49)

а  $N$  – число гармоник.

В случае, если  $f(\varphi)$  обладает каким-либо свойством четности, формулы (49) упрощаются. Так, например, если  $f(\varphi)$  – нечетная функция, то многочлен (48) принимает вид

$$T_N(\varphi) = \sum_{k=1}^N B_k \sin \frac{\pi k \varphi}{l},$$
(50)

где

$$B_k = \frac{4}{n} \sum_{i=1}^{\frac{n-1}{2}} f(\varphi_i) \sin \frac{\pi k \varphi_i}{l}.$$
(51)

Здесь предполагается, что  $n$  четно, так что точка  $\varphi = l$  входит в число точек  $\varphi_i$ .

Вычисления по формулам (49) – (51) легко реализуются на ПЭВМ. Для анализа кривой крутящего момента четырехтактного двигателя многочлен (48) запишем в виде

$$T_N(\varphi) = A_0 + \sum_{k=1}^N M_k \sin\left(\frac{\pi k \varphi}{l} + \beta_k\right),$$
(52)

где  $M_k = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}$  – амплитуда  $k$ -й гармоники;  $\beta_k$  – начальная фаза  $k$ -й гармоники, определяемая из равенств

$$\sin \beta_k = \frac{A_k}{M_k}; \quad \cos \beta_k = \frac{B_k}{M_k}.$$

Известно, что многочлен наилучшего приближения определяется однозначно по формулам (48), (49), если  $2N+1 \leq n$ .

Таким образом, максимальное число гармоник в выражении (52), которое можно получить описанным способом, есть

$$N_{\max} = \left[ \frac{n-1}{2} \right]$$
(53)

целая часть числа  $(n-1)/2$ .

Вычислив многочлен  $T_N(\varphi)$ , приближенно полагаем  $f(\varphi) = T_N(\varphi)$ . В дальнейшем, выписывая для различных функций соответствующие им тригонометрические многочлены, мы не будем вводить для них специальных обозначений типа  $T_N(\varphi)$ , а будем использовать обозначения самих функций, так что равенства, аналогичные равенству (52), следует понимать как приближенные.

Пусть  $M_j(\varphi)$ ,  $M_r(\varphi)$  – составляющие крутящего момента от сил инерции и газовых сил соответственно.

Тогда приближенно

$$\begin{aligned} M_j(\varphi) &= P_j(\varphi)r(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 2\pi; \} \\ M_r(\varphi) &= P_r(\varphi)r(\sin \varphi + \frac{\lambda}{2}\sin 2\varphi), \quad 0 \leq \varphi \leq 4\pi \} \end{aligned} \quad (54)$$

где  $P_j(\varphi)$ ,  $P_r(\varphi)$  – силы инерции и газовые силы,  $\lambda = r/l$  ( $l$  – длина шатуна;  $r$  – радиус кривошипа).

Значения  $P_j(\varphi)$  определяем расчетом, а  $P_r(\varphi)$  – с помощью индикаторных диаграмм и сводим их в таблицы, шаг которых обозначим через  $\Delta\varphi$ . Формулы (48) – (52) для функций  $M_j(\varphi)$ ,  $M_r(\varphi)$  принимают вид (число гармоник  $N$  для четырехтактных двигателей – 0,5; 1,0; 1,5; ...,  $N$ , а для двухтактных – 1,0; 2,0; ...,  $N$ )

$$M_j(\varphi) = \sum_{k=0,5}^N M_{jk} \sin k\varphi, \quad (55)$$

$$M_{jk} = \frac{2}{n} \sum_{i=1}^{n-1} M_j(\varphi_i) \sin k\varphi_i, \quad (56)$$

где

$$\varphi_i = i\Delta\varphi$$

$n=\pi/\Delta\varphi$  (предполагается, что  $\pi/\Delta\varphi$  – целое).

$$M_r(\varphi) = M_0 + \sum_{k=0,5}^{2N} M_{rk} \sin(\frac{k\varphi}{2} + \beta_{rk}), \quad (57)$$

где

$$\begin{aligned} M_0 &= \frac{1}{4n} \sum_{i=0}^{4n-1} M_r(\varphi_i), \quad M_{rk} = \sqrt{A_k^2 + B_k^2}; \\ A_k &= \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{4n-1} M_r(\varphi_i) \cos \frac{k\varphi_i}{2}; \quad B_k = \frac{1}{2n} \sum_{i=0}^{4n-1} M_r(\varphi_i) \sin \frac{k\varphi_i}{2}; \\ \sin \beta_{rk} &= \frac{A_k}{M_{rk}}; \quad \cos \beta_{rk} = \frac{B_k}{M_{rk}}. \end{aligned} \quad (58)$$

Сложив равенства (55) и (57), получим значение суммарного момента:

$$M(\varphi) = M_0 + \sum_{k=1}^{2N} M_k \sin(\frac{k\varphi}{2} + \beta_k). \quad (59)$$

Несложный подсчет приводит к формулам

$$M_k = M_{rk}; \quad \beta_k = \beta_{rk},$$

если  $k$  нечетно, и

$$\begin{aligned} M_k &= \sqrt{M_{rk}^2 \sin^2 \beta_{rk} + (M_{j\frac{k}{2}} + M_{rk} \cos \beta_{rk})^2}; \\ \sin \beta_k &= \frac{M_{rk} \sin \beta_{rk}}{M_k}; \quad \cos \beta_k = \frac{M_{rk} \cos \beta_{rk} + M_{j\frac{k}{2}}}{M_k}, \end{aligned} \quad (60)$$

если  $k$  четно.

В силу (60) нужно вычислять только четные  $M_k$ ,  $\beta_k$ . Из выражения (53) и выбора  $n$  следует, что в формуле (59)  $N \leq n-1$ .

Приведем данные расчета на ПЭВМ для четырехтактного шестицилиндрового двигателя с воздушным охлаждением 6Ч10,5/12,5 (Д160), имеющего следующие показатели: номинальная мощность  $N_e = 76$  кВт;  $p_e = 0,68..0,72$  МПа; номинальная частота вращения  $n = 2200$  мин<sup>-1</sup>, порядок работы цилиндров 1-5-3-6-2=4. В расчетах принималось  $n = 18$  ( $\Delta\varphi = 10^\circ$ ), число отыскиваемых гармоник  $N = 9$  (табл. 1).

Таблица 1

Результаты гармонического анализа моментов от газовых  
и сил инерции дизеля 6Ч 10,5/12 (Д160)

$n=2000$ мин <sup>-1</sup> ; $p_z=0,72$ МПа				$n=2000$ мин <sup>-1</sup> ; $p_z=0,76$ МПа		
$k$	$M_{jk}$ , Н·м	$M_{гk}$ , Н·м	$M_k$ , Н·м	$k$	$M_{гk}$ , Н·м	$M_k$ , Н·м
1	31,203	138,856	165,551	1	174,441	203,321
2	-223,765	130,752	95,687	2	149,68	74,659
3	- 93,644	102,586	10,211	3	111,522	27,783
4	- 8,714	76,734	68,218	4	83,643	75,127
5	- 0,0147	56,928	56,916	5	58,802	58,780
6	0,0053	40,993	40,993	6	42,183	42,178
7	0,0072	28,753	28,763	7	27,666	27,672
8	0,0117	20,266	20,266	8	19,364	19,374
9	- 0,0055	14,621	14,621	9	13,318	14,317
$n=2200$ мин <sup>-1</sup> ; $p_z= 0,76$ МПа				$n=2200$ мин <sup>-1</sup> ; $p_z=0,82$ МПа		
$I$	$M_{jk}$ , Н·м	$M_{гk}$ , Н·м	$M_k$ , Н·м	$k$	$M_{гk}$ , Н·м	$M_k$ , Н·м
1	38,641	174,411	21,308	1	186,2	221,617
2	-269,059	149,690	119,805	2	166,53	102,527
3	-110,985	118,795	15,043	3	127,995	23,941
4	- 7,830	83,643	75,989	4	86,132	78,537
5	2,832	58,800	61,485	5	56,477	59,172
6	2,704	42,184	44,668	6	39,161	41,611
7	2,322	27,665	29,714	7	26,881	28,919
8	1,744	19,364	20,707	8	18,737	20,129
9	1,048	13,317	15,102	9	13,681	14,376

Для постоянной частоты вращения коленчатого вала  $M_{jk}$  постоянны, так же как при постоянной  $p_z$  постоянны  $M_{гk}$ . Сравнивая значения  $M_{гk}$  и  $M_k$ ; (см. табл. 1) для 1, 2 и 4-й целочисленных гармоник, убеждаемся, что пренебрежение силами инерции дает здесь существенные погрешности; что касается 3-й гармоники, то в этом случае результирующий момент при любом режиме работы оказывается в несколько раз меньше момента газовых сил (величины  $M_{jk}$ ,  $M_{гk}$  и  $M_k$ , Н·м).

Результаты расчета по приведенным зависимостям полностью подтвердились экспериментальными исследованиями [5].

На кафедре «Тепловые двигатели и энергетические установки» разработана программа «Moment» расчета на ПЭВМ вынуждающих моментов поршневого двигателя. Программа позволяет определить амплитудные значения момента после разложения на гармоники, а также построить графики до 9-го порядка включительно. В программу входят файлы:

Имя файла	Назначение файла
INPUT	Подготовка исходных данных
RVMPD.exe	Запуск программы
REZ.C	Результаты расчета
REZ_1.C	Исходные данные для построения графика

Исходные данные заполняются в файле «INPUT» (открывается F4, далее, если шрифт не кириллица, то в меню через «формат» выбрать в подменю «шрифт» с обозначением “terminal”) без смещения строк. Переводом курсора на файл «RVMPD.exe» и нажатием “Enter” программа запускается. Пример подготовки исходных данных приведен в прил. 3. Результаты расчета приводятся в файле «REZ.C».

**Блок 5 (2 часа).** Вынужденные колебания многомассовой системы с сопротивлением. Определение амплитуд колебаний и напряжений при резонансе. Способы уменьшения амплитуд и дополнительных напряжений при крутильных колебаниях. Демпферы крутильных колебаний

**Цель лекции** – ознакомить студентов с вынужденными колебаниями.

Материал читается по главе пособия [3].

**Блок 6 (2 часа).** Выбор оптимального коэффициента демпфирования и коэффициента жесткости упругого слоя демпферов внутреннего трения. Определение демпфирующих свойств и коэффициента жесткости резинового слоя.

Материал излагается по учебному пособию [3].

**Блок 7 (2 часа).** Определение вязкости силиконовой жидкости при изменении градиента скорости сдвига и температуры (глава 4 [3]).

**Цель лекции** – ознакомить с свойствами силиконовых жидкостей.

**Блок 8 (2 часа).** Расчет параметров демпферов внутреннего трения (глава 5 [3]).

**Цель лекции** – дать основные понятия о расчете параметров демпферов внутреннего трения.

**Блок 9 (2 часа).** Метод оценки параметрам демпферов крутильных колебаний жидкостного трения на стадии проектирования (глава 5[3]).

Разработал  
д.т.н., профессор  
кафедры ТД и ЭУ



А.Н.Гоц