

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования  
**«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**  
**(ВлГУ)**  
Институт прикладной математики и информатики био- и нанотехнологий  
**Кафедра** физики и прикладной математики

Седов Евгений Сергеевич  
Давыдов Николай Николаевич

**Методические указания к практическим занятиям**  
по дисциплине  
**«Физические и математические принципы адаптивной оптики»**  
для студентов ВлГУ, обучающихся  
по направлению  
12.04.05 (200500.68) «Лазерная техника и лазерные технологии»

Владимир-2015 г.

## Оглавление

Список используемых сокращений	3
ТЕМА 1. Разновидности систем адаптивной оптики	4
ТЕМА 2. Области применения адаптивных оптических систем	12
ТЕМА 3. Датчики волнового фронта, работающие на интерферометрических принципах	29
ТЕМА 4. Датчики волнового фронта, использующие принцип Гартмана	37
ТЕМА 5. Математический аппарат для описания оптического изображения и формирующей его системы	45
ТЕМА 6. Оптическая передаточная функция	54
ТЕМА 7. Зеркала с синтезированной апертурой	60
ТЕМА 8. Способы оценки качества изображения, формируемого оптической системой	67
ТЕМА 9. Технологии создания узлов адаптивных оптических систем	73
Список литературы	82

## Список используемых сокращений

<b>АОС</b>	адаптивная оптическая система
<b>ДВФ</b>	датчик волнового фронта
<b>ДЗ</b>	деформируемое зеркало
<b>КВФ</b>	корректор волнового фронта
<b>ОПФ</b>	оптическая передаточная функция
<b>ПДМС</b>	полидиметилсилоксан
<b>СКУ</b>	система контроля и управления
<b>ФРТ</b>	функция рассеяния точки

## **ТЕМА 1. Разновидности систем адаптивной оптики**

**Основные вопросы темы:** ключевые компоненты систем адаптивной оптики — датчик для оценки формы волнового фронта, корректор для исправления искажений волнового фронта падающего излучения, система контроля и управления. Типы адаптивных оптических систем — с прямой и обратной связью (в зависимости от взаимного расположения компонентов системы), их преимущества и недостатки. Построение блок-схем адаптивных оптических систем.

**Цель и задачи практического занятия** состоят в ознакомлении студента с принципиальной конструкцией систем адаптивной оптики, их ключевыми компонентами и вариантами взаимного расположения; особенностями построения фазовых диаграмм систем адаптивной оптики на основе их принципиальных схем.

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** адаптивно-оптическая система, датчик волнового фронта, деформируемое зеркало, корректор волнового фронта, обратная связь, поворотное зеркало, прямое управление.

**Требования к уровню подготовленности студента:** студент должен ориентироваться в основных вопросах/понятиях темы, понимать логические связи между ними, быть готовым перечислить и описать назначение ключевых компонентов систем адаптивной оптики, назвать тип адаптивно-оптической системы на основе расположения её компонентов, построить блок-схему системы адаптивной оптики на основе её принципиальной схемы.

### **Теоретический материал и примеры заданий по теме 1**

Основная задача адаптивных оптических систем (АОС) состоит в исправлении искажений волнового фронта излучения, вносимых внешними воздействиями. Существуют различные подходы к решению этой задачи, но все они сводятся к выполнению общей последовательности действий. Из входного зрачка оптической системы изображение поступает на корректор волнового фронта (КВФ). Для того чтобы получить информацию о форме волнового фронта в оптическую систему встраивается датчик волнового фронта (ДВФ). Информация с ДВФ поступает в систему контроля и управления (СКУ), которая генерирует управляющий сигнал для КВФ. На основе полученного сигнала КВФ исправляет искажения волнового фронта излучения.



Итак, можно выделить три основных компонента АОС: датчик волнового фронта, корректор волнового фронта и систему управления и контроля.

Датчик волнового фронта осуществляет измерение искажений волнового фронта излучения, возникающих из-за турбулентности среды, аберраций оптической системы и иных факторов. Датчик волнового фронта должен обладать быстрым откликом на поступающий сигнал, а также высоким пространственным разрешением. Он должен максимально эффективно использовать поступающее излучение; иными словами, в формировании управляющего сигнала должно участвовать максимальное число поступающих на ДВФ фотонов. В АОС для телескопов датчик должен работать в широком спектральном диапазоне, в том числе выходящем за пределы видимой области спектра. В АОС для лазеров это требование не так критично: в данном случае датчик должен лишь обеспечивать работу в спектральном диапазоне лазерного излучения. Желательным свойством для ДВФ является линейность отклика во всём спектральном диапазоне принимаемого излучения.

Корректор волнового фронта является компонентом АОС, который используется для компенсации искажений, внесённых в волновой фронт излучения в ходе его распространения. Корректор является электро-опто-механическим устройством, обеспечивающим физическое перемещение или изменение формы компонентов оптической системы, пропорциональное поступающему сигналу. Можно выделить две основные группы КВФ. Простейшим КВФ является поворотное зеркало, которое обеспечивает коррекцию наклона волнового фронта в двух плоскостях. Остаточные искажения исправляются при помощи деформируемых зеркал (ДЗ), форма которых может изменяться во времени. В идеальном случае форма зеркала должна повторять инвертированный искажённый волновой фронт излучения — см. рис. 1.

Функция СКУ зачастую сводится к следующему: принять сигнал от ДВФ с информацией о форме волнового фронта, преобразовать его и передать сигнал на КВФ с информацией о необходимых изменениях формы или положения. Зачастую в АОС параллельно используется несколько СКУ в сопряжении с несколькими КВФ. Так одна пара СКУ-КВФ, где в роли КВФ выступает поворотное зеркало, обеспечивает исправление простейших аберраций, в то время как вторая пара, где используется ДЗ, исправляет аберрации высших порядков.

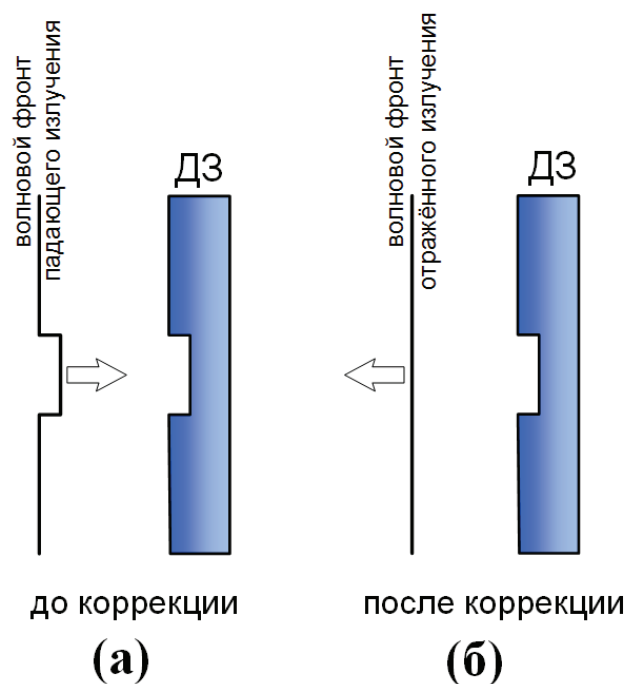


Рис. 1. Иллюстрация принципа коррекции фазы при помощи ДЗ. На рисунке (а) — излучение с искажённым волновым фронтом, падающее на ДЗ; на рисунке (б) — отражённое от ДЗ излучение с плоским волновым фронтом.

Всё множество систем адаптивной оптики в зависимости от взаимного расположения элементов можно условно разделить на два типа: с прямым управлением и с обратной связью [1]. Такие системы схематично представлены на рис. 2 и 3.

В АОС с прямым управлением (рис. 2а) изображение строится следующим образом. Излучение от источника, обозначенного на рисунке как **И**, проходит через возмущённую среду (например, для телескопических систем — через турбулентную атмосферу), и его волновой фронт искажается. До того как излучение попадёт на деформируемое зеркало **ДЗ**, часть излучения при помощи светоделителя **СД** отводится на датчик волнового фронта **ДВФ**. Сигнал от датчика поступает на систему контроля и управления **К**, где рассчитывается требуемая форма зеркала, позволяющая выровнять волновой фронт, а также формируются сигналы к устройствам изменения формы зеркала. Искажённый волновой фронт после отражения от зеркала **ДЗ** с изменённой формой выравнивается, излучение через дополнительную фокусирующую систему **ФС** попадает на экран **Э**, где формируется изображение источника.

На рис. 2б приведена блок-схема АОС с прямым управлением. Опишем физический смысл функций, заданных на фазовой диаграмме. Функция  $w \equiv w(\mathbf{r}, t)$  описывает

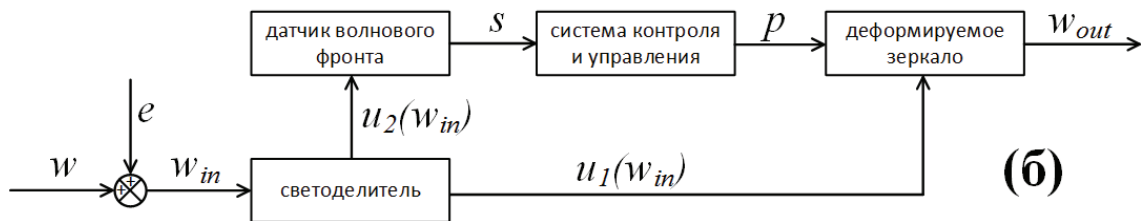
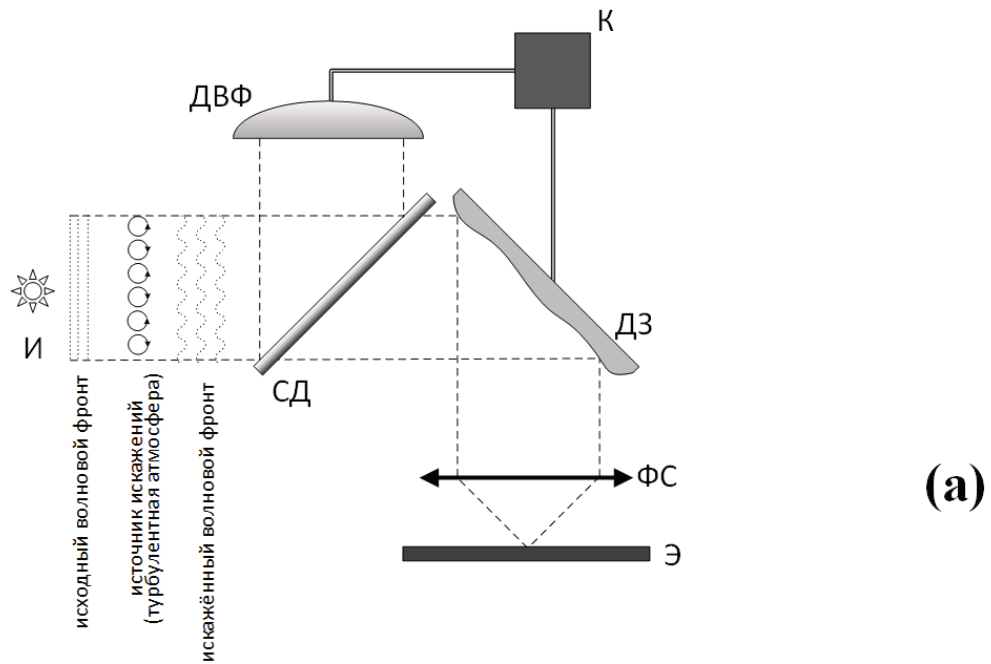


Рис. 2. (а) — Принципиальная схема и (б) — блок-схема адаптивного телескопа с прямым управлением.

излучение от источника с неискажённым волновым фронтом;  $e \equiv e(\mathbf{r}, t)$  — функция искажений, возникающих при прохождении через возмущённую среду;  $w_{in} \equiv w_{in}(\mathbf{r}, t)$  описывает излучение с искажённым волновым фронтом на входе в оптическую систему; справедливо записать эту функцию как  $w_{in} = w + e$ . Светоделитель разделяет входящее излучение  $w_{in}$  на две компоненты, обладающие волновым фронтом, идентичным входящему. Одна компонента,  $u_1(w_{in})$ , поступает на ДЗ, вторая,  $u_2(w_{in})$ , — на ДВФ. Функция  $s \equiv s(\mathbf{r}, t)$  описывает электрический сигнал от датчика с информацией о форме волнового фронта;  $p \equiv p(\mathbf{r}, t)$  — сигнал от СКУ с информацией о параметрах изменения формы ДЗ. Функция  $w_{out} \equiv w_{out}(\mathbf{r}, t)$  описывает излучение с исправленным волновым фронтом на выходе из системы. В блок-схеме опущена дополнительная фокусирующая система, представленная на рис. 2а, поскольку она не вносит принципиально важной информации о работе системы адаптивной оптики.

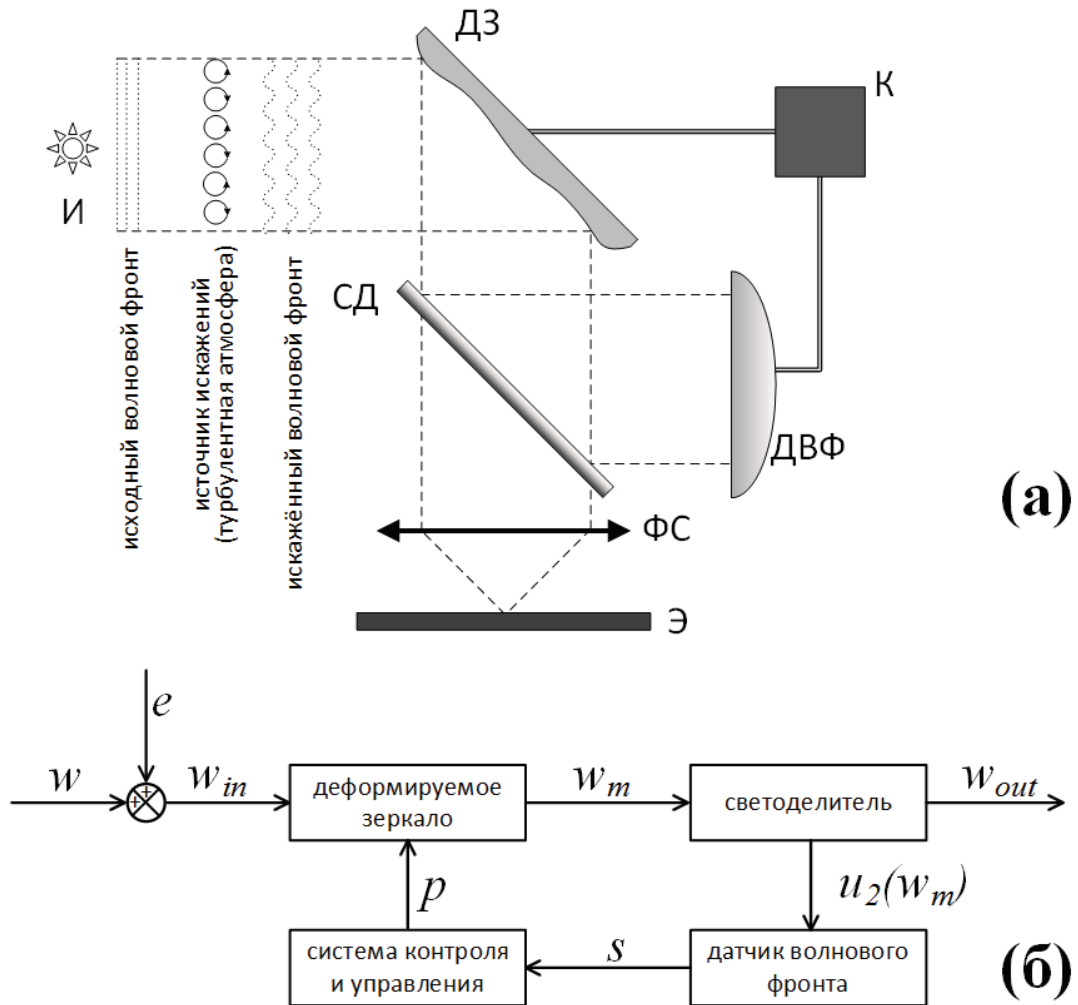


Рис. 3. (а) — Принципиальная схема и (б) — блок-схема адаптивного телескопа с обратной связью.

Основным преимуществом систем прямого управления является их высокое быстродействие. Однако значительные ограничения на использование накладывают их существенные недостатки, которые заключаются в следующем. Во-первых, поскольку ДВФ находится перед оптической системой, которая непосредственно формирует изображение, aberrации, вносимые элементами самой системы, а также aberrации, возникающие в возмущённой среде после датчика, не корректируются. Во-вторых, поскольку не происходит дополнительного контроля изменений, внесённых в волновой фронт при помощи ДЗ, к системам управления формой зеркала и детектирования волнового фронта предъявляются чрезвычайно высокие требования. Данных недостатков лишены АОС с обратной связью. Схематично такая система представлена на рис. 3а. В ней ДВФ расположен после ДЗ, участвующего в построении изображения.

---

**Задание:** построить блок-схему АОС с обратной связью.

**Выполнение** осуществляется на основе приведённого далее алгоритма. На начальных этапах построение блок-схемы для данной задачи аналогично ранее рассмотренному случаю.

а) Излучение от источника, описываемое функцией  $w$ , проходит через возмущённую среду, где вносятся искажения  $e$ .

б) На входе в оптическую систему имеем излучение  $w_{in} = w + e$  с искажённым волновым фронтом.

в) Входное излучение попадает на ДЗ.

г) В самом начале работы адаптивной системы от зеркала излучения без изменения волнового фронта поступает на светоделитель; излучение описывается функцией  $w_{in}$ .

д) На светоделителе излучение  $w_{in}$  разделяется на две компоненты. Одна компонента,  $u_1(w_{in})$ , выходит из системы, вторая,  $u_2(w_{in})$ , поступает на ДВФ.

е) Сигнал  $s$  с датчика, содержащий информацию о форме волнового фронта, поступает в СКУ.

ж) Система контроля и управления формирует сигнал  $p$ , на основе которого происходит изменение формы зеркала.

з) Входное излучение  $w_{in}$  продолжает поступать на ДЗ, форма которого изменена.

и) От зеркала выходит излучение  $w_m$  с выправленным волновым фронтом; функция  $w_m \equiv w_m(\mathbf{r}, t)$  может быть записана как функционал входного излучения  $w_{in}$  и функции  $p$ , т. е.  $w_m = F(w_{in}, p)$ .

к) Излучение  $w_m$  попадает на светоделитель, где разделяется на выходной сигнал  $w_{out}$  и сигнал  $u_2(w_m)$ , поступающий на ДВФ.

л) Для функции  $u_2(w_m)$  повторяется алгоритм с пункта (е) до пункта (к).

На блок-схеме, построенной по данному алгоритму и представленной на рис. 3б, пункты (г–з) для функции  $w_{in}$  не отражены, поскольку являются частным случаем пунктов (е–к) для функции  $w_m$ .

---

На практике для реальных систем адаптивной оптики цикл, описываемый пунктами (е–к) для функции  $w_m$ , повторяет до тех пор, пока не достигается

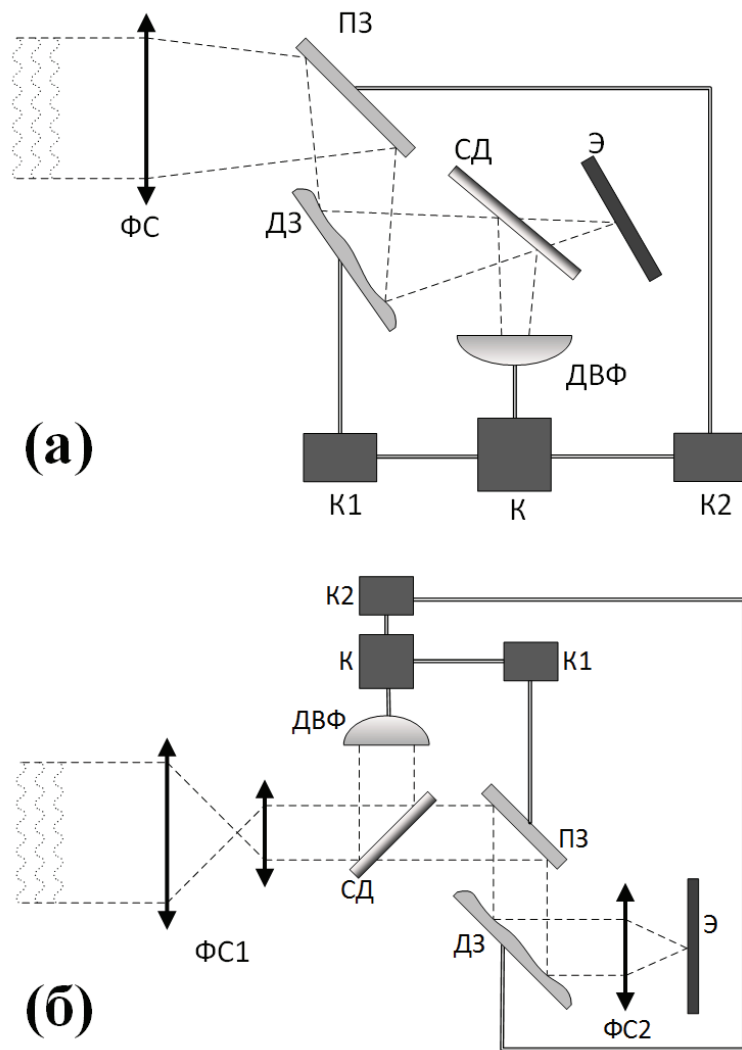


Рис. 4. Принципиальная схема адаптивных телескопов с обратной связью и с дополнительными оптическими системами (а) — для фокусировки и (б) — для коллимации светового излучения.

удовлетворительное качество изображения, что подразумевает соответствие формы волнового фронта излучения  $w_m$  некоторому эталону (в идеальном случае — плоскому волновому фронту). Следует также отметить, что на блок-схемах на рисунках 2б и 3б не отражены искажения волнового фронта, вносимые самой адаптивной системой.

На рис. 4 схематично изображены АОС, в отличие от рассмотренных ранее содержащие дополнительные оптические подсистемы для фокусировки (а) и коллимации (б) светового пучка. Кроме того, обе системы помимо ДЗ включают поворотные зеркала ПЗ и дополнительные СКУ для управления ими.

---

---

**Задание для самостоятельного выполнения:** построить блок-схемы АОС, схематично представленных на рис. 4. Включить в блок-схемы дополнительные оптические подсистемы, указать на блок-схемах источники искажений, вносимых компонентами АОС.

---

---

## **ТЕМА 2. Области применения адаптивных оптических систем**

**Основные вопросы темы:** области применения систем адаптивной оптики — астрономия, системы мощных лазеров, оптическая микроскопия. Атмосферная турбулентность как источник аберраций волнового фронта. Способы описания турбулентности. Теории турбулентности Колмогорова и фон Кармана. Термически индуцированные аберрации элементов лазерных систем и микроскопов. Тепловое самовоздействие излучения.

**Цель и задачи практического занятия** состоят в ознакомлении студента с областями применения систем адаптивной оптики, методами описания искажений волнового фронта излучения, распространяющегося в турбулентной атмосфере, а также искажений, возникающих вследствие изменения оптических и геометрических характеристик компонентов лазерных систем (зеркал резонатора, пластины выходного окна, оптических кристаллов) в результате теплового воздействия.

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** деформация оптического элемента, корреляционная функция, спектральная плотность, структурная постоянная показателя преломления, структурная функция, тепловое самовоздействие, турбулентность, число Рейнольдса.

**Требования к уровню подготовленности студента:** студент должен ориентироваться в основных вопросах/понятиях темы, понимать логические связи между ними, быть готовым назвать области применения систем адаптивной оптики с приведением основных источников искажений волнового фронта, на основе статистических моделей атмосферной турбулентности выполнить оценку величины структурной постоянной показателя преломления воздуха, привести математическое описание искажений волнового фронта, возникающих в системах мощных лазеров.

### **Теоретический материал и примеры заданий по теме 2**

Все области науки и производства, в которых нашли применение АОС, можно объединить в три группы: оптическая астрономия, мощные лазерные системы и микроскопия. Каждой области применения свойственны свои особенности распространения и преобразования излучения, однако все они характеризуются общей проблемой требующей использования АОС, а именно: присутствием аберраций,



значительно ухудшающих качество получаемого изображения. Последовательно рассмотрим каждую область применения и выделим наиболее характерные для неё источники аберраций.

## 2.1. Оптическая астрономия

По мере совершенствования оптических астрономических приборов в восемнадцатом веке было достигнуто природное ограничение для получения качественных изображений объектов наблюдения. Так основная трудность использования наземных телескопов обусловлена турбулентностью в земной атмосфере, которая вызывает флуктуации показателя преломления воздуха. В начале 50-х годов XX века Хорес Бэбкок (англ.: Horace Babcock) нашёл решение возникшей проблемы. Он внёс предложение исправлять искажения волнового фронта излучения при помощи активных оптических элементов, таких как ДЗ. Однако на тот момент технологии не позволяли воплотить эти идеи в жизнь. Первая АОС для телескопа была построена в 1977 году. С её помощью удалось существенно повысить качество полученного при помощи оптического телескопа изображения двойных звёзд.

### Источник аберраций — атмосферная турбулентность

#### *Статистическое описание турбулентности*

Воздушная масса постоянно находится в движении, и тому есть множество причин. Основная причина заключается в нагреве поверхности Земли солнечным излучением, что приводит к возникновению конвекционных потоков. Воздушные потоки могут быть ламинарными, носящими однородный характер, и турбулентными, т. е. включающими случайные неоднородности за счёт разнонаправленного движения воздуха внутри самих потоков. Объективным параметром, который позволяет отличать ламинарный поток от турбулентного, является число Рейнольдса (англ.: Reynolds number). Это безразмерный параметр, описывающий характер потока вязкой жидкости и определяемый отношением инерционных сил и вязкости в жидкости:

$$Re = \frac{v_{\text{flow}} \ell}{\nu}, \quad (2.1)$$

где  $v_{\text{flow}}$  – скорость потока,  $\ell$  – характерный размер элемента потока,  $\nu$  – кинематическая вязкость жидкости. Каждый вид течения характеризуется некоторым критическим

значением числа  $Re_c$ , при котором происходит переход от ламинарного течения к турбулентному. Если характерное значение  $Re$  превышает  $Re_c$ , поток такой жидкости является турбулентным. Кинематическая вязкость атмосферного воздуха оценивается как  $\nu \simeq 1.5 \times 10^{-5} \text{ м}^2/\text{с}$ . При характерной скорости воздушного потока  $v_{\text{flow}} = 1 \text{ м/с}$  и характерном пространственном масштабе  $\ell$  от нескольких метров до километра число Рейнольдса  $Re$  для атмосферы принимает значения, превышающие  $10^6$ . В соответствии с оценками, выполненными в работе [2], этого значения достаточно, чтобы считать атмосферные потоки преимущественно турбулентными.

Атмосферная турбулентность характеризуется случайным образованием так называемых турбулентных вихрей (англ.: eddies). Переменная  $v_{\text{flow}}$ , описывающая скорость потока, в каждой точке пространства является случайной и находится статистическими методами. В турбулентной атмосфере случайные флуктуации характерны и для других параметров, таких как температура  $T$ , влажность  $H$ , а также наиболее важный в рамках настоящей дисциплины параметр — показатель преломления  $n$ .

Статистическая зависимость некоторой случайной переменной  $\chi(\mathbf{r}, t)$  (в роли которой могут выступать скорость, показатель преломления и др.) в двух точках пространства или в двух разных моментах времени описывается корреляционной функцией. Так пространственная корреляционная функция переменной  $\chi(\mathbf{r})$  между точками  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  в общем случае задаётся выражением

$$g_\chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle \chi(\mathbf{r}_1)\chi(\mathbf{r}_2) \rangle,$$

где угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  обозначают усреднение по ансамблю реализаций.

В то же время переменная  $\chi(\mathbf{r})$  в двух точках пространства  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$  статистически может быть описана структурной функцией  $D_\chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2)$ , которая задаётся как среднеквадратичная разность  $\chi(\mathbf{r}_2) - \chi(\mathbf{r}_1)$ :

$$D_\chi(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2) = \langle [\chi(\mathbf{r}_2) - \chi(\mathbf{r}_1)]^2 \rangle,$$

Обычно переменная  $\chi(\mathbf{r}, t)$  не является стационарной во времени и однородной в пространстве. Однако, как правило, на малых масштабах  $t$  и  $\mathbf{r}$  изменение величины  $\chi(\mathbf{r}, t)$  происходит достаточно медленно и может быть исключено из рассмотрения либо учтено пошаговым (дискретным) изменением величин  $t$  и  $\mathbf{r}$  и рассмотрением временных и пространственных слоёв конечной толщины [3].

В данном приближении атмосферная турбулентность полагается изотропной. Это подразумевает, что корреляционная функция зависит от модуля разности радиус-векторов рассматриваемых точек:  $R = |\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ . В этом случае соотношение между структурной функцией  $D_\chi(R)$  и корреляционной функцией  $g_\chi(R)$  задаётся выражением

$$D_\chi(R) = 2[g_\chi(0) - g_\chi(R)].$$

Для статистического описания пространственной структуры случайной переменной  $\chi(\mathbf{r})$  также используется спектральная плотность, которая определяется преобразованием Фурье корреляционной функции  $g_\chi(\mathbf{r})$ :

$$\Phi_\chi(K) = \int_{-\infty}^{\infty} g_\chi(R) \exp(2\pi i \mathbf{K}\mathbf{R}) d\mathbf{R}, \quad (2.2)$$

где  $\mathbf{K}$  – вектор обратного пространства.

### ***Теория турбулентности Колмогорова***

Модель описания пространственной структуры турбулентного потока, основанная на теории каскадного переноса энергии, была предложена А. Н. Колмогоровым [4]. В соответствии с этой теорией процесс переноса энергии описывается следующим образом. В ходе распространения воздушного потока образуются локальные неустойчивости воздушной массы, приводящие к формированию вихрей. Каждый вихрь описывается характерными размерами  $L_0$ , существенно меньшими пространственного масштаба исходного потока. Под воздействием внешних сил большие вихри распадаются на всё более и более мелкие с характерными размерами  $\ell$ . В результате энергия от больших вихрей передаётся малым, формируя так называемый энергетический каскад. Процесс дробления вихрей происходит до тех пор, пока их размеры  $\ell$  не приблизятся к некоторому значению  $\ell_0$ , и пока число Рейнольдса  $Re$  в соответствии с выражением (2.1) не достигнет критического значения  $Re_c$ , когда вязкость начинает вносить существенный вклад в распространение потока. При этом происходит диссипация энергии (нагрев), и каскадная передача энергии прекращается. Схематично каскадная передача энергии в турбулентной атмосфере представлена на рис. 5.

Область размеров вихрей от  $\ell_0$  до  $L_0$ , в которой происходит каскадная передача энергии, называется инерционным интервалом (англ.: inertial range). Применительно к атмосферной турбулентности малый масштаб  $\ell_0$  составляет единицы миллиметров [5], а большой  $L_0$  — десятки метров [6].

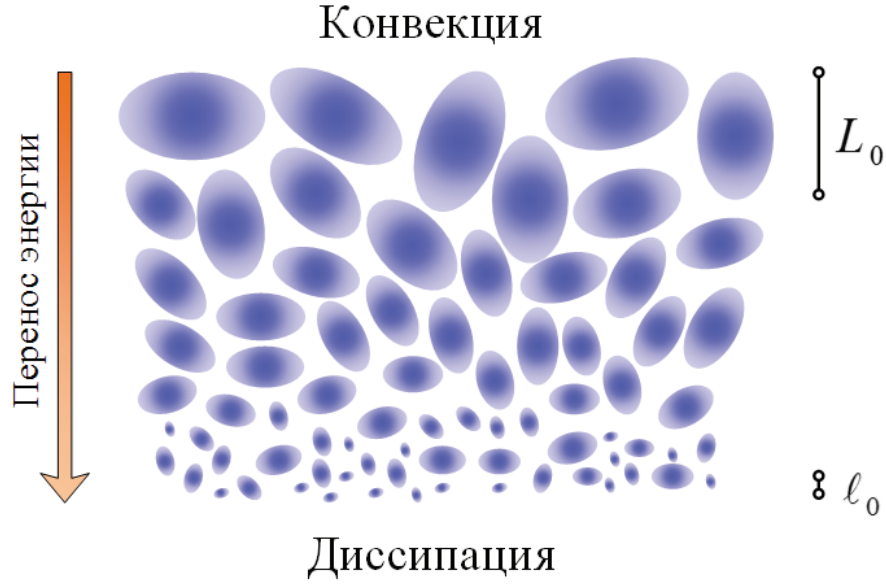


Рис. 5. К описанию теории каскадного переноса энергии Колмогорова.

На основе описанной теории структурная функция флуктуаций скорости потока  $D_v(R)$  определяется выражением [4]

$$D_v(R) = \langle (v_1 - v_2)^2 \rangle = C_v^2 R^{2/3},$$

где  $v_1$  и  $v_2$  задают скорости в двух точках пространства, разделённых расстоянием  $R$ . Коэффициент  $C_v^2$  – структурная постоянная скорости, единицы измерения которой –  $[m^{4/3}c^{-2}]$ . Структурная функция  $D_v(R)$  измеряется в единицах  $[m^2c^{-2}]$ .

Полная аналогия описанию флуктуаций скорости на основе теории Колмогорова прослеживается и при описании флуктуаций температуры. Аналогичным образом определяется инерционный интервал  $(\ell_0, L_0)$ , и вводится структурная функция флуктуаций температуры:

$$D_T(R) = \langle (T_1 - T_2)^2 \rangle = C_T^2 R^{2/3},$$

где  $T_1$  и  $T_2$  задают температуру в двух точках пространства, разделённых расстоянием  $R$ . Коэффициент  $C_T^2$  – структурная постоянная температуры, единицы измерения –  $[K^2m^{-2/3}]$ . Структурная функция  $D_T(R)$  измеряется в единицах  $[K^2]$ .

В соответствии с (2.2) спектральная плотность температурных флуктуаций  $\Phi_T(K)$  в рамках данной теории определяется выражением (см. [7])

$$\Phi_T(K) = \frac{0.033}{\sqrt{(2\pi)^3}} C_T^2 K^{-11/3}. \quad (2.3)$$

Поскольку показатель преломления воздуха напрямую зависит от его температуры, можем применить к нему приведённые для температуры рассуждения. В результате получим структурную функцию изменения показателя преломления в турбулентной атмосфере:

$$D_n(R) = C_n^2 R^{2/3}.$$

Коэффициент  $C_n^2$  – структурная постоянная показателя преломления, единицы измерения –  $[m^{-2/3}]$ . Структурная функция  $D_n(R)$ , как и сам показатель преломления  $n$ , является безразмерной. Следует отметить, что в общем случае показатель преломления воздуха также зависит от его влажности, однако эта зависимость на фоне температурного вклада оказывается пренебрежимо малой.

В основе предсказания искажений волнового фронта лежит именно коэффициент  $C_n^2$ . Оценить значение коэффициента позволяет его связь со структурной постоянной изменения температуры  $C_T^2$ , задаваемая выражением [7]

$$C_n^2 \simeq \left( 79 \times 10^{-6} \frac{P}{T^2} \right) C_T^2, \quad (2.4)$$

где  $P$  – давление воздуха, задаваемое в миллибарах,  $T$  – температура воздуха, задаваемая в кельвинах.

Спектральная плотность флуктуаций коэффициента преломления  $\Phi_n(K)$  аналогично (2.3) определяется выражением

$$\Phi_n(K) = \frac{0.033}{\sqrt{(2\pi)^3}} C_n^2 K^{-11/3}. \quad (2.5)$$

### ***Измерение и оценка структурной постоянной показателя преломления***

Флуктуации показателя преломления в атмосферной турбулентности накладывают основные ограничения на приборы для астрономических исследований. В связи с этим, коэффициент  $C_n^2$  называют оптической турбулентностью. Измерение или оценка величины  $C_n^2$  с хорошей точностью являются ключевыми при разработке АОС. В общем случае структурная постоянная показателя преломления  $C_n^2$  зависит от высоты  $h$ . Существуют различные практические методы определения зависимости  $C_n^2(h)$ :

- Использование метеозонда для измерения температуры на разных высотах [8]. Этот метод позволяет получить статистическую зависимость величины структурной постоянной температуры  $C_T^2$  от высоты  $h$ . Зависимость  $C_n^2(h)$  восстанавливается использованием выражения (2.4).

- Измерение  $C_n^2$  по размытию дифракционной картины в фокусе линзы [9]. В соответствии с данным методом на приёмник через толщу атмосферы посылается когерентное (лазерное) излучение, фокусируется и пропускается через медленно движущуюся узкую щель, ширина которой сравнима с длиной волны излучения. После этого измеряется ширина дифракционной картины в фокусе.
- Метод радиоакустического зондирования атмосферы [10]. В атмосферу посылается акустическая волна. Её характеристики восприимчивы к флуктуациям параметров атмосферы. Информацию об изменении параметров звуковой волны получают при помощи электромагнитных волн, также посылаемых в атмосферу и впоследствии отражённых от неоднородностей воздуха, вызванных акустической волной.
- Анализ результатов детектирования прошедшего через атмосферу излучения одиночных и двойных звёзд при помощи сцинтилляторных сенсоров [11].

### ***Модель Хафнагеля-Волли***

На основе экспериментальных исследований был разработан ряд теоретических (численных) моделей оценки величины структурной постоянной показателя преломления  $C_n^2$ . Наибольшую популярность приобрела модель Хафнагеля-Волли (англ.: Hufnagel-Valley) [12], позднее модифицированная с учётом эффектов, вызванных влиянием граничного воздушного слоя. В соответствии с этой моделью коэффициент  $C_n^2$  оценивается в зависимости от высоты  $h$  выражением

$$C_n^2(h) = 5.94 \left( \frac{v_m}{27} \right)^2 (10^{-5.3}h)^{10} e^{-h/1000} + 2.7 \times 10^{-16} e^{-h/1500} + C_{n,0}^2 e^{6H_0/7-h/100},$$

где  $h$  – высота над уровнем моря,  $v_m$  – среднее квадратическое значение скоростей воздушного потока в диапазоне высот от 5 до 20 км,  $H_0$  – высота точки наблюдения над уровнем моря,  $C_{n,0}^2 = C_n^2(h = H_0)$ .

### ***Модели SLC***

Ещё одна эмпирическая модель оценки  $C_n^2(h)$  — модель SLC (от англ. “the submarine laser communications” — лазерная связь подводных лодок) [13]. Модель построена на основе статистической обработки результатов измерений показателя преломления в ночное (SLC Night) и дневное (SLC Day) время. Поскольку измерения проводились в зоне субтропического климата, эта модель может быть неприменима в иных географических поясах. Данные модели SLC представлены в таблице 1.

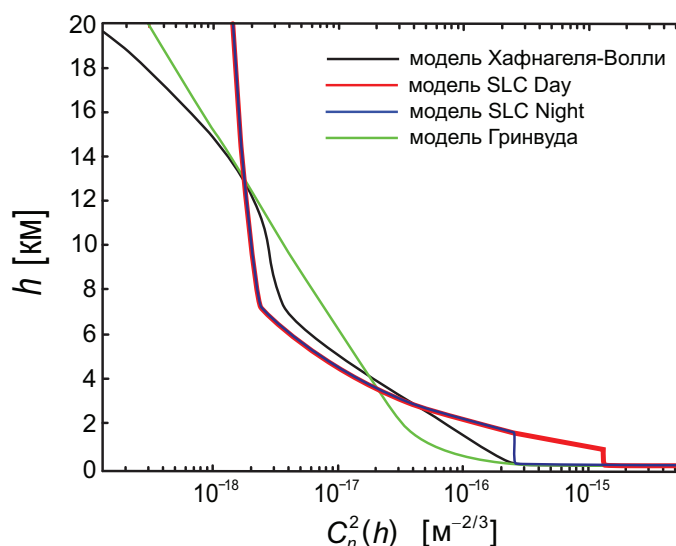


Рис. 6. Зависимость структурной постоянной показателя преломления от высоты, рассчитанная на основе различных моделей.

Таблица 1. Модель турбулентной атмосферы SLC

SLC Day		SLC Night	
$C_n^2(h), \text{M}^{-2/3}$	$h, \text{м}$	$C_n^2(h), \text{M}^{-2/3}$	$h, \text{м}$
$1.70 \times 10^{-13}$	(0, 18.5)	$8.40 \times 10^{-15}$	(0, 18.5)
$3.13 \times 10^{-13} / h^{1.05}$	(18.5, 240)	$2.87 \times 10^{-12} / h^2$	(18.5, 110)
$1.30 \times 10^{-15}$	(240, 880)	$2.50 \times 10^{-16}$	(110, 1500)
$8.87 \times 10^{-7} / h^3$	(880, 7200)	$8.87 \times 10^{-7} / h^3$	(1500, 7200)
$2.00 \times 10^{-16} / h^{0.5}$	(7200, 20000)	$2.00 \times 10^{-16} / h^{0.5}$	(7200, 20000)

### **Модель Гринвуда**

В соответствии с этой моделью величина структурной постоянной показателя преломления  $C_n^2$  определяется зависимостью [14]

$$C_n^2(h) = (2.2 \times 10^{-13}(h + 10)^{-1.3} + 4.3 \times 10^{-17}) e^{-h/4000}.$$

Следует отметить, что все представленные модели справедливы при определении изменения величины  $C_n^2$  в вертикальном направлении. Если наблюдение происходит под некоторым углом к зениту  $\theta$ , то высоту  $h$  следует заменить величиной  $h / \cos(\theta)$ .

### **Теория турбулентности фон Кармана**

Описанная ранее теория турбулентности Колмогорова справедлива, когда размер вихрей  $\ell$  попадает в интервал от  $\ell_0$  до  $L_0$ . Фон Карман разработал обобщённую модель атмосферной турбулентности, которая описывает флуктуации показателя преломления за пределом этого интервала [7, 15]. Описание флуктуаций осуществляется в терминах спектральной плотности:

$$\Phi_n(K) = \frac{0.033}{\sqrt{(2\pi)^3}} C_h^2 \left( K^{-11/3} + L_0^{11/3} \right) \exp \left[ - \left( \frac{K \ell_0}{5.92} \right)^2 \right]. \quad (2.6)$$

Данное выражение справедливо для вихрей любого размера  $\ell$ . Таким образом, колмогоровский спектр (2.5) является частным случаем спектра фон Кармана (2.6).

**Задание для самостоятельного выполнения:** при помощи системы компьютерной математики (MATLAB, Mathcad, Mathematica, др.) построить в общей системе координат статистическую зависимость структурной постоянной показателя преломления  $C_n^2$  от высоты  $h$  на основе моделей Хафнагеля-Волли, SLC Day, SLC Night, Гринвуда. Для модели Хафнагеля-Волли среднее квадратическое значение скоростей воздушного потока  $v_m$  принять равным 21 м/с, построение проводить от высоты  $H_0 = 600$  м/с до  $h = 30$  км. Значение постоянной  $C_{n,0}^2$  принять равным  $1.7 \times 10^{-13} \text{ м}^{-2/3}$ .

Характерные зависимости  $C_n^2(h)$  приведены на рис. 6.

**Задание для самостоятельного выполнения:** в соответствии с (2.5) построить спектральную плотность флуктуаций показателя преломления  $\Phi_n(K)$  на высотах 1 км, 5 км, 20 км. Значение коэффициента  $C_n^2$  оценивать в соответствии с моделью Хафнагеля-Волли.

**Задание для самостоятельного выполнения:** в соответствии с (2.3) построить спектральную плотность флуктуаций температуры  $\Phi_T(K)$  на высотах 1 км, 5 км, 20 км.

Расчёт коэффициента  $C_T^2$  выполнять при помощи выражения (2.4). Расчёт атмосферного давления осуществлять по формуле  $P \equiv P(h) = P_0 e^{-Mgh/RT}$ , где  $P_0$  – атмосферное давление на уровне моря (принять равным 101 кПа),  $M$  – молярная масса воздуха (принять равной 0.029 кг/моль),  $g$  – ускорение свободного падения (принять равным 9.8 м/с<sup>2</sup>),  $R$  – универсальная газовая постоянная (принять равной



8.31 Дж/ К · моль). В выражении (2.4) и формуле для  $P$  температура  $T$  задаётся в кельвинах. Значения температуры воздуха в градусах Цельсия на разных высотах представлены в таблице 2.

Таблица 2. Значения температуры атмосферного воздуха на разных высотах.

Высота $h$ , км	Температура $T$ , °C	Высота $h$ , км	Температура $T$ , °C
0.1	14.67	8	-36.93
0.3	13.05	10	-49.9
0.5	11.75	12	-56.5
1	8.5	15	-56.5
3	-4.49	20	-56.5
5	-17.47	30	-46.64

## 2.2. Мощные лазерные системы

Ещё одна область, в которой используются АОС, связана с применением мощных лазерных систем. В частности, это системы лазерной коммуникации, которые используются для передачи информации на большие расстояния в воздушном пространстве. Лазерная коммуникация используется для связи объектов на поверхности Земли («Земля–Земля»), объектов на Земле и в околоземном пространстве («Земля–воздух»). В настоящее время открыты перспективы осуществления связи земных объектов с объектами за пределами земной атмосферы («Земля–космос»).

Безусловно в системах лазерной коммуникации также имеют место описанные ранее искажения волнового фронта, связанные с атмосферной турбулентностью. Однако имеется целый ряд aberrаций, характерных для лазерных систем и не связанных с турбулентной атмосферой.

### **Термически индуцированные aberrации оптических компонентов**

При взаимодействии лазерного излучения с оптическими деталями часть энергии излучения поглощается материалом деталей. Если излучение маломощное, поглощённая

энергия пренебрежимо мала. Однако для мощных источников поглощённой энергии может оказаться достаточно для нагрева оптических деталей. Нагрев приводит к механическим изменениям (формы, размеров) оптических деталей и, как следствие, к искажению волнового фронта взаимодействующего с ними излучения.

### ***Деформация зеркал резонатора***

В работе [16] приведён способ описания и оценки изменения формы зеркала резонатора в условиях нагрева электромагнитным излучением. На рис. 7 схематично изображено осесимметричное зеркало резонатора с круглым сечением, радиус которого до искажения обозначен как  $t$ , а толщина по краю —  $d$ . Серым цветом изображено зеркало после термической деформации. Также введена система координат: безразмерная радиальная координата  $R$  нормирована на радиус зеркала  $t$ ,  $R = r/t$ , осевая координата  $Z$  нормирована на толщину зеркала по краю  $d$ ,  $Z = z/d$ .

Лазерное излучение с плотностью мощности  $p(R)$  поступает на зеркало вдоль оси  $Z$ . Материал зеркала обладает коэффициентом поглощения излучения  $\varepsilon$ . Величина коэффициента  $\varepsilon$  в общем случае зависит от длины волны излучения  $\lambda$ , угла  $\theta$  между осью зеркала и направлением распространения излучения, и распределения температуры по поверхности зеркала  $T(R, Z)$ , т. е.  $\varepsilon \equiv \varepsilon(\lambda, \theta, T(R, Z))$ . Часть поступающего излучения,  $\varepsilon p(R)$ , поглощается материалом зеркалом, нагревая его. В то же время происходит обратный процесс — охлаждение зеркала за счёт теплообмена с окружающей средой. Этот процесс характеризуется числом Био (англ.: Biot)  $C_s$ . В случае принудительного охлаждения зеркала (потоком воздуха или жидкости) скорость охлаждения характеризуется коэффициентом  $C_b$  либо отношением  $M = C_b/C_s$ , величина которых зависит от множества факторов, в том числе от скорости потока жидкости, плотности, вязкости и др.

Итак, нагрев зеркала приводит к изменению его формы и размеров. Искажение формы зеркала может быть описано при помощи таких параметров, как кривизна  $\kappa$  и неровность  $\delta(R)$  поверхности. Параметр  $\kappa^{-1}$  задаёт радиус кривизны сферической поверхности деформированного зеркала, а параметр неровности  $\delta(R)$  определяет отклонение от этой поверхности в точке с радиус-вектором  $R$ . Искривление волнового фронта излучения с длиной волны  $\lambda$  после отражения от зеркала может быть описано выражением  $\varphi(R) = 4\pi\delta(R)/\lambda$ .

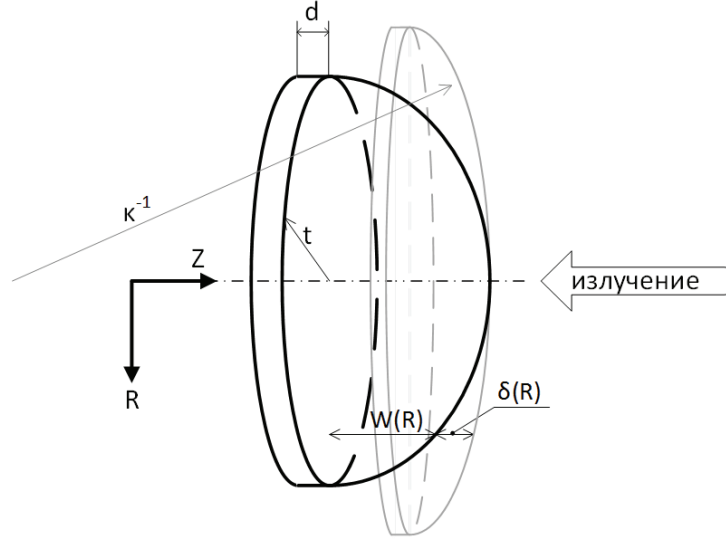


Рис. 7. Схематическое изображение зеркала лазерного резонатора.

Параметр кривизны  $\delta(R)$  в общем случае может быть задан выражением

$$\delta(R) = W(0) - W(R) - \kappa^{-1} + \sqrt{\kappa^{-2} - t^2 R^2}. \quad (2.7)$$

В (2.7) введён коэффициент искажения  $W(R)$ , зависящий от радиальной координаты  $R$ . Величина параметра  $W(R)$ , а также радиус кривизны  $\kappa^{-1}$  находятся из выражений

$$W(R) = \frac{t^2 \beta}{k} \sum_{j=0}^{\infty} A_j \chi_j \frac{J_0(b_j R) G(1) - J_0(b_j) G(R)}{J_0(b_j) G(1)}, \quad (2.8a)$$

$$\kappa = \frac{6\beta}{k D^3} \sum_{j=0}^{\infty} A_j B_j, \quad (2.8б)$$

где

$$A_j = \varepsilon P_0 \Delta_i [J_0(b_j) (C_s^2 + b_j^2) (b_j \sinh(b_j D) + (C_s + C_b) \cosh(b_j D))]^{-1}, \quad (2.9a)$$

$$B_j = 2 + C_b D + (D b_j - 2 C_b / b_j) \sinh(b_j D) + (C_b D - 2) \cosh(b_j D), \quad (2.9б)$$

$$\chi_i = b_j \sinh(b_j D) + C_b [\cosh(b_j D) - 1], \quad (2.9в)$$

$$G(R) = \frac{\pi R I_0}{D} [4(1 - \nu) - C] + \frac{\pi^2 R^2 I_1}{D^2}, \quad (2.9г)$$

$$C = \left( \frac{\pi^2 I_0}{D^2} (1 - 2\nu) + \frac{\pi^2 I_1}{D^2} \right) \left[ \frac{\pi^2 I_0}{D^2} - \frac{\pi I_1}{D} \right]^{-1}, \quad (2.9д)$$

$$\Delta_j = 2 \int_0^1 p(R) J_0(b_j R) R dR. \quad (2.9е)$$

В выражениях (2.8)–(2.9) введены следующие обозначения. Коэффициенты  $k$  и  $\beta$  – коэффициенты теплопроводности и теплового расширения соответственно,

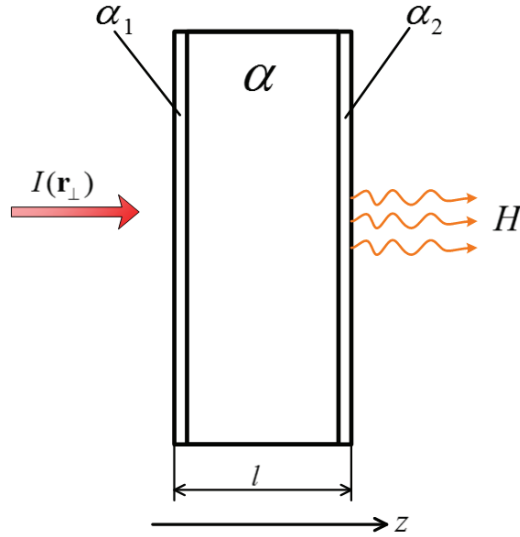


Рис. 8. Схематическое изображение выходного окна лазера под воздействием лазерного излучения.

$J_n(x)$  – функции Бесселя,  $I_n(x) = i^{-n}J_n(ix)$  – модифицированные функции Бесселя,  $P_0$  – мощность излучения на уровне  $1/e$  амплитуды падающего излучения,  $D = 2d/t$ ,  $\nu$  – коэффициент Пуассона. Константы  $b_i$  находятся из условий  $b_j J_1(b_j) = C_s J_0(b_j)$ .

### **Деформация выходного окна лазера**

Рассмотрим круглое выходное окно лазерной системы толщиной  $l$ , сделанное из оптически прозрачного однородного материала — см. рис. 8. На переднюю (входную) грань поступает лазерное излучение интенсивностью  $I(\mathbf{r}_\perp)$ , где радиус-вектор  $\mathbf{r}_\perp$  лежит в плоскости выходного окна (перпендикулярно направлению распространения излучения). Поверхностные коэффициенты поглощения передней и задней (выходной) граней обозначим как  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$  соответственно, объёмный коэффициент поглощения —  $\alpha$ . Задняя грань характеризуется также коэффициентом теплоотдачи  $H$ .

В соответствии с результатами, представленными в работах [17] и [18], искажение волнового фронта изначально плоской волны может быть представлено в виде

$$\varphi(\mathbf{r}_\perp, t) = k_c \chi_+ \tilde{T}, \quad (2.10)$$

где  $k_c$  – константа распространения,  $\tilde{T} = \int_0^l T(\mathbf{r}_\perp, z, t) dz$ ,  $T(\mathbf{r}_\perp, z, t)$  – температура в заданной точке, коэффициент  $\chi_+$  характеризует термоиндуцированное изменение показателя преломления материала выходного окна. Он определяется следующим выражением:

$$\chi_+ = \frac{dn}{dT} + (n - 1)(1 + \nu)\beta + \frac{n^3 \beta E}{4}(q_{11} + q_{12}),$$

где  $n$  – показатель преломления материала окна,  $\nu$  и  $\beta$  – определённые ранее коэффициент Пуассона и коэффициент теплового расширения,  $E$  – модуль продольной упругости (модуль Юнга),  $q_{11,12}$  – коэффициенты оптической чувствительности.

Пренебрегая нагревом в поперечном направлении, можем записать уравнение для температуры выходного окна:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial z^2} - \frac{1}{\kappa} \frac{\partial T}{\partial t} = -\frac{\alpha I}{K}, \quad (2.11)$$

где  $K = \kappa \rho c$  – коэффициент теплопроводности,  $\kappa$  – коэффициент температуропроводности,  $\rho$  – плотность материала,  $c$  – удельная теплоёмкость. Граничные условия для уравнения (2.11) следующие:

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_0 = -\frac{\alpha_1 I}{K}, \quad (2.12a)$$

$$\left. \frac{dT}{dz} \right|_l = \frac{\alpha_2 I - HT(l)}{K}. \quad (2.12b)$$

Проинтегрировав обе части уравнения (2.11) по  $z$  от 0 до  $l$ , с учётом граничных условий (2.12) мы получим

$$\frac{d\tilde{T}}{dt} = \frac{\alpha l I + (\alpha_1 + \alpha_2) I - HT(l)}{\rho c}. \quad (2.13)$$

На малых временах, когда эффектом охлаждения задней грани можно пренебречь ( $H \simeq 0$ ), можем записать решение уравнения (2.13) как  $\tilde{T} = \frac{\alpha l I + (\alpha_1 + \alpha_2) I}{\rho c} t$ . Подставив это решение в выражение (2.10), получим аналитическое выражение для искажения волнового фронта с точностью до константы распространения:

$$\varphi(\mathbf{r}_\perp, t) = k_c \frac{\alpha l I + (\alpha_1 + \alpha_2) I}{\rho c} \chi_+ t.$$

Таким образом, в поперечной плоскости искривление волнового фронта волны при прохождении через выходное окно лазера определяется исключительно интенсивностью падающего на окно излучения.

### ***Деформация оптических кристаллов***

Оптические кристаллы в лазерных системах могут лежать в основе активных сред твердотельных лазеров, электрооптических модуляторов, изоляторов Фарадея. Активная среда является источником лазерного излучения. Как правило, в твердотельных лазерах она представляет собой кристаллический стержень с круглым или прямоугольным

сечением. Примерами активных сред могут служить рубин, алюмо-иттриевый гранат, легированный неодимом (ND:YAG). Электрооптические модуляторы используются для контроля фазы, мощности, поляризации лазерного излучения. Принцип их действия основан на электрооптическом эффекте, который проявляется в ряде кристаллов, например, таких, как ниобат лития ( $\text{LiNbO}_3$ ), арсенат титанила-калия (КТА). Изоляторы Фарадея обеспечивают пропускание поляризованного излучения лишь в одном направлении. Принцип их действия основан на эффекте Фарадея, который проявляется в магнитооптически активных кристаллах, таких как тербий-галлиевый гранат (TGG).

Несмотря на то, что описанные оптические кристаллы используются для решения разных задач, и их принципы действия основаны на разных эффектах, возникающие в них в результате термического воздействия аберрации описываются способом, идентичным рассмотренному ранее для выходного окна лазера.

## Тепловое самовоздействие

Эффект теплового самовоздействия имеет место при прохождении мощного лазерного излучения через среду. Часть энергии излучения поглощается средой, что приводит к её локальному нагреву и изменению оптических свойств. Теоретическое описание теплового самовоздействия в терминах флуктуации фазы предложено в работах [19, 20]. Рассмотрен случай распространения лазерного излучения в атмосфере в присутствии воздушного потока, перпендикулярного направлению распространения. В этом случае в результате термического искажения лазерный пучок приобретает характерную форму полумесяца — см. постановку проблемы на схематичном рисунке 9.

Изменение фазы лазерного излучения в общем случае может быть выражено через изменение показателя преломления следующим образом:

$$\Delta\varphi(x, y, z) = k \int_0^z \Delta n(x, y, \zeta) d\zeta,$$

где  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число. Для гауссова пучка изменение фазы может быть задано в виде [20]

$$\Delta\varphi(x, y, z) = -\frac{\Upsilon}{2} e^{-y^2/a^2} [1 + \text{erf}(x/a)], \quad (2.14)$$

где  $a$  – ширина гауссова пучка,  $a \equiv a(z)$ ;  $\text{erf}(x/a)$  – функция ошибок,

$$\Upsilon = \pi F N_c \frac{\ln(a_i/a_f)}{1 - a_i/a_f}. \quad (2.15)$$

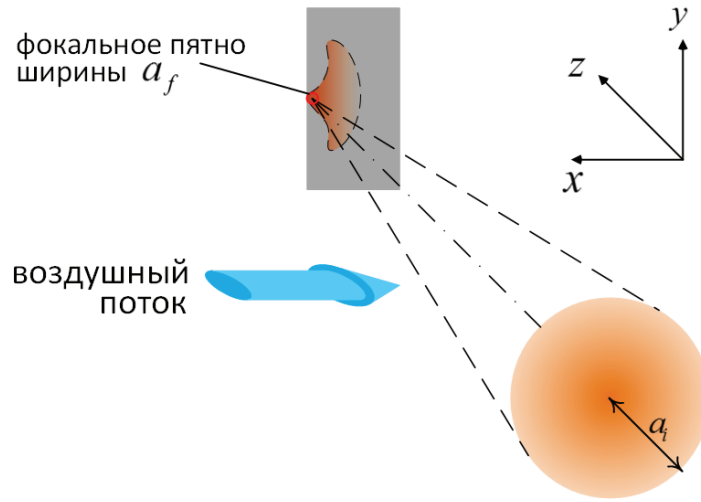


Рис. 9. Схематическая иллюстрация теплового самовоздействия непрерывного лазерного излучения в присутствии воздушного потока в перпендикулярном направлении.

В (2.15) заданы следующие параметры:  $a_f$  – размер фокального пятна в отсутствие возмущения,  $a_i$  – начальная ширина пучка,  $F = ka^2/z$  – число Френеля,  $N_c$  – параметр искажения:

$$N_c = -\frac{n_T I_0 \alpha z^2}{\rho c_p v a} \left[ \frac{2}{\alpha z} - \frac{2}{(\alpha z)^2} (1 - e^{-\alpha z}) \right]. \quad (2.16)$$

В (2.16) коэффициент  $n$  – невозмущённый показатель преломления воздуха,  $n_T \equiv \partial n / \partial T$  – скорость изменения показателя преломления от температуры при постоянном давлении,  $I_0$  – амплитуда интенсивности исходного пучка,  $c_p$  – удельная теплоёмкость при постоянном давлении,  $v$  – скорость потока воздуха,  $\rho$  – плотность воздуха; коэффициент  $\alpha$  описывает потери в результате поглощения энергии излучения средой.

Изменение фазы (2.14) может быть представлено в виде ряда

$$\Delta\varphi(x, y, z) \simeq \varphi(0, 0) - \frac{\Upsilon}{\sqrt{\pi}} \left( \frac{x}{a} \right) + \frac{\Upsilon}{2} \left( \frac{y}{a} \right)^2 + \frac{\Upsilon}{\sqrt{\pi}} \left[ \frac{1}{3} \left( \frac{x}{a} \right)^3 + \left( \frac{x}{a} \right) \left( \frac{y}{a} \right)^2 \right] - \frac{\Upsilon}{4} \left( \frac{y}{a} \right)^4. \quad (2.17)$$

В выражении (2.17) линейный член описывает наклон пучка. Квадратичный член описывает астигматизм, связанный с отклонением пучка в плоскости, перпендикулярной направлению потока воздуха. Слагаемые третьего и четвёртого порядка описывают кому и сферическую aberrацию соответственно.

### 2.3. Микроскопия

Оптические микроскопы с высоким разрешением являются важным инструментом получения информации об объектах во множестве научных дисциплин. Различные методы

наблюдения, механизмы повышения контрастности изображения позволяют приблизить разрешающую способность микроскопов к максимально достижимым значениям, ограниченным дифракционным пределом. Однако качество получаемого изображения существенно снижают возникающие при наблюдении аберрации. Причины возникновения аберраций являются общими для всех микроскопических систем. В их основе лежит возникновение пространственной неоднородности показателя преломления. Одной из таких причин может стать несоответствие показателей преломления исследуемого образца и покровного стекла: это может приводить к сферической аберрации, величина которой зависит от глубины фокусировки. К аберрациям может приводить пространственная неоднородность самих исследуемых образцов. Кроме того, микроскопические системы, равно как и любые оптические системы, обладают аберрациями, которые вносят оптические компоненты, из которых они состоят.

Описание и оценка аберраций микроскопических систем могут быть выполнены способами, аналогичными рассмотренным ранее для других оптических систем.



### **ТЕМА 3. Датчики волнового фронта, работающие на интерферометрических принципах**

**Основные вопросы темы:** интерференция световых волн — один из ключевых физических принципов функционирования датчиков волнового фронта. Контрастность интерференционной картины. Принцип действия и возможные реализации интерферометров фазового сдвига.

**Цель и задачи практического занятия** состоят в ознакомлении студента с интерферометрическим принципом измерения искажений волнового фронта излучения.

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** интенсивность света, интерференция световых волн, интерферометр фазового сдвига, контрастность интерференционных полос, напряжённость электрического поля, фазовый сдвиг.

**Требования к уровню подготовленности студента:** студент должен ориентироваться в основных вопросах/понятиях темы, понимать логические связи между ними, уметь математически описывать картину интерференции двух и более электрических полей с заданными интенсивностями, оценивать контрастность интерференционной картины, делать выводы о влиянии степени когерентности и энергетического дисбаланса полей на интерференционную картину. Студент должен знать принцип действия и возможные реализации интерферометров фазового сдвига, а также знать методику оценки и уметь оценивать форму волнового фронта излучения на основе результатов измерения интенсивности интерферирующих полей.

#### **Теоретический материал и примеры заданий по теме 3**

Одним из ключевых элементов АОС является датчик волнового фронта. Если волновой фронт излучения в ходе его распространения подвергается искажениям, полученное изображение источника, создаваемое оптической системой, теряет резкость, т. е. видится размытым. Чтобы восстановить резкость изображения, в АОС оценивается искажение волнового фронта с тем, чтобы компенсировать это искажение и на выходе получить излучение с исходным (плоским или сферическим) волновым фронтом. Одним из физических принципов, на основе которых могут функционировать ДВФ, является интерференция световых волн.

### 3.1. Интерференция световых волн

Интенсивность поляризованной компоненты электромагнитной волны в общем случае задаётся выражением

$$I(\mathbf{r}) = \langle |E(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle_t,$$

где  $\langle \dots \rangle_t$  означает усреднение по времени;  $E(\mathbf{r}, t)$  задаёт напряжённость электрического поля, для которой можем записать

$$E(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[A(\mathbf{r})e^{-i\omega t}], \quad (3.1)$$

где  $\omega$  – частота электрического поля. Комплексную амплитуду можем представить в виде  $A(\mathbf{r}) = |A(\mathbf{r})|e^{-i\varphi(\mathbf{r})}$  с пространственно-зависимой фазой  $\varphi(\mathbf{r})$ . Суммарная интенсивность  $I(\mathbf{r})$  суперпозиции  $E = E_1 + E_2$  двух полей  $E_1$  и  $E_2$  равной частоты  $\omega$  с одинаковой поляризацией задаётся выражением

$$\begin{aligned} I(\mathbf{r}) &= \langle |E_1 + E_2|^2 \rangle_t = \langle E_1 E_1^* \rangle_t + \langle E_2 E_2^* \rangle_t + \langle E_1 E_2^* \rangle_t + \langle E_2 E_1^* \rangle_t = \\ &= I_1 + I_2 + I_{12} + I_{21}, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где верхний индекс «\*» обозначает комплексное сопряжение. Для полей, заданных в виде (3.1), в плоскости  $xy$ , перпендикулярной направлению распространения излучения  $z$ , перекрёстные члены  $I_{12}(\mathbf{r}_\perp)$  и  $I_{21}(\mathbf{r}_\perp)$  могут быть представлены в виде

$$I_{12}(\mathbf{r}_\perp) = |A_1(\mathbf{r}_\perp)||A_2(\mathbf{r}_\perp)|\text{Re}[e^{i\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp)}], \quad (3.3a)$$

$$I_{21}(\mathbf{r}_\perp) = |A_1(\mathbf{r}_\perp)||A_2(\mathbf{r}_\perp)|\text{Re}[e^{-i\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp)}], \quad (3.3b)$$

где  $\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp) = \varphi_1(\mathbf{r}_\perp) - \varphi_2(\mathbf{r}_\perp)$  задаёт разность фаз полей  $E_1$  и  $E_2$ . Воспользовавшись формулой Эйлера  $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ , можем переписать выражения (3.3) в виде

$$I_{12}(\mathbf{r}_\perp) = I_{21}(\mathbf{r}_\perp) = \sqrt{I_1(\mathbf{r}_\perp)I_2(\mathbf{r}_\perp)} \cos(\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp)). \quad (3.4)$$

В случае равенства интенсивностей обоих полей,  $I_1(\mathbf{r}_\perp) = I_2(\mathbf{r}_\perp)$ , выражение для суммарной интенсивности (3.2) может быть переписано в значительно более простой форме:

$$I(\mathbf{r}_\perp) = 2I_1(\mathbf{r}_\perp)[1 + \cos(\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp))]. \quad (3.5)$$

Следует отметить, что выражение (3.5) получено для двух интерферирующих полей с одинаковой поляризацией. Аналогичное выражение может быть получено для

полей с эллиптической или случайной поляризацией. Однако, как показано в книге [21], волны с ортогональной линейной поляризацией друг с другом не интерферируют, и выражение (3.5) к ним неприменимо.

Ещё одно важное замечание: выражение (3.5) иллюстрирует тот факт, что на основе измерения суммарной интенсивности двух интерферирующих полей можно оценить разность фаз между ними. Интерференционный метод измерения волнового фронта предполагает добавление поля с известной формой волнового фронта, называемого опорным, к полю (сигнальному) с неизвестной формой волнового фронта. На основе интерференционной картины выполняется оценка отклонения искомой формы волнового фронта от опорной.

### ***Контрастность интерференционных полос***

Параметр контрастности интерференционной картины вводится в соответствии с работой [22] следующим образом:

$$\mathbf{v} = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}, \quad (3.6)$$

где  $I_{\max}$  и  $I_{\min}$  – максимальное и минимальное значения интенсивности на интерферограмме. Для двух интерферирующих полей с интенсивностями  $I_1$  и  $I_2$  выражение (3.6) может быть переписано в виде

$$\mathbf{v} = \frac{2\sqrt{I_1 I_2}}{I_1 + I_2} |\gamma_{12}|,$$

где  $\gamma_{12} \equiv \gamma_{12}(\mathbf{r}_{\perp}, t)$  – степень когерентности двух полей.

Для некогерентных полей ( $\gamma_{12} = 0$ ) контрастность  $\mathbf{v} = 0$ , и интерференционной картины не наблюдается. Напротив, с увеличением когерентности увеличивается и контрастность изображения. Такая качественная зависимость предполагает следующий вывод: ДВФ, функционирующие на основе интерференционных принципов, должны обладать высокой степенью временной когерентности опорного и сигнального полей. Это означает, что источник излучения для интерферометрических ДВФ должен обладать большим временем когерентности  $t_c$ , что подразумевает узкую ширину спектра излучения  $\omega_c \approx 1/t_c$ .

Также, поскольку источники излучения обладают конечными размерами, параметр контрастности  $\mathbf{v}$  зависит от пространственной когерентности. Для идеального точечного

источника  $\gamma_{12}(t = 0) = 1$ , однако для пространственно ограниченного источника  $\gamma_{12} < 1$ , что негативно влияет на контрастность.

Следующее, что важно отметить: помимо степени когерентности опорного и сигнального полей на контрастность интерференционной картины существенное влияние оказывает отношение энергий каждого из полей.

---

---

**Задание:** получить аналитическую зависимость параметра контрастности интерферограммы  $\nu$  двух когерентных полей ( $\gamma_{12} = 1$ ) с интенсивностями  $I_1 = I_0$  и  $I_2 = aI_0$  от отношения интенсивностей полей  $a = I_2/I_1$ , построить график зависимости  $\nu(a)$  в пределах  $a$  от 0 до 5. Найти значение  $a$ , при котором контрастность  $\nu$  максимальна. Найти интервал значений  $a$ , в котором отклонение  $\nu$  от максимальной величины не превышает 20%. Сделать вывод о влиянии энергетического дисбаланса на величину контрастности интерференционной картины.

**Выполнение:**

Параметр контрастности когерентных полей, интенсивность которых отличается в  $a$  раз, задаётся выражением  $\nu = 2\sqrt{a}/(1+a)$ . Зависимость  $\nu(a)$  представлена на рис. 10. На рисунке хорошо видно, что контрастность  $\nu$  существенным образом зависит от параметра энергетического дисбаланса  $a$ . Даже при полной когерентности двух полей контрастность отлична от максимальной, если поля имеют разную интенсивность  $I_1 \neq I_2$  ( $a \neq 1$ ). Максимальное значение контрастности,  $\nu = 1$ , достигается при значении энергетического дисбаланса  $a = 1$ . Отклонение величины параметра контрастности  $\nu$  от единицы не превышает 20% при  $0.25 \leq a \leq 4$ .

---

---

### **3.2. Интерферометры фазового сдвига**

В основе работы интерферометров фазового сдвига лежит получение интерференционной картины двух полей, причём одно поле является смещённой в пространстве копией другого. Таким образом, задача измерения изменения фазы, которое напрямую измерено быть не может, сводится к задаче измерения изменения интенсивности. Важной особенностью интерферометров фазового сдвига является тот

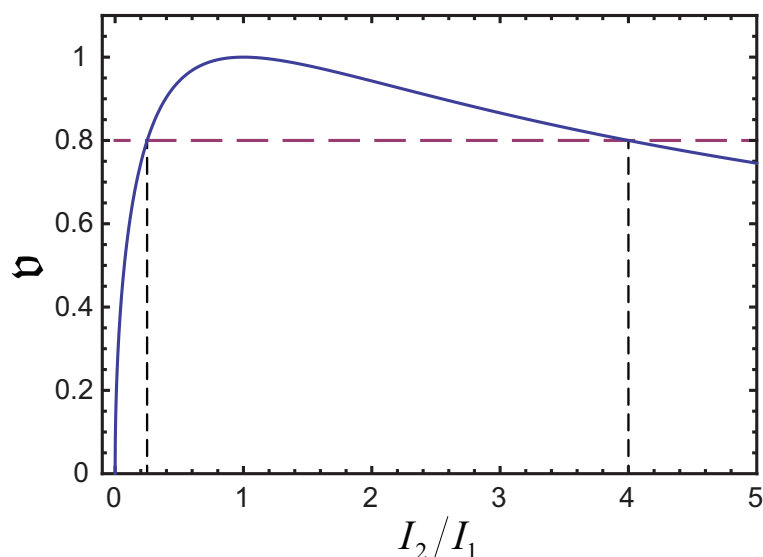


Рис. 10. Зависимость величины параметра контрастности  $v$  от отношения интенсивности двух когерентных полей  $a = I_2/I_1$ . Пунктирная линия обозначает уровень контрастности, составляющей 80% от максимального значения.

факт, что для получения интерференционной картины не требуется дополнительно включать в систему источник когерентного опорного излучения: его роль выполняет самосопряжённый сигнальный луч.

Фазовый сдвиг может быть реализован различными способами:

- смещением сопряжённого луча в латеральной плоскости;
- вращением волнового фронта сопряжённого луча без отклонения оси распространения от исходной;
- увеличением ширины сопряжённого луча без отклонения оси распространения от исходной.

Наиболее часто используемым является первый способ. Схематично смещение сопряжённого луча вдоль оси  $x$  на малую величину  $\Delta x$  в рамках данного подхода приведено на рис. 11.

**Задание:** получить аналитическое выражение для распределения разности фаз  $\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp)$  в зависимости от распределения интенсивности на интерференционной картине на основе четырёхкратного измерения интенсивности интерференционной картины (англ.: four-bin phase-shifting algorithm).

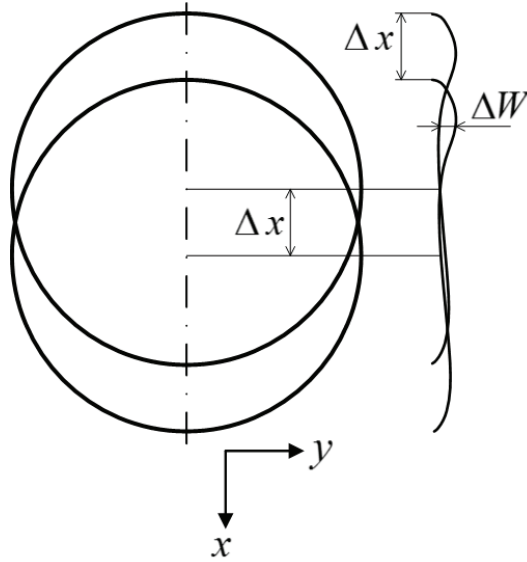


Рис. 11. Схематичное изображение смещения луча на малую величину  $\Delta x$ .

**Выполнение:**

На основе выражений (3.2) и (3.4) запишем суммарную интенсивность интерферирующих полей, пространственно смещённых друг относительно друга на величину  $\Delta \mathbf{r}_\perp$ :

$$I(\mathbf{r}_\perp) = A + B \cos[\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp) + \theta],$$

где для краткости записи введены обозначения  $A = I_1(\mathbf{r}_\perp) + I_2(\mathbf{r}_\perp)$ ,  $B = \sqrt{I_1(\mathbf{r}_\perp)I_2(\mathbf{r}_\perp)}$ ; параметр  $\theta \equiv \theta(\Delta \mathbf{r}_\perp)$  описывает сдвиг фазы за счёт смещения сопряжённого луча на  $\Delta \mathbf{r}_\perp$ .

Используемый подход предполагает получение интерференционной картины при сдвигах фазы  $\theta = 0, \pi/2, \pi$  and  $3\pi/2$  с измерением интенсивности при каждом эксперименте. Суммарная интенсивность при каждом измерении будет задаваться следующими выражениями:

$$I_{(0)}(\mathbf{r}_\perp) = A + B \cos[\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp)], \quad (3.7a)$$

$$I_{(\frac{\pi}{2})}(\mathbf{r}_\perp) = A + B \cos[\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp) + \pi/2] = A - B \sin[\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp)], \quad (3.7б)$$

$$I_{(\pi)}(\mathbf{r}_\perp) = A + B \cos[\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp) + \pi] = A - B \cos[\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp)], \quad (3.7в)$$

$$I_{(\frac{3\pi}{2})}(\mathbf{r}_\perp) = A + B \cos[\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp) + 3\pi/2] = A + B \sin[\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp)]. \quad (3.7г)$$

Вычитая выражение (3.7б) из (3.7г), а также выражение (3.7в) из (3.7а), получим

$$I_{(\frac{3\pi}{2})}(\mathbf{r}_\perp) - I_{(\frac{\pi}{2})}(\mathbf{r}_\perp) = 2B \sin[\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp)], \quad (3.8a)$$

$$I_{(\pi)}(\mathbf{r}_\perp) - I_{(0)}(\mathbf{r}_\perp) = 2B \cos[\Delta\varphi(\mathbf{r}_\perp)]. \quad (3.8б)$$

Отношение выражений (3.8а) и (3.8б) даёт

$$\frac{I_{(\frac{3\pi}{2})}(\mathbf{r}_{\perp}) - I_{(\frac{\pi}{2})}(\mathbf{r}_{\perp})}{I_{(\pi)}(\mathbf{r}_{\perp}) - I_{(0)}(\mathbf{r}_{\perp})} = \tan[\Delta\varphi(\mathbf{r}_{\perp})],$$

откуда мы получаем выражение для пространственного распределения изменения разности фаз сигнального и опорного (самоспряжённого сигнальному) лучей:

$$\Delta\varphi(\mathbf{r}_{\perp}) = \arctan \left[ \frac{I_{(\frac{3\pi}{2})}(\mathbf{r}_{\perp}) - I_{(\frac{\pi}{2})}(\mathbf{r}_{\perp})}{I_{(\pi)}(\mathbf{r}_{\perp}) - I_{(0)}(\mathbf{r}_{\perp})} \right]. \quad (3.9)$$

### Примеры реализации интерферометра фазового сдвига

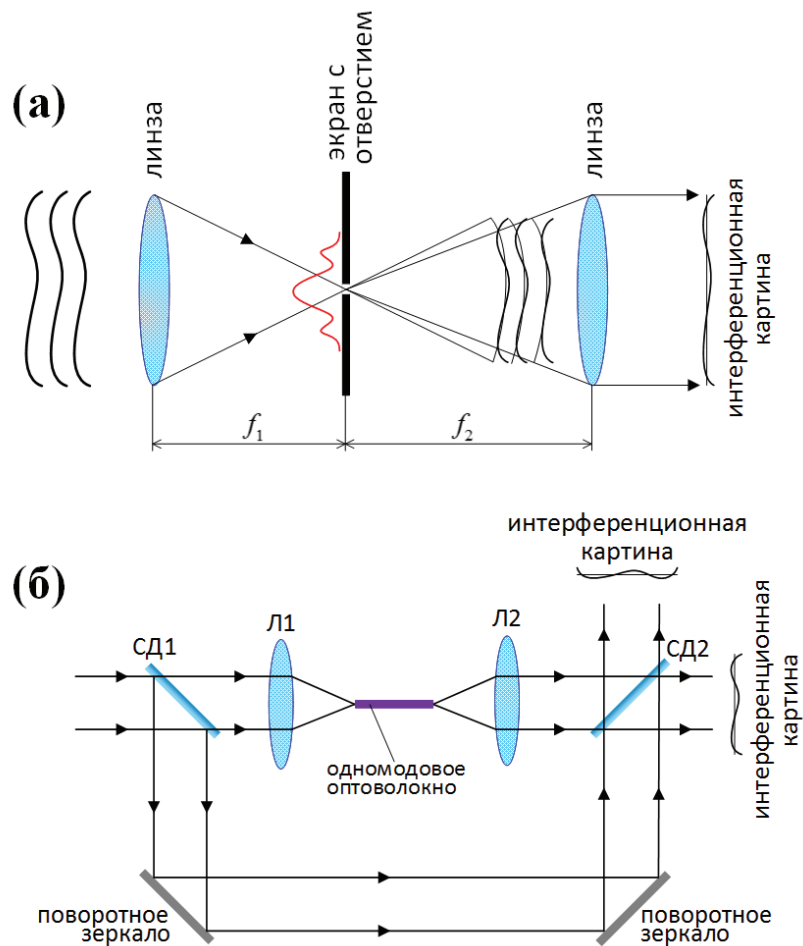


Рис. 12. Схематическое изображение (а) — интерферометра с дифракцией на точке и (б) — самоспряжённого интерферометра.

Одна из возможных реализаций интерферометра фазового сдвига схематично представлена на рис. 12а. Это интерферометр с дифракцией на точке (англ.: point-diffraction interferometer). Получение интерференционной картины с его помощью

происходит следующим образом. Линза с фокусным расстоянием  $f_1$  фокусирует падающее излучение. На расстоянии  $f_1$  от линзы расположен частично пропускающий экран с отверстием. Часть сфокусированного излучения проходит через экран. Отверстие в экране (на основе принципа Гюйгенса-Френеля) является источником излучения, когерентного падающему. Кроме того, отверстие выполняет роль пространственного фильтра, убирая часть aberrаций излучения. Световой пучок за экраном представляет собой суперпозицию излучения, частично прошедшего через экран, и излучения из отверстия. Следующая за экраном линза, расположенная на фокусном расстоянии  $f_2$ , коллимирует пучок. Сколлимированный пучок отправляется на приёмник излучения, где формируется интерференционная картина. Разность фаз полей  $\Delta\varphi((r)_\perp)$  на основе интерференционной картины может быть оценена в соответствии с выражением (3.9). Основным недостатком данного метода измерения заключается в том, что контрастность интерференционной картины достаточно мала в виду того, что имеется существенный дисбаланс энергий излучения, прошедшего через экран, и излучения, создаваемого отверстием в экране.

Указанного недостатка интерферометра с дифракцией на точке лишён самосопряжённый интерферометр (англ.: self referencing interferometer), схематично представленный на рис 12б. После прохождения первого светоделителя **СД1** часть излучения сразу направляется на второй светоделитель **СД2**. Другая часть излучения фокусируется линзой **Л1** и заводится в одномодовое оптоволокно, которое, являясь пространственным фильтром, исправляет aberrации. После коллимации второй линзой **Л2** излучение направляется на второй светоделитель. Вышедшее со светоделителя **СД2** излучение является суперпозицией излучений с исходным искажённым волновым фронтом и исправленным в результате пространственной фильтрации волновым фронтом. Отклонения фазы также измеряются на основе интерференционной картины.

Исправление энергетического дисбаланса в интерферометрах такого типа может осуществляться двумя путями. Во-первых, имеется возможность выбирать светоделители с требуемыми коэффициентами пропускания и отражения. Во-вторых, можно осуществлять усиление сигнала за счёт стимулированного излучения в активном оптоволокне. Однако последний способ зачастую может приводить к появлению дополнительных искажений волнового фронта.



## **ТЕМА 4. Датчики волнового фронта, использующие принцип Гартмана**

**Основные вопросы темы:** датчик волнового фронта Шака-Гартмана — датчик измерения наклона волнового фронта на основе принципа Гартмана. Принцип действия датчика Шака-Гартмана. Компоненты датчика Шака-Гартмана — линзовый растр и приёмник излучения. Квадрантный и многопиксельный приёмники излучения для измерения наклона волнового фронта. Восстановление формы волнового фронта излучения.

**Цель и задачи практического занятия** состоят в ознакомлении студента с принципом измерения формы волнового фронта излучения при помощи датчика Шака-Гартмана; в частности, со способами измерения наклона волнового фронта при помощи приёмников излучения двух типов — квадрантного и многопиксельного; с методами восстановления формы на основе результатов измерения наклонов волнового фронта.

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** волновой фронт, датчик Шака-Гартмана, квадрантный приёмник излучения, линзовый растр, многопиксельный приёмник излучения, разностная схема.

**Требования к уровню подготовленности студента:** студент должен ориентироваться в основных вопросах/понятиях темы, понимать логические связи между ними, быть способным назвать основные компоненты датчика волнового фронта типа Шака-Гартмана и рассказать о назначении каждого из них, знать принцип действия датчика Шака-Гартмана, иметь представление о способах изменения наклонов волнового фронта с помощью квадрантного и многопиксельного приёмников излучения, знать методику и уметь восстанавливать информацию о форме на основе информации о наклонах волнового фронта излучения, полученной от датчика Шака-Гартмана, уметь формулировать задачу восстановления формы волнового фронта в удобной для компьютерных вычислений форме.

### **Теоретический материал и примеры заданий по теме 4**

В основу ДВФ, которые рассматриваются в рамках данной темы, лёг метод, который изначально применялся для контроля формы поверхностей оптических элементов.

Для этого использовался непрозрачный экран с регулярно расположенными отверстиями, который помещался на пути сходящегося пучка лучей в фокальной плоскости тестируемого оптического элемента. На основе анализа смещения полученных через отверстия изображений относительно эталонных положений можно было делать выводы о кривизне формы исследуемого оптического элемента. Очевидно, что для реализации данной цели форма волнового фронта тестирующего излучения должна быть известной (в идеальном случае — сферической или плоской). В противном случае аберрации волнового фронта могут исказить получаемую информацию.

Если заменить экран с отверстиями линзовым растром (матрицей микролинз) с заведомо известными оптическими характеристиками, такая оптическая система позволит решить обратную задачу, а именно: получить информацию о форме волнового фронта проходящего излучения, которая изначально была неизвестна. Такой оптический элемент, как линзовый растр, является ключевым компонентом датчиков, использующих принцип Гартмана (англ.: Hartmann), или просто датчиков Гартмана.

#### **4.1. Принцип работы**

Простейший датчик наклона схематично представлен на рис. 13. Он включает в себя тонкую линзу с диаметром  $d$  и фокусным расстоянием  $f$ , а также массив расположенных в фокальной плоскости линзы приёмников излучения. Плоская волна, распространяющаяся параллельно оптической оси, после прохождения линзы фокусируется в центре массива детекторов (в главном заднем фокусе линзы). Лучи и волновой фронт, характеризующие данную волну, схематично изображены на рисунке пунктирными линиями. Плоская волна, распространяющаяся под некоторым углом  $\theta_\Delta$  к оптической оси, после прохождения линзы образует изображение в фокальной плоскости линзы на одном из детекторов, в точке, удалённой от центра на расстояние  $\Delta$ . Лучи и волновой фронт, характеризующие данную волну, схематично изображены на рисунке сплошными линиями. Расстояние  $\Delta W$  вдоль оптической оси между соответствующими точками волновых фронтов характеризует оптическую разность хода. Искомая величина — наклон волнового фронта падающего излучения — определяется как  $\theta_\Delta = dW/dy = -\Delta/f$ .

На практике датчики Гартмана включают в себя не одну линзу, а линзовый растр, равно как и матрицу приёмников излучения. Каждая микролинза растра также обладает свойствами диафрагмы, выделяющей из падающего излучения лишь малую

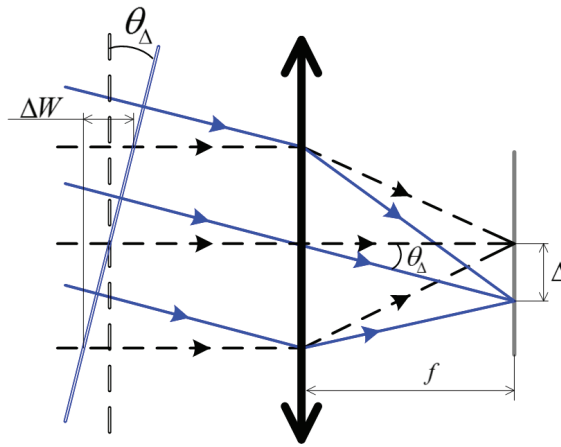


Рис. 13. Схематическая иллюстрация принципа действия датчика наклона.

часть. Линзы обычно имеют форму квадрата со стороной  $d$ . Если размер линз достаточно мал, то волновой фронт проходящего через них излучения может быть аппроксимирован наклонной плоской волной. Таким образом, линзовый растр в плоскости  $xy$  измеряет усреднённый по плоскостям микролинз градиент волнового фронта, на основе которого может быть восстановлена форма волнового фронта исходного излучения.

## 4.2. Измерение наклона пятна

### *Квадрантный приёмник*

Квадрантный приёмник излучения, схематично изображённый на рис. 14, разделён на квадранты, каждый из которых сам по себе представляет собой приёмник. Выходные электрические сигналы приёмников пропорциональны их освещённости. Горизонтальное,  $\Delta x$ , и вертикальное,  $\Delta y$ , смещения пятна на квадрантном приёмнике пропорциональны нормированным результирующим сигналам, задаваемым выражениями

$$q_x = \frac{(B + D) - (A + C)}{A + B + C + D},$$

$$q_y = \frac{(A + B) - (C + D)}{A + B + C + D},$$

где  $A, B, C$  и  $D$  – сигналы от соответствующих квадрантов. Смещения  $\Delta x = cq_x$  и  $\Delta y = cq_y$  рассчитываются с использованием калибровочного множителя  $c$ , который для квадрантных приёмников определяется эмпирически.

### *Многопиксельный приёмник*

Приёмник такого типа, в отличие от рассмотренного ранее, содержит более четырёх компонентов. На практике каждый такой приёмный компонент представляет

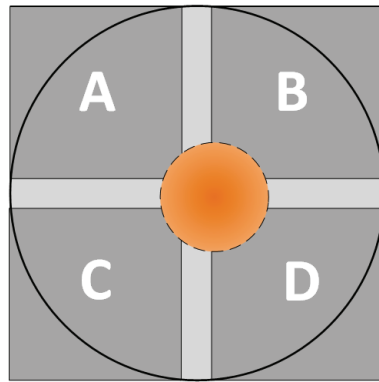


Рис. 14. Схематическое изображение квадрантного приёмника.

собой отдельный пиксель, участвующий в формировании изображения. Чем больше число пискелей в таком приёмнике, тем больше его пространственное разрешение, и, соответственно, выше точность восстановления формы волнового фронта излучения. Схематично такой приёмник изображён на рис. 15.

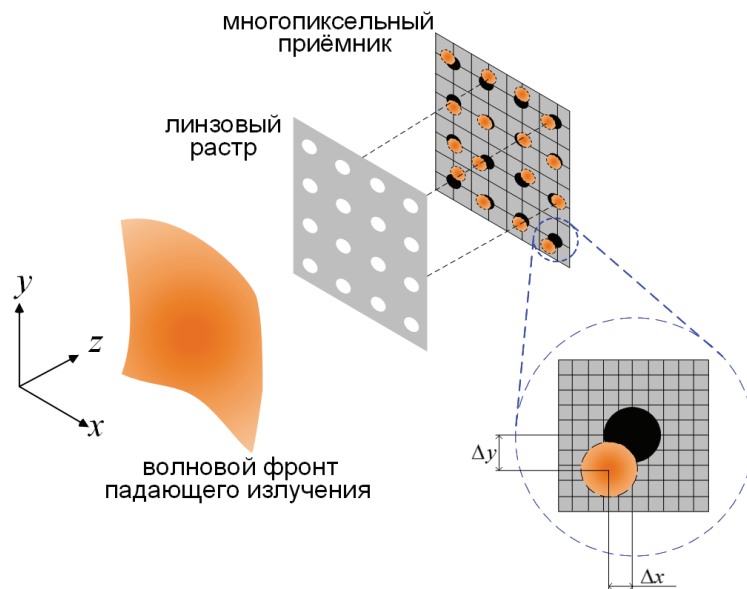


Рис. 15. Схематическая иллюстрация принципа действия датчика Шака-Гартмана.

Ввиду малых размеров микролинз в линзовом растре в структуре проявляются дифракционные эффекты. В частности, изображение точечного источника при прохождении через микролинзу, будет обладать конечными размерами. Такое изображение будет фиксироваться не одним пикселем, а сразу несколькими. Наклоны волнового фронта в центре светового пятна, полученного от линзы с номером  $(i, j)$ , в соответствующих направлениях задаются выражениями

$$s_x^{(ij)} = \frac{1}{z} \frac{\sum_{u,v} u h_x I(u,v)}{\sum_{u,v} I(u,v)} = \frac{\partial \varphi_{ij}(x,y)}{\partial x},$$

$$s_y^{(ij)} = \frac{1}{z} \frac{\sum_{u,v} v h_y I(u,v)}{\sum_{u,v} I(u,v)} = \frac{\partial \varphi_{ij}(x,y)}{\partial y},$$

где  $I(u, v)$  – интенсивность излучения на пикселе с номером  $(u, v)$ ,  $h_x$  и  $h_y$  – расстояния между центрами пикселей (периоды решётки) вдоль соответствующих направлений,  $\varphi_{ij}(x, y)$  – волновой фронт излучения, прошедшего через линзу с номером  $(i, j)$ .

### 4.3. Восстановление формы волнового фронта

Восстановление информации о форме волнового фронта  $\varphi(x, y)$  по рассчитанным значениям наклона  $s_x^{(ij)}$  и  $s_y^{(ij)}$  выполняется на основе численных методов. Постановка задачи зависит от конфигурации используемой сетки на расчётной области, иными словами, от положения точек, в которых измеряется наклон волнового фронта, относительно точек, в которых рассчитывается фаза. Различные конфигурации сеток представлены на рис. 16.

Сетка, представленная на рис. 16а используется, когда наклоны по осям  $x$  и  $y$  измеряются независимо друг от друга в разных точках. Сетка на рис. 16б используется, когда оба наклона измеряются в одной и той же точке, не совпадающей при этом с точкой, в которой рассчитывается фаза. То есть, сетка наклонов сдвинута на некоторую величину относительно сетки измеряемых фаз. На рис. 16в представлена сетка, описывающая случай, когда оба наклона измеряются в одной и той же точке, совпадающей с точкой, в которой рассчитывается фаза.

**Задание:** построить разностную схему для восстановления формы волнового фронта  $\varphi(x, y)$  по известному наклону  $s_{x,y}$  на основе сетки, представленной на рис. 16а.

**Выполнение:**

В конфигурации, описываемой данной сеткой, мы имеем  $N^2$  точек расчёта фазы (маркеры  $\blacklozenge$  на рисунке) и  $2N(N - 1)$  точек измерения наклона (горизонтальные и вертикальные линии на рисунке). Для понимания хода построения разностной схемы

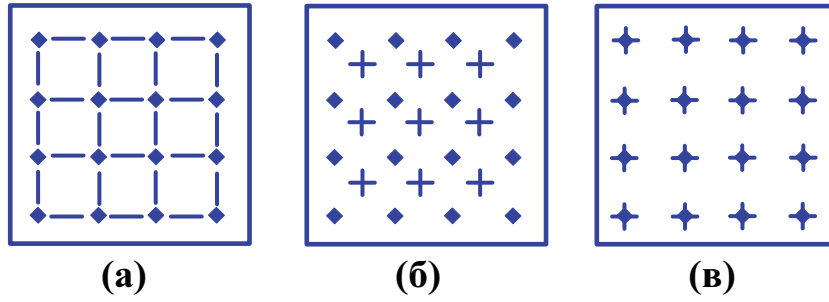


Рис. 16. Различные конфигурации сеток измерения наклонов волнового фронта и расчёта фазы [23]. Горизонтальные и вертикальные линии обозначают позиции, в которых осуществляется измерение наклона волнового фронта в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно. Маркеры  $\blacklozenge$  обозначают точки, в которых осуществляется расчёт фазы. Конфигурации (а), (б) и (в) подробнее рассмотрены в [24], [25] и [23] соответственно.

рассмотрим сначала изменение фазы вдоль одной непрерывной координаты  $x$ . Зависимость  $\varphi(x)$  может быть представлена в форме многочлена  $\varphi(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots$ . При этом наклон, определяемый как  $s(x) = \partial\varphi(x)/\partial x$ , будет задаваться многочленом  $s(x) = c_1 + 2c_2x + \dots$ . Поскольку мы выполняем однократное измерение наклона в центре интервала между двумя фазовыми точками, мы ограничиваемся только первым порядком в многочленах (слагаемыми с коэффициентом  $c_1$ ). В этом случае можем переписать  $s(x) = s = c_1$  и  $\varphi(x) = c_0 + sx$ , где  $\varphi(x)$  – искомое значение фазы,  $c_0$  – значение фазы в некоторой заданной точке.

Для одномерной дискретной модели можем переписать последнее (непрерывное) выражение для нахождения значения фазы в точке, отстоящей от точки с заданной фазой на расстояние  $\ell$ , в следующем виде:  $\varphi_{i+1} = \varphi_i + s_x^{(i)}\ell$ . Таким образом, разностная схема, связывающая значения фазы с наклоном волнового фронта, в одномерной задаче принимает следующий вид:  $s_x^{(i)} = (\varphi_{i+1} - \varphi_i)/\ell$ , где  $i = 1, \dots, N - 1$ . Можем экстраполировать полученный результат на рассматриваемую нами задачу восстановления формы двумерного волнового фронта. Разностная схема в этом случае будет выглядеть следующим образом:

$$s_x^{(ij)} = \frac{(\varphi_{i+1j} - \varphi_{ij})}{\ell}, \quad i = 1, \dots, N - 1, \quad j = 1, \dots, N,$$

$$s_y^{(ij)} = \frac{(\varphi_{ij+1} - \varphi_{ij})}{\ell}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N - 1.$$

**Задание:** построить разностную схему для восстановления формы волнового фронта  $\varphi(x, y)$  по известному наклону  $s_{x,y}$  на основе сетки, представленной на рис. 16б.

**Решение:**

В данной конфигурации точки, в которых рассчитывается фаза, смещены относительно точек, в которых измеряется наклон, на половину шага  $\ell$  по обеим осям,  $x$  и  $y$ . Разностная схема для данной конфигурации выглядит следующим образом:

$$\begin{aligned} s_x^{(ij)} &= \frac{1}{2\ell} [(\varphi_{i+1j} + \varphi_{i+1j+1}) - (\varphi_{ij} + \varphi_{ij+1})], \\ s_y^{(ij)} &= \frac{1}{2\ell} [(\varphi_{ij+1} + \varphi_{i+1j+1}) - (\varphi_{ij} + \varphi_{i+1j})]. \end{aligned}$$

**Задание:** построить разностную схему для восстановления формы волнового фронта  $\varphi(x, y)$  по известному наклону  $s_{x,y}$  на основе сетки, представленной на рис. 16в.

**Решение:**

В данной конфигурации фаза рассчитывается в той же точке, в которых измеряется наклон. Разностная схема принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{s_x^{(i+1j)} + s_x^{(ij)}}{2} &= \frac{\varphi_{i+1j} - \varphi_{ij}}{\ell}, \quad i = 1, \dots, N-1, \quad j = 1, \dots, N \\ \frac{s_x^{(i+1j)} + s_y^{(ij)}}{2} &= \frac{\varphi_{ij+1} - \varphi_{ij}}{\ell}, \quad i = 1, \dots, N, \quad j = 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

В матричной форме задачу восстановления формы волнового фронта можно записать следующим образом:

$$\mathbf{s} = \mathbf{A}\varphi, \tag{4.1}$$

где  $\mathbf{s}$  – вектор измеренных наклонов волнового фронта,  $\varphi$  – вектор искоемых значений фазы,  $\mathbf{A}$  – квадратная матрица с числом элементов  $N^2$ . Домножим обе части уравнения (4.1) на транспонированную матрицу  $\mathbf{A}^\top$

$$\mathbf{A}^\top \mathbf{A}\varphi = \mathbf{A}^\top \mathbf{s}. \tag{4.2}$$

Выражение (4.2) представляет собой систему из  $N^2$  линейных уравнений для  $N^2$  неизвестных  $\varphi_{ij}$ . Решение такой задачи обычно ищется домножением (4.2) на матрицу, обратную матрице  $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ . Однако следует отметить, что для рассматриваемой задачи, сведённой к виду (4.2), такой подход неприменим, поскольку матрица  $\mathbf{A}$  является сингулярной. Выходом из этой ситуации является введение вместо  $\mathbf{A}$  матрицы  $\mathbf{A}_a$ , отличающейся от  $\mathbf{A}$  дополнительным столбцом, а также вектора  $\mathbf{s}_a$  с дополнительным (нулевым) элементом.



## **ТЕМА 5. Математический аппарат для описания оптического изображения и формирующей его системы**

**Основные вопросы темы:** математическое описание электрического поля. Энергетические характеристики электрического поля. Характеристики оптических систем. Математическое описание формирования изображения оптической системой в терминах и понятиях теории сигналов.

**Цель и задачи практического занятия** состоят в ознакомлении студента с описанием светового излучения и формирующей изображение оптической системы на основе положений физической оптики, а также описанием формирования изображений с использованием подхода, основанного на теории сигналов.

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** аппаратная функция, зрачковая функция, интенсивность поля, комплексная амплитуда, масштаб изображения, монохроматическое поле, напряжённость поля, объёмная плотность энергии, оптическая передаточная функция, освещённость, отображающий оператор, поле зрения, поток световой энергии, светосила, сила света, спектральная плотность потока, энергетическая светимость, энергия, яркость.

**Требования к уровню подготовленности студента:** студент должен ориентироваться в основных вопросах/понятиях темы, понимать логические связи между ними, по заданному математическому описанию светового излучения уметь определить его энергетические характеристики, иметь представление об общепринятых характеристиках оптических систем и быть способным на их основе описать свойства оптических систем, используя подход на основе теории сигналов, уметь описать оптическое изображение, получаемое при прохождении излучения через оптическую систему, находить аппаратную функцию простейших оптических систем с диафрагмой.

### **Теоретический материал и примеры заданий по теме 5**

#### **5.1. Общие сведения**

Математическое описание изображений осуществляется на основе волновой теории света, в рамках которой свет описывается как электромагнитная волна. В общем случае

электромагнитные волны — это возмущения электромагнитного поля, образованного некоторым электрически заряженным телом, распространяющиеся в пространстве. Для описания поля используются следующие пространственно- и времязависимые функции:

- напряжённость  $E(\mathbf{r}, t)$ ;
- комплексная амплитуда  $U(\mathbf{r}, t)$ ;
- интенсивность  $I(\mathbf{r})$ .

### **Монохроматическое поле**

Рассмотрим поле, напряжённость которого описывается гармонической зависимостью от времени:

$$E(\mathbf{r}, t) = E(\mathbf{r}) \cos(\omega t - i\varphi(\mathbf{r})),$$

где  $E(\mathbf{r})$  – вещественная амплитуда поля,  $\varphi(\mathbf{r})$  – пространственно-зависимая фаза,  $\omega$  – частота гармонических колебаний. Воспользовавшись формулой Эйлера  $e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x)$ , можем задать комплексную функцию  $A(\mathbf{r}, t)$ :

$$A(\mathbf{r}, t) = U(\mathbf{r})e^{-i\omega t},$$

которая называется аналитическим сигналом и связана с  $E(\mathbf{r}, t)$  выражением  $E(\mathbf{r}, t) = \text{Re}[A(\mathbf{r}, t)]$ . Функция  $U(\mathbf{r}) = E(\mathbf{r})e^{i\varphi(\mathbf{r})}$  – комплексная амплитуда поля, которая подчиняется волновому уравнению, называемому уравнением Гельмгольца:

$$\Delta U(\mathbf{r}) + k^2 n^2 U(\mathbf{r}) = 0,$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2 + \partial^2/\partial z^2$  – оператор Лапласа,  $k = 2\pi/\lambda$  – волновое число,  $\lambda$  – длина волны излучения,  $n$  – показатель преломления среды. Решение этого уравнения позволяет получить информацию о распределении поля в пространстве.

### **Интенсивность поля**

Важно отметить тот факт, что амплитуда поля не может быть измерена непосредственно, поскольку поле меняется с большой частотой. Так для оптического диапазона период колебаний составляет от  $10^{-14}$  до  $10^{-15}$  с. Современные приёмники обладают существенно меньшим временным разрешением. В связи с этим, на практике наблюдают такую величину, как интенсивность поля  $I(\mathbf{r})$ , которая для монохроматического поля определяется выражением  $I(\mathbf{r}) = U^*(\mathbf{r})U(\mathbf{r}) = |U(\mathbf{r})|^2$  и

является усреднённой по времени величиной. Т. е. можем переписать выражение для интенсивности в виде  $I(\mathbf{r}) = \langle |A(\mathbf{r}, t)|^2 \rangle_t$ .

Ещё одно замечание: помимо напряжённости также не поддаётся непосредственному измерению фаза поля. Однако в настоящей работе была рассмотрена возможность измерения и оценки фазы на основе использования явления интерференции двух полей.

На практике излучение реальных источников не бывает монохроматическим: оно всегда характеризуется некоторой спектральной зависимостью. Интенсивность немонахроматических полей описывается выражением  $I(\mathbf{r}) = \langle I(\lambda)C(\lambda) \rangle_\lambda$ , где  $I(\lambda)$  задаёт распределение интенсивности излучения по длинам волн,  $\lambda$ ;  $C(\lambda)$  есть спектральная функция, задающая вклад монохроматических компонентов с длинами волн  $\lambda$  в общую интенсивность;  $\langle \dots \rangle_\lambda$  – усреднение по длинам волн.

Простейшими примерами монохроматических волн являются плоские и сферические волны. Волновой фронт плоских волн представляет собой плоскость, перпендикулярную направлению распространения волны. Комплексная амплитуда плоской волны задаётся выражением  $U(\mathbf{r}) = E_0 e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ , где  $E_0 = \text{const}$ . Для комплексной амплитуды сферической волны (волновой фронт которой образует сферу) справедливо выражение  $U(\mathbf{r}) = \frac{E_0}{r} e^{i\varphi(\mathbf{r})}$ , где  $r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ .

### ***Энергетические характеристики светового поля***

Одним из важнейших свойств света является способность переносить *энергию*. В связи с этим, энергия  $W$  является главной характеристикой светового поля. Единица измерения энергии — джоуль, [Дж].

Зачастую оперируют *объёмной плотностью энергии*  $w$ , которая связана с энергией выражением  $W = \int_V w dV$ , где  $V$  – некоторый объём, в котором находится световое поле.

*Поток световой энергии*  $P$  — это количество энергии  $W$ , которое переносится полем в единицу времени через заданную площадь  $S$ ;  $[P] = \text{Вт}$ .

Для немонахроматических волн вводится такая величина, как *спектральная плотность потока*  $P_\lambda$  (или  $P_\omega$ ). Это функция, которая описывает распределение светового потока по длинам волн (частотам) компонентов излучения. В общем случае она задаётся в виде  $P_\lambda(\lambda) = \partial P / \partial \lambda$  ( $P_\omega(\omega) = \partial P / \partial \omega$ ).

*Сила света*  $I_\theta$  — это поток излучения на единицу телесного угла  $\theta$ ;  $I_\theta = \partial P / \partial \theta$ ;  $[I_\theta] = \text{Вт/ср}$ .

*Освещённость* (поверхностная плотность потока) — это величина потока, падающего на единицу площади  $dS_{\text{пад}}$ ;  $W_e = dP/dS_{\text{пад}}$ ;  $[W_e] = \text{Вт/м}^2$ .

*Энергетическая светимость* — это величина потока, испускаемого с единицы площади  $dS_{\text{исп}}$ ;  $R_e = dP/dS_{\text{исп}}$ ;  $[R_e] = \text{Вт/м}^2$ .

*Яркость источника излучения*  $B = dI_\theta/dS_\perp$ , где  $dS_\perp$  — элемент площади проекции испускающего излучение тела на плоскость, перпендикулярную направлению наблюдения.

### **Характеристики оптических систем**

Ключевыми характеристиками оптических систем являются масштаб изображения, светосила и поле зрения [26].

*Масштаб изображения* в наиболее общем случае определяет соотношение между размерами изображения и предмета. Если предмет расположен на значительном удалении от оптической системы (что характерно для астрономических наблюдений), масштаб оценивается как отношение фокусного расстояния объектива к расстоянию от оптической системы до предмета.

Когда предмет расположен на близком расстоянии, масштаб определяется линейным увеличением. Оно задаёт отношение высоты изображения предмета, перпендикулярного оптической оси, к высоте самого предмета. Следует отметить, что линейное увеличение может быть как положительным, так и отрицательным. Если изображение предмета является прямым, увеличение положительное, если изображение перевёрнутое, то линейное увеличение отрицательно.

Ещё одним параметром для оценки масштаба изображения является *видимое увеличение*. Оно задаётся следующим выражением:

$$\Gamma = \frac{\text{tg}\sigma'}{\text{tg}\sigma},$$

где  $\sigma'$  — угол, под которым наблюдается изображение предмета, полученное через оптическую систему,  $\sigma$  — угол, под которым сам предмет наблюдается невооружённым глазом (без участия оптической системы). Оба угла обозначены на схематичном рисунке 17. Как и линейное увеличение, видимое увеличение является положительным

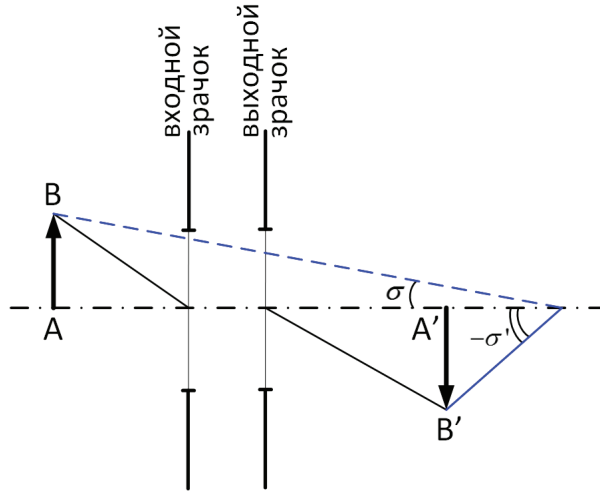


Рис. 17. К определению видимого увеличения. На рисунке АВ — предмет, А'В' — изображение.

при прямом изображении и отрицательным — при обратном.

*Светосила* оптической системы — это отношение освещённости изображения  $W_e$  к яркости предмета  $B$ :

$$H = \frac{W_e}{B}.$$

Рассмотрим равномерно светящийся плоский предмет с яркостью  $B$ , расположенный в точке  $A$  перпендикулярно оптической оси (см. рис. 18). Элементарная область предмета  $dS$  испускает свет, при этом световой пучок ограничен апертурной диафрагмой с диаметром  $D$ . Световой поток  $dP$  от элементарной поверхности  $dS$ , входящей в оптическую систему через диафрагму (выполняющую также роль входного зрачка) определяется выражением  $dP = \pi B dS \sin^2(\alpha)$ , где угол  $\alpha$  — апертурный угол в пространстве предметов (угол между лучом, идущим из осевой точки предмета и проходящий через край апертурной диафрагмы, и оптической осью). Выражение для светового потока в пространстве изображений:  $dP' = \pi B' dS' \sin^2(\alpha')$ , где  $\alpha'$  — апертурный угол в пространстве предметов,  $B'$  — яркость изображения,  $dS'$  — элемент площади изображения.

Яркости предмета  $B$  и изображения  $B'$  связаны выражением  $B' = \tau_{\text{тр}} B (n'/n)^2$ , где  $\tau_{\text{тр}}$  — коэффициент пропускания излучения,  $n$  и  $n'$  — показатели преломления сред в пространствах предмета и изображения соответственно.

Выражение для освещённости изображения  $W_e = dP'/dS'$  получаем в виде  $W_e = \pi \tau_{\text{тр}} B (n'/n)^2 \sin^2(\alpha')$ . Таким образом, светосила оптической системы определяется как  $H = \pi \tau_{\text{тр}} (n'/n)^2 \sin^2(\alpha')$ . Полученное выражение демонстрирует тот факт, что

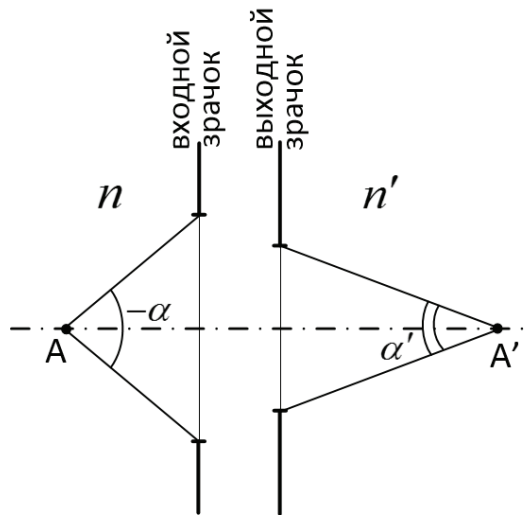


Рис. 18. К выводу формулы для светосилы.

светосила оптической системы зависит лишь от свойств самой системы (коэффициент пропускания, показатели преломления сред, апертурный угол) и не зависит от энергетических характеристик светящегося предмета.

*Поле зрения* — это область пространства предметов, изображение которой строится оптической системой. Оно может задаваться как в линейной, так и в угловой мере.

## 5.2. Формирование оптического изображения с точки зрения теории сигналов

В соответствии с [27] построение изображения предмета оптической системой может описываться как преобразование входного сигнала  $J$  в выходной сигнал  $J'$ . В оптических системах, как правило, в роли сигналов выступает оптическое излучение. В АОС встречаются электрические сигналы, например, связывающие ДВФ и ДЗ с контроллером. Сигналы описываются как функции обобщённых координат  $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots)$ , причём координатные базисы сигналов  $J(\mathbf{X})$  и  $J'(\mathbf{X}')$  не обязательно должны совпадать.

В большинстве случаев при описании распространения излучения через оптическую систему с входной и выходной плоскостями системы связывают двумерные декартовы системы координат, т. е.  $\mathbf{X} = (x, y)$  и  $\mathbf{X}' = (x', y')$ .

В общем случае выходной сигнал  $J'(\mathbf{X}')$  может быть представлен как результат воздействия на входной сигнал  $J(\mathbf{X})$  некоторого оператора  $\hat{L}$ , т. е.  $J'(\mathbf{X}') = \hat{L}[J(\mathbf{X})]$ . Назовём  $\hat{L}$  отображающим оператором.

В [27] указаны два свойства оператора  $\widehat{L}$ , характеризующего оптические системы. Первое свойство — это линейность оператора. Математически условие линейности задаётся выражением  $\widehat{L} \left[ \sum_j J_j(\mathbf{X}) \right] = \sum_j \widehat{L} [J_j(\mathbf{X})]$ . С физической точки зрения это означает, что изображение совокупности предметов равно совокупности изображений предметов.

Второе условие — это инвариантность к смещению. Математическая запись для данного условия:  $J'(\mathbf{X}' + \Delta\mathbf{X}') = \widehat{L} [J(\mathbf{X} + \Delta\mathbf{X})]$ , где  $\Delta\mathbf{X}$  — смещение предмета в пространстве координат  $\mathbf{X}$ ,  $\Delta\mathbf{X}'$  — смещение изображения в пространстве координат  $\mathbf{X}'$ . На практике это означает, что при смещении предмета смещается и изображение, при этом иных изменений в изображении не происходит.

### **Определение вида отображающего оператора**

Аналогично [27] рассмотрим источник входного сигнала  $J(\mathbf{X})$  как совокупность бесконечно малых элементарных источников. Сигнал от каждого элементарного источника описывается функцией  $J(\mathbf{X}_e)$ . В этом случае можем записать сигнал  $J(\mathbf{X})$  в виде

$$J(\mathbf{X}) = \int_{-\infty}^{\infty} J(\mathbf{X}_e) \delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_e) d\mathbf{X}_e, \quad (5.1)$$

где дельта-функция  $\delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_e)$  принимает значение 1, когда  $\mathbf{X} = \mathbf{X}_e$ , и значение 0 в остальных случаях.

На основе (5.1) запишем выражение для выходного сигнала:

$$J'(\mathbf{X}') = \widehat{L} [J(\mathbf{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} J(\mathbf{X}_e) \widehat{L} [\delta(\mathbf{X} - \mathbf{X}_e)] d\mathbf{X}_e. \quad (5.2)$$

Выполним в (5.2) формальную замену переменных для входного сигнала,  $\mathbf{X}_e \rightarrow \mathbf{X}$ , и перепишем выражение в виде

$$J'(\mathbf{X}') = \widehat{L} [J(\mathbf{X})] = \int_{-\infty}^{\infty} J(\mathbf{X}) h(\mathbf{X}', \mathbf{X}) d\mathbf{X}, \quad (5.3)$$

которое и определяет отображающий оператор. В правой части выражения (5.3) функция  $h(\mathbf{X}', \mathbf{X})$  называется аппаратной функцией или импульсным откликом. Как справедливо указано в [27], в виду различных причин оптическая система не является инвариантной к смещению. Однако возможно разбить её на меньшие области, которые удовлетворяют условию инвариантности. На основе свойства инвариантности к смещению

можем переписать аппаратную функцию в виде  $h(\mathbf{X}', \mathbf{X}) = h(\mathbf{X}' - \mathbf{X})$ . В этом случае интеграл (5.3) принимает вид интеграла свёртки:

$$J'(\mathbf{X}') = \int_{-\infty}^{\infty} J(\mathbf{X})h(\mathbf{X}' - \mathbf{X}) d\mathbf{X} = J(\mathbf{X}) \otimes h(\mathbf{X}). \quad (5.4)$$

Если применить к выражению (5.4) преобразование Фурье, то в соответствии со свойствами Фурье-образа будет справедливо равенство  $F[J'(\mathbf{X}')] = F[J(\mathbf{X})]F[h(\mathbf{X})]$ ; оператор  $F$  описывает прямое преобразование Фурье. Функция  $H(\mathbf{K}_X) = F[h(\mathbf{X})]$  называется передаточной функцией оптической системы или оптической передаточной функцией (ОПФ), о которой будет подробнее сказано в указаниях к следующей теме; переменная  $\mathbf{K}_X$  описывает обобщённые координаты в Фурье-пространстве.

**Задание:** для заданной комплексной амплитуды  $U(x, y)$  когерентного излучения в плоскости предмета найти аналитическое выражение для нахождения комплексной амплитуды  $U'(x', y')$  в плоскости изображения при прохождении излучения через диафрагму.

Описание воздействия, оказываемого оптической системой с диафрагмой на излучение, осуществляется при помощи зрачковой функций  $f(x_3, y_3)$ . Для примера, зрачковая функция системы с круглым зрачком задаётся следующим выражением:

$$f(x_3, y_3) = \begin{cases} \gamma e^{2\pi i W} & \text{при } x_3^2 + y_3^2 \leq r^2, \\ 0 & \text{при } x_3^2 + y_3^2 > r^2, \end{cases}$$

где  $W \equiv W(x_3, y_3)$  описывает вклад aberrаций,  $\gamma \equiv \gamma(x_3, y_3)$  характеризует потери энергии излучения в оптической системе; в физическом смысле величина  $\sqrt{\gamma}$  есть коэффициент пропускания оптической системы;  $x_3, y_3$  – пространственные координаты в плоскости зрачка,  $r$  – радиус зрачка. Зрачок выполняет роль диафрагмы, пропускающей часть излучения, для которого выполняется условие  $x_3^2 + y_3^2 \leq r^2$ , и отсекающей оставшееся излучение. Наличие диафрагмы предполагает присутствие в системе дифракционных эффектов. В идеальном случае (в отсутствии aberrаций и при полном пропускании излучения) зрачковая функция  $f(x_3, y_3) = 1$  при  $x_3^2 + y_3^2 \leq r^2$  и  $f(x_3, y_3) = 0$  при  $x_3^2 + y_3^2 > r^2$ . Такой вид функции подразумевает лишь учёт вклада дифракционных эффектов в построение изображения.



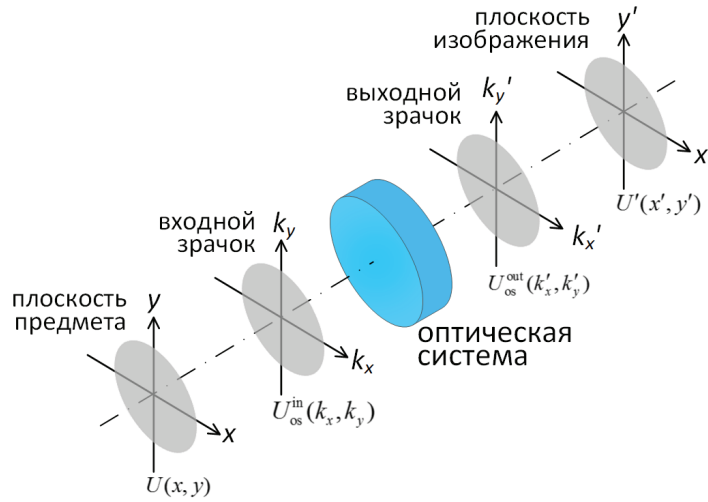


Рис. 19. Модель формирования изображения в когерентном свете.

### **Выполнение:**

Поиск решения задачи будем осуществлять в соответствии с алгоритмом, описанным в работах [27, 28]. Схематичная иллюстрация к задаче представлена на рис. 19. Когерентное поле в плоскости предмета описывается комплексной амплитудой  $U(x, y)$ . Вклад дифракционных эффектов в распространение излучения описывается преобразованием Фурье. Таким образом, комплексная амплитуда излучения от предмета на входе в оптическую систему (диафрагму) в обратном пространстве будет задаваться выражением  $U_{os}^{in}(k_x, k_y) = F[U(x, y)]$ . Функция  $U_{os}^{in}(k_x, k_y)$  в понятии теории сигналов является входным сигналом.

Влияние оптической системы на входной сигнал  $U_{os}^{in}(k_x, k_y)$  математически описывается произведением  $U_{os}^{in}(k_x, k_y)$  и Фурье-образа зрачковой функции системы  $f(k_x, k_y) = F[f(x, y)]$ :  $U_{os}^{out}(k'_x, k'_y) = f(k_x, k_y)U_{os}^{in}(k_x, k_y)$ .

Искомая комплексная амплитуда поля, формирующего изображение, является выходным сигналом. Она может быть найдена обратным преобразованием Фурье (действием оператора  $F^{-1}$ ) на комплексную функцию  $U_{os}^{out}(k'_x, k'_y)$ :

$$\begin{aligned} U'(x', y') &= F^{-1}[U_{os}^{out}(k'_x, k'_y)] = \\ &= F^{-1}[f(k_x, k_y)U_{os}^{in}(k_x, k_y)] = F^{-1}[f(k_x, k_y)F[U(x, y)]]. \end{aligned}$$

Следует отметить, что аппаратной функцией  $h(x, y)$  в рассмотренных преобразованиях является обратное Фурье-преобразование Фурье-образа зрачковой функции, т. е. сама зрачковая функция:  $h(x, y) = F^{-1}[f(k_x, k_y)] = f(x, y)$ .

## **ТЕМА 6. Оптическая передаточная функция**

**Основные вопросы темы:** функция рассеяния точки для описания распределения освещенности изображения точечного источника излучения. Оптическая передаточная функция как инструмент передачи структуры предмета оптической системой.

**Цель и задачи практического занятия** состоят в ознакомлении студента с возможностью декомпозиции источника излучения конечных размеров на совокупность точечных источников, со способом описания структуры источника излучения при помощи функции рассеяния точки и оптической передаточной функции, а также возможностью восстановления информации об источнике излучения на основе его изображения.

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** модуляционная передаточная функция, оптическая передаточная функция, фазовая передаточная функция, функция рассеяния точки, частотно-фазовая характеристика.

**Требования к уровню подготовленности студента:** студент должен ориентироваться в основных вопросах/понятиях темы, понимать логические связи между ними, в частности, понимать связь между функцией рассеяния точки и оптической передаточной функцией, знать физические ограничения восстановления информации на основе функции рассеяния точки, уметь находить оптические передаточные функции для простейших оптических систем с диафрагмой.

### **Теоретический материал и примеры заданий по теме 6**

#### **6.1. Функция рассеяния точки**

В идеальных оптических системах, ход лучей в которых описывается в рамках геометрической оптики, изображением точечного источника излучения является точка. При прохождении излучения точечного источника через реальную оптическую систему в плоскости изображения формируется дифракционная картина. Как было продемонстрировано в указаниях к предыдущей теме, такой результат получения выходного сигнала в общем случае описывается импульсным откликом системы. В оптической системе импульсный отклик, описывающий распределение освещенности изображения точечного источника, называется функцией рассеяния точки (ФРТ; англ.: point spread function).

Свяжем плоскости входного и выходного сигналов оптической системы с двумерной декартовой системой координат пространства, т. е.  $\mathbf{X} = (x, y)$  и  $\mathbf{X}' = (x', y')$ . Источник излучения конечных размеров  $J(x, y)$  можно разложить на совокупность точечных источников. Изображение  $J'(x', y')$  такого источника будет представлять собой суперпозицию изображений точечных источников и будет описываться выражением

$$J'(x', y') = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J(x, y) h(x' - m_x x, y' - m_y y) dx dy, \quad (6.1)$$

где  $m_{x,y}$  обозначает масштабирование изображения в результате действия оптической системы; ФРТ  $h(x' - m_x x, y' - m_y y)$  представляет собой изображение каждой точки источника излучения  $J(x, y)$ . В случае отсутствия масштабирования, т. е. при  $m = 1$ , выражение (6.1) можем переписать в упрощённом виде, воспользовавшись интегралом свёртки:  $J'(x', y') = J(x, y) \otimes h(x, y)$ .

Теоретически знание ФРТ оптической системы позволяет восстановить информацию об источнике излучения на основе его изображения. На практике изображение, полученное при помощи реальных оптических систем, содержит не полную информацию об источнике излучения; качество изображения ограничено непременно присутствующими в оптических системах aberrациями, а также дифракцией. В связи с этим, качество изображения существенно зависит от спектра излучения источника (распределения излучения по длинам волн), размеров оптической системы, положения источника относительно оптической системы.

В общем случае дифракция возникает при огибании световой волной препятствий. На рис. 20а представлено изображение точечного источника, полученное при прохождении излучения через оптическую систему с круглой апертурной диафрагмой; такое изображение в литературе получило название дифракционной картины Эйри, а его центральная область — диска Эйри. В оптических системах с диафрагмой дифракционная картина зависит от длины волны излучения, диаметра диафрагмы, фокусного расстояния оптической системы.

На рисунках 20(б–г) схематично приведены изображения точечного источника при прохождении через оптическую систему с aberrациями, такими как (б) — сферическая aberrация, (в) — кома и (г) — дефокусировка. В общем случае aberrация — это отклонение построения изображения предмета реальными оптическими системами от

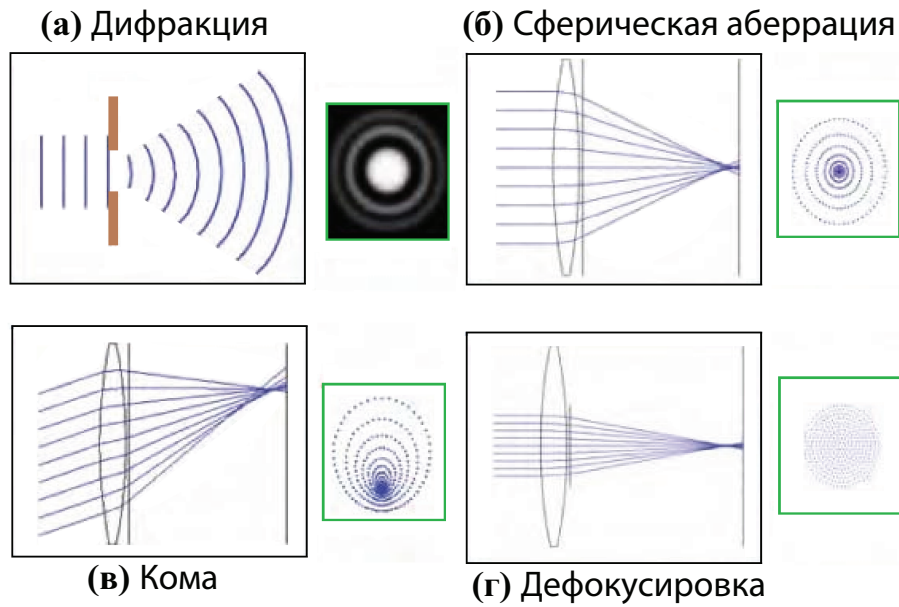


Рис. 20. Схематические иллюстрации четырёх оптических эффектов и присущих им функций рассеяния точки: (а) – дифракция, (б) – сферическая aberrация, (в) – кома, (г) – дефокусировка.

предсказаний параксиальной оптики [29]. Дефокусировка, характеризующая рисунок (г), возникает, когда предмет находится вне фокуса.

## 6.2. Понятие оптической передаточной функции

Итак, распределение выходного сигнала в плоскости изображения  $J'(x', y')$  характеризуется ФРТ. Однако дифракционные эффекты описываются в области пространственных частот. Для описания структуры источников излучения с учётом таких эффектов вводится оптическая передаточная функция (ОПФ; англ.: optical transfer function). Она задаётся как Фурье-образ ФРТ:

$$H(k_x, k_y) = F[h(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) \exp[-2\pi i(k_x x + k_y y)] dx dy,$$

где  $k_x$  и  $k_y$  – пространственные частоты в соответствующих направлениях. Таким образом, выходной сигнал в области пространственных частот задаётся выражением

$$J'(k'_x, k'_y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} J(x, y) h(x, y) \exp[-2\pi i(k_x x + k_y y)] dx dy. \quad (6.2)$$

Оптическая передаточная функция является комплексной величиной и в общем виде может быть задана следующим образом:

$$H(k_x, k_y) = T(k_x, k_y) e^{i\phi(k_x, k_y)}. \quad (6.3)$$

В выражении (6.3) величина  $T(k_x, k_y) = |H(k_x, k_y)|$ , характеризующая амплитудную часть ОПФ, называется модуляционной передаточной функцией, а  $\phi(k_x, k_y)$ , описывающая её фазу, — фазовой передаточной функцией или частотно-фазовой характеристикой.

**Задание:** получить аналитическое выражение для ОПФ оптической системы с (а) круглой диафрагмой диаметра  $D$  и (б) квадратной диафрагмой ширины  $a$  при прохождении через систему когерентного излучения. Коэффициент пропускания оптической системы полагать равным единице. Оптическую систему рассматривать в безабберационном пределе.

**Выполнение:**

В указаниях к предыдущей теме было показано, что описание воздействия оптической системы с диафрагмой осуществляется при помощи зрачковой функций.

а) В отсутствии aberrаций и поглощения энергии зрачковая функция системы с круглой диафрагмой задаётся выражением

$$f_c(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } x^2 + y^2 \leq \left(\frac{D}{2}\right)^2, \\ 0 & \text{при } x^2 + y^2 > \left(\frac{D}{2}\right)^2. \end{cases}$$

Математическая функция, при помощи которой описывается круглое отверстие единичного радиуса  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 1$ , задаётся как

$$\text{circ}(r) = \begin{cases} 1 & \text{при } r \leq 1, \\ 0 & \text{при } r > 1. \end{cases}$$

Выразим зрачковую функцию круглой диафрагмы  $f_c(x, y)$  через функцию  $\text{circ}$  и в результате получим

$$f_c(x, y) = \text{circ}\left(\frac{2\sqrt{x^2 + y^2}}{D}\right). \quad (6.4)$$

Как было показано в указаниях предыдущей теме, зрачковая функция оптической системы с диафрагмой является импульсным откликом системы. В соответствии с определением ОПФ (6.2) выполним преобразование Фурье функции (6.4),  $H_c(k_x, k_y) = F[f_c(x, y)]$ , и получим выражение для ОПФ системы с круглой

диафрагмой в виде

$$H_c(k_x, k_y) = \frac{J_{B1}(2\pi\sqrt{k_x^2 + k_y^2})}{\sqrt{k_x^2 + k_y^2}},$$

где специальная функция  $J_{B1}$  есть функция Бесселя первого порядка.

б) Зрачковая функция системы с квадратной диафрагмой задаётся выражением

$$f_r(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{a}{2}, |y| \leq \frac{a}{2}. \end{cases}$$

Функция  $\text{rect}(x)$  в одномерном случае описывает диафрагму единичной ширины  $a = 1$  и в упрощённом виде задаётся следующим образом:

$$\text{rect}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } |x| \leq \frac{1}{2}, \\ 0 & \text{при } |x| > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Выразим зрачковую функцию  $f_r(x, y)$  через функцию  $\text{rect}$ . При выражении следует учесть, что  $f_r(x, y)$  является двумерной, а  $\text{rect}$  — одномерной. В результате получим следующее выражение для зрачковой функции квадратной диафрагмы:

$$f_r(x, y) = \text{rect}\left(\frac{x}{a}\right) \text{rect}\left(\frac{y}{a}\right). \quad (6.5)$$

Выполним преобразование функции (6.5),  $H_c(k_x, k_y) = F[f_c(x, y)]$ , и получим выражение для ОПФ системы с квадратной диафрагмой в виде

$$H_r(k_x, k_y) = \frac{1}{a^2} \text{sinc}\left(\frac{k_x}{a}\right) \text{sinc}\left(\frac{k_y}{a}\right).$$

**Задание для самостоятельного выполнения:** Получить аналитическое выражение для ОПФ оптической системы

- (а) с эллиптической диафрагмой с шириной эллипса  $a_x$  вдоль оси  $x$  и  $a_y$  вдоль оси  $y$ ;
- (б) с прямоугольной диафрагмой ширины  $a_x$  вдоль оси  $x$  и  $a_y$  вдоль оси  $y$ ;
- (в) с эллиптической диафрагмой с шириной эллипса  $a$  вдоль оси  $x$  и  $2a$  вдоль оси  $y$ , и коэффициентом пропускания оптической системы  $\sqrt{\gamma} = \text{const}$ ;
- (г) с диафрагмой в виде кольца, внешний и внутренний диаметры которого составляют  $D_1$  и  $D_2$  соответственно;
- (д) с диафрагмой в форме квадратной рамки с шириной внешнего контура  $a$  и шириной внутреннего контура  $a/2$ ;
- (е) с квадратной диафрагмой ширины  $a$  и коэффициентом пропускания, величина которого уменьшается вдоль оси  $x$  от одного края диафрагмы к другому в соответствии с зависимостью  $\sqrt{\gamma(x)} = e^{-(x+a/2)}$ .

Оптическую систему рассматривать в безабберационном пределе. Коэффициент пропускания оптической системы полагать равным единице, если не указано иное.

---

---

## **ТЕМА 7. Зеркала с синтезированной апертурой**

**Основные вопросы темы:** разновидности устройств для коррекции волнового фронта — пространственные модуляторы и деформируемые зеркала. Моделирование движения сегментов зеркал с синтезированной апертурой.

**Цель и задачи практического занятия** состоят в ознакомлении студента с принципами исправления искажений волнового фронта, разновидностями корректоров волнового фронта, в особенности, с зеркалами с синтезированной апертурой, с физическими принципами управления зеркалами с синтезированной апертурой .

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** зеркало с синтезированной апертурой, непрерывное зеркало, пространственный модулятор света.

**Требования к уровню подготовленности студента:** студент должен ориентироваться в основных вопросах/понятиях темы, понимать логические связи между ними, разбираться в классификации корректоров волнового фронта по особенностям их конструкции и принципам действия, понимать преимущества и недостатки одних типов корректоров перед другими, понимать физические принципы управления пространственными характеристиками отдельных сегментов зеркал, быть способным построить математическую модель движения сегментов зеркал с учётом и без учёта воздействия внешних факторов, уметь формулировать задачу моделирования движения сегментов в удобной для компьютерных вычислений форме.

### **Теоретический материал и примеры заданий по теме 7**

#### **7.1. Типы корректоров волнового фронта**

Ещё одним ключевым компонентом АОС являются корректоры волнового фронта. Их условно можно разделить на две группы.

##### **1. Пространственные модуляторы света.**

Они представляют собой растры жидкокристаллических микролинз [30]. Фазой излучения, проходящего через КВФ данного типа, можно управлять, изменяя при помощи электрического или оптического воздействия показатель преломления каждой отдельной микролинзы. Возможна пространственная модуляция как проходящего, так и отражённого излучения. В сравнении с КВФ других типов основным преимуществом



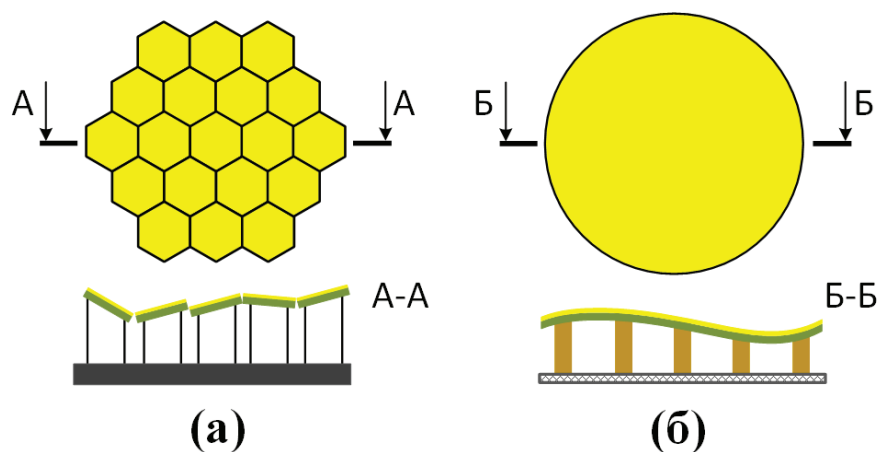


Рис. 21. Схематическое изображение (а) — сегментированного зеркала и (б) — непрерывного деформируемого зеркала: главная плоскость и поперечное сечение.

пространственных модуляторов является их высокое пространственное разрешение, достижимое, благодаря малым размерам микролинз. Их основные недостатки следующие. Во-первых, пространственные модуляторы обеспечивают малый диапазон изменения фазы, которого зачастую оказывается недостаточно для исправления сильных искажений волнового фронта. Во-вторых, модуляторы способны работать только с поляризованным светом, ось поляризации которого совпадает с осью жидких кристаллов.

## 2. Деформируемые зеркала.

Основной характеристикой таких зеркал является возможность локально изменять кривизну отражающей поверхности, что позволяет управлять формой волнового фронта отражаемого от них излучения. Основное преимущество КВФ такого типа заключается в том, что они обеспечивают малые потери энергии излучения при отражении. Это позволяет применять их в АОС, предназначенных для работы с излучением слабой интенсивности.

В зависимости от характера формирования отражающей поверхности можно ввести следующую классификацию ДЗ.

– Зеркала с синтезированной апертурой или сегментированные зеркала.

Сегментированное зеркало представляет собой зеркальный растр, при этом положением, ориентацией в пространстве и/или формой каждого сегмента растра можно управлять независимо от остальных сегментов [31]. Наиболее часто сегменты обладают квадратной или гексагональной формой. Схематично зеркало с синтезированной апертурой изображено на рис. 21а.

Преимущества КВФ на основе сегментированных зеркал следующие. Современные технологии позволяют создавать зеркала с большим числом сегментов, характеризующихся малыми размерами и плотностью компоновки (порядка сотен сегментов в зеркале общим диаметром не более пяти миллиметров), что положительно сказывается на качестве получаемого изображения. Также сегментированные зеркала обладают малым временем отклика на управляющие сигналы.

– Непрерывные зеркала.

Они обладают гибкой непрерывной отражающей поверхностью, форма которой может меняться под влиянием внешних воздействий [32]. Схематично непрерывное зеркало представлено на рис. 21б.

## **7.2. Принципы управления зеркалами с синтезированной апертурой**

Управление пространственными характеристиками отдельных сегментов осуществляется с целью придать отражающей поверхности всего зеркала требуемую форму [33]. Для управления сегментами используются три степени свободы: наклон относительно исходного положения, поворот вокруг осей, лежащих в плоскости сегмента, а также перемещение вдоль оси, перпендикулярной плоскости сегмента. Степени свободы, связанные с перемещением и вращением в плоскости сегмента обычно не рассматриваются. Схематично сегмент зеркала с синтезированной апертурой с обозначенными ключевыми точками изображён на рис. 22.

Управление положением каждого сегмента в пространстве осуществляется при помощи механических приводов, которые крепятся к сегменту в нескольких точках, что уменьшает вклад нежелательных деформаций сегмента за счёт силы тяжести. Данная мера позволяет при построении модели рассматривать сегменты как недеформируемые объекты.

---

**Задание:** построить модель движения сегментов гексагональной формы зеркала с синтезированной апертурой. Сегмент рассматривается как плоская, симметричная тонкая пластина, перпендикулярная оптической оси зеркала. Движение сегмента описывается в

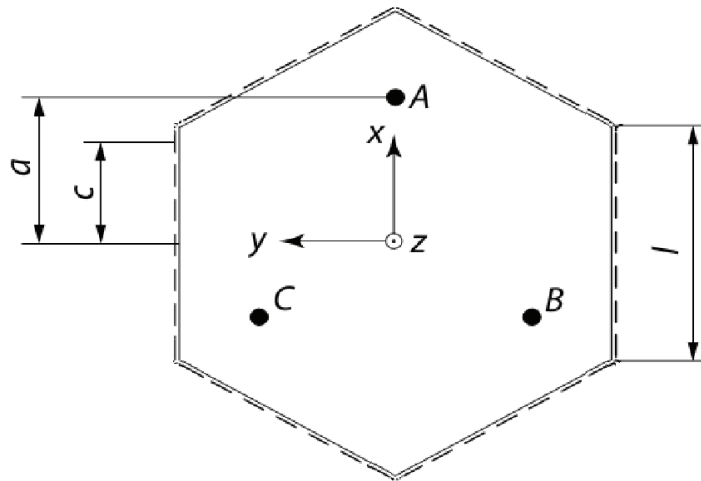


Рис. 22. К построению модели движения сегментов гексагональной формы зеркала с синтезированной апертурой.

декартовой системе координат с началом в центральной точке (центре тяжести) сегмента — см. рис. 22.

Манипулирование сегментом осуществляется тремя приводами в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$ . В общем случае мы можем рассматривать приводы как пружины с некоторой жёсткостью, причём жёсткость при боковых (в плоскости сегмента) и осевых (в перпендикулярном плоскости сегмента направлении) нагрузках неодинакова. Будем полагать поперечную жёсткость  $k_{\perp}$  одинаковой в направлениях  $x$  и  $y$ . Жёсткость в направлении  $z$  обозначим как  $k_{ax}$ . Также для пружины введём коэффициент демпфирования  $c_{\perp}$  в плоскости  $xy$  и  $c_{ax}$  в направлении  $z$ . Обозначим конечные точки приводов как  $A'$ ,  $B'$  и  $C'$ : они связаны с точками  $A$ ,  $B$  и  $C$  на сегменте.

Исходные данные задачи: положение конечных точек приводов ( $x_{A',B',C'}$ ,  $y_{A',B',C'}$ ,  $z_{A',B',C'}$ ), а также внешние силы, воздействующие на сегмент со стороны приводов ( $F_{x,y,z}^G$ ).

Найти уравнения движения для координат центра тяжести  $G$  ( $x_G$ ,  $y_G$ ,  $z_G$ ) и углов поворота сегмента вокруг осей  $x$  и  $y$  ( $\theta_{x,y}^G$ ), а также силы воздействия приводов на зеркало ( $F_{x,y,z}^{A,B,C}$ ).

**Выполнение:**

Запишем уравнения движения для центра масс сегмента, обозначенного точкой  $G$  с координатами ( $x_G$ ,  $y_G$ ,  $z_G$ ). Перемещение центра масс в каждом из трёх направлений в

соответствии со вторым законом Ньютона описывается следующей системой уравнений:

$$m \frac{d\alpha_G}{dt} = F_\alpha^G, \quad (7.1)$$

где для краткости введено обозначение  $\alpha = x, y, z$ ;  $m$  – масса сегмента,  $F_\alpha^G$  – проекции результирующей внешних сил, действующих на сегмент, на соответствующие оси. Следующие уравнения описывают поворот сегмента вокруг соответствующих осей системы координат:

$$I_\beta \frac{d^2\theta_\beta^G}{dt^2} = T_\beta, \quad (7.2)$$

где  $\beta = x, y$ ;  $I_\beta$  – момент инерции,  $T_\beta$  – момент силы (крутящий момент),  $\theta_\beta^G$  – угол поворота вокруг соответствующих осей. Как было указано ранее, поворот сегмента вокруг оси  $z$ , перпендикулярной плоскости сегмента, может быть исключён из рассмотрения. Для моментов инерции шестиугольника справедливо соотношение  $I_{x,y} = l^4 \chi \frac{5\sqrt{3}}{16}$ , где  $l$  – длина стороны шестиугольника,  $\chi$  – поверхностная плотность, которая для шестиугольной конфигурации сегмента задаётся как  $\chi = \frac{2m}{3l^2\sqrt{3}}$ .

Силы воздействия приводов на сегмент определяются следующими выражениями:

$$F_\beta^G = k_\perp [\beta_{A'} + \beta_{B'} + \beta_{C'} - 3\beta_G] - 3c_\perp \frac{d\beta_G}{dt}. \quad (7.3)$$

Аналогично запишем выражения для внешних сил в направлении  $z$ :

$$F_z^A = k_{ax}(z_{A'} - z_A) - c_{ax} \frac{dz_A}{dt} + P_Z^A, \quad (7.4a)$$

$$F_z^B = k_{ax}(z_{B'} - z_B) - c_{ax} \frac{dz_B}{dt} + P_Z^B, \quad (7.4б)$$

$$F_z^C = k_{ax}(z_{C'} - z_C) - c_{ax} \frac{dz_C}{dt} + P_Z^C. \quad (7.4в)$$

В выражениях (7.4) переменные  $P_Z^{A,B,C}$  описывают не связанные с действием приводов внешние силы, например, силу ветра. В настоящем рассмотрении мы пренебрежём силами  $P_Z^{A,B,C}$ .

Перемещения сегмента вдоль оси  $z$  в точках  $A$ ,  $B$  и  $C$  могут быть получены из геометрических соображений с учётом данных о перемещении центра масс  $G$ :

$$z_A = z_G - a\theta_y^G, \quad (7.5a)$$

$$z_B = z_G - \frac{\sqrt{3}}{2}a\theta_x^G + \frac{1}{2}a\theta_y^G, \quad (7.5б)$$

$$z_C = z_G + \frac{\sqrt{3}}{2}a\theta_x^G + \frac{1}{2}a\theta_y^G. \quad (7.5в)$$

Параметр  $a$  в выражениях (7.5) определён на рис. 22. Скорости перемещения сегмента  $dz_{A,B,C}/dt$  находятся дифференцированием по времени правой и левой частей уравнений (7.5).

На основе приведённых уравнений (7.1)–(7.5) можем записать систему уравнений движения центра масс  $G$  сегмента зеркала с синтезированной апертурой:

$$\frac{d^2 x_G}{dt^2} = \frac{k_{\perp}}{m} [x_{A'} + x_{B'} + x_{C'} - 3x_G] - 3c_{\perp} \frac{dx_G}{dt}, \quad (7.6a)$$

$$\frac{d^2 y_G}{dt^2} = \frac{k_{\perp}}{m} [y_{A'} + y_{B'} + y_{C'} - 3y_G] - 3c_{\perp} \frac{dy_G}{dt}, \quad (7.6b)$$

$$\frac{d^2 z_G}{dt^2} = \frac{k_{ax}}{m} [z_{A'} + z_{B'} + z_{C'} - 3z_G] - \frac{3c_{ax}}{m} \frac{dz_G}{dt}, \quad (7.6b)$$

а также систему уравнений для углов поворота сегмента

$$\frac{d^2 \theta_x^G}{dt^2} = \frac{\sqrt{3}k_{ax}a}{2I_x} [z_{C'} - z_{B'} - \sqrt{3}a\theta_x^G], \quad (7.7a)$$

$$\frac{d^2 \theta_y^G}{dt^2} = \frac{k_{ax}a}{2I_x} [z_{B'} + z_{C'} - 2z_{A'} - 3a\theta_y^G]. \quad (7.7b)$$

Силы, с которыми приводы воздействуют на сегмент зеркала, задаются следующими выражениями:

$$F_x^{A',B',C'} = -\frac{F_x^G}{3},$$

$$F_y^{A',B',C'} = -\frac{F_y^G}{3},$$

$$F_z^{A'} = -k_{ax}(z_{A'} - z_A),$$

$$F_z^{B'} = -k_{ax}(z_{B'} - z_B),$$

$$F_z^{C'} = -k_{ax}(z_{C'} - z_C).$$

**Задание для самостоятельного выполнения:** записать систему уравнений (7.6) в матричной форме:

$$\frac{d}{dt} \mathbf{v}_{in} = \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_{in} + \mathbf{u}_2,$$

задав вектор входных данных  $\mathbf{v}_{in}$  в виде  $\mathbf{v}_{in} = \{x_G, y_G, z_G, \frac{dx_G}{dt}, \frac{dy_G}{dt}, \frac{dz_G}{dt}\}$ . Вид матриц  $\mathbf{u}_{1,2}$  определить из (7.6).

**Задание для самостоятельного выполнения:** записать в матричной форме систему уравнений (7.7).

**Задание для самостоятельного выполнения:** построить модель движения сегментов зеркала с учётом внешних сил  $P_Z^{A,B,C}$ .

---

---

## **ТЕМА 8. Способы оценки качества изображения, формируемого оптической системой**

**Основные вопросы темы:** разрешающая способность оптической системы и её оценка. Оценка вклада aberrаций оптической системы и шумовых эффектов в построение изображения источника излучения. Оценки потерь энергии излучения при прохождении через оптическую систему.

**Цель и задачи практического занятия** состоят в ознакомлении студента с причинами возникновения необходимости оценки качества изображений, формируемых оптической системой, с основными подходами к оценке, а также общепринятыми критериями оценки.

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** доля прошедшей энергии, критерий Маршала, критерий Рэлея, критерий Спэрроу, нормированная мощность в конусе, разрешающая способность, число Штреля.

**Требования к уровню подготовленности студента:** студент должен ориентироваться в основных вопросах/понятиях темы, понимать логические связи между ними, в частности, связь между критериями Штреля и Маршала, знать основные критерии оценки качества оптического изображения, условия их применимости/неприменимости, быть знакомым с их физическим обоснованием, уметь применять критерии для оценки требуемых характеристик изображения.

### **Теоретический материал и примеры заданий по теме 8**

Оценка качества изображений, формируемых оптической системой, осуществляется в соответствии с принятыми критериями. Используемые критерии: разрешающая способность, число Штреля, критерий Маршала, критерий Спэрроу, доля прошедшей энергии и другие. Следует отметить, что каждый критерий в отдельности не даёт полного представления о качестве изображения, поэтому одновременно используют несколько критериев.

#### **8.1. Разрешающая способность**

В общем случае разрешающая способность оптической системы описывает, насколько хорошо различаются изображения двух точечных источников. На качество

изображения влияет большое число факторов, например, таких, как особенности конструкции оптической системы, характеристики оптических компонентов, особенности освещения отображаемого предмета или особенности излучения самосветящегося источника. Подход, основанный на различении (разрешении) двух точек, позволяет оценить качество изображения независимо от указанных факторов.

### ***Критерий Рэлея***

Как было продемонстрировано в указаниях к предыдущим темам, изображением точечного источника, которое строит реальная оптическая система, является не точка, а некоторое распределение интенсивности излучения в плоскости изображения. Так в безабберационной системе с круглой диафрагмой изображение представляет собой картину Эйри — см. рис. 20а. На рис. 23 схематично представлено радиальное распределение в плоскости изображения оптической системы с круглой диафрагмой интенсивности излучения двух одинаковых точечных источников. В соответствии с *критерием Рэлея* два точечных источника могут быть разрешены оптической системой, если максимум освещённости изображения одного из них совпадает с первым минимумом другого. Как видно на рис. 23, на суммарном распределении интенсивности излучения двух источников в центре имеется минимум. Интенсивность в этом минимуме составляет примерно 73.5% от максимальной интенсивности. Соответственно величина провала интенсивности составляет примерно 26.5%. Для щелевой диафрагмы провал составляет около 18.9%. На основе приведённых оценок критерий Рэлея часто формулируют следующим образом: если провал в распределении интенсивности излучения в плоскости изображения двух близко расположенных точек не превышает 20% от максимального значения, такие точки разрешаются оптической системой.

При когерентном излучении источников критерий Рэлея для оптической системы с круглой диафрагмой можно задать выражением  $\frac{d}{L} = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ , где  $d$  – расстояние между источниками излучения,  $L$  – удаление источников от оптической системы,  $\lambda$  – длина волны света,  $D$  – диаметр диафрагмы.

### ***Модифицированный критерий Спэрроу***

Критерий Рэлея некорректно использовать, когда распределение интенсивности каждого отдельного источника имеет ненулевой минимум, а также если



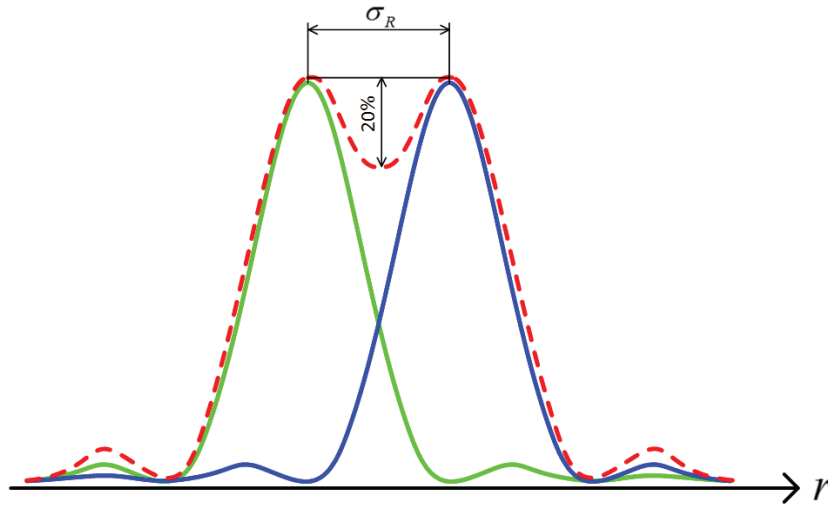


Рис. 23. К определению критерия Рэлея.

источники обладают разной яркостью. Указанные особенности излучения учитывает модифицированный критерий Спэрроу (англ.: Sparrow). Согласно ему два объекта разрешаются оптической системой, когда в некоторой точке  $z'_0$  на оси  $z'$ , проходящей через центры распределений интенсивностей обоих источников, и первая, и вторая производные суммарного распределения интенсивностей в плоскости изображения обращаются в ноль:  $\frac{\partial^2 I(z')}{\partial (z')^2} \Big|_{z'=z'_0} = 0$  и  $\frac{\partial I(z')}{\partial z'} \Big|_{z'=z'_0} = 0$ .

Когда оба источника обладают одинаковой яркостью и разрешены оптической системой, суммарное распределение интенсивностей в плоскости изображения имеет минимум посередине между центрами распределения интенсивностей изображений каждого из объектов. Если яркости источников неодинаковы, то минимум суммарной интенсивности изображения будет смещён в сторону изображения источника меньшей яркости.

## 8.2. Число Штреля и критерий Марешала

Аберрации существенно меняют изображения предметов, которые строят реальные оптические системы. Так в изображении точечного источника под влиянием аберраций часть энергии из центральной области (диска Эйри) может перекачиваться в кольца, что повышает интенсивность последних и уменьшает интенсивность центрального максимума. Кроме того, на изображении могут проявляться дополнительные локальные максимумы в виде ярких точек. Это шумовые эффекты, связанные, например, с присутствием в области предметов дополнительных источников излучения или вторичным отражением излучения

основного источника. Таким образом, оптические системы должны не только обладать высокой разрешающей способностью, но и позволять выделять изображение объектов на фоне дополнительных шумов. Для оценки качества изображения в присутствии указанных эффектов вводится число Штреля (англ.: Strehl ratio). Оно задаёт отношение пиковой интенсивности реального изображения точечного источника  $I_A(0,0)$  к пиковой интенсивности изображения в отсутствие aberrаций и шума  $I_{NA}(0,0)$ , т. е. изображения, полученного только с учётом дифракционных эффектов:

$$S_R = \frac{I_A(0,0)}{I_{NA}(0,0)}.$$

Поскольку интенсивность точечного источника описывается ФРТ, можем записать число Штреля как  $S_R = \frac{h_A(0,0)}{h_{NA}(0,0)}$ . В работах [34, 35] показано, что число Штреля может быть задано как

$$S_R = \frac{\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \gamma(r', \theta') e^{2\pi i W(r', \theta')} r' dr' d\theta' \right|^2}{\left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 \gamma(r', \theta') r' dr' d\theta' \right|^2}, \quad (8.1)$$

где подынтегральные выражения описывают функции круглого зрачка с единичным радиусом: выражение в числителе описывает оптическую систему с aberrациями, в знаменателе — без учёта aberrаций;  $\sqrt{\gamma(r', \theta')}$  — коэффициент пропускания оптической системы, который в общем случае зависит от  $(r', \theta')$ ,  $W(r', \theta')$  характеризует вклад aberrаций,  $r'$  и  $\theta'$  — радиальная и угловая координаты в полярной системе координат. Пренебрегая aberrациями выше второго порядка по  $W(r', \theta')$ , а также полагая  $\gamma = 1$ , перепишем выражение для числа Штреля в виде

$$S_R \approx 1 - (2\pi\sigma)^2, \quad (8.2)$$

где  $\sigma^2 = \langle W^2 \rangle - \langle W \rangle^2$ , угловые скобки  $\langle \dots \rangle$  обозначают усреднение по координатам;  $\sigma^2$  — дисперсия aberrаций по зрачку,  $\sigma$  — среднеквадратичное отклонение aberrаций. Последнее выражение называется равенством Марешаля (англ.: Maréchal). На величину  $\sigma$  вводится допуск, определяющий критерий Марешаля:  $\sigma \leq \frac{1}{14}$ .

**Задание:** Из (8.1) получить выражение (8.2) с учётом указанных приближений.

### **Выполнение:**

При  $\gamma = 1$  интеграл в знаменателе находится как

$$\int_0^{2\pi} \int_0^1 \gamma r' dr' d\theta' = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r' dr' d\theta' = \pi.$$

Таким образом, выражение (8.1) принимает вид

$$S_R = \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 e^{2\pi i W(r', \theta')} r' dr' d\theta' \right|^2. \quad (8.3)$$

Разложим экспоненту в ряд по  $W(r', \theta')$  и перепишем выражение (8.3) как

$$S_R \approx \frac{1}{\pi^2} \left| \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left( 1 + 2\pi i W(r', \theta') + \frac{1}{2} (2\pi i W(r', \theta'))^2 + \dots \right) r' dr' d\theta' \right|^2. \quad (8.4)$$

Пользуясь тем фактом, что вклад аберраций выше второго порядка  $W(r', \theta')$  мал, можем аппроксимировать (8.4) выражением

$$S_R \approx \left| 1 + 2\pi i \langle W \rangle - \frac{(2\pi)^2}{2} \langle W^2 \rangle \right|^2 \approx 1 - (2\pi)^2 (\langle W^2 \rangle - \langle W \rangle^2) = 1 - (2\pi\sigma)^2,$$

где  $\langle W \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 W(r', \theta') r' dr' d\theta'$ ,  $\langle W^2 \rangle = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^1 W^2(r', \theta') r' dr' d\theta'$ .

---

### **8.3. Нормированная мощность в конусе**

Данный параметр — нормированная мощность в конусе (англ.: normalized power in the bucket) — задаётся в дополнение к числу Штреля. Он определяет отношение мощности излучения, прошедшего через оптическую систему с аберрациями к теоретическому значению мощности в безаберрационной системе в плоскости изображения и задаётся выражением

$$P_B = \frac{\iint_{S_B} I_A(x', y') dx' dy'}{\iint_{S_B} I_{NA}(x', y') dx' dy'}, \quad (8.5)$$

где  $S_B$  — площадь светового пятна в плоскости изображения. В общем случае размер пучка меняется по мере распространения излучения. В оптической системе с круглым зрачком диаметр пучка определяется выражением  $D_B \simeq 2.44 \frac{\lambda Z'}{nD}$ , где  $\lambda$  — длина волны излучения,  $Z'$  — расстояние от выходного зрачка до плоскости изображения,  $n$  — показатель преломления среды, в которой распространяется излучение,  $D$  — диаметр зрачка.

## 8.4. Доля прошедшей энергии

Данный параметр (англ.: fractional encircled energy) показывает, какая часть энергии прошедшего через оптическую систему светового излучения содержится в световом пятне площадью  $S_B$ . Он определяется выражением

$$E_{\text{enc}} = \frac{\iint I_A(x', y') dx' dy'}{\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} I_A(x', y') dx' dy'}. \quad (8.6)$$

---

---

**Задание для самостоятельного выполнения:** На основе определений (8.5) и (8.6) записать выражения для  $P_B$  и  $E_{\text{enc}}$  в оптической системе с круглым зрачком в полярных координатах  $(r', \theta')$ ; для  $r'$  и  $\theta'$  указать пределы интегрирования.

---

---

## **ТЕМА 9. Технологии создания узлов адаптивных оптических систем**

**Основные вопросы темы:** типы, особенности конструкции и основные характеристики деформируемых зеркал. Методы изготовления биморфных и мембранных зеркал. Основные характеристики линзовых растров. Технология изготовления длиннофокусных полимерных линзовых растров для датчиков Шака-Гартмана

**Цель и задачи практического занятия** состоят в ознакомлении студента с технологиями создания деформируемых зеркал двух типов — мембранного и биморфного, принципами моделирования изменения формы мембранного зеркала, с особенностями конструкции, оптическими свойствами, а также технологией создания длиннофокусных линзовых растров.

**Основной понятийно-терминологический аппарат:** биморфное зеркало, коэффициент заполнения, мембранное зеркало, метод трафаретной печати, непрерывная фазовая пластина, сегментированное зеркало, функция воздействия.

**Требования к уровню подготовленности студента:** студент должен ориентироваться в основных вопросах/понятиях темы, понимать логические связи между ними, представлять конструктивные особенности деформируемых зеркал различных типов, основы технологии изготовления биморфных зеркал методом трафаретной печати, а также изготовления пластин мембранных зеркал методом вакуумного напыления, уметь рассчитывать прогиб мембранных зеркал в результате воздействия механического привода, быть готовым перечислить и раскрыть суть основных характеристик линзовых растров датчиков волнового фронта типа Шака-Гартмана, представлять основы технологии изготовления длиннофокусного линзового раstra из полимерного материала, быть готовым назвать его преимущества перед короткофокусными растрами, уметь рассчитывать фокусное расстояние микролинз длиннофокусного раstra.

### **Теоретический материал и примеры заданий по теме 9**

#### **9.1. Изготовление деформируемых зеркал**

Деформируемые зеркала — это сложные оптоэлектронно-механические устройства. При их изготовлении предъявляются высокие требования к качеству материалов,

а также к таким параметрам, как скорость отклика, линейность, температурная устойчивость и др. Разнообразие конструкций и принципов действия ДЗ предполагает большой набор технологий их создания. Наиболее широко применяемые в настоящее время конструкции ДЗ с их основными характеристиками приведены в таблице 3.

Таблица 3. Конструкции деформируемых зеркал

Тип зеркала	Конструкция и принцип изменения формы	Характеристики
Непрерывная фазовая пластина (рис. 24а)	Тонкая зеркальная пластина, к поверхности которой прикреплены пьезоэлектрические или электрострикционные приводы, обеспечивающие локальные смещения пластины. Форма пластины описывается выражением $r(x, y) = \sum_j V_j r_j(x, y)$ , где $V_j$ – напряжение, приложенное к $j$ -му приводу, $r_j(x, y)$ – функция отклика.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Число приводов — до <math>10^5</math>;</li> <li>• расстояние между приводами — 2–10 мм;</li> <li>• рабочее напряжение — сотни вольт;</li> <li>• смещение — до 10 мкм.</li> </ul>
Биморфное зеркало (рис. 24б)	Тонкая зеркальная пластина, к поверхности которой прикреплён двухслойный пьезоэлектрический материал. Поверхности пьезоэлектрических слоёв снабжены металлическими электродами. Прикладывание напряжения к электродам вызывает изгиб конструкции за счёт обратного пьезоэффекта. Форма пластины описывается уравнением $\nabla^4 r(x, y) = -A \nabla^2 V(x, y)$ , где $A$ – постоянный коэффициент, характеризующий пьезоэлектрические свойства материала, $V(x, y)$ – распределение напряжения в плоскости $(x, y)$ .	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Число приводов (электродов) — до 100;</li> <li>• размер зеркала — до 200 мм;</li> <li>• рабочее напряжение — сотни вольт;</li> <li>• смещение — единицы микрометров.</li> </ul>
Мембранное зеркало (рис. 24в)	Тонкая зеркальная пластина, управление формой которой осуществляется матрицей электростатических приводов. Форма пластины описывается уравнением $\nabla^2 r(x, y) = \frac{q(V_j)}{D}$ , где $q(V_j) \sim V_j^2$ характеризует механические напряжения, $D$ описывает изгибную жёсткость мембраны.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Число приводов (электродов) — до <math>10^3</math>;</li> <li>• рабочее напряжение — сотни вольт;</li> <li>• смещение — единицы микрометров.</li> </ul>
Сегментированное зеркало (рис. 24г)	Множество отдельных зеркальных элементов, снабжённых собственными независимыми приводами, формирует общую отражающую поверхность.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Число приводов на один элемент — от 1 до 3;</li> <li>• полный размер зеркала — до десятков метров;</li> <li>• смещение фрагментов зеркала — по требованию.</li> </ul>

Несмотря на большое разнообразие типов ДЗ, можно сформулировать к ним общие требования. Так корректоры волнового фронта должны обладать как можно большим числом степеней свободы; их скорость реакции на внешнее воздействие

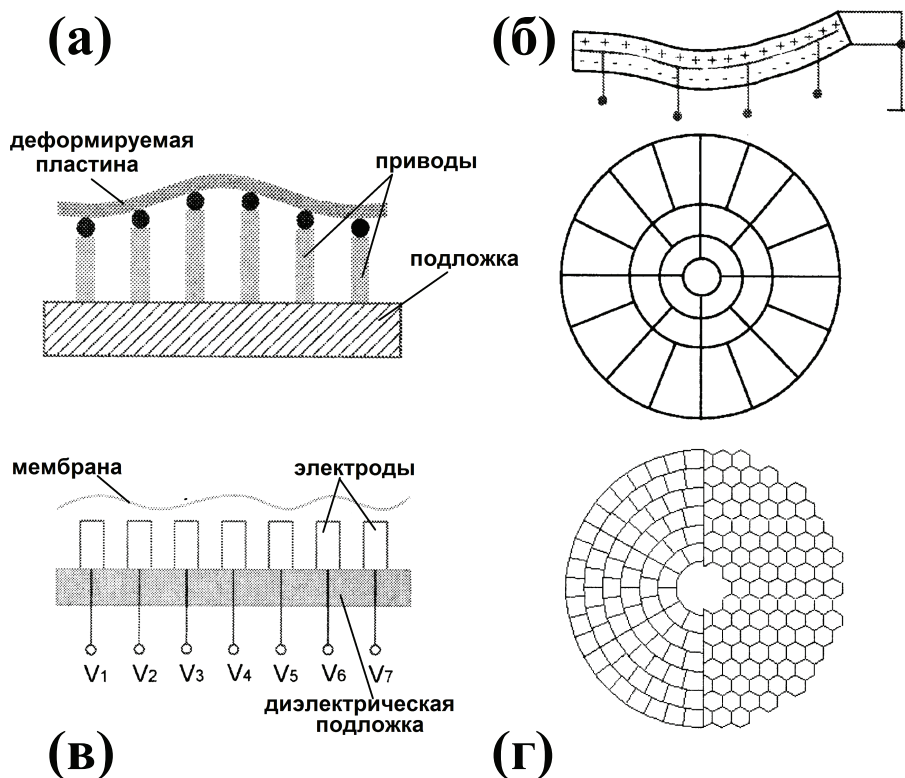


Рис. 24. Иллюстрация к таблице 3.

должна быть достаточной, для обеспечения возможности динамического исправления aberrаций. Выбор типа ДЗ производится в зависимости от того, какое требование является приоритетным.

Рассмотрим один из методов изготовления биморфного зеркала, разработанный в институте керамических технологий и систем имен Фраунгофера (англ.: The Fraunhofer Institute for Ceramic Technologies and Systems, IKTS) [36]. Это метод трафаретной печати.

Этапы нанесения слоёв представлены на рис. 25. На первом этапе золотая паста наносится на поверхность кремниевой подложки, под воздействием высоких температур осуществляется её спекание в монолитный слой. Образованная сплошная золотая плёнка выступает в роли электрода. Затем на поверхность электрода через маску (трафарет) наносится паста из пьезоэлектрического материала и также спекается в сплошной массив. Второй пьезоэлектрический слой формируется аналогичным образом. В результате образуется массив пластин заданной формы, обладающих пьезоэлектрическими свойствами. На следующем этапе на поверхность пластин в присутствии той же маски наносится золотая паста, которая после спекания образует отдельные для каждой пластины электроды. Результатом последовательного нанесения

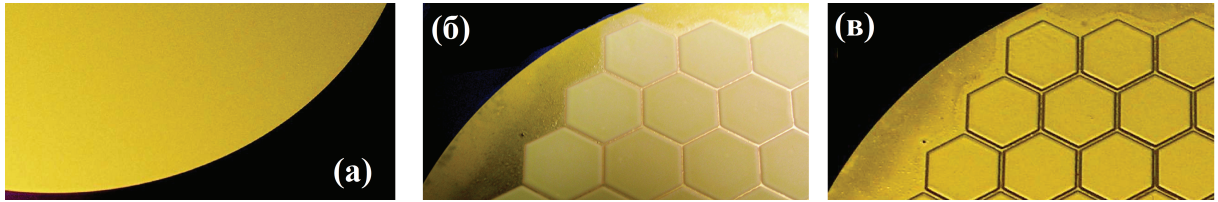


Рис. 25. Этапы изготовления биморфного зеркала: (а) — золотой электрод на подложке, (б) — пьезоэлектрический слой на золотом электроде, (в) — отдельные золотые электроды на пьезоэлектрическом слое.

слоёв является биморфное зеркало, расположение электродов на котором задано используемым трафаретом.

В работе [37] описана технология изготовления мембранного зеркала. Схематично мембранное зеркало изображено на рис. 26а. Мембрана выполняется из нитрида кремния, поскольку этот материал обладает хорошими механическими свойствами. Плёнка нитрида кремния толщиной 0.8–1 мкм наносится на полированную кремниевую пластину. На поверхность пластины методом вакуумного напыления наносится отражающее покрытие — слой алюминия толщиной 0.4 мкм. Пластина разрезается на фрагменты, каждый фрагмент представляет собой мембрану зеркала. Каждый фрагмент устанавливается на отдельной подложке, на которую предварительно методом фотолитографии наносятся металлические электроды. Фотография подложки с электродами представлена на рис. 26б. На рис. 26в приведена фотография смонтированного мембранного зеркала.

Основной характеристикой ДЗ, выполненных в виде тонких отражающих пластин, является функция воздействия приводов или прогиб зеркала. В книге [38] на основе теории отклонения пучка рассчитан прогиб зеркала в двух предельных случаях: для абсолютно жёсткой пластины зеркала и для абсолютно жёстких приводов. Схематично рассматриваемые модели изображены на рис. 27. Выражения для прогиба задаются следующими образом:

$$y_{\text{pl}} = \frac{a^3 F}{6EI} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{x}{a} \right)^3 - \frac{3}{2} \left( \frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right], \quad (9.1a)$$

$$y_{\text{act}} = \frac{a^3 F}{24EI} \left[ 2 \left( \frac{x}{a} \right)^3 - 3 \left( \frac{x}{a} \right)^2 + 1 \right], \quad (9.1b)$$

где  $x$  — расстояние от центра области соприкосновения привода и зеркала,  $F$  — сила, прикладываемая приводом к зеркалу,  $a$  — расстояние между приводами,  $I$  — момент инерции области зеркала,  $E$  — модуль упругости Юнга.



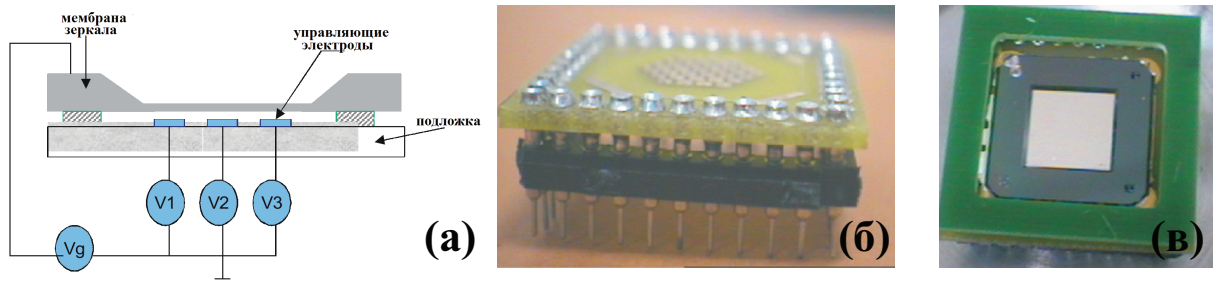


Рис. 26. (а) — Схематичное изображение мембранного зеркала, (б) — фотография подложки мембранного зеркала с электродами, (в) — фотография мембранного зеркала [37].

В книге [39] показано, что в тех же предельных случаях функции воздействия могут быть заданы в гауссовой форме:

$$y_{\text{пл}} = A \exp \left[ -B \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right], \quad (9.2a)$$

$$y_{\text{акт}} = C \operatorname{sinc} \left( \frac{x}{a} \right) \exp \left[ -D \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right], \quad (9.2б)$$

где константы  $A$ ,  $B$ ,  $C$ , и  $D$  зависят от механических свойств пластины зеркала и приводов.

В работе [40] показано, что функция воздействия приводов для реальных ДЗ может задаваться как линейная комбинация описываемых выражениями (9.1) и (9.2) предельных случаев:

$$y = \alpha y_{\text{пл}} + (1 - \alpha) y_{\text{акт}}. \quad (9.3)$$

С учётом (9.2) можем переписать выражение (9.3) в виде

$$y = C_1 \left[ 4\alpha + (1 - \alpha) \operatorname{sinc} \left( \frac{x}{a} \right) \right] \exp \left[ \ln \left( C_A \frac{1 + 3\alpha}{4\alpha} \right) \left( \frac{x}{a} \right)^2 \right], \quad (9.4)$$

где введены обозначения  $C_A = \frac{y(a)}{y(0)} = \frac{\alpha A \exp(-B)}{\alpha A + (1-\alpha)C}$ ,  $C_1 = \frac{a^3 F}{24EI}$ , а также использованы приближения  $A = 4C$  и  $B = D$  — см. [40].

**Задание для самостоятельного выполнения:** На основе выражения (9.4) построить зависимость  $y(x)$  при значениях параметров  $\alpha = 0; 0.2; 0.5; 0.8; 1$  и  $C_A = 0.1; 0.2$ . Значения  $x$  указывать в единицах  $a$ , значения  $y$  — в единицах  $C_1$ . Сделать вывод об отличиях формы функции  $y(x)$  для разных значений  $\alpha$  при  $|x|/a \leq 1$  и при  $|x|/a > 1$ .

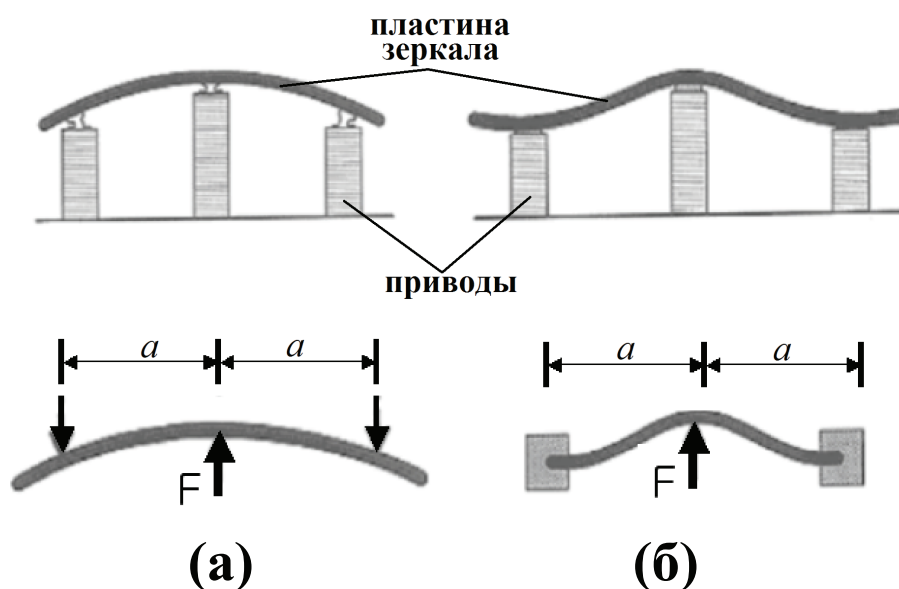


Рис. 27. Схематичное изображение и модель мембранного зеркала в пределе (а) — абсолютно жёсткой пластины и (б) — абсолютно жёстких приводов [38].

## 9.2. Изготовление линзовых растров датчиков волнового фронта Шака-Гартмана

Линзовый растр в датчике Шака-Гартмана используется для разделения входящего излучения на множество световых пучков и их фокусировки в плоскости изображения. При проектировании линзовых растров особое внимание должно уделяться следующим их характеристикам.

- Ориентация оптических осей микролинз. Необходимым условием корректной работы датчика Шака-Гартмана является параллельность оптических осей линз. Его выполнение гарантирует для излучения с плоским волновым фронтом строгую периодичность фокальных пятен в плоскости изображения.

- Положение микролинз. Точность, с которой задаётся положение линз массива существенным образом влияет на качество восстановления формы волнового фронта.

- Коэффициент заполнения. Когда микролинзы в растре плотно пригнанные друг к другу, датчиком улавливается бóльшая часть входящего излучения, чем в случае, когда между линзами имеется зазор. Наилучшее заполнение плоскости раstra обеспечивается линзами прямоугольной и гексагональной формы.

- Количество микролинз. Оптимальное число линз в растре определяется областью применения датчика. Оно зависит от размеров входного зрачка системы,

длины волны излучения и характера aberrаций. Обычно число линз лежит в пределах от 25 до 1000.

— Диаметр пятна излучения на приёмнике. Излучение при прохождении через микролинзу растра фокусируется в пятно конечного размера. Чем бóльшую область в плоскости приёмника покрывает пятно, тем с бóльшей точностью удаётся найти положение его центра, и, как следствие, с бóльшей точностью вычислить наклон волнового фронта. Если в роли приёмника выступает CCD-камера (от англ. “charge-coupled device”; прибор с зарядовой связью), требуется, чтобы пятно попадало на заданное число пикселей камеры. Так при линейных размерах пикселей 10 мкм диаметр пятна должен быть порядка 50 мкм.

— Фокусное расстояние. Оптимальное фокусное расстояние микролинз растра для заданной АОС определяется областью её применения и характером aberrаций в системе. Для сильных искажений предпочтительны короткофокусные линзы. Линзы с большим фокусным расстоянием обеспечивают хорошую чувствительность к слабым искажениям. Как правило, фокусное расстояние лежит в диапазоне от 10 до 50 мм.

— Шаг сетки. При проектировании линзового растра требуется найти компромисс между количеством линз, размерами растра и допустимым расстоянием между пятнами изображений на приёмнике (чтобы предотвратить их перекрывание). Шаг сетки задаёт период решётки микролинз в растре.

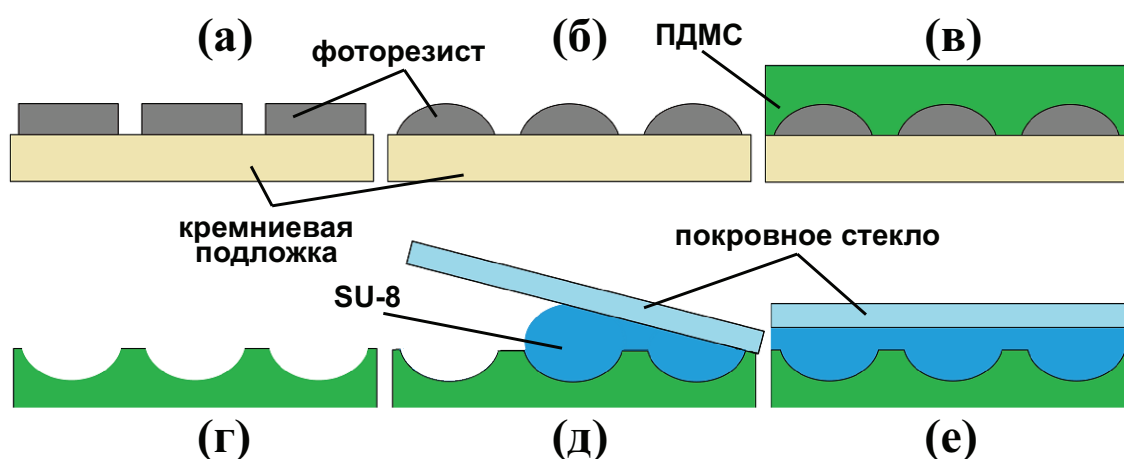


Рис. 28. Этапы изготовления длиннофокусного линзового растра из полимерного материала [41, 42].

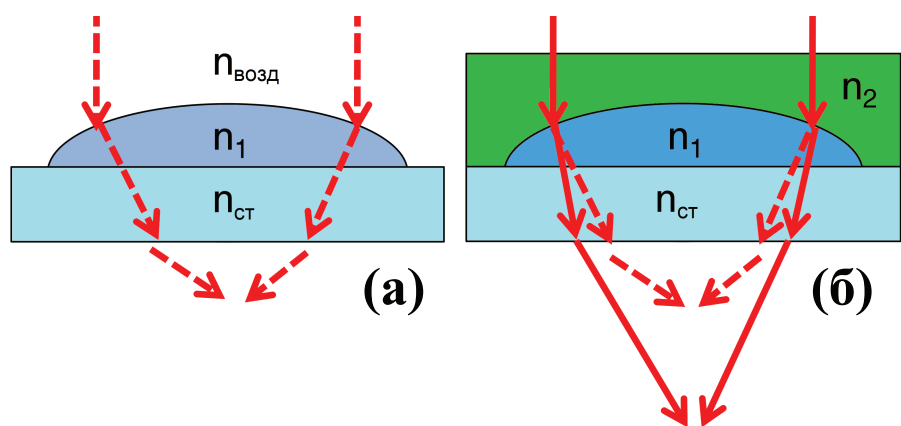


Рис. 29. Распространение света через микролинзу (а) — без дополнительного слоя и (б) — с дополнительным преломляющим слоем [41, 42].

В работах [41, 42] описан метод изготовления длиннофокусного линзового растра из полимерного материала. Схематичные иллюстрации этапов процесса приведены на рис. 28.

Перед началом процесса изготовления кремниевая подложка особым образом подготавливается: её поверхность очищается при помощи смеси  $\text{H}_2\text{O}_2 + \text{H}_2\text{SO}_4$  и обезвоживается в печи при температуре  $100^\circ\text{C}$  в течение 10 минут. Затем на подложку наносится слой непрозрачного фоторезист (AZ-P4620) толщиной 13 мкм. Методом фотолитографии формируется решётка цилиндров из фоторезиста — см. рис. 28а. После нагревания заготовки до температуры  $150^\circ\text{C}$  в течение 40 секунд цилиндры оплавляются, приобретая сферический профиль — см. рис. 28б. На следующем этапе на поверхность заготовки наносится жидкий полимер полидиметилсилоксан (ПДМС); толщина слоя такова, что ПДМС полностью покрывает полусферы из фоторезиста — см. рис. 28в. Заготовка оставляется примерно на 10 минут; когда поверхность ПДМС становится плоской, заготовка нагревается до  $80^\circ\text{C}$  и выдерживается при такой температуре 90 минут. Затем заготовка охлаждается до комнатной температуры, кремниевая подложка вместе с фоторезистом удаляется — см. рис. 28г. Выемки на поверхности полимерной заготовки заполняются фоторезистом SU-8; заполненная заготовка покрывается стеклом — см. рис. 28д. После застывания фоторезиста SU-8 заготовка становится длиннофокусным линзовым растром для ДВФ Шака-Гартмана — см. рис. 28е.

На рис. 29 схематично изображено распространение света через микролинзу без дополнительного слоя (а) и с дополнительным преломляющим слоем (б). В первом случае фокусное расстояние линзы задаётся выражением

$$f_a = \frac{R_c}{n_1 - 1} \quad (9.5)$$

где  $R_c$  – радиус кривизны линзы.

Во втором случае мы, по сути, имеем дело с линзовым дуплетом: одна линза — отрицательная из ПДМС с показателем преломления  $n_2$ , вторая — положительная из SU-8 с показателем преломления  $n_1$ . Фокусное расстояние системы двух линз находится в соответствии с выражением  $f^{-1} = f_1^{-1} + f_2^{-1} - f_1^{-1}f_2^{-1}d$ , где  $f_{1,2}$  – фокусные расстояния соответствующих линз,  $d$  – расстояние между линзами. В результате фокусное расстояние линзы, представленной на рис. 29б, задаётся выражением

$$f_b = \frac{R_c}{n_1 - n_2}. \quad (9.6)$$

Фокусные расстояния (9.5) и (9.6) отличаются друг от друга знаменателем, причём очевидно, что, поскольку  $n_2 > 1$ , фокусное расстояние  $f_b$  всегда превышает  $f_a$ .

**Задание для самостоятельного выполнения:** На основе выражения для фокусного расстояния двухкомпонентной оптической системы получить выражение (9.6) для линзы с дополнительным преломляющим слоем.

## Список литературы

1. Ермолаева, Е. В. Адаптивная оптика / Е. В. Ермолаева, В. А. Зверев, А. А. Филатов. – СПб: НИУ ИТМО, 2012. – 297 с.
2. Paterson, C. Constraints of ground-based observations: The atmosphere [Text] / C. Paterson // Optics in Astrophysics, NATO Science Series, R. Foy (ed.), F. Foy (ed.) / New York, Dordrecht, Heidelberg, London: Springer, 2005. – P. 1–10.
3. Гудмен, Дж. Статистическая оптика: Пер. с англ. / Дж. Гудмен. – М.: Мир, 1988. – 528 с.
4. Kolmogorov, A. N. The local structure of turbulence in incompressible viscous fluid for very large Reynolds numbers / A. N. Kolmogorov // Proceedings of the Royal Society of London. Series A. – 1991. – Vol. 434. – P. 9–13.
5. Consortini, A. A mixed method for measuring the inner scale of atmospheric turbulence / A. Consortini, Y. Y. Sun, Z. P. Li, G. Conforti // Journal of Modern Optics. – 1990. – Vol. 37. – P. 1555–1560.
6. Conan, R. Wavefront outer scale and seeing measurements at San Pedro Mártir Observatory / R. Conan [et al.] // Astronomy and Astrophysics. – 2002. – Vol. 396. – P. 723–730.
7. Tatarski, V. I. Wave propagation in a turbulent medium / V. I. Tatarski. – NY, USA: Dover Publications, 1961. – 285 pp.
8. Azouit, M. Optical turbulence profiling with balloons relevant to astronomy and atmospheric physics / M. Azouit, J. Vernin. // Publications of the Astronomical Society of the Pacific. – 2005. – Vol. 117. – P. 536–543.
9. Гуревич, А. С. Лазерное излучение в турбулентной атмосфере / А. С. Гуревич, И. А. Кон, В. Л. Миронов, С. С. Хмелевцев. – М.: Наука, 1976. – 277 с.
10. Андрианов, В. А. Восстановление высотных профилей показателя преломления пограничного слоя атмосферы по акустическим и радиоакустическим дистанционным измерениям / В. А. Андрианов, А. Ю. Панченко // Радиотехника и электроника. – 1990. – Т. 35. – С. 2518–2526.
11. Vernin, J. Optical remote sensing of atmospheric turbulence: a comparison with simultaneous thermal measurements / J. Vernin, R. Barletti, G. Ceppatelli, L. Paterno, A. Righini, N. Speroni // Applied Optics. – 1979. – Vol. 18. – P. 243–247.

12. Hufnagel, R. Variations of atmospheric turbulence / R. Hufnagel // Proceedings of topical meeting on optical propagation through turbulence, University of Colorado, Boulder, July 1974.
13. Andrews, L. C. Laser beam propagation through random media / L. C. Andrews, R. L. Phillips. – 2nd edition. – Bellingham, WA: SPIE Optical Engineering Press, 2005. – 808 pp.
14. Greenwood, D. P. A proposed form for the atmospheric microtemperature spatial spectrum in the input range / D. P. Greenwood, D. O. Tarazano; Rome Air Development Center, Hanscom Air Force Base, Mass., 1974. – Rep. RADDC-TR-74-19 (ADA 776294/1GI).
15. Roggemann, M. C. Imaging through turbulence / M. C. Roggemann, B. Welsh. – Boca Raton, USA: CRC Press, 1996. – 320 pp.
16. Ogrodnik, R. F. An analysis of optical effects caused by thermally induced mirror deformations / R. F. Ogrodnik // Applied Optics. – 1970. – Vol. 9. – P. 2028–2034.
17. Klein, C. Stress-induced birefringence, critical window orientation and thermal lensing experiments / C. Klein // Laser Induced Damage of Optical Materials: 1980. – Natl. Bur. Stand. (U.S.) Spec. Publ., 1981. – 620 pp.
18. Greninger, C. E. Thermally induced wave-front distortions in laser windows / C. E. Greninger // Applied Optics. – 1986. – Vol. 25. – P. 2474–2475.
19. Smith, D. C. Thermal blooming critical power and adaptive optics correction for the ground based laser / D. C. Smith, S. S. Townsend // Proceedings of SPIE. – 1991. – Vol. 1408. – P. 112–118.
20. Smith, D. C. High power laser propagation: thermal blooming / D. C. Smith // Proceeding of the IEEE. – 1977. – Vol. 65. – P. 1679–1714.
21. Born, M. Principles of optics / M. Born, E. Wolf. – 7th (expanded) edition. – Cambridge, UK: Cambridge University Press, 1999. – 987 pp.
22. Hecht, E. Optics / E. Hecht. – 4th edition. – NY, USA: Addison Wesley, 2002. – 680 pp.
23. Southwell, W. H. Wave-front estimation from wave-front slope measurements / W. H. Southwell // Journal of the Optical Society of America. – 1980. – Vol. 70. – P. 998–1006.

24. Hudgin, R. H. Wave-front reconstruction for compensated imaging / R. H. Hudgin // Journal of the Optical Society of America. – 1977. – Vol. 67. – P. 375–378.
25. Fried, D. L. Least-square fitting a wave-front distortion estimate to an array of phase-difference measurements / D. L. Fried // Journal of the Optical Society of America. – 1977. – Vol. 67. – P. 370–375.
26. Бегунов, Б. Н. – Теория оптических систем / Б. Н. Бегунов, Н. П. Заказнов. – М: Машиностроение, 1973. – 488 с.
27. Домненко, В. М. Моделирование формирования оптического изображения. Учебное пособие / В. М. Домненко, М. В. Бурсов, Т. В. Иванова. – СПб: НИУ ИТМО, 2011 – 141 с.
28. Родионов, С. А. Основы оптики. Конспект лекций / С. А. Родионов – СПб: СПб ГИТМО (ТУ), 2000. – 167 с.
29. Guenther, R. D. Modern optics / R. D. Guenther. – NY, USA: Wiley, 1990. – 720 p.
30. Prieto, P. M. Adaptive optics with a programmable phase modulator: applications in the human eye / P. M. Prieto, E. J. Fernandez, S. Manzanera, P. Artal // Optics Express. – 2004. – Vol. 12. – P. 4059–4071.
31. Tuantranont, A. Segmented silicon-micromachined microelectromechanical deformable mirrors for adaptive optics / A. Tuantranont, V. M. Bright // IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics. – 2002. – Vol. 8. – P. 33–45.
32. Kurczynski, P. Electro statically actuated membrane mirrors for adaptive optics / P. Kurczynski [et al.] // Proceedings of SPIE. – 2003. – Vol. 4983. – P. 250–258.
33. Andersen, T. Integrated modeling of telescopes / T. Andersen, A. Enmark. – NY, USA: Springer Science+Business Media, 2011. – 545+XV pp.
34. Wyant, J. C. Basic wave front aberration theory for Optical Metrology / J. C. Wyant, K. Creath // Applied Optics and Optical Engineering Vol. XI, R. R. Shannon (ed.), J. C. Wyant (ed.). – USA: Academic Press, Inc, 1992. – 376 pp.
35. Janssen, A.J.E.M. Strehl ratio and optimum focus of high-numerical-aperture beams / A. J. E. M. Janssen, S. van Haver, J. J. M. Braat, P. Dirksen // Journal of the European Mathematical Society. – 2007. – Vol. 2. – P. 07008.
36. Gebhardt, S. Pzt thick films for sensor and actuator applications / S. Gebhardt, L. Seffner, F. Schlenkrich, A. Schönecker // Journal of the European Ceramic Society. – 2007. – Vol. 27. – P. 4177–4180.



37. Gupta, A. Deformable Membrane Mirror for Wavefront Correction / A. Gupta, S. Kumar, R. Singh, M. Chaudhary, A. K. Meena, V. K. Sarvanan // Defence Science Journal. – 2009. – Vol. 59. – P. 590–594.
38. Hardy, J. W. Adaptive Optics for Astronomical Telescopes / J. W. Hardy. –NY, USA: Oxford University Press, 1998. – 438 pp.
39. Tyson, R. Principles of Adaptive Optics / R. Tyson. – 3rd edition. – NY, USA: CRC Press Taylor & Francis Group, 2011. – 315 pp.
40. Jun Ho Lee. First-Order Analysis of Thin-Plate Deformable Mirrors / Jun Ho Lee, Tae-Kyoung Uhm, Sung-Kie Youn // Journal of the Korean Physical Society. – 2004. – Vol. 44. – P. 1412–1416.
41. Vinna Lin. An Optical Wavefront Sensor Based on a Double Layer Microlens Array / Vinna Lin, Hsiang-Chun Wei, Hsin-Ta Hsieh, Guo-Dung John Su // Sensors. – 2011. – Vol. 11. – P. 10293–10307.
42. Hsin-Ta Hsieh. Design and fabrication of long focal length microlens arrays / Hsin-Ta Hsieh, Vinna Lin, Jo-Lan Hsieh, Guo-Dung John Su // Optics Communications. – 2011. – Vol. 284. – P. 5225–5230.