

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение**  
**высшего образования**  
**«Владимирский государственный университет**  
**имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**  
**(ВлГУ)**

**Институт прикладной математики и информатики био- и нанотехнологий**  
**Кафедра физики и прикладной математики**

Прохоров Алексей Валерьевич  
Лексин Андрей Юрьевич

**Методические указания к практическим занятиям**  
**по дисциплине**  
**«МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ СИСТЕМ ГЕНЕРАЦИИ**  
**И ТРАНСПОРТИРОВКИ ЛАЗЕРНОГО ИЗЛУЧЕНИЯ»**

для студентов ВлГУ, обучающихся  
по направлению  
12.04.05 «Лазерная техника и лазерные технологии»

Владимир, 2015 г.

## Оглавление

ТЕМА 1 Оптические волокна и методы их изготовления	3
ТЕМА 2. Численные методы анализа нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ).	17
ТЕМА 3. Моделирование процессов распространения лазерного излучения в дисперсионно-нелинейных средах.	24
Список литературы	30

## **ТЕМА 1. Влияние нелинейно-дисперсионных эффектов на распространения световых импульсов в оптических волокнах.**

**Основные вопросы темы:** Характеристики волоконных световодов, материалы и изготовление, оптические потери в волоконных световодах.

**Цель и задачи практического занятия** состоят в ознакомлении студента с основными принципами создания и характеристиками оптических волокон, их назначением в современных оптических технологиях и возможностями их использования в качестве удобной среды для проведения математического моделирования сложных нелинейных эффектов в процессе распространении оптических импульсов, пучков и солитонов.

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** оптически прозрачный диэлектрик, показатель преломления, нормированная частота, одномодовые и многомодовые световоды, метода химического осаждения из газовой фазы, оптические потери.

**Требования к уровню подготовленности студента:** студент должен ориентироваться в основных вопросах/понятиях темы, быть знакомым с общими принципами взаимодействия электромагнитного излучения с веществом, понимать логику постановки и последовательность действий при проведении оптического эксперимента.

### **Теоретический материал и примеры заданий по теме 1**

#### **1.1 Оптические волокна и методы их изготовления**

Оптический волновод представляет собой сильно вытянутый цилиндр, изготовленный из оптически прозрачного диэлектрика, и состоящим из сердцевины и оболочки. При этом показатель преломления сердцевины больше чем оболочки. Такие волноводы обычно называют световодами со ступенчатым профилем показателя преломления, чтобы отличать их от градиентных волоконных световодов, у которых показатель преломления сердцевины плавно уменьшается от ее центра к границе. На рисунке 1.1 схематически показаны поперечное сечение и профиль показателя

преломления волоконного световода со ступенчатым профилем показателя преломления.

Световод характеризуется двумя параметрами – относительной разностью показателей преломления сердцевины и оболочки:

$$\Delta = \frac{n_1 - n_2}{n_1} \quad (1.1)$$

и нормированной частотой (параметром  $v$ ):

$$v = \kappa_0 a \sqrt{n_1^2 - n_2^2}, \quad (1.2)$$

где  $\kappa_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ ,  $a$  – радиус сердцевины,  $\lambda$  – длина волны света.

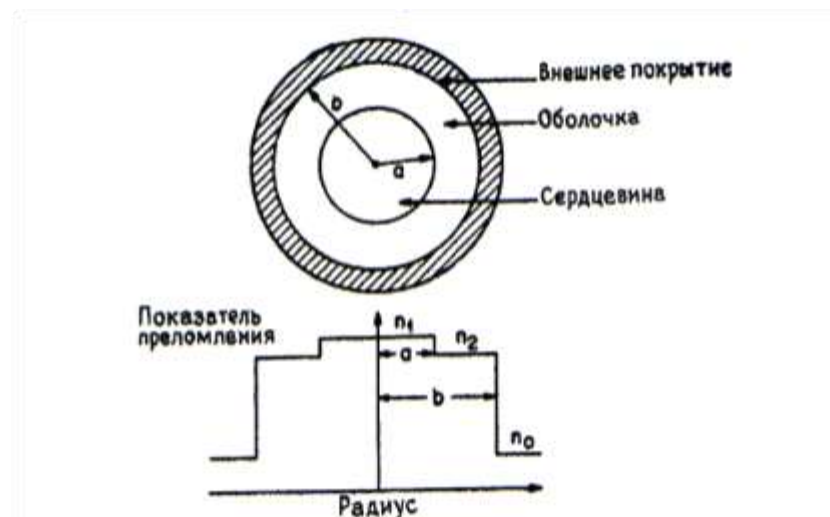


Рис. 1.1. Схема поперечного сечения и профиля показателя преломления волоконного световода со ступенчатым профилем показателя преломления.

Параметр  $v$  определяет число продольных мод, количество частот (длин волн), которое может транслировать волокно. Если  $v < 2,405$ , то такое волокно называют одномодовым, такие световоды поддерживают только одну моду. А если  $v > 2,405$  – многомодовое. Главное различие между одномодовыми и многомодовыми световодами состоит в том, что они имеют разные радиусы сердцевины. Для обычных многомодовых световодов радиус сердцевины  $a = 25\text{-}30$  мкм, тогда как для одномодовых световодов с типичным значением  $\Delta = 30 \cdot 10^{-3}$  требуется, чтобы  $a$  было равно 2-4 мкм.

Величина внешнего радиуса  $b$  менее критична. Просто она должна быть достаточно велика, чтобы удерживать в себе полностью поле излучения моды волоконного световода. Обычно  $b=50-60$  мкм как для одномодовых, так и для многомодовых волоконных световодов. Далее будем говорить про одномодовые волокна.

Таким образом, мы качественно познакомились с той основной средой, с которой нам и предстоит работать в дальнейшем.

Волоконные световоды с низкими потерями изготавливают из кварцевого стекла, состоящего из плавленого (аморфного) кварца  $\text{SiO}_2$ . Чтобы получить разные показатели преломления сердцевины и оболочки, в процессе изготовления применяют различные примеси. Такие добавки, как  $\text{GeO}_2$  и  $\text{P}_2\text{O}_5$ , увеличивают показатель преломления чистого кварца и пригодны для сердцевины.

Изготовление кварцевых волокон происходит в два этапа. На первом этапе методом осаждения из газообразной фазы изготавливается цилиндрическая заготовка с заданными показателями преломления и соотношением размеров сердцевины и оболочки. Обычно заготовка имеет длину 1 м и диаметр 2 см. На второй стадии заготовку вытягивают в волокно, используя прецизионный механизм подачи, заготовки в печь с некоторой определенной скоростью.

Для изготовления заготовки можно применять несколько методов. Обычно используют три: метод химического осаждения из газовой фазы (MCVD), метод внешнего осаждения из газовой фазы (OVD), метод аксиального осаждения из газовой фазы (VAD). Наиболее широко применяется метод MCVD. На рисунке 1.2 представлена схема соответствующего процесса.

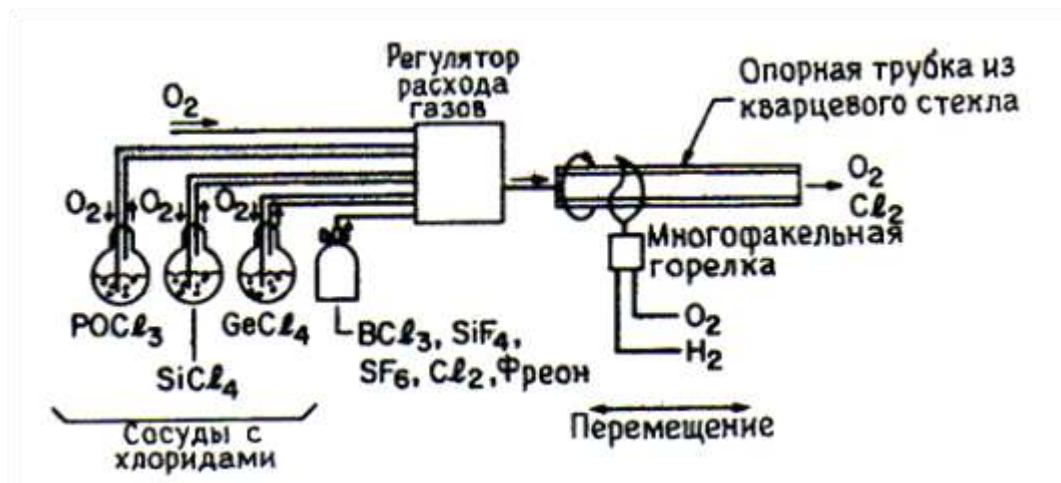


Рис. 1.2. Схематическая диаграмма модифицированного метода химического осаждения из газовой фазы (MCVD), широко применяемого для изготовления волоконных световодов

Первый этап: на внутреннюю поверхность трубки из кварцевого стекла последовательно осаждают слои SiO<sub>2</sub> при пропускании сквозь трубку пара SiCl<sub>4</sub> и O<sub>2</sub> при температуре 1800°C. Чтобы обеспечить однородность, многофакельная горелка должна перемещаться взад-вперед вдоль трубки. Когда после многократных проходов факела осажденная оболочка достигает достаточной толщины, к смеси паров добавляют пары GeCl<sub>4</sub> либо POCl<sub>3</sub>, благодаря которым показатель преломления увеличивается и на заключительном этапе температура горелки резко повышают. За счёт этого полая трубка схлопывается и образовывается твердая цилиндрическая заготовка.

Второй этап: заготовку помещают в пламенную печь и с малой скоростью порядка 1 см в минуту вытягивают до нужного размера. Это позволяет вытянуть волокна  $a \sim 10$  мкм и  $L \sim 100$  м. Для получения более длинного кабеля участки волокна сваривают друг с другом.

Важным параметром волоконного световода является мера потери мощности при распространении оптических сигналов внутри волокна. Пусть  $P_0$  – мощность, вводимая в волоконный световод длиной  $L$ , прошедшая мощность  $P_T$  дается выражением:

$$P_T = P_0 \exp(-\alpha L), \quad (3)$$

где  $\alpha$  - постоянная затухания, обычно называемая потерями световода. Потери

в световоде удобно выражать в логарифмических единицах дБ/км, используя соотношение:

$$\alpha_{\text{дБ}} = \frac{10}{L} \log \left( \frac{P_T}{P_0} \right) = 4,343\alpha, \quad (4)$$

здесь для связи  $\alpha_{\text{дБ}}$  и  $\alpha$  использовано уравнение (3).

В аморфном кварце, изготовленному по методу MCVD, потери в световоде нелинейны и зависят от длины волны света. На рисунке 1.3 представлен спектр потерь в современном одномодовом волоконном световоде, изготовленном по MCVD-методу.

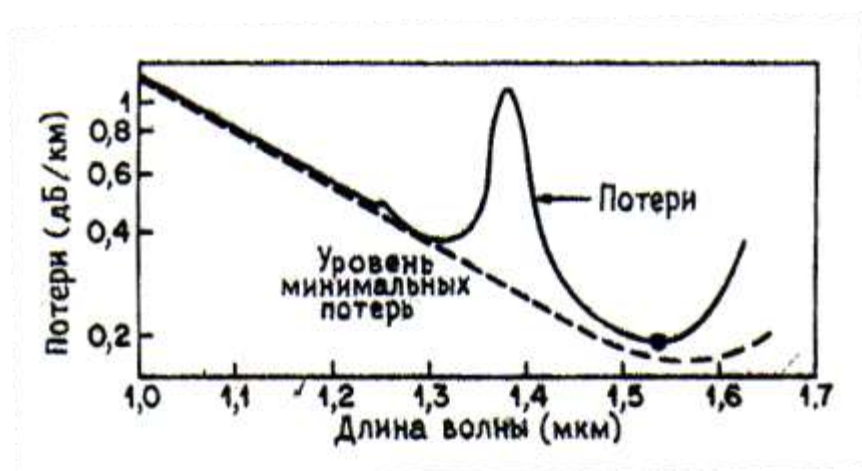


Рис. 1.3. Экспериментально измеренный спектр оптических потерь одномодового волоконного световода. Штриховой линией показан спектр минимальных потерь, связанных с рэлеевским рассеянием и поглощением в чистом кварце.

Волокно имеет минимальные потери 0,2 дБ/км вблизи длины волны 1,55 мкм. Потери значительно возрастают с уменьшением длины волны, достигая уровня 1-10 дБ/км в видимой области спектра.

С чем связаны оптические потери физически. В первую очередь, они определяются поглощением в веществе и рэлеевским рассеянием.

Рэлеевское рассеяние — один из фундаментальных механизмов потерь — происходит на случайных флуктуациях плотности, «вмороженных» в кварцевое стекло при изготовлении. Образующиеся в результате этого локальные флуктуации показателя преломления рассеивают свет во всех направлениях. Потери, обусловленные рэлеевским рассеянием, определяют уровень минимальных потерь. Он оценивается как:

$$\alpha_R = C/\lambda^4 \text{ (в дБ/км)}, \quad (1.5)$$

где постоянная  $C$  лежит в пределах  $0,7-0,9 \text{ дБ/(км} \cdot \text{мкм}^4)$  в зависимости от состава сердцевины волоконного световода. На длине волны  $\lambda = 1,55 \text{ мкм}$   $\alpha_R = 0,12-0,15 \text{ дБ/км}$ , поэтому в спектре потерь световода, изображенном на рисунке 1.3, преобладает рэлеевское рассеяние.

---

---

**Задание для самостоятельного выполнения:** Используя пакет MatLab построить трехмерную зависимость коэффициента поглощения кварцевого волоконного световода от длины волны  $\lambda$  и длины волокна  $L$  в диапазоне  $\lambda = (400 \text{ нм} \div 1,5 \text{ мкм})$  при учете рэлеевского рассеяния.

---

---

## 1.2 Классическая теория хроматической дисперсии

Дисперсией называется зависимость фазовой скорости  $v$  света в среде от частоты. Это обусловлено тем, что показатель преломления среды  $n$  зависит от частоты. Такая зависимость легко обнаруживается при прохождении белого света через призму, изготовленную из прозрачного материала. Поскольку белый свет содержит все возможные частоты в видимой области, на экране за призмой обнаруживается радужная полоска. Зависимость показателя преломления  $n$  от частоты  $\nu$  нелинейная и немонотонная. Существуют такие области значений, для которых  $\frac{dn}{d\nu} > 0$ , т.е. с ростом  $\nu$  увеличивается и  $n$ . Это соответствует нормальной дисперсии. Она наблюдается у прозрачных веществ вдали от линий поглощения (во всех прозрачных диэлектриках). Так же существует аномальная дисперсия, если  $\frac{dn}{d\nu} < 0$ . Такая дисперсия наблюдается вблизи частот, соответствующих абсорбции излучения в среде. У обычного кварцевого стекла эти полосы лежат в инфракрасной и ультрафиолетовой областях.



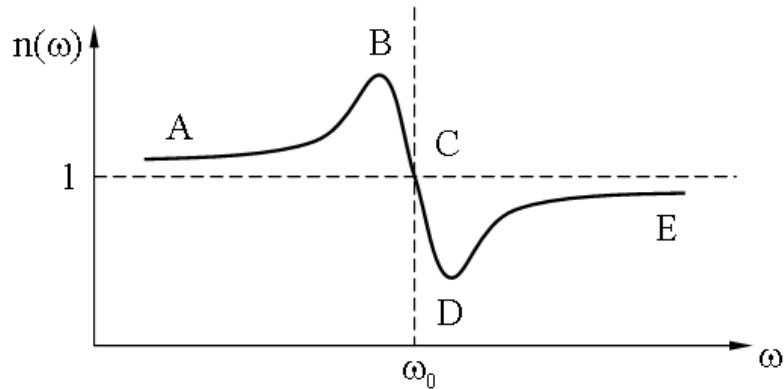


Рис.1.4 Качественный вид дисперсионной кривой вблизи линии поглощения. На участках  $AB$  и  $DE$  - дисперсия нормальная. На участке  $BCD$  дисперсия аномальная.

В общем случае, показатель преломления материала определяется как  $n = \sqrt{M\varepsilon}$ , где  $M$  – магнитная проницаемость,  $\varepsilon$  – диэлектрическая проницаемость. Так как оптически прозрачные среды немагнитные, т.е.  $M = 1$ , поэтому полагают  $n = \sqrt{\varepsilon} = \sqrt{1 + \chi}$ , где  $\chi$  - восприимчивость среды. Поэтому дисперсию рассматривают как зависимость  $\chi$  от частоты оптического поля. При воздействии внешней волны на диэлектрик в нём возникает поляризация. В частности, в изначально нейтральных частицах среды происходит смещение центра масс положительного и отрицательного зарядов под действием напряженности внешнего поля  $E_{\text{ср}}$ , образуются диполи. Полагается, что 1) частота осцилляций возбуждённых диполей равна частоте внешней силы; 2) фазы осцилляций отдельных диполей фазированы внешним полем, но при этом в системе имеются релаксационные механизмы, приводящие к сбоям фазы. 3) Дипольный момент диполя определяется как  $\mu = e\vec{r}$ , где вектор  $\vec{r}$  представляет собой радиус-вектор смещения электрона и выступает в качестве искомого параметра далее.

Полагаем, что каждый атом содержит один электрон. Тогда, в рамках микроскопического подхода, суммарную поляризованность среды можно представить как  $\vec{P} = -en_0\vec{r}$ , где  $n_0$  - концентрация атомов среды. С другой стороны, поскольку поляризация среды наводится внешним полем, то

соответствующую величину можно представить на основе макроподхода, когда  $\vec{P} = \xi_0 \hat{\chi} \vec{E}$ , где  $\vec{E}$  - напряженность поля,  $\hat{\chi}$  - тензор диэлектрической восприимчивости. Используя оба этих подхода, можно получить формулу для нахождения диэлектрической восприимчивости среды, а, следовательно, восстановить информацию о ее дисперсионных характеристиках.

Остановимся на микроскопическом подходе, полагая, что электрон совершает колебания в атоме под действием следующих сил:

а) возвращающая квазиупругая  $\vec{F}_B = -m\omega_0^2 \vec{r}$ ,  $\omega_0$  - частота собственных колебаний электрона.

б) сила сопротивления  $\vec{F}_{comp} = -2\beta m \frac{d\vec{r}}{dt}$ ,  $\beta$  - затухания.

в) вынуждающая сила  $\vec{F} = -e\vec{E}$ , действующая со стороны электрического поля.

С учетом этих сил, уравнение вынужденных колебаний примет вид:

$$\frac{d^2 r}{dt^2} + 2\beta \frac{dr}{dt} + \omega_0^2 r = -\frac{eE}{m} \quad (1.5)$$

В случае линейно поляризованного света  $E = \bar{E} \cos \omega t$  при условии того, что среда полностью прозрачна, то есть  $\beta = 0$ , решение для установившегося режима принимает вид:

$$\bar{r} = -\frac{e\bar{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)} \quad (1.6)$$

Тогда поляризованность среды составит  $\vec{P} = \frac{n_0 e^2 \vec{E}}{m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ , а диэлектрическая восприимчивость, соответственно, будет равна

$\chi = \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ . В этом случае показатель преломления среды оказывается

равен  $n^2 = 1 + \frac{n_0 e^2}{\varepsilon_0 m(\omega_0^2 - \omega^2)}$ , а если расширить модель на случай нескольких

резонансных частот  $\omega_j$ ,  $j=1\dots m$  в атоме, то получим известную формулу

Селлмейера:

$$n^2(\omega) = 1 + \sum_{j=1}^m \frac{B_j \omega_j^2}{\omega_j^2 - \omega^2}, \quad (1.7)$$

где  $B_j$  - величина  $j$ -го резонанса. В случае кварцевого оптоволокна параметры  $B_j$  и  $\omega_j$  определяются путем подгонки измеренных дисперсионных критериев и составляют:  $B_1=0,696163$ ,  $B_2=0,8974794$ ,  $\lambda_1=0,0684043$  мкм,  $\lambda_2=0,1162414$  мкм,  $\lambda_3=9,896161$  мкм, где  $\lambda_j = 2\pi c / \omega_j$  и  $c$  – скорость света в вакууме.

Дисперсия в волокнах имеет решающее значение при распространении волновых пакетов или оптических импульсов. Под оптическим импульсом далее понимаем группу синусоидальных волн, поставленных в соответствии сложной несинусоидальной волне согласно принципу суперпозиции и разложению Фурье. Совокупность значений этих независимых частот образуют спектр волнового пакета. Он может быть как дискретным, так и непрерывным.

Согласно теории дисперсии, каждая компонента спектра такого импульса распространяется в среде со своей фазовой скоростью  $v_\phi$ . При этом, воображаемая линия, ограничивающая волновой пакет, называется огибающей и ее движению соответствует групповая скорость  $v_g$ . Поскольку разные частотные компоненты импульса будут двигаться с различными фазовыми скоростями в среде с дисперсией, оптический импульс может ушириться, т.е. увеличить свою длительность с уменьшением пиковой интенсивности.

С распространением пакета в среде также связана такая характеристика как постоянная распространения  $\beta(\omega) = \frac{\omega}{v_g} = n(\omega) \frac{\omega}{c}$ , которая является аналогом волнового числа, но имеет частотную зависимость. При математическом описании эффекты дисперсии в оптическом световоде учитываются разложением постоянной распространения моды  $\beta$  в ряд Тейлора вблизи несущей частоты  $\omega_0$ :

$$\beta(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2} \beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots, \quad (1.8)$$

где  $\beta_m = \left[ \frac{d^m \beta}{d\omega^m} \right]_{\omega=\omega_0}$  ( $m=0,1,2,3,\dots$ ). Причем, каждый из слагаемых в

разложении оказывается ответственным за свой дисперсионный эффект. В частности, величина групповой скорости импульса может быть получена из

соотношения  $\beta_1 = \frac{1}{c} \left( n + \omega \frac{dn}{d\omega} \right) = \frac{n_g}{c} = \frac{1}{v_g}$ , а параметр

$$\beta_2 = \frac{1}{c} \left( 2 \frac{dn}{d\omega} + \omega \frac{d^2 n}{d\omega^2} \right) \cong \frac{\omega d^2 n}{cd\omega^2} \cong \frac{\lambda^3}{2\pi c^2} \frac{d^2 n}{d\lambda^2} \quad (1.9)$$

называется дисперсией групповых скоростей второго порядка (ДГС-2) и определяет уширение оптического импульса. При этом, световод обладает нормальной дисперсией если  $\beta_2 > 0$  и аномальная дисперсия  $\beta_2 < 0$ . Каждому из этих режимов соответствует появление различной частотной модуляции оптического импульса. Так, в режиме нормальной дисперсии высокочастотные компоненты распространяются медленнее, чем низкочастотные и поэтому высокочастотные компоненты занимают хвост оптического импульса.

На рисунке 1.5 показана зависимость  $\beta_2$  от длины волны  $\lambda$  для кварцевого стекла, полученные с использованием уравнений (1.7), (1.9). Замечательно то, что  $\beta_2$  стремится к нулю на длине волны приблизительно 1.27 мкм и становится отрицательным для больших длин волн, Длина волны, на которой  $\beta_2 = 0$ , часто называется длиной волны нулевой дисперсии  $\lambda_D$ . Тем не менее, следует отметить, что при  $\lambda = \lambda_D$  дисперсионные эффекты не пропадают вовсе, поскольку необходим учет третьего (кубического) слагаемого в разложении (1.8). Такие дисперсионные эффекты также могут искажать волновые пакеты.

Для количественного выражения дисперсии используется дисперсионный параметр  $D$ , обычно используемый в литературе по волоконной оптике вместо  $\beta_2$ . Следующее соотношение устанавливает связь между  $\beta_2$  и  $D$ :

$$D = \frac{d\beta_1}{d\lambda} = -\frac{2\pi c}{\lambda^2} \beta_2 \cong -\frac{\lambda d^2 n}{cd\lambda^2}. \quad (1.10)$$

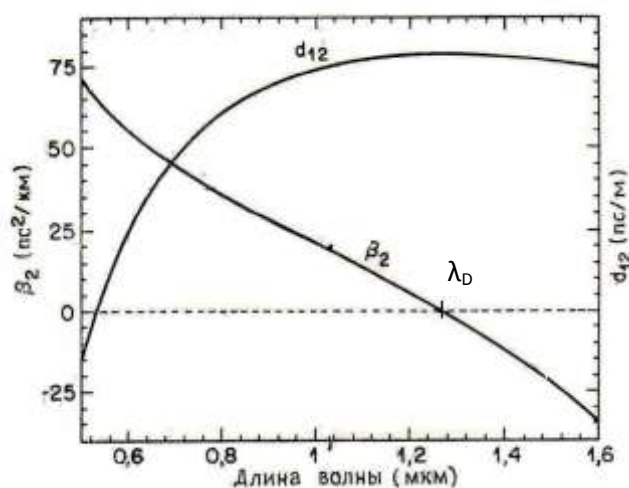


Рис. 1.5 Зависимость  $\beta_2$  для кварцевого стекла от длины волны. Дисперсионный параметр  $\beta_2 = 0$  вблизи 1.27 мкм. Параметр  $d_{12} = \beta_1(\lambda_1) - \beta_1(\lambda_2)$  представлен как функция  $\lambda_2$  при  $\lambda_1 = 0.532$  мкм.

Как видно на рисунке 1, стеклянные волоконные световоды обладают аномальной дисперсией в области длин волн, больше длины волны нулевой дисперсией  $\lambda > \lambda_D$ .

---

**Задание для самостоятельного выполнения:** Используя пакет MatLab построить графики зависимости дисперсионного параметра  $\beta_2$  для кварцевого волокна в диапазоне  $= (700 \text{ нм} \div 1.5 \text{ мкм})$ . При выполнении задания составить программу для расчета численной производной при переходе от известной зависимости (1.7) к параметру  $\beta_2$ .

---

### 1.3 Нелинейные эффекты в оптике

Отклик любого диэлектрика на световое воздействие становится нелинейным в сильном электромагнитном поле, и оптические волоконные световоды не составляют исключения. С теоретической точки зрения

возникновение нелинейного отклика связано с ангармоническим движением связанных электронов при воздействии приложенного поля  $E$ .

В таком случае общий показатель преломления среды  $n$  будет складываться из линейного  $n_0$  и нелинейного  $n_2$  показателей преломления:

$$n = n_0 + n_2 |E|^2$$

Интерпретация эмпирических данных о  $n_2$  и  $n_0$  с молекулярной точки зрения чрезвычайно плодотворна и интересна, поскольку она позволяет получать сведения о строении атомов, молекул, об их взаимодействии в тех или иных агрегатных состояниях вещества и т. п. Согласно квантовой теории дисперсии, показатели преломления  $n$  и коэффициент поглощения  $\chi$  можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} n^2 (1 - \alpha^2) &= 1 + 4\pi \sum (N_i - N_j) \alpha_{ij}(\omega); \\ n^2 \alpha &= \sum (N_i - N_j) \chi_{ij}(\omega). \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

Здесь  $N_i, N_j$  – заселенности энергетических уровней  $i, j$ ;  $\alpha_{ij}$  – поляризованность,  $\chi_{ij}$  – восприимчивость. Суммирование производится по всем парам уровней. Из структуры соотношений (1), выведенных в предположении о малых значениях интенсивности поля, легко усмотреть два типа возможных причин, обуславливающих появление добавки  $n_2 A^2$  к показателю преломления, а именно, влияние поля на разность заселенностей  $N_i - N_j$  и на свойства каждого атома (т.е. на  $\alpha_{ij}(\omega), \chi_{ij}(\omega)$ ).

1) Изменение разности заселенностей уровней обусловлено поглощением, вынужденным испусканием и конечной продолжительностью возбужденных состояний.

2) Поляризуемость  $\alpha_{ij}(\omega)$ , входящая в выражение для показателя преломления (1.11), которая представляет собой величину, усредненную по всем возможным ориентациям молекул.

Рассмотрим влияние поля на поляризуемость молекулы. При выяснении этого вопроса будем исходить из простой классической модели, описывающей

движение связанного электрона под действием внешнего электромагнитного поля с напряженностью  $E(t)$ :

$$m\ddot{x} = eE(t) + F, \quad (1.12)$$

где  $F = -\frac{\partial U}{\partial x}$  – сила, возвращающая электрон в положение равновесия (удерживающая сила), где соответствующая потенциальная энергия электрона параболически зависит от его смещения из положения равновесия

$$U = \frac{k\Delta x^2}{2}, \quad (1.13)$$

Однако, при достаточно больших значениях смещений  $x$  относительно положения равновесия (на рис.1.7) начинают проявляться нелинейные поправки и (1.13) принимает вид:

$$U(x) = \frac{kx^2}{2} - \frac{1}{3}m\beta x^3 - \frac{1}{4}m\gamma x^4 - \dots \quad (1.14)$$

где  $k$  – жесткость системы, а  $m$  – масса электрона.

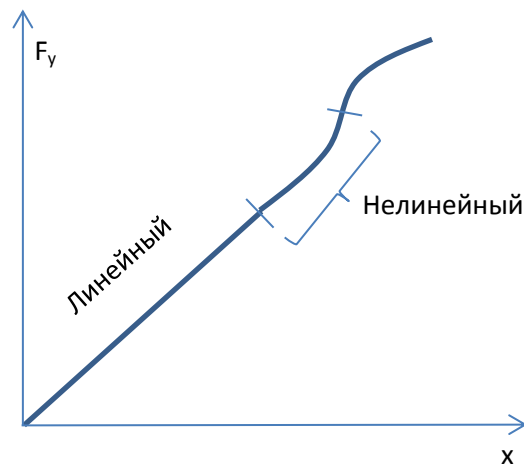


Рис.1.6 Характер возвращающей квазиупругой силы от смещения.

Тогда, уравнение движения (1.12) принимает следующий нелинейный вид:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x - \beta x^2 - \gamma x^3 - \dots = \frac{e}{m} E(t) \quad (1.15)$$

где  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  и  $\beta x^2$  и  $\gamma x^3$  – ангармонические поправки. Такое уравнение решается методом последовательных приближений, т.е. сначала находится решение линейного уравнения  $x=x_0(t)$ , при  $\beta = \gamma = 0$ . Затем полученное решение подставляется в ангармоническое слагаемое, что приводит к уравнению вида:

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{e}{m} E(t) + \beta x_0^2(t) + \gamma x_0^3(t) \dots \quad (1.16)$$

с решением (при условии  $E = A \cos(\omega t)$ ) в форме:

$$x = \frac{e/m}{\omega_0^2 - \omega^2} A \cos(\omega t) + \frac{1}{2} \beta \left(\frac{e}{m}\right)^2 \left(\frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \left(\frac{1}{\omega_0^2} + \frac{\cos 2(\omega t + \varphi)}{\omega_0^2 - (2\omega)^2}\right) + \frac{3}{4} \gamma \left(\frac{e}{m}\right)^3 \frac{A}{\omega_0^2 - \omega^2} +$$

$$\left(\frac{\cos(\omega t + \varphi)}{\omega_0^2 - \omega^2} + \frac{1}{3} \frac{\cos 3(\omega t + \varphi)}{\omega_0^2 - (3\omega)^2} + \dots \right) \quad (1.17)$$

Поскольку поляризуемость также можно разложить в ряд

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_1 A + \alpha_2 A^2, \quad (1.18)$$

и учитывая тот факт, что дипольный момент частицы можно представить как  $d = \alpha A$  (либо  $d = ex$ ), получим:

$$\alpha_0 = \frac{e^2/m}{\omega_0^2 - \omega^2}; \alpha_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{e^3/m^2}{\omega_0^2 - \omega^2}\right) \beta; \alpha_2 = \frac{3}{4} \alpha_0 \gamma \left(\frac{e}{m}\right)^2 \frac{1}{(\omega_0^2 - \omega^2)^3}.$$

Последнее выражение, с учетом выводов в 1.2 и будет определять кубичную зависимость показателя преломления среды от амплитуды напряженности внешнего поля (т.н. керровская нелинейность  $n_2$ ).

Зависимость показателя преломления от интенсивности света приводит к целому ряду интересных нелинейно-оптических эффектов. Два наиболее простых – это фазовая самомодуляция (ФСМ) и фазовая кросс-модуляция (ФКМ). ФСМ обусловлена самонаведенным набегом фазы, который оптическое поле приобретает при распространении в волоконном световоде. Его величину можно получить, заметив, что фаза оптического поля изменяется как

$$\varphi = nk_0 L = (n + n^2 |E|^2) k_0 L, \quad (1.19)$$

где  $k_0 = 2\pi/\lambda$  и  $L$  – длина световода. Зависящий от интенсивности нелинейный набег фазы  $\varphi_{NL} = n_2 k_0 L |E|^2$  возникает вследствие влияния интенсивности поля волны на показатель преломления материала. Помимо прочего, ФСМ приводит к спектральному уширению коротких импульсов и к существованию оптических солитонов в области аномальной дисперсии групповых скоростей световода.

ФКМ обусловлена нелинейным набегом фазы оптического поля, который наведен другим полем на другой длине волны, распространяющимся



совместно. Его появление можно понять, представив полное электрическое поле  $E$  в уравнении (4) как

$$E = \frac{1}{2} [E_1 e^{-i\omega_1 t} + E_2 e^{-i\omega_2 t} + \text{компл. сопр.}] , \quad (1.20)$$

когда два оптических поля на разных частотах  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , поляризованных вдоль оси  $x$ , вместе и одновременно распространяются в волокне. Нелинейный набег фазы поля на частоте  $\omega_1$  тогда будет равен

$$\varphi_{NL} = n_2 k_0 L (|E_1|^2 + 2 |E_2|^2), \quad (1.22)$$

Два члена в правой части уравнения (6) – это ФСМ и ФКМ соответственно.

Важной характерной чертой ФКМ является то, что для двух полей одинаковой интенсивности вклад ФКМ в нелинейный набег фазы в 2 раза больше чем вклад ФСМ.

---

**Задание для самостоятельного выполнения:** Используя пакет MatLab построить графики зависимости нелинейного дисперсионного параметра  $n_2$  для кварцевого волокна в диапазоне  $= (700 \text{ нм} \div 1.5 \text{ мкм})$  полагая  $n_2 = 3.2 \cdot 10^{-16} \text{ см}^2 / \text{Вт}$  на длине волны 1.5 мкм.

---

## **ТЕМА 2. Численные методы анализа нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных. Нелинейное уравнение Шредингера (НУШ).**

**Основные вопросы темы:** вывод нелинейного уравнения распространения, метод медленно-меняющихся амплитуд, условия и ограничения использования НУШ для описания распространения оптических импульсов.

**Цель и задачи практического занятия** состоят в ознакомлении студента с основными методами численного анализа нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных, реализации полученных навыков на практике.

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** линейная и нелинейная поляризации, разложение Фурье, короткие оптические импульсы, характерные длины, операторы дисперсии и нелинейности.

**Требования к уровню подготовленности студента:** студент должен ориентироваться в основных вопросах/понятиях темы, понимать логические связи между ними, быть готовым назвать основные оптические характеристики диэлектрических сред, иметь представление о связи между ними, в частности – на уровне соотношения Крамерса-Кронига, уметь строить базовые математические модели и реализовывать простейшие численные алгоритмы на практике.

## **Теоретический материал и примеры заданий по теме 2**

### **2.1. Вывод укороченных уравнений распространения и метод ММА (медленно меняющихся амплитуд)**

С помощью уравнения Максвелла может быть получено волновое уравнение для напряжённости  $E$ - поля электромагнитной волны в вакууме:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = 0,$$

где  $c$  – скорость распространения,  $\nabla$  - оператор Лапласа.

Однако, если электромагнитное поле распространяется в диэлектрической среде, то наблюдается поляризация вещества под действием падающей волны, происходящая в два этапа (каскадом): на первом из них происходит наведение

элементарных диполей за счет смещения центра масс положительного и отрицательного зарядов изначально нейтральных частиц. На втором имеет место ориентация (частичная) образованных диполей полем той же волны. При этом, уравнение распространения в среде имеет следующий модифицированный вид:

$$\nabla^2 E - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 E}{\partial t^2} = -\mu_0 \frac{\partial^2 P_L}{\partial t^2} - \mu_0 \frac{\partial^2 P_{NL}}{\partial t^2}, \quad (2.1)$$

где  $P_L$  - линейная и  $P_{NL}$  - нелинейная части индуцированной поляризации.

Для того чтобы решать такое уравнение необходим ряд предположений:

- 1)  $P_{NL}$  является малым возмущением по отношению к  $P_L$ ,  $P_{NL} < P_L$ .
- 2) Считаем, что оптическое поле квазимонохроматическое, т.е.  $\frac{\Delta\omega}{\omega_0} \ll 1$ .

Поскольку оптическая частота  $\omega_0$  составляет порядка  $10^{15} \text{ с}^{-1}$ , то  $\Delta\omega \leq 10^{13} \text{ с}^{-1}$ , что соответствует длительностям импульсов порядка  $\tau \geq 0,1 \text{ пс}$ .

Далее будем использовать метод ММА, суть которого заключается в том, что электромагнитное поле разбивают на колеблющуюся с частотой  $\omega_0$  быстроосциллирующую (несущую частоту) часть и медленно меняющуюся огибающую.

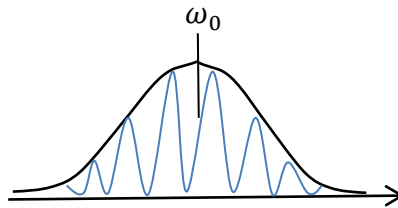


Рис.1.7 Разделение импульса на быстроосциллирующую часть и медленно-меняющуюся огибающую.

При этом, напряженность поля может быть представлена в форме:

$$E(r, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [\bar{E}(r, t) e^{-i\omega_0 t} + \text{компл. сопр.}], \quad (2.2)$$

где  $\hat{x}$  - единичный вектор в направлении поляризации электрического поля, которое предполагается линейно-поляризованным в направлении оси  $x$ ;  $E(r, t)$  – медленно изменяющаяся функция времени;  $\omega_0$  - несущая частота волны.

Пользуясь принципом того, что осциллятор колеблется с частотой вынуждающей силы, поляризацию можно представить как

$$P_L(r, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [\bar{P}_L(r, t) e^{-i\omega_0 t} + \text{компл. сопр.}],$$

$$P_{NL}(r, t) = \frac{1}{2} \hat{x} [\bar{P}_{NL}(r, t) e^{-i\omega_0 t} + \text{компл. сопр.}]. \quad (2.3)$$

В общем случае, для нелинейной поляризации можно записать соотношения:

$$\bar{P}_{NL} = \varepsilon_0 \varepsilon_{NL} \bar{E}; \quad \bar{P}_{NL} = \frac{3}{4} \chi^{(3)} |\bar{E}|^2. \quad (2.4)$$

Подставляя уравнения (2.2), (2.3) и (2.4) в уравнение (2.1) и перейдя к частотному представлению получим

$$\nabla^2 \tilde{E} + \varepsilon(\omega) K_0^2 \tilde{E} = 0, \quad (2.5)$$

где  $\tilde{E} = \int_{-\infty}^{\infty} \bar{E} e^{i(\omega - \omega_0)t} dt$ ,  $K_0 = \frac{\omega}{c}$  – волновое число, а диэлектрическая проницаемость среды полагается нелинейной по внешнему полю функцией, зависящей также и от частоты  $\varepsilon(\omega) = 1 + \chi^{(1)} + \varepsilon_{NL}$ .

Уравнение (2.5) удобно решать по методу разделения переменных, представляя решение в виде произведения частотно-зависящей и пространственно-зависящей функций:

$$\tilde{E}(r, \omega) = F(x, y) \tilde{A}(z, \omega - \omega_0) e^{i\beta_0 z} \quad (2.6)$$

В итоге, получим:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + (\varepsilon K_0^2 - \bar{\beta}^2) F = 0; \\ 2i\beta_0 \frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} + (\bar{\beta}^2 - \beta_0^2) \tilde{A} = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Представим  $\bar{\beta} = \beta(\omega) + \Delta\beta$ , а диэлектрическую проницаемость в виде  $\varepsilon = (n + \Delta n)^2 \cong n^2 + 2n\Delta n$  и тогда второе уравнение их (2.7) примет вид:

$$\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = i(\beta(\omega) + \Delta\beta - \beta_0) \tilde{A} \quad (2.8)$$

Раскладывая постоянную распространения в ряд вокруг центральной частоты:

$$\beta = \beta_0 + \beta_1(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2}\beta_2(\omega - \omega_0)^2 + \dots$$

и сделав обратное Фурье преобразование перейдём к уравнению вида:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + i\Delta\beta A, \quad (2.9)$$

где  $\Delta\beta$  – описывает эффекты потерь и нелинейность. При подстановке малого возмущения  $\Delta n = n_2|\bar{E}| + \frac{i\alpha}{2K_0}$  в (2.9) получим:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2}A = i\gamma|A|^2 A, \quad (2.10)$$

где  $\beta_1$  – обратная групповая скорость;  $\beta_2$  – дисперсия групповой скорости второго порядка;  $\alpha$  – коэффициент линейных оптических потерь;  $\gamma$  – коэффициент нелинейности.

$$\gamma = \frac{n_2\omega_0}{cA_{эфф}},$$

$n_2$  – коэффициент нелинейности,  $A_{эфф}$  – эффективная площадь моды (обычно 10  $\text{мкм}^2$ ).

В том случае, если длительность импульса становится короче 100 фемтосекунд уравнение распространения также можно применять, но с учётом нескольких дополнительных слагаемых:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = -\beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} - \frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} - \frac{\alpha}{2}A + i\gamma|A|^2 A + \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} - a_1 \frac{\partial}{\partial t}(|A|^2 A) - a_2 A \frac{\partial |A|^2}{\partial t} \quad (2.10a)$$

где член при  $\beta_3$  описывает дисперсию третьего порядка,  $a_1 = \frac{2\gamma}{\omega_0}$  связан с дисперсией нелинейности и, в частности, вызывает самоукручение фронта импульса (образование ударной волны). Слагаемое с  $a_2 = i\gamma \cdot T_R$  ( $T_R$  – характерное время жизни фотона) описывает эффекты вынужденного комбинационного саморассеяния.

---

**Задание для самостоятельного выполнения:** Провести самостоятельный вывод уравнения (2.10а) используя подходы, изложенные в п. 2.1.

---

## 2.2 Численные методы решения нелинейных уравнений распространения

Уравнение (2.10) в общем виде аналитически не решается. Оно имеет аналитические решения лишь в некоторых простых частных случаях. Поэтому его решают численно и для того, чтобы использовать численные методы его решения проводят ряд упрощений. В частности, перейдём в бегущую систему координат :

$$T = t - z/v_g .$$

Тогда, если не учитывать высшие порядки, получим уравнение вида:

$$i \frac{\partial A}{\partial z} = -\frac{i}{2} \alpha A + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} - \gamma |A|^2 A , \quad (2.11)$$

которое в особом случае  $\alpha = 0$  и называется нелинейным уравнением Шредингера (НУШ).

Часто для изучения нелинейных эффектов в световоде необходимо численное моделирование. Для этой цели можно использовать разнообразные численные методы, которые можно отнести к одному из двух классов: разностные методы либо псевдоспектральные. Если речь идёт о НУШ, то точность первого метода не позволяет правильно восстановить решение на больших длинах. Поэтому применяют псевдоспектральные методы, одним из которых является Фурье-метод расщепления по физическим факторам (SSFM), когда уравнение (2.11) приводят к виду:

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N})A , \quad (2.12)$$

где  $\hat{D}$  - дифференциальный оператор, учитывающий дисперсию и поглощение

в линейной среде, а  $\hat{N}$  - нелинейный оператор, описывающий действие нелинейных эффектов на распространение оптического импульса. Эти операторы можно представить как:

$$\hat{D} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} - \frac{\alpha}{2} \quad (2.13a)$$

$$\hat{N} = i\gamma|A|^2 \quad (2.13b)$$

Суть метода SSFM состоит в том, что распространение импульса от точки  $z$  к  $z+h$  описывается в два последовательных шага, на рис.2.1. На первом шаге действует только нелинейность и поэтому  $\hat{D}=0$ ; а на втором шаге действует только дисперсия и  $\hat{N}=0$ . Математически это сводится к преобразованию вида:

$$A(z+h+t) = \exp(h(\hat{D} + \hat{N}))A(z,T) \cong \exp(h\hat{D})\exp(h\hat{N})A(z,T) \quad (2.14)$$

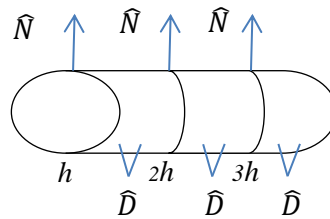


Рис.2.1 Последовательность действия оператор дисперсии и нелинейности при распространении сигнала вдоль оптической среды.

Действие экспоненциального оператора  $\exp(h\hat{D})$  можно выполнить в Фурье-представлении, следуя формуле:

$$\exp(h\hat{D})B(z,T) = \{F^{-1} \exp[h\hat{D}(i\omega)]F\}B(z,T), \quad (2.15)$$

где  $F$  обозначает оператор Фурье-преобразования, для которого справедливо  $F(\frac{\partial}{\partial t}) \rightarrow i\omega$ .

При таком подходе, метод расщепления по физическим факторам дает точность до  $h^2$ . Если считать нелинейность не на краю шага, а по всей длине в виде

$$A(z+h, T) \cong e^{\frac{h}{2}\hat{D}} \exp\left(\int_z^{z+h} \hat{N} dz'\right) e^{\frac{h}{2}\hat{D}} A(z, T) \quad (2.16)$$

То точность увеличивается

Для увеличения скорости счёта используют FFT (быстрое преобразование Фурье – метод, который в настоящее время интегрирован в часть математических пакетов). Применять SSFM-метод можно путем деления среды на множество сегментов, которые не обязательно должны быть одинаковой длины. Оптический импульс преобразуется от сегмента к сегменту в соответствии с уравнением (2.12).

Оптическое поле  $A(z, T)$  сначала проходит расстояние  $h/2$ , на котором действует только дисперсия групповых скоростей; при этом используется алгоритм БПФ и уравнение (13). В точке  $z+h/2$  поле умножается на нелинейный фактор, который характеризует действие нелинейности на полной длине сегмента  $h$ , и наконец, поле проходит оставшееся расстояние  $h/2$ , где действует только дисперсия; в результате получается  $A(z+h, T)$ . Таким образом, предполагается, что нелинейность действует только в средней точке каждого сегмента.

---

---

**Задание для самостоятельного выполнения:** Используя пакет MatLab реализовать программу для численного решения уравнения (2.11).

---

---

### **ТЕМА 3. Моделирование процессов распространения лазерного излучения в дисперсионно-нелинейных средах.**

**Основные вопросы темы:** различные типы режимов при распространении в дисперсионной среде, характеристики дисперсионного уширения оптических импульсов, образование ударных волн в нелинейной среде, динамика ударной волны.



**Цель и задачи практического занятия** состоят в развитии навыков численного моделирования нелинейных дифференциальных уравнений на примере решения нелинейных уравнений распространения.

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** спектр оптического импульса, частотная модуляция, уширение импульса, характерные длины распространения, ударная волна, метод характеристик.

**Требования к уровню подготовленности студента:** студент должен ориентироваться в основных вопросах/понятиях темы, понимать логические связи между ними, быть готовым составить простейший алгоритм решения дифференциального уравнения, блок-схему и приступить к численной реализации задачи.

## Теоретический материал и примеры заданий по теме 3

### 3.1 Решение уравнений распространения для сред с дисперсией второго порядка.

Переходя к нормированной амплитуде

$$A(z, t) = \sqrt{P_0} \exp(-\alpha z / 2) U(z, \tau),$$

где  $P_0$  - пиковая мощность начального импульса, уравнение (2.11) принимает вид

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{\text{sgn}(\beta_2)}{2L_D} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - \frac{\exp(-\alpha z)}{L_{NL}} |U|^2 U \quad (3.1)$$

Здесь введены характерные длины  $L_D = \frac{T_0^2}{|\beta_2|}$  и  $L_{NL} = \frac{1}{\gamma P_0}$ . Эти два параметра –

дисперсионная длина  $L_D$  и нелинейная длина  $L_{NL}$  характеризуют длины, на которых представленные эффекты становятся значимыми и наблюдаемыми.

Рассматривая различные случаи реализации (3.1) в конкретных средах, можно выделить 4 основных режима распространения.

а) Пусть  $L \ll L_{NL}$  и  $L \ll L_D \Rightarrow U(z, \tau) = U(0, \tau)$ , т.е. импульс сохраняет свою форму при распространении. В этом режиме волокно играет пассивную роль и просто передает оптические импульсы. Этот режим пригоден для оптических систем связи.

б) Пусть  $L \ll L_{NL}$  и  $L \geq L_D$ , тогда из уравнения распространения нелинейность можно удалить, поскольку  $\frac{L_D}{L_{NL}} \ll 1$ .

в) Пусть  $L \geq L_{NL}$  и  $L < L_D$ . В этом случае эволюция импульса определяется наличием ФСМ, т.е. фазовой самомодуляцией, что может приводить к изменению формы импульса даже при очень слабом ДГС.

г) Пусть  $L > L_D$ ,  $L_{NL}$ . Совместное влияние эффектов ДГС и ФСМ может приводить к качественно иной картине распространения оптического импульса по сравнению с теми случаями, когда ДГС и ФСМ действуют по-отдельности.

Остановимся на случае б), когда уравнение распространения приобретает вид:

$$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2} \quad (3.2)$$

Решить его напрямую не удастся, следовательно, необходимо перейти к частотному представлению, выполнив Фурье-преобразования над амплитудой оптического импульса:

$$U(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(z, \omega) \exp(-i\omega T) d\omega \quad (3.3)$$

Тогда, уравнение (3.2) принимает простой вид:

$$i \frac{\partial \tilde{U}}{\partial z} = -\frac{1}{2} \beta_2 \omega^2 \tilde{U} \quad (3.4)$$

а его решение соответствует функции вида:  $\tilde{U}(z, \omega) = \tilde{U}(0, \omega) \exp[\frac{i}{2} \beta_2 \omega^2 z]$

Таким образом, ДГС меняет фазу в каждой спектральной компоненте импульса на величину, зависящую от частоты и длины распространения. Выполнив обратные преобразования Фурье, можно перейти к общему решению вида:

$$U(z, T) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{U}(0, \omega) \exp\left[\frac{i}{2} \beta_2 \omega^2 z - i\omega T\right] d\omega, \quad (3.5)$$

где  $\tilde{U}(0, \omega)$  есть Фурье-преобразование начального импульса.

Для простоты рассмотрим случай гауссовского импульса на входе:

$$U(0, T) = \exp\left[-\frac{T^2}{2T_0^2}\right],$$

где  $T_0$  - полуширина импульса.

Выполнив фурье-преобразование от  $U_0$  и подставив в (3.5) получим:

$$U(z, T) = \frac{T_0^2}{T_0^2 - i\beta_2 z} \exp\left[-\frac{T^2}{2(T_0^2 - i\beta_2 z)}\right] \quad (3.6)$$

Таким образом, гауссовский импульс сохраняют свою форму в дисперсионной среде, но его длительность увеличивается:

$$T_1 = T_0 [1 + (z/L_D)^2]^{1/2} \quad (3.7)$$

где дисперсионная длина  $L_D = T_0^2 / |\beta_2|$ .

В случае наличия линейной частотной модуляции у гауссовского импульса, начальное поле записывается в виде:

$$U(0, T) = \exp\left[-\frac{1+iC}{2} \frac{T^2}{T_0^2}\right], \text{ где } C - \text{параметр модуляции.}$$

В частности, если  $C < 0$ , то частота линейно увеличивается переднего фронта к заднему. В этом случае, общее решение приобретает вид:

$$U(z, T) = \frac{T_0^2}{T_0^2 - i\beta_2 z(1+iC)} \exp\left[-\frac{(1+iC)T^2}{2[T_0^2 - i\beta_2 z(1+iC)]}\right] \quad (3.8)$$

Длительность такого импульса  $T_1$  после прохождения длины  $z$  связана с начальной длительностью  $T_0$  соотношением

$$\frac{T_1}{T_0} = \left[ \left(1 + \frac{C\beta_2 z}{T_0^2}\right)^2 + \left(\frac{\beta_2 z}{T_0^2}\right)^2 \right]^{1/2}.$$

Из этого уравнения видно, что уширение зависит от знаков параметра ДГС  $\beta_2$  и параметра частотной модуляции  $C$ . Гауссовский импульс монотонно

уширяться с увеличением  $z$ , если  $\beta_2 C > 0$ . Если же  $\beta_2 C < 0$ , то импульс сжимается на начальном этапе.

---

**Задание для самостоятельного выполнения:** Используя пакет MatLab промоделировать с помощью метода SSFM уравнение распространения вида:

$i \frac{\partial U}{\partial z} = \frac{1}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 U}{\partial T^2}$  с начальным гаусовским импульсом  $U(0, T) = e^{-\frac{T^2}{2T_0^2}}$ , где  $T_0$  - начальная полуширина импульса и сравнить полученный результат с аналитическим решением (3.6) на разных дистанциях.

---

### 3.2 Образование ударной волны в нелинейной среде.

В случае сверхкоротких импульсов нужно учитывать нелинейные эффекты высшего порядка. Одним из них является дисперсия нелинейности, связанная с зависимостью групповой скорости от интенсивности. Рассматривая бездисперсионный случай с  $\beta_2=0$  и в отсутствии оптических потерь  $\alpha=0$  перейдем к необходимости изучения нелинейного уравнения распространения вида

$$\frac{\partial U}{\partial z} - s \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) = i|U|^2 U \quad (3.8)$$

где параметр  $s$  задает коэффициент нелинейной дисперсии и введен относительный параметр длины  $Z = \frac{z}{L_{NL}}$ . Для этого представим решение  $U$  в

форме произведения амплитудной и фазовой частей  $U = \sqrt{I} e^{i\varphi}$ . Полученная на основе такой параметризации система будет иметь следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{\partial I}{\partial Z} + 3sI \frac{\partial I}{\partial \tau} = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial Z} + sI \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = I \end{cases} \quad (3.9)$$

Решая первое уравнение, будем использовать метод характеристик, согласно которому общее решение запишется в виде

$$I(Z, \tau) = f(\tau - 3sIZ) \quad (3.10)$$

Таким образом, можно полагать, что каждая временная точка  $\tau$  движется вдоль прямой линии от начального значения и наклон этой линии зависит от интенсивности. Полагая импульс на входе гауссовским, т.е. вида  $I(0, \tau) = f(\tau) = e^{-\tau^2}$  получим, что после прохождения расстояния  $Z$  его форма примет следующий вид:

$$I(Z, \tau) = \exp(-(\tau - 3sIZ)^2) \quad (3.11)$$

Поскольку решение (3.11) соответствует неявно заданной функции, то для восстановления формы оптического импульса необходимо для каждого фиксированного  $I(z, \tau)$  выразить  $\tau$  через  $Z$ . Поскольку скорость движения различных точек огибающей импульса в (3.11) зависит от интенсивности, очевидно, что движение пика импульса будет запаздывать относительно движения его переднего фронта. Формально, такой процесс может развиваться вплоть до реализации условий, при которых задний фронт импульса становится абсолютно прямым, что и соответствует образованию ударной оптической волны, однако – на заднем фронте импульса. С математической точки зрения, такая ситуация соответствует случаю  $\frac{\partial I}{\partial \tau} = 0$ . Отсюда можно приблизительно оценить длину образования ударной волны огибающей

$z_s = \sqrt{\frac{e}{2} \frac{L_{NL}}{3s}}$ . На практике, идеальная ударная волна в оптике образоваться не может из-за необходимости учета дисперсионных эффектов в (3.8), которые приводят к сглаживанию процессов укрупнения заднего фронта оптического импульса.

---

**Задание для самостоятельного выполнения:** Используя пакет MatLab промоделировать с помощью метода SSFM уравнение распространения (3.8) и сравнить полученный результат с аналитическим решением (3.11) на разных дистанциях.

---

## Список литературы

1. R K Tyson *Principles and Applications of Fourier Optics*, IOP Publishing Ltd 2014.
2. G.P. Agrawal Nonlinear fiber optics, Academic Press, USA (1995)
3. Розанов Н.Н. Диссипативные оптические солитоны. От микро- к нано- и атто- (М.: Физматлит, 2011).
4. Крюков П.Г. Крюков П.Г. , Лазеры ультракоротких импульсов и их применения, Издательский Дом ИНТЕЛЛЕКТ, 2012.
5. Л. Аллен, Дж. Эберли, Оптический резонанс и двухуровневые атомы, М.:Мир (1978)
6. Г.С. Ландсберг, Оптика, М.: Наука (1976)