МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

по дисциплине «Численные методы расчета прочности»

Цель практических занятий по всему курсу:

Для подготовки студентов к самостоятельной работе в период выполнения магистерской диссертации при проведении практических занятий каждому студенту выдается индивидуальное задание, которое он должен выполнить самостоятельно. Одна из типовых задач решается совместно с преподавателем.

Примеры решения задачи вариационным методом.

Пример 1. Применение метода Рэлея – Ритца рассмотрим задачу об изгибе свободно опертого по краям стержня постоянной изгибной жесткости EI длиной l, нагруженного равномерно распределенной поперечной нагрузкой q (рис. 1).

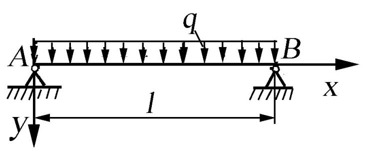


Рис. 1. Балка со свободно опертыми краями и нагруженная равномерно распределенной нагрузкой

Для прогиба u_y применим выражение[1] $u_z = a\sin(\pi x/l)$, которое удовлетворяет следующим граничным условиям (прогибы и моменты на опорах в сечениях A и B) равны нулю, (см. рис. 45):

при $x = 0$ (сечение A) и $x = l$ (сечение B) $u_y = 0,\ \dfrac{d^2u_y}{dx^2} = 0.$

Потенциальная энергия изгиба стержня

$$W = \frac{1}{2EI}\int_0^l M_z^2 dx\,.$$

Но $EI\dfrac{d^2u_y}{dx^2} = M_z$, тогда

$$W = \frac{EI}{2}\int_0^l \left(\frac{d^2u_y}{dx^2}\right)^2 dx\,.$$

После подстановки $u_y = a\sin(\pi x/l)$ в выражение для W и интегрирования получим

$$W = \frac{EI}{2}\cdot\frac{l}{2}a^2\frac{\pi^4}{l^4}.$$

Работа внешних сил

$$A = \int_0^l q u_y dx = qa\int_0^l \sin\frac{\pi x}{l}dx = 2qa\frac{l}{\pi}.$$

Окончательно для энергии Э получим

$$\acute{Y} = \frac{EI}{2}\cdot\frac{l}{2}a^2\frac{\pi^4}{l^4} - 2qa\frac{l}{\pi}.$$

Далее из условия $\partial\acute{Y}/\partial a = 0$ получим значение параметра a – максимального прогиба стержня в середине пролета:

$$\frac{\partial\acute{Y}}{\partial a} = \frac{EI}{2}\cdot\frac{a\pi^4}{l^3} - 2q\frac{l}{\pi} = 0,$$

откуда

---

[1] Нетрудно заметить, что u_z аппроксимируется таким образом, чтобы при $x = l/2$ прогиб был максимальный.

$$a = \frac{4ql^4}{\pi^5 EI} = 0{,}013071\frac{ql^4}{EI}.$$

Как известно [8, 17], при интегрировании упругой линии балки[2]

$$EI\frac{d^2u_y}{dx^2} = -\frac{ql}{2}x + \frac{qx^2}{2} \qquad (\kappa)$$

максимальный прогиб в середине пролета равен

$$\frac{5ql^4}{384EI} = 0{,}013021\frac{ql^4}{EI}.$$

Сравнение с решением, полученным вариационным методом (путем замены выражения для прогиба полуволной синусоиды) показывает, что ошибка составляет около 0,4 %.

Пример 2. Покажем использование метода Бубнова – Галеркина в задаче об изгибе балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой и свободно опертой по краям (см. рис. 45). Уравнение упругой линии оси балки при изгибе имеет вид

$$EI\frac{d^4u_z}{dx^4} - q = 0.$$

Граничные условия задачи: при $x = 0,\ x = l$ прогибы и изгибающие моменты отсутствуют $u_z = 0,\ d^2u_z \big/ dx^2 = 0.$ В качестве аппроксимирующей функции прогиба балки, как и прежде, примем $u_z = a\sin(\pi x/l)$.

Так как $\dfrac{d^4u_z}{dx^4} = a\dfrac{\pi^4}{l^4}\sin\dfrac{\pi x}{l}$, то, используя процедуру (9.24) (i=1), получим:

$$\int_0^l \left(EIa\frac{\pi^4}{l^4}\sin\frac{\pi x}{l} - q \right) dx = 0\,.$$

После интегрирования получим

$$EIa\frac{\pi^4}{l^4}\cdot\frac{l}{2} - q\frac{2l}{\pi} = 0.$$

Откуда $a = \dfrac{4ql^4}{\pi^5 EI} = 0{,}013071\dfrac{ql^4}{EI}.$

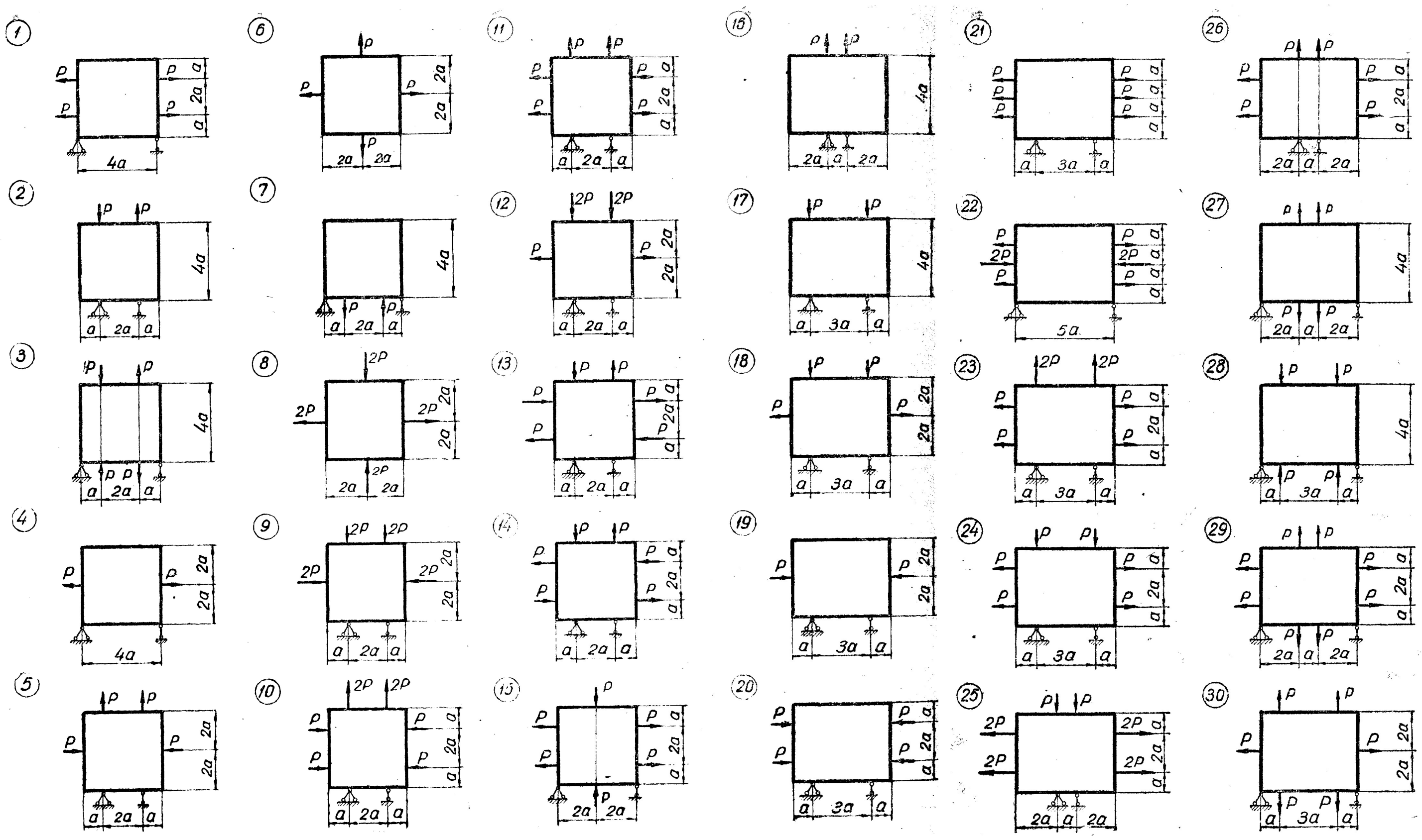
Таким образом, получен тот же результат, что и ранее при решении этой задачи методом Рэлея – Ритца.

Задание 1. Для приведённой на схеме балки-стенки (см. рис) требуется:

- Используя метод сеток, определить значение функции φ в узлах сетки.
- Построить эпюры напряжений σ_x, σ_y, τ_{xy} по характерным сечениям.

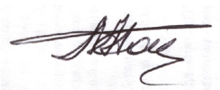
Решить задачу в общем виде.

[2] На рис. 1 координата y направлена вниз для того, чтобы максимальное перемещение u_z имело положительный знак, как и при решении методом Рэлея – Ритца.



Выполненные задания студенты оформляют в расчетно-пояснительную записку и защищаются преподавателю, тем самым определяется степень самостоятельности выполнения работы.

Разработал
д.т.н., профессор
кафедры ТД и ЭУ



А.Н.Гоц