КУРС ЛЕКЦИЙ

Для изучения дисциплины «Численные методы расчета прочности» на кафедре разработаны учебные пособия, имеющие гриф УМО «Допущено УМО вузов России по образованию в области энергетики и электротехники в качестве учебного пособия для студентов высших учебных заведений, обучающихся по направлению подготовки 13.04.03 – Энергетическое машиностроение» профиль «Двигатели внутреннего сгорания». Это следующие пособия.

1. Гоц А.Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении; учеб. пособие/ А.Н. Гоц – 3-е изд., исп. и доп.– М.: ФОРУМ-инфра-м. – 2015. – 352 с.

2. Гоц, А.Н. Численные методы расчета в энергомашиностроении: учеб. пособие./ А.Н. Гоц. В 2 ч., ч.1,ч.2. Владим. гос. ун-т имени А.Г. и Н.Г. Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012. – 151 с.

В связи с этим, последовательность изложения курса «Численные методы в энергомашиностроении» на лекциях будет дана блоками и основана на приведенных выше учебных пособий, которые в достаточном количестве имеются в библиотеке ВлГУ.

Блок 1 (4 часа). Методы расчета на прочность деталей ДВС при нагрузках, переменных во времени. Детерминированные модели усталостной долговечности при стационарном нагружении. Определения коэффициента запаса прочности при одноосном напряженном состоянии. Определения коэффициента запаса прочности при сложном напряженном состоянии.

Цель лекций по этому блоку – освоение студентами основных понятий и методов расчета при переменных напряжениях по известным детерминированным моделям усталостной долговечности.

Для этого из учебного пособия [1] или [2] должны быть изложены разделы на с. 6-12; 49-61; 85-95; 99-103.

На лекциях будут изложены основные понятия, которыми мы будет оперировать в дальнейшем при расчете деталей, испытывающих переменные напряжения, а также вывод основных формул, основанных на детерминированных моделях долговечности.

Описательные разделы учебных пособий (без выводов формул и зависимостей) следует перенести на самостоятельное изучение или в период консультаций студентов по первому циклу заданий курсового проекта. Ниже приводится перечень таких вопросов.

Основные законы прочности при переменных напряжениях. Предел выносливости и опытное его определение. Понятие о физической природе процесса усталостного разрушения, Обнаружение усталостных трещин. Влияние различных факторов (степени несимметрии цикла, концентрации напряжений и абсолютных размеров детали, качества обработки поверхности) на величину предела выносливости. Практические мероприятия, принимаемые для повышения усталостной прочности материалов.

На лекциях необходимо показать, что детали поршневых двигателей, а также многие детали машин в эксплуатационных условиях подвергаются действию переменных напряжений, многократно изменяющихся во времени. Такие напряжения испытывают, например, коленчатые валы, шатуны, шатунные болты, головки цилиндров двигателей внутреннего сгорания, поршневые штоки паровых машин, валики коробок скоростей, рессоры, клапанные пружины и другие детали. По результатам экспериментальных исследований и анализам многочисленных поломок деталей машин показано, что при переменных нагрузках все материалы, из которых изготавливаются детали, разрушаются при напряжениях значительно меньших, чем при постоянных нагрузках. В большинстве случаев разрушающее напряжение может быть ниже не только предела прочности, но и предела текучести или даже упругости материала.

Предел прочности $\sigma_в$ и предел текучести $\sigma_т$, полученные из статических испытаний, не могут являться характеристиками прочности материала при переменных напряжениях. При расчетах на прочность в машиностроении все большее значение приобретает другая характеристика прочности материала, а именно, **предел усталости**, или **выносливости**, определяемый на основе испытаний материала при переменных напряжениях. Можно отметить, что общепринятый термин **усталость**, введенный более полувека назад, с точки зрения терминологии, по-видимому, не самый удачный, поскольку явление разрушения при переменных напряжениях значительно отличается от биологической усталости. До сих пор не обнаружено появление каких-либо прогрессирующих изменений в свойствах материала в процессе переменного нагружения, а разрушение зачастую может происходить внезапно без заметных признаков его приближения. Кроме того, во время «отдыха», когда на деталь не действует никакая нагрузка, не происходит «залечивание» или исчезновение эффектов предварительного циклического нагружения, т. е. повреждения в процессе усталости **накапливаются** и, как правило, являются необратимыми. Другими словами, появившиеся при циклическом нагружении трещины не только не исчезают, а могут развиваться дальше даже при меньших напряжениях.

Как показывают многочисленные исследования, разрушение при переменных напряжениях начинается с образования в наиболее напряженном сечении детали микротрещин, которые, постепенно развиваясь при нагружении, проникают вглубь поперечного сечения, объединяясь в макротрещины, тем самым все более ослабляя его. Это, в конце концов, приводит к разрушению детали по наиболее ослабленному сечению.

Свойство понижения прочности материала при переменных напряжениях за счет прогрессивно развивающихся микротрещин называется **усталостью материала.** Свойство материала сопротивляться разрушению от усталости называют **выносливостью.**

Усталость охватывает две значительно отличающиеся друг от друга области циклического нагружения и деформирования, в каждой из которых разрушение является, по-видимому, следствием действия различных физических механизмов. Одна из этих областей – циклическое нагружение, при котором во время каждого цикла возникают значительные пластические деформации. Эта область характеризуется большими по величине нагрузками и малыми долговечностями, т. е. небольшим числом циклов до усталостного разрушения. Обычно эта область называется **малоцикловой или деформационной усталостью.**

Другая область – циклическое нагружение, при котором деформация во время каждого цикла в значительной степени упруга. Для этой области характерны малые нагрузки и большие долговечности, т. е. большое число циклов до разрушения. Эта область обычно называется **многоцикловой усталостью**. Малоцикловая усталость обычно ассоциируется с областью, для которой число циклов до разрушения не превышает $10^4 \ldots 10^5$, а многоцикловая усталость с областью, которая характеризуется долговечностью $10^6 \ldots 10^8$ циклов. Под долговечностью понимается число циклов до разрушения образца (или до появления трещины заданных размеров).

Для уменьшения вариантов расчетов на лекции показано, что проведенный расчет коэффициентов ψ_σ и ψ_τ, учитывающих влияние средних напряжений на предельные амплитудные напряжения, для наиболее используемых в двигателестроении сталей и высокопрочных чугунов позволяют просто вычислять запасы прочности. Точно также вычислен коэффициент постоянства нагружения χ, который в нашей справочной литературе используется редко, но он позволяет вычислить положение рабочих циклов напряжений и выбрать методы расчета – по усталостному разрушению или текучести. Это уменьшает объем расчетов, так как не требуется проводит определение запасов прочности по двум видам разрушения.

Блок 2. (4 часа). Тело называется *односвязным*, когда оно полностью занимает объем внутри одной замкнутой внешней поверхности. Если объем, занятый телом, заключен между двумя замкнутыми поверхностями, одна из которых полностью размещается внутри другой и образует внутреннюю полость в теле, то такое тело называется *двухсвязным*. При наличии двух, трех таких полостей тело называется соответственно *трех*-, *четырехсвязным* и т. п. Всякий открытый в обе стороны (сквозной) канал в теле также увеличивает степень связности тела на единицу.

Тело считается заданным, если известны его границы (ограничивающие поверхности) и заданы некоторые механические свойства его материала.

Отыскание бигармонической функции, удовлетворяющей условиям на контуре прямоугольной области, возможно различными методами. На лекциях ограничимся рассмотрением лишь некоторых из них: решение плоской задачи в полиномах, решение плоской задачи в тригонометрических рядах, решение плоской задачи при помощи конечных разностей.

В более сложных случаях расчета прямоугольной пластинки в качестве функции напряжений для плоской задачи $\varphi(x,y)$ можно применять тригонометрические ряды. Исследуем для этого следующую тригонометрическую функцию:

$$\varphi = Y\cos\alpha x, \qquad (а)$$

где Y – функция, зависящая только от координаты y;

$$\alpha = n\pi/L, \qquad (б)$$

L – длина пластинки в направлении оси x.

Исследуем, при каких условиях функция $\varphi(x,y)$ является бигармонической, т. е. удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0.$$

Подсчитаем четвертые производные от функции $\varphi(x,y)$

$$\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} = \alpha^4 Y\cos\alpha x,\ \frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} = -\alpha^2 Y''\cos\alpha x,\ \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = Y^{\mathrm{IV}}\cos\alpha x.$$

Подставляя эти производные в бигармоническое уравнение, получаем:

$$\alpha^4 Y\cos\alpha x - 2\alpha^2 Y''\cos\alpha x + Y^{\mathrm{IV}}\cos\alpha x = 0$$

или

$$\cos\alpha x(Y^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y) = 0.$$

Это уравнение обращается в тождество при любых значениях аргумента x, если $Y(y)$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$Y^{\mathrm{IV}} - 2\alpha^2 Y'' + \alpha^4 Y = 0.$$

Решение этого дифференциального уравнения можно представить с помощью гиперболических функций в виде [3]

$$Y = A_n\mathrm{ch}\alpha y + B_n y\mathrm{ch}\alpha y + C_n\mathrm{sh}\alpha y + D_n y\mathrm{sh}\alpha y.$$

Подставляя это выражение в (*а*), получим:

$$\varphi(x,y) = \cos\alpha x\,(A_n\mathrm{ch}\alpha y + B_n y\mathrm{ch}\alpha y + C_n\mathrm{sh}\alpha y + D_n y\mathrm{sh}\alpha y). \quad)$$

Полученная функция бигармоническая и может быть использована для решения плоской задачи.

Аналогично можно показать, что функция

$$\varphi(x, y) = \sin\alpha x\,(A_n^{'}\mathrm{ch}\alpha y + B_n^{'}y\mathrm{ch}\alpha y + C_n^{'}\mathrm{sh}\alpha y + D_n^{'}y\mathrm{sh}\alpha y)$$

также является бигармонической и может быть применена для решения плоской задачи.

При поиске количественного описания физического явления обычно вводят в рассмотрение некоторую систему обыкновенных дифференциальных уравнений или уравнений с частными производными, справедливую в определенной области, и налагают на эту систему подходящие краевые и начальные условия. На этой стадии математическая модель замкнута, и для практических применений требуется только найти решение для конкретного множества числовых данных. Здесь, однако, возникают основные трудности, так как точному решению существующими математическими методами поддаются лишь уравнения самого простого вида внутри геометрически тривиальных границ. Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами являются одним из немногих примеров, для которых имеются стандартные процедуры решения, но даже здесь при большом числе зависимых переменных встречаются значительные трудности.

Чтобы преодолеть эти трудности и иметь возможность воспользоваться ПЭВМ, необходимо преобразовать задачу к чисто алгебраической форме, включающей только основные арифметические операции. Для достижения этой цели могут быть использованы различные виды дискретизации непрерывной задачи, определенной дифференциальными уравнениями. При этом бесконечное множество чисел, представляющих неизвестную функцию или функции, заменяется конечным числом неизвестных параметров, и для этого процесса, вообще говоря, требуется некоторая форма аппроксимации. Среди различных возможных видов дискретизации одним из простейших является процесс перехода к конечным разностям. Рассмотрим основные понятия этого процесса, что позволит сформулировать суть метода.

Точное решение бигармонического уравнения $\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4\varphi}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4\varphi}{\partial y^4} = 0.$ плоской задачи во многих случаях оказывается очень сложным. Для его решения можно применить приближенный метод конечных разностей. Его еще часто называют конечно-разностным, или методом сеток [3]. Идея метода состоит в том, чтобы решение плоской задачи через функцию напряжений φ, определяемую бигармоническим уравнением, свести к алгебраическим уравнениям.

В методе конечных разностей частные производные бигармонического уравнения *приближенно* заменяются конечными разностями, в результате чего оно превращается в алгебраическое.

Другие сеточные методы решения задач теории упругости можно перенести на самостоятельное изучение. Погрешности метода конечных разностей уменьшаются с увеличением количества узловых точек, однако при этом значительно возрастает объем вычислений. Так, при решении системы с восемью уравнениями приходится выполнять операций в шесть раз больше, чем при решении системы с четырьмя уравнениями.

Блок 3 (4 часа). Вариационные методы решения задач теории упругости. Метод Рэлея-Ритца (глава 9 [2]).

Цель лекции – дать основные понятия о вариационных методах решения задач теории упругости.

Решение большинства задач теории упругости сводится к интегрированию дифференциальных уравнений с заданными граничными условиями. Точного решения очень многих важных для практики задач до сих пор не получено, так как удается решать их лишь приближенными методами, среди которых важное место занимают вариационные методы и в первую очередь те, которые основаны на применении начала возможных перемещений Лагранжа.

В последние годы большое количество решений задач прикладной теории упругости получено с помощью метода конечных элементов, рассмотренного нами в гл. 10.

Широкое использование вычислительных машин существенно увеличило возможности численных методов решения дифференциальных уравнений, таких как конечно-разностный метод (метод сеток), метод конечных объемов, метод граничных элементов и др.

В настоящей главе будут рассмотрены лишь наиболее часто применяемые при решении задач прикладной теории упругости вариационные методы (Рэлея – Ритца, Бубнова – Галеркина, Канторовича – Власова).

Прежде чем излагать суть вариационных методов, поясним некоторые основные понятия. В инженерной практике наряду с задачами, в которых отыскивается экстремум некоторой функции $y = f(x)$, встречаются и такие, в которых необходимо отыскать экстремум такой переменной Z, которая сама зависит от выбора функции $f(x)$. Такие переменные Z называются *функционалами.*

В простейшем случае функционал Z представляется в виде интеграла $Z = \int_a^b F(x, y, y')dx$, где a, b определяют интервал изменения аргумента x.

Сравнивая функционал и функцию, можно заметить, что они являются переменными, однако первый зависит от вида функции $y(x)$, а вторая – от величины аргумента x. В одном случае, изменяя вид функции $y(x)$, т. е. варьируя саму функцию, мы изменяем величину функционала, а во втором – изменяя величину независимого переменного x, влияем на величину функции.

При отыскании экстремума функции мы отыскиваем такое значение аргумента x, которое сообщает функции $y(x)$ максимум или минимум.

В вариационных задачах необходимо отыскать такой вид функции $y(x)$, при котором функционал Z приобретает максимальное или минимальное значение.

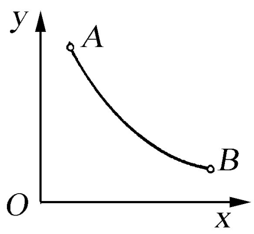

Рис. 44. Линия быстрейшего ската

Классическим примером вариационной задачи служит задача о брахистохроне – линии быстрейшего ската, предложенная в 1696 г.И. Бернулли. Между точками A и B, не лежащими на вертикали, требуется провести линию, по которой материальная точка в минимальное время скатится из точки A в точку B (рис. 44). Здесь роль функционала выполняет время t перемещения из точки A в точку B, а уравнение $y(x)$ кривой, проходящей через точки A и B, – искомая функция.

Отметим, что методы решения вариационных задач, т. е. задач отыскания функций, сообщающих функционалу максимум или минимум, во многом сходны с исследованием функций на максимум и минимум.

В задачах на максимум и минимум независимому переменному x дается приращение $\Delta x = x - x_1$, равное дифференциалу dx. В вариационных задачах дается приращение (или вариация) δy искомой функции $y(x)$, равное $\delta y = y(x) - y_1(x)$.

Как в дифференциальном исчислении дифференциал функции представляет собой линейную по отношению к приращению аргумента Δx часть приращения функции, так и в вариационном исчислении вариация функционала δZ представляет собой линейную по отношению к вариации функции δy часть функционала.

Если функция $y = f(x)$ достигает экстремума внутри заданного интервала значений аргумента x, дифференциал функции $dy = 0$. Аналогично, если функционал достигает экстремума, то его вариация равна нулю: $\delta Z = 0$.

Приближенные методы, которые позволяют найти решение задачи минуя процесс интегрирования дифференциальных уравнений, либо сводя их к решению системы алгебраических уравнений относятся к так называемым *прямым методам.*

Перейдем к непосредственному рассмотрению некоторых прямых вариационных методов.

Метод Рэлея – Ритца является одним из наиболее мощных прямых методов вариационного исчисления. Он основан на использовании известного из курса теоретической механики принципа возможных перемещений: для того, чтобы система, подчиненная идеальным удерживающим связям, находилась в равновесии, необходимо и достаточно, чтобы сумма элементарных работ всех приложенных к ней сил на всяком возможном перемещении равнялась нулю.

Пусть работа внешних сил (объемных и поверхностных) на каком-либо возможном перемещении равна δA. Под действием внешних сил происходит деформация упругого тела, а внутренние силы при этом выполняют работу δU, которая представляет собой приращение потенциальной энергии системы на том же возможном перемещении (взятом с обратным знаком по отношению к работе внешних сил). Тогда принцип возможных перемещений для тела, находящегося в равновесии, можно представить следующим образом:

$$\delta A - \delta U = 0. \qquad (a)$$

Определим значения δA и δU из условия, что на систему действуют объемные силы X, Y и Z, а также поверхностные силы X_ν, Y_ν и Z_ν (ν – нормаль к некоторой поверхности s, на которой действуют указанные поверхностные силы). Дадим частицам тела возможные перемещения, составляющие которых δu_x, δu_y, δu_z. Подсчитаем работу внешних сил на этих возможных перемещениях. Элементарная работа составляющей объемных сил X, приходящейся на единицу объема, равна произведению этой силы на объем бесконечно малого элемента $dxdydz$ и на возможное перемещение δu_x в направлении этой силы:

$$X \cdot dxdydz \cdot \delta u_x.$$

Аналогично определим элементарные работы составляющих объемных сил Y и Z (и в направлении этих сил) на соответствующих возможных перемещениях δu_y и δu_z

$$Y \cdot dxdydz \cdot \delta u_y,\ Z \cdot dxdydz \cdot \delta u_z.$$

Работа, производимая объемными силами во всем объеме тела V, равна интегралу по этому объему от суммы элементарных работ, совершаемых каждой из составляющих объемной силы:

$$\iiint\limits_V (X\delta u_x + Y\delta u_y + Z\delta u_z)dxdydz. \qquad (б)$$

Элементарная работа составляющей поверхностных сил $p_{x\nu}$, которая действует на бесконечно малом элементе поверхности ds, равна произведению равнодействующей этой составляющей на площадке ds на возможное перемещение δu_x в направлении этой составляющей

$$p_{x\nu} \cdot ds \cdot \delta u_x.$$

Аналогично определяются и элементарные работы двух других составляющих поверхностных сил

$$p_{y\nu} \cdot ds \cdot \delta u_y, \; p_{z\nu} \cdot ds \cdot \delta u_z.$$

Работа, производимая поверхностными силами, действующими на всей поверхности тела s, равна интегралу по всей поверхности тела от суммы элементарных работ, совершаемых каждой из составляющих поверхностных сил:

$$\iint_s (p_{x\nu}\delta u_x + p_{y\nu}\delta u_y + p_{z\nu}\delta u_z) ds. \qquad (в)$$

Таким образом, возможная работа всех внешних сил на возможных перемещениях равна сумме работ объемных (*б*) и поверхностных (*в*) сил:

$$\delta A = \iiint_V (X\delta u_x + Y\delta u_y + Z\delta u_z) dxdydz + \\ + \iint_s (p_{x\nu}\delta u_x + p_{y\nu}\delta u_y + p_{z\nu}\delta u_z) ds. \qquad (г)$$

При вычислении возможной работы внешних сил варьировались только перемещения u_x, u_y и u_z, а объемные и поверхностные силы оставались постоянными, поэтому оператор δ в формуле (*г*) можно вынести из-под знаков интегралов, сделав общим для обоих интегралов:

$$\delta A = \delta \left[\iiint_V (Xu_x + Yu_y + Zu_z) dxdydz + \right. \\ \left. + \iint_s (p_{x\nu}\delta u_x + p_{y\nu}\delta u_y + p_{z\nu}\delta u_z)\, ds \right]. \qquad (д)$$

Поскольку потенциальная энергия, накапливаемая в упругом теле, вычисляется по формуле $U = \iiint_V W dxdydz$ [1], то приращение потенциальной энергии δU в формуле (*а*) равно

$$\delta U = \iiint_V \delta W dxdydz, \qquad (е)$$

где $W = \frac{1}{2}(\sigma_x \varepsilon_x + \sigma_y \varepsilon_y + \sigma_z \varepsilon_z + \tau_{xy}\gamma_{xy} + +\tau_{yz}\gamma_{yz} + +\tau_{zx}\gamma_{zx})$ – удельная потенциальная энергия.

Представляя в соотношении (*а*) оператор δ общим для обоих слагаемых, получаем:

$$\delta(A - U) = 0. \qquad (ж)$$

Выражение, стоящее в скобках, представляет собой работу всех внешних и внутренних сил, приложенных к телу. Эта величина, взятая с обратным знаком, является потенциальной энергией системы внешних и внутренних сил, действующих на упругое тело:

$$\acute{Y} = U - A. \qquad (9.1)$$

Вводя это обозначение вместо условия (*ж*), получаем следующее соотношение:

$$\delta \acute{Y} = 0. \tag{з}$$

Так как первая вариация δ с точностью до бесконечно малых величин высшего порядка равна первому дифференциалу, то вместо условий (*е*) можно написать

$$d\acute{Y} = 0.$$

Полученное условие означает, что при равновесии упругой системы потенциальная энергия Э достигает экстремального значения.

На основании теоремы Лагранжа – Дирихле [2] можно сформулировать следующий принцип минимума потенциальной энергии: *из всех мыслимых перемещений упругого тела перемещения, удовлетворяющие условиям устойчивого равновесия, сообщают потенциальной энергии системы минимальное значение.*

Таким образом, потенциальная энергия системы Э (9.1)

$$\acute{Y} = U - A = \min. \tag{9.2}$$

При этом потенциальная энергия, накапливаемая в упругом теле, определяется по формуле (*ж*), а работа объемных и поверхностных сил согласно формуле (*д*)

$$\begin{aligned} A = &\iiint_V (Xu_x + Yu_y + Zu_z)\, dxdydz + \\ &+ \iint_s (p_{x\nu}\delta u_x + p_{y\nu}\delta u_y + p_{z\nu}\delta u_z)\, ds. \end{aligned} \tag{и}$$

В соответствии с методом Рэлея – Ритца представим перемещения u_x, u_y и u_z в виде ряда функций, каждая из которых удовлетворяет геометрическим граничным условиям. Пусть, например,

$$\begin{gathered} u_x = \sum_k a_k \varphi_k(x, y, z); \;\; u_y = \sum_k b_k \psi_k(x, y, z); \\ u_z = \sum_k c_k \chi_k(x, y, z), \end{gathered} \tag{9.3}$$

где φ_k, ψ_k, χ_k – функции, удовлетворяющие граничным условиям, а a_k, b_k, c_k – произвольные параметры, подлежащие определению из условий стационарности энергии (*з*) ($k = 1, 2, 3,\ldots, n$).

Потенциальная энергия деформаций W может быть представлена через перемещения u_x, u_y и u_z. Действительно, если в уравнении (*е*) [1]

$$W = \frac{1}{2}[\lambda\theta^2 + 2G(\varepsilon_x^2 + \varepsilon_y^2 + \varepsilon_z^2) + G(\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2)]$$

компоненты деформации заменить через перемещения u_x, u_y и u_z согласно формулам Коши [1], а также использовать постоянные Ламе

$$\lambda = \frac{E\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}, \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)},$$

то после преобразований получим для W следующее выражение:

$$W = G\Bigg[\left(\frac{\partial u_x}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_y}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + \frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z}\right)^2 + \\ + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y}\right)^2\Bigg]. \tag{9.4}$$

Теперь полная энергия системы Э может быть представлена как некоторая функция параметров a_k, b_k, c_k, т. е.

$$Э = Э(a_k, b_k, c_k).$$

Как следует из (u) работа внешних сил A является линейной функцией параметров a_k, b_k, c_k, а приращение потенциальной энергии U, как и потенциальная энергия Э (что следует из (9.4)) является квадратичной функцией этих же параметров.

Из условия стационарности энергии $\delta Э = 0$, имея в виду, что все параметры a_k, b_k, c_k произвольны, следует, что нулю должны равняться частные производные от энергии Э по всем варьируемым параметрам a_k, b_k, c_k, т. е.

$$\frac{\partial \acute{Y}}{\partial a_k} = 0, \quad \frac{\partial \acute{Y}}{\partial b_k} = 0, \quad \frac{\partial \acute{Y}}{\partial c_k} = 0. \tag{9.5}$$

В итоге получим столько уравнений, сколько произвольных параметров содержится в выражениях (9.3).

Пример решения задачи изучить самостоятельно в п.9.2.

Блок 9 (2 часа). Метод Бубнова-Галеркина (п. 9.3.[2]).

Цель лекции – дать представления о методе Бубнова-Галеркина для решения некоторых задач теории упругости.

Если в вариационном уравнении (9.6) вместо вариаций перемещений $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$ подставить выражения

$$\delta u_x = \sum_k \delta a_k \varphi_k(x,y,z); \quad \delta u_y = \sum_k \delta b_k \psi_k(x,y,z);$$
$$\delta u_z = \sum_k \delta c_k \chi_k(x,y,z)$$

и учесть, что вариации параметров δa_k, δb_k, δc_k произвольны и линейно независимы между собой, то в связи с этим каждый член, имеющий множители $\delta u_x, \delta u_y, \delta u_z$ уравнения (9.6), должен быть равен нулю. В результате получим систему из трех уравнений

$$\left.\begin{aligned}
&\iiint_V \left[\left(\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{xy}}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{xz}}{\partial z}+X\right)\varphi_k(x,y,z)dxdydz-\right.\\
&-\iint_s \left[\left(\sigma_x l+\tau_{xy}m+\tau_{xz}n-p_{x\nu}\right)\varphi_k(x,y,z)ds=0;\right.\\
&\iiint_V \left(\frac{\partial\tau_{yx}}{\partial x}+\frac{\partial\sigma_y}{\partial y}+\frac{\partial\tau_{yz}}{\partial z}+Y\right)\psi_k(x,y,z)dxdydz-\\
&-\iint_s \left(\tau_{yx} l+\sigma_y m+\tau_{yz}n-p_{y\nu}\right)\psi_k(x,y,z)ds=0;\\
&\left.\iiint_V \left(\frac{\partial\tau_{zx}}{\partial x}+\frac{\partial\tau_{zy}}{\partial y}+\frac{\partial\sigma_z}{\partial z}+Z\right)\chi_k(x,y,z)\right]dxdydz-\\
&\left.-\iint_s \left(\tau_{zx} l+\tau_{zy}m+\sigma_z n-p_{z\nu}\right)\chi_k(x,y,z)\right]ds=0
\end{aligned}\right\} \qquad (9.17)$$

$$(k = 1, 2, 3,\ldots, n).$$

Полученные уравнения и есть уравнен*ия обобщенного метода Бубнова – Галеркина*.

В основе этого метода, как и метода Рэлея – Ритца, лежит принцип возможных перемещений. Выражения для перемещений (9.6) при использовании обобщенного метода Бубнова –Галеркина могут, как и в методе Рэлея – Ритца, не удовлетворять силовым граничным условиям: достаточно лишь выполнение кинематических граничных условий на части поверхности s.

Таким образом, обобщенный метод Бубнова – Галеркина и метод Рэлея – Ритца являются двумя различными формами записи принципа возможных перемещений. Их использование приводит к одной и той же системе разрешающих уравнений для определения неизвестных параметров a_k, b_k, c_k в выражении (9.6). И все же в вычислительном отношении обобщенный метод Бубнова –Галеркина проще, поскольку позволяет сразу выписать систему разрешающих уравнений без вычисления потенциальной энергии.

Процедура применения обобщенного метода Бубнова–Галеркина для решения задач теории упругости на базе использования уравнений (9.17) состоит в следующем. Сначала задаемся компонентами перемещений u_x, u_y, u_z в форме рядов (9.6). Используя далее кинематические соотношения между перемещениями u_x, u_y, u_z и деформациями (формулы Коши), определяем компоненты деформации $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$. Подставляя найденные значения компонентов деформации в закон Гука (или принятый физический закон связи между компонентами деформаций и компонентами напряжений), получаем выражения для компонентов напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ в каждой точке тела как некоторые сложные функции неизвестных параметров a_k, b_k, c_k.

Подставляя теперь найденные выражения для компонентов напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$ непосредственно в уравнения метода (9.16) и выполняя все необходимые операции (дифференцирование и интегрирование по объему и части поверхности тела), находим необходимое число алгебраических уравнений для определения неизвестных коэффициентов a_k, b_k, c_k.

Для линейной задачи, т.е. когда материал тела подчиняется закону Гука и используются соотношения линейной теории упругости, эта система уравнений линейна.

Если выбранные выражения для перемещений наряду с кинематическими граничными условиями удовлетворяют также и силовым условиям (7.9), то в уравнениях (9.17) поверхностные интегралы исчезают и они принимают следующий вид:

$$\left.\begin{aligned} &\iiint\limits_V \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + X \right) \varphi_k(x, y, z) dxdydz = 0; \\ &\iiint\limits_V \left(\frac{\partial \tau_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + Y \right) \psi_k(x, y, z) dxdydz = 0; \\ &\iiint\limits_V \left(\frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + Y \right) \chi_k(x, y, z) dxdydz = 0 \end{aligned}\right\} \tag{9.18}$$

(k = 1, 2, 3,…, n).

Приближенный метод интегрирования дифференциальных уравнений, основанный на использовании зависимостей вида (9.18), предложили в 1913 г. И.Г. Бубнов в своем отзыве на одну из работ С.П. Тимошенко и независимо от него в 1915 г. Б.Г. Галеркин.

Уравнения (9.18) принято называть *уравнениями метода Бубнова – Галеркина* [8]. Они получены из принципа возможных перемещений, в силу чего может показаться, что этот метод применим лишь для краевых задач, связанных с некоторой вариационной проблемой.

Можно показать, что указанный метод применим для приближенного решения дифференциальных уравнений, не обязательно связанных с какой-либо вариационной проблемой [11].

Пусть рассматриваемая краевая задача описывается дифференциальным уравнением $2m$-го порядка (в некотором объеме V)

$$L^{(2m)}\left[u_z(x, y, z)\right] - q(x, y, z) = 0 \tag{9.19}$$

при граничных условиях (на некоторой поверхности s)

$$Q_i\left[u_z(x, y, z)\right] = f_i(x, y, z) \ \ (i = 1, 2, ..., m) \tag{9.20}$$

где $L^{(2m)}$ и Q_i – заданные дифференциальные операторы; $q(x,y,z)$ и $f_i(x,y,z)$ – заданные функции[1].

Пусть при приближенном решении дифференциального уравнения (9.18) запишем выражение для $u_z(x,y,z)$ в форме суммы

$$u_z(x,y,z) = \sum_{i=1}^{n} a_i \varphi_i(x,y,z). \tag{9.21}$$

Систему линейно независимых функций $\varphi_i(x,y,z)$ выберем так, чтобы все граничные условия (9.20) тождественно выполнялись. Параметры a_i подлежат определению.

Дальнейшее решение основано на свойстве ортогональности функций. В курсе математического анализа дается следующее определение ортогональности функций: если имеется семейство непрерывных функций

$$\psi_0(x),\ \psi_1(x),\ \psi_2(x),...,\ \psi_k(x),...,\ \psi_n(x) \tag{a}$$

и интеграл от произведения любых двух различных функций этого семейства в промежутке $[a, b]$ равен нулю

$$\int_a^b \psi_k(x)\psi_i(x)dx = 0, \tag{9.22}$$

то функции (a) образуют в промежутке $[a, b]$ ортогональную систему.

Например, семейство тригонометрических функций

$$\cos x,\ \sin x,\ \cos 2x, \sin 2x,...,\ \cos nx,\ \sin nx \tag{$б$}$$

является ортогональной системой в промежутке $[-\pi, +\pi]$.

Действительно интегралы

$$\left.\begin{aligned} &\int_{-\pi}^{+\pi} \cos kx \cos lx dx = 0 \quad (k \neq l), \\ &\int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \sin lx dx = 0 \quad (k \neq l), \\ &\int_{-\pi}^{+\pi} \sin kx \cos lx dx = 0 \quad (k \neq l). \end{aligned}\right\} \tag{$в$}$$

Это исчерпывает все возможные варианты комбинирования двух различных функций семейства ($б$) и доказывает, что оно образует ортогональную систему в промежутке $[-\pi, +\pi]$.

---

[1] В качестве уравнения (9.19) можно представить, например, уравнение упругой линии балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой (см. рис. 45).

На основании леммы из курса математического анализа следует, что если одна из функций тождественно равна нулю, например $\psi_k(x) \equiv 0$, то она ортогональна ко всем без исключения функциям, так как условие (9.22) выполняется.

Разработал
д.т.н., профессор
кафедры ТД и ЭУ А.Н.Гоц