Министерство образования РФ

ФГБОУ ВПО Владимирский государственный университет

имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича

Столетовых

Кафедра РТиРС

О.Р.Никитин

Специализация по теме диссертации

Методические указания к курсовому проектированию

ВЛАДИМИР 2012

СОДЕРЖАНИЕ

Аннотация

Методические указания к курсовому проектированию по дисциплине «Специализация по теме диссертации» предназначены для бакалавров направления 210400 «Радиотехника» и студентов специальности 210601 «Радиотехнические системы и комплексы».

Курсовое проектирование по дисциплине «Специальность по теме диссертации» предусматривает подробную всестороннюю оценку статистических параметров имеющихся параметров измерений. В т.ч. сюда входят формирование статистического распределения, расчет стандартных отклонений, устранение грубых ошибок измерений, определения принадлежности законам распределения к нормальным, проверка однородности дисперсии различных измерений, нахождение корреляционных связей между процессами и построение регрессионной зависимости.

В заключении проводятся проверки адекватности модели и прогнозирования по данной модели параметров измеряемого процесса.

Методические указания снабжены таблицами наиболее распространенных законов распределения: Гаусса, Пирсона, Стъюдента, Фишера, необходимыми аналитическими выражениями, справочными сведениями по языку MatLab и таблицами экспериментальных данных.

Пособие может быть использовано также для других специальностей и направлений, при подготовке магистерских и кандидатских диссертаций

ВВЕДЕНИЕ

Эксперимент – это метод познания, при помощи которого исследуются природные явления или реальные функциональные связи между параметрами, характеризующими состояние изучаемого объекта.

На практике чаще всего мы имеем дело с *физическими величинами,* то есть такими характеристиками (параметрами) объекта, которым присуща количественная индивидуальность (размер). Поэтому, составной частью эксперимента является *измерение* – нахождение количественного значения физической величины опытным путем с помощью специальных технических средств. Полученные в результате измерений значения и называются *экспериментальными данными.*

Погрешность результата измерения – это отклонение результата измерения от истинного значения измеряемой величины.

Истинное значение измеряемой величины $X_{\grave{E}\tilde{N}\grave{O}}$ – это модельное значение, которое характеризует идеальным образом в количественном и качественном отношении свойство объекта.

Измеряемая физическая величина – физическая величина, подлежащая измерению, измеряемая или измеренная в соответствии с основной целью измерительной задачи.

Цель измерений – определение истинных значений постоянной или изменяющейся измеряемой величины. Результатом измерений является реализация случайной величины, равной сумме истинного значения измеряемой величины и погрешности измерений.

$$X^* = X_{\grave{E}\tilde{N}\grave{O}} \pm \Delta .$$

Измерение можно считать законченным, если полностью определено не только значение измеряемой величины X^*, но и возможная степень его отклонения от истинного значения (погрешность) Δ.

Чаще всего эксперименты проводятся для установления взаимосвязи между параметрами исследуемого объекта. Частным случаем подобных исследований является определение функциональной зависимости некоторого параметра, называемого *откликом*, от значений другого параметра (или внешнего условия), называемого *воздействием* (или *фактором*). Этот случай и будем рассматривать в рамках курсового проекта.

Процесс исследования выглядит следующим образом. Выбираются n значений (уровней) воздействия $X = \{x_1, \dots, x_i, \dots, x_n\}$. На каждом его уровне проводится m наблюдений отклика $Y_i = \{y_{i1}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{im}\}$. Экспериментальные данные записываются в таблицу вида

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_{ij}	$y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1m}$	$y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2m}$	$\cdots$	$y_{n1}, y_{n2}, \cdots, y_{nm}$

Многократные измерения отклика на каждом уровне воздействия (т.е. такие измерения, которые проводятся более одного раза одним и тем же оператором, при одних и тех же условиях, одним и тем же методом, одним и тем же средством измерения, с одинаковой тщательностью) позволяют повысить точность получаемых результатов и решать задачу оценки адекватности построенной модели.

Обработка результатов наблюдений включает в себя следующие этапы:

1. На каждом уровне воздействия x_i обрабатываются результаты прямых многократных наблюдений отклика $Y_i = \{y_{i1}, \dots, y_{ij}, \dots, y_{im}\}$. На этом этапе проводится устранение возможных грубых погрешностей измерения и переменной составляющей систематической (дрейфовой) погрешности, проверяются гипотезы принадлежности опытных распределений к нормальному закону, рассчитываются результаты измерений Y_i^* и случайные погрешности Δ_i, с которыми они были получены. Таблица экспериментальных данных преобразуется к виду

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_i	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

где $y_i = Y_i^*$ – результат измерения отклика на i-ом уровне воздействия.

2. Проверяется однородность дисперсий результатов наблюдения отклика на всех уровнях воздействия. Значимое отличие дисперсии на каком-либо уровне от остальных значений может быть следствием использования средства измерения с другими свойствами (например, проводилась калибровка и, соответственно, изменились составляющие систематических погрешностей прибора). В этом случае использование результатов наблюдений на данном уровне вместе с остальными неправомерно.
3. Проверяется наличие (значимость) корреляционной связи между уровнями воздействия $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ и результатами измерений отклика $Y = \{y_1, \dots, y_n\}$ (где $y_i = Y_i^*$). В случае, если корреляционная связь отсутствует, то следующие этапы обработки не имеют смысла.

4. Определяется аналитическое выражение, описывающее функциональную зависимость $Y^* = f(X)$ (*уравнение регрессии*). На этом этапе выбирается вид аппроксимирующей функции, рассчитываются её коэффициенты.
5. Устраняются возможные грубые погрешности совместного измерения воздействия и отклика.
6. Проводится анализ коэффициентов уравнения регрессии. На этом этапе проверяется значимость (существенное отличие от нуля) коэффициентов уравнения регрессии и рассчитываются их доверительные интервалы.
7. Проверяется адекватность полученной модели (соответствие уравнения регрессии экспериментальным данным).
8. В случае, если модель соответствует результатам эксперимента, может решаться задача прогнозирования величины отклика при значениях воздействия, отличных от условий проведения эксперимента. Это важно, когда нужно узнать о поведении исследуемого объекта в условиях, воспроизведение которых невозможно или экономически нецелесообразно. Прогнозирование включает в себя расчет оценки отклика подстановкой требуемого значения воздействия в уравнение регрессии и определение доверительных границ полученного значения отклика.

В основе обработки экспериментальных данных лежат методы теории вероятности и математической статистики. Для большинства классических методов статистики в настоящее время существуют точные аппроксимации критериев, параметров и свойств, что позволяет автоматизировать процесс обработки с помощью любого языка программирования высокого уровня и эффективно применять аппарат математической статистики в любых математических приложениях (MATLAB, MathCAD, Scilab и др.)

ТЕХНИЧЕСКОЕ ЗАДАНИЕ

Для исследования зависимости $Y = f(X)$ двух параметров X и Y некоторого объекта были проведены 10 опытов. На каждом уровне воздействия сделаны по 40 наблюдений соответствующих им значений отклика.

Таблицы экспериментальных данных вида

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_{10}
y_{ij}	$y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1\,40}$	$y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2\,40}$	$\cdots$	$y_{n1}, y_{n2}, \cdots, y_{10\,40}$

даны в Приложении 7. Номер таблицы *T* экспериментальных данных выбирается по номеру варианта *N*:

N	**1,7,13,19,25**	**2,8,14,20,26**	**3,9,15,21,27**	**4,10,16,22,28**	**5,11,17,23,29**	**6,12,18,24,30**
T	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**

Необходимо:

1. По каждому из 10 опытов провести статистическую обработку прямых многократных наблюдений параметра *Y*.
2. Проверить однородность дисперсий результатов наблюдения отклика.
3. Оценить значимость корреляционной связи параметров *X* и *Y*.
4. Найти аналитический вид уравнения регрессии $Y = f(X)$ (в случае наличия корреляционной связи) и построить график зависимости.
5. Провести статистический анализ полученного уравнения регрессии.
6. Сделать прогноз о значении параметра *Y* при *X=X0*. Значение *X0* определяется по номеру варианта *N*:

N	***X0***	***N***	***X0***	***N***	***X0***	***N***	***X0***	***N***	***X0***	***N***	***X0***

1	111.5	**6**	3.25	**11**	270	**16**	37	**21**	99.5	**26**	20.75
2	37	**7**	94	**12**	4.45	**17**	360	**22**	31	**27**	122
3	58.25	**8**	29.5	**13**	76.5	**18**	5.95	**23**	410	**28**	23.5
4	49	**9**	95.75	**14**	30.75	**19**	83.5	**24**	4.15	**29**	230
5	170	**10**	44.5	**15**	84.5	**20**	38.25	**25**	108	**30**	2.65

Требования к пояснительной записке

Пояснительная записка к курсовому проекту выполняется на листах формата А4 (с одной стороны листа). На листах должны присутствовать рамки и штампы согласно ЕСКД. Тексты программ печатаются шрифтом Courier New (12-й кегль, единичный интервал), остальная текстовая информация – шрифтом Times New Roman (14-й кегль, полуторный интервал).

Пояснительная записка должна состоять из следующих частей:

1. Техническое задание: таблица экспериментальных данных, соответствующая номеру варианта, и описание задач обработки.
2. Анализ технического задания: выбор и обоснование методов и алгоритмов решения поставленных задач, математическое описание выбранных алгоритмов и блок-схемы их реализации.
3. Проектирование программы обработки экспериментальных данных: реализация выбранных методов и алгоритмов в виде m-функций MATLAB и составление на их основе общей программы обработки экспериментальных данных. Тексты программ должны содержать комментарии, поясняющие ход решения.
4. Результаты обработки экспериментальных данных: решение поставленных задач с помощью написанной программы. Результаты должны быть представлены в виде соответствующих числовых

данных, таблиц и графиков с необходимыми выводами и заключениями.

ОСНОВНАЯ ЧАСТЬ

1. Формирование статистического распределения

Набор всех видов значений наблюдений, которые могли бы быть при данном комплексе условий проведения эксперимента, называются *генеральной совокупностью*. На практике при проведении экспериментов из генеральной совокупности (бесконечного множества возможных значений измеряемого параметра) извлекается ограниченное число объектов. Совокупность случайно отобранных объектов из генеральной совокупности (результаты наблюдения, экспериментальные данные) называется *выборочной совокупностью (выборкой).* Количество результатов наблюдений называется *объемом выборки*. Объем выборки обозначается n.

Результаты наблюдений, записанные в порядке их получения, называются *статистическим рядом* и записываются в виде $x_1, x_2, \dots, x_n$. Если значения результатов наблюдений записать в порядке возрастания $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_n$, то такой ряд называется *ранжированным*, а номер элемента такого ряда называется *рангом*. В ранжированном ряду может быть несколько одинаковых значений x_i. В этом случае значение x_i называется *вариантой.* Последовательность вариант, расположенных в порядке возрастания их значений $x_1 \le x_2 \le \dots \le x_k$, называется *вариационным рядом.*

Если количество вариант k невелико, то экспериментальные данные представляются статистическим распределением, которое имеет вид таблицы с перечнем значений вариант $\{x_i\}$ и соответствующих им *частот* $\{m_i\}$ (количество значений данной варианты в выборке)

x_i	x_1	x_2	…	x_k
m_i	m_1	m_2	…	m_k

Если же количество вариант велико, то экспериментальные данные представляются в виде *интервального распределения*. В этом случае весь диапазон значений $[x_{\min}, x_{\max}]$ разбивается на равные интервалы, оптимальное количество которых можно вычислить по формуле Старджесса

$$k = 1 + 3.31 \cdot \lg n, \tag{1.1}$$

где n - объем выборки. Полученное значение округляется до ближайшего нечетного числа.

Далее по известному количеству интервалов вычисляется ширина интервалов

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{k} \tag{1.2}$$

и границы интервалов

$$\begin{aligned} x_i^{\text{ëåâ}} &= x_{\min} + (i-1) \cdot h, \\ x_i^{\text{ïðàâ}} &= x_{\min} + i \cdot h, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $x_i^{\text{ëåâ}}$ - левая, $x_i^{\text{ïðàâ}}$ - правая граница i-ого интервала.

Для расчета границ интервалов можно использовать итерационные формулы

$$\begin{aligned} x_1^{\text{ëåâ}} &= x_{\min}, \quad x_i^{\text{ëåâ}} = x_{i-1}^{\text{ëåâ}} + h, \\ x_1^{\text{ïðàâ}} &= x_{\min} + h, \quad x_i^{\text{ïðàâ}} = x_{i-1}^{\text{ïðàâ}} + h. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Частоту попадания экспериментальных значений в i-й интервал рассчитывают из следующих соображений:

1. Для всех интервалов, кроме последнего, значение результата наблюдения x_j принадлежит i-ому интервалу, если $x_i^{\text{ëåâ}} \le x_j < x_i^{\text{ïðàâ}}$.

2. Значение результата наблюдения x_j принадлежит последнему (k-ому) интервалу, если $x_k^{\text{ëåâ}} \le x_j \le x_k^{\text{ïðàâ}}$.

Далее вычисляют координаты центров интервалов по формуле

$$x_i = x_{\min} + i \cdot h - \frac{h}{2} \tag{1.5}$$

или с помощью итерационной формулы

$$x_1 = x_{\min} + \frac{h}{2}, \quad x_i = x_{i-1} + h. \tag{1.6}$$

В итоге экспериментальные данные представляются интервальным распределением, которое имеет вид таблицы

Границы интервалов $x_i^{ëàâ} \ldots x_i^{ï\,ðàâ}$	**Центры интервалов** x_i	**Частота попадания в интервал** m_i

2. Расчет координаты центра опытного распределения

При многократных измерениях координата центра опытного распределения принимается за оценку результата измерения. Известны несколько оценок координаты центра распределения: среднее арифметическое, медиана, среднее арифметическое 90%-ной выборки, центр срединного размаха, центр размаха.

Среднее арифметическое (выборочное среднее арифметическое) вычисляется по формуле

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i \, , \tag{2.1}$$

где x_i – результаты наблюдений

n – общее количество результатов (объем выборки).

В случае представления экспериментальных данных статистическим распределением формула (2.1) будет иметь вид

$$\overline{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} x_i m_i \,, \qquad (2.2)$$

где x_i – варианты (или центры интервалов),

m_i – частота наблюдения *i*-ой варианты (или частота попадания результатов наблюдений в *i*-й интервал),

k – количество вариант (или интервалов) статистического распределения.

Среднее арифметическое 90%-ной выборки $\overline{X}_{0.9}$ представляет собой среднее арифметическое вариационного ряда, из которого исключили по $r = 0.05 \cdot n$ элементов с каждой стороны. Значение $\overline{X}_{0.9}$ вычисляется по формуле

$$\overline{X}_{0.9} = \frac{1}{n-2r} \cdot \sum_{i=r+1}^{n-r} x_i \qquad (2.3)$$

или в случае статистического распределения

$$\overline{X}_{0.9} = \frac{1}{n-2r} \cdot \sum_{i=r+1}^{n-r} x_i m_i \qquad (2.4)$$

Медианой $\overline{X}_M$ называют значение x_i, которое делит ранжированный ряд на две части, равные по числу элементов

$$\overline{X}_M = \begin{cases} \frac{1}{2} \cdot \left(x_{\frac{n}{2}} + x_{\frac{n}{2}+1} \right), & \text{åñëè } n \text{ – ÷åò í î å,} \\ x_{\frac{n+1}{2}}, & \text{åñëè } n \text{ – í å÷åò í î å.} \end{cases} \qquad (2.5)$$

Центр размаха $\overline{X}_R$ вычисляется по формуле

$$\overline{X}_R = \frac{x_{\max} + x_{\min}}{2}, \qquad (2.6)$$

где $x_{\min}, x_{\max}$ – наименьшее и наибольшее значение элементов выборки.

Центр срединного размаха $\overline{X}_C$ определяется по формуле

$$\overline{X}_C = \frac{x_{0.25} + x_{0.75}}{2} \tag{2.7}$$

где $x_{0.25}, x_{0.75}$ – 25%-ный и 75%-ный квантили (такие элементы ранжированного ряда, составленного по экспериментальным данным, левее которых лежат соответственно 25% и 75% остальных элементов), для вычисления которых используются формулы

	$x_{0.25} = x_k$	$x_{0.75} = x_k$
При n, кратном 4	$k = \frac{n}{4} + 1$	$k = \frac{3n}{4}$
При (n-1), кратном 4	$k = \frac{n-1}{4} + 1$	$k = n - \frac{n-1}{4}$
При (n+1), кратном 4	$k = \frac{n+1}{4} + 1$	$k = n - \frac{n+1}{4}$
Остальные четные n	$k = \frac{n+2}{4}$	$k = \frac{3n+2}{4}$

За оценку координаты центра распределения (результат измерения) X^* принимается медиана оценок $\overline{X}, \overline{X}_{0.9}, \overline{X}_M, \overline{X}_R, \overline{X}_C$, расположенных в ранжированный ряд. Такая оценка устойчива к отклонениям результатов наблюдений от нормального закона распределения.

3. Расчет оценок стандартных отклонений

Стандартное отклонение (среднеквадратическое отклонение, СКО) результатов наблюдений объемом n вычисляется по формуле

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - X^*\right)^2}, \tag{3.1}$$

где x_i – результаты наблюдений,

X^* – результат измерения (центр опытного распределения).

В случае представления экспериментальных данных статистическим распределением формула (3.1) будет иметь вид

$$S = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{k} m_i \left(x_i - X^* \right)^2}\,, \tag{3.2}$$

где x_i – варианты (или центры интервалов),

X^* – результат измерения (центр опытного распределения),

m_i – частота наблюдения i-ой варианты (или частота попадания результатов наблюдений в i-й интервал),

k – количество вариант (или интервалов) статистического распределения.

В общем случае оценка СКО результатов наблюдений, определяемая по формулам (3.1) или (3.2) не является несмещенной. Несмещенная оценка стандартного отклонения результатов наблюдений может быть определена следующим образом

$$S^* = S \cdot \sqrt{\frac{n}{n-1}}\,. \tag{3.3}$$

Оценка стандартного отклонения результата измерения (центра опытного распределения)

$$S_x^* = \frac{S^*}{\sqrt{n}}\,. \tag{3.4}$$

4. Идентификация закона распределения методом моментов

Закон распределения результатов наблюдений близок к нормальному, если статистическая функция плотности распределения – функция симметричная, одномодальная, отличная от нуля на конечном интервале значений аргумента, и другая информация о плотности распределения отсутствует. Это можно определить по виду гистограммы. Для автоматизации этого процесса можно использовать метод моментов, в котором для идентификации закона распределения результатов наблюдений используются выборочные центральные моменты 2-ого (μ_2), 3-его (μ_3) и 4-ого (μ_4) порядков, которые определяются следующим образом

$$\mu_k = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - X^* \right)^k , \tag{4.1}$$

где x_i – результаты наблюдений,

X^* – результат измерения (центр опытного распределения),

k – порядок момента.

По значениям центральных моментов определяются оценки коэффициентов формы опытного закона распределения:

– несмещенная оценка коэффициента асимметрии

$$\alpha^* = \frac{\sqrt{n(n-1)}}{(n-2)} \cdot \frac{\mu_3}{\sqrt{\mu_2^3}} , \tag{4.2}$$

– несмещенная оценка коэффициента эксцесса

$$\varepsilon^* = \frac{n^2 - 1}{(n-2)(n-3)} \cdot \left[\frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 + \frac{6}{n+1} \right], \tag{4.3}$$

где n – объем выборки.

Если опытный закон распределения нормальный, то коэффициенты асимметрии и эксцесса должны быть малы (в идеале для нормального распределения $\alpha = \varepsilon = 0$). О малости коэффициентов асимметрии и эксцесса судят по их сравнению с оценками их стандартных отклонений

$$S_\alpha^* = \sqrt{\frac{6 \cdot (n-1)}{(n+1)(n+3)}} , \tag{4.4}$$

$$S_\varepsilon^* = \sqrt{\frac{24 \cdot (n-2)(n-3)}{(n-1)^2 (n+3)(n+5)}} , \tag{4.5}$$

где n – объем выборки.

Закон распределения близок к нормальному, если одновременно выполняются условия

$$\begin{cases} \left|\alpha^*\right| \le 3 \cdot S_\alpha^*, \\ \left|\varepsilon^*\right| \le 5 \cdot S_\varepsilon^*. \end{cases} \qquad (4.6)$$

Если хотя бы одно из условий не выполняется, то закон распределения отличен от нормального и идентификацию закона распределения можно провести по сравнению оценок коэффициентов эксцесса и асимметрии с их теоретическими значениями.

5. Устранение грубых ошибок многократных измерений

Результаты наблюдений иногда существенно отличаются от наблюдаемых средних значений. Необходимо быть уверенным, что эти результаты не являются грубым промахом, ошибкой при фиксировании наблюдаемой величины, результатом неконтролируемых условий измерений или неисправности.

Если по коэффициентам формы опытного распределения не удалось идентифицировать закон распределения результатов наблюдений как нормальный, то для исключения промахов следует использовать универсальный приближенный метод. При этом исключаются значения $x_i < x_{r-}$ и $x_i > x_{r+}$, где x_{r-}, x_{r+} – границы промахов, определяемые выражением:

$$x_{r\pm} = X^* \pm S^* \cdot \left(1.55 + 0.8 \cdot \sqrt{\varepsilon^* + 2} \cdot \lg \frac{n}{10}\right), \qquad (5.1)$$

где n – объем выборки,

X^* – оценка координаты центра распределения (результата измерения),

S^* – несмещенная оценка стандартного отклонения результатов наблюдений,

ε^* – несмещенная оценка коэффициента эксцесса опытного распределения (4.3).

Если закон распределения близок к нормальному, то следует использовать статистические критерии обнаружения промахов. При этом подозрительные результаты наблюдений проверяются последовательно, по одному.

Критерий Романовского

Выбирается подозрительное значение $x_{\text{ïîä}}$. Выдвигается нулевая гипотеза “Значение $x_{\text{ïîä}}$ является грубой ошибкой измерения” с вероятностью *p* (задают значение доверительной вероятности).

Наблюдаемое значение критерия Романовского вычисляется по формуле

$$R_{\text{íàáë}} = \frac{\left| x_{\text{ïîä}} - \tilde{O}^*_{-} \right|}{S^*_{-}}, \tag{5.2}$$

где $\tilde{O}^*_{-}$ – оценка результата измерения, вычисленная без учета всех подозрительных результатов,

S^*_{-} – несмещенная оценка стандартного отклонения результатов наблюдений, вычисленная без учета всех подозрительных результатов.

Критическое значение критерия Романовского представляет собой квантиль распределения Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - n_{\text{ïîä}}$ (n - объем выборки, $n_{\text{ïîä}}$ - количество подозрительных результатов) при доверительной вероятности *p* (Приложение 3, формула (П3.1))

$$R_{\text{êð}} = t_p(k)\,. \tag{5.3}$$

Нулевая гипотеза принимается при условии

$$R_{\text{íàáë}} \geq R_{\text{êð}}\,. \tag{5.4}$$

Правило “трех сигм”

Критерий “правило трех сигм” является одним из простейших для проверки результатов, подчиняющихся нормальному закону распределения.

Результат $x_{ïîä}$ считается грубой погрешностью, если выполняется условие

$$\left| x_{ïîä} - \tilde{O}^* \right| \geq 3S^*, \tag{5.5}$$

где $\tilde{O}^*$ – оценка результата измерения,

S^* – несмещенная оценка стандартного отклонения результатов наблюдений.

Критерий вариационного размаха

Определяется размах вариационного ряда результатов наблюдений по формуле

$$R = x_{max} - x_{\min}, \tag{5.6}$$

где $x_{\max}$ и $x_{\min}$ – наибольшее и наименьшее значения результатов наблюдений.

Подозрительный результат $x_{ïîä}$ не является грубой погрешностью, если он лежит внутри интервала

$$X_{-}^{*} - z \cdot R < x_{ïîä} < X_{-}^{*} + z \cdot R, \tag{5.7}$$

где X_{-}^{*} – результат измерения, вычисленный без учета подозрительного результата $x_{ïîä}$,

z – критериальное значение, зависящее от объема выборки

n	10-11	12-15	16-22	23-25	26-63	64-150
z	1.3	1.2	1.1	1.0	0.9	0.8

Критерий Шовене

Выбирается подозрительное значение $x_{\text{ïîä}}$. Выдвигается нулевая гипотеза “Значение $x_{\text{ïîä}}$ является грубой ошибкой измерения” с вероятностью *p* (задают значение доверительной вероятности).

Вычисляется коэффициент

$$z = \frac{\left| x_{\text{ïîä}} - X^{*} \right|}{S^{*}}, \tag{5.8}$$

где $\tilde{O}^{*}$ – оценка результата измерения,

S^{*} – несмещенная оценка стандартного отклонения результатов наблюдений.

Вычисляется вероятность появления подозрительного результата $p_{\text{ïîä}} = P\left(\frac{\left| x_{\text{ïîä}} - X^{*} \right|}{S^{*}} > z \right)$, (т.е. вероятность выхода результатов наблюдений за квантиль $\pm z$) по формуле

$$p_{\text{ïîä}} = 2 \cdot \left(1 - F(z)\right), \tag{5.9}$$

где $F(z)$ – интегральная функция стандартного нормального распределения (Приложение 1, формула (П1.2)).

Вычисляется количество ожидаемых результатов, у которых, по крайней мере, такая же погрешность, как и у подозрительного результата

$$n_{\text{îæ}} = n \cdot p_{\text{ïîä}}, \tag{5.10}$$

где n – объем выборки.

Гипотеза о наличии грубой погрешности принимается с заданной доверительной вероятностью *p*, если выполняется условие

$$n_{\text{îæ}} < 0.5. \tag{5.11}$$

Проверку следует выполнять сразу по нескольким критериям (рекомендуется использовать не меньше трех). Окончательное заключение о наличии грубых погрешностей следует делать по большинству критериев. При обнаружении промаха в i-ом результате наблюдения, этот результат следует исключить из выборки.

После исключения промахов следует пересчитать оценки центра распределения и стандартных отклонений.

6. Исключение прогрессирующей систематической погрешности

Наиболее часто встречающийся вид систематической погрешности – это прогрессирующая (дрейфовая) погрешность, которая может быть выявлена методами дисперсионного анализа. Однако для решения инженерных задач достаточно применить приближенный метод.

Пусть $x_1, \ldots, x_n$ - результаты наблюдений, записанные в порядке их получения (статистический ряд), а $t_1, \ldots, t_n$ - моменты времени получения результатов наблюдений (или порядковые номера результатов в случае равномерного во времени их получения).

Алгоритм устранения дрейфовой погрешности:

1. Выполняется линейная аппроксимация зависимости $x = f(t)$ и определяется разность крайних значений $x(t_n)$ и $x(t_1)$

$$\Delta x = A(t_n - t_1)\,, \tag{6.1}$$

где $A = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \sum_{i=1}^{n} t_i - n\sum_{i=1}^{n} x_i t_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} t_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} t_i^2}$ (аппроксимация методом наименьших квадратов).

2. Если $\Delta x = 0$, то дрейфовой погрешности нет. В противном случае для каждого результата наблюдения определяется величина систематической погрешности

$$\delta_i = \frac{\Delta x}{n} \cdot i\,, \tag{6.2}$$

которая округляется до точности представления результатов наблюдений.

3. Вносятся поправки на величину систематической погрешности

$$x_{i\,\text{испр}} = x_i - \delta_i \tag{6.3}$$

После исключения дрейфовой погрешности следует пересчитать оценки центра распределения и стандартных отклонений.

7. Критерии нормальности опытного распределения

Для того чтобы с определенной вероятностью утверждать о нормальности опытного распределения, следует использовать критерии согласия для нормального закона распределения (критерии нормальности).

Критерий Пирсона

Критерий χ^2 Пирсона эффективен при большом объеме выборки (условно $n > 50$). Идея критерия состоит в контроле отклонений гистограммы экспериментальных данных от гистограммы с таким же числом интервалов, построенной на основе нормального распределения.

Для использования критерия необходимо, чтобы в каждый интервал статистического распределения попадало не меньше 5 значений. В случае, если это не так, следует объединить несколько расположенных рядом интервалов в один.

Алгоритм проверки гипотезы по критерию Пирсона:

1. Выдвигается нулевая гипотеза: “генеральная совокупность распределена нормально”. Выбирается значение доверительной вероятности p.
2. Рассчитывается для каждого интервала параметр

$$z_i = \frac{\left| x_i - \bar{X} \right|}{S^*} \qquad (7.1)$$

где x_i – середина соответствующего интервала,

S^* – несмещенная оценка стандартного отклонения результатов наблюдений,

$\bar{X}$ – выборочное среднее арифметическое.

3. По значению z_i определяется значение дифференциальной функции стандартного нормального распределения $f(z_i)$ (Приложение 1, формула (П1.1)) – вероятность попадания значений в интервал в случае, если распределение нормальное.

4. Вычисляются теоретические частоты попадания значений выборки в i-й интервал

$$m_i' = \frac{n \cdot h}{S^*} \cdot f(z_i), \tag{7.2}$$

где h – длина интервала,

n – объем выборки,

S^* – несмещенная оценка стандартного отклонения результатов наблюдений.

5. Наблюдаемое значение критерия Пирсона определяется по формуле

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum_{i=1}^{k} \frac{\left(m_i - m_i'\right)^2}{m_i'} \tag{7.3}$$

где m_i – частота попадания экспериментальных значений в i-й интервал,

m_i' – теоретические частоты, вычисленные в предположении нормально-распределенной генеральной совокупности (формула (7.2)),

k – количество интервалов статистического распределения.

6. Критическое значение критерия Пирсона определяется по формуле

$$\chi^2_{\text{кр}} = \chi^2_p(k-3), \tag{7.4}$$

где $\chi^2_p(k-3)$ – p-квантиль распределения Пирсона с числом степеней свободы $k-3$ (Приложение 2, формулы (П2.1) и (П2.2)),

k – количество интервалов статистического распределения.

7. Нулевая гипотеза о нормальности опытного распределения принимается с принятой вероятностью p, если

$$\chi^2_{\text{набл}} \le \chi^2_{\text{кр}} . \qquad (7.5)$$

Критерий Шапиро-Уилка

Критерий W Шапиро-Уилка является наиболее эффективным критерием проверки гипотезы о принадлежности выборки к нормальному закону распределения. Он работает одинаково эффективно и при малых и при больших объемах выборки. Критерий можно применять при объеме выборки $n \ge 3$.

Алгоритм проверки гипотезы по критерию Шапиро-Уилка:

1. Выдвигается нулевая гипотеза: “генеральная совокупность распределена нормально”. Выбирается значение доверительной вероятности p.

2. Вычисляется коэффициент

$$s = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - \bar{X} \right)^2 \qquad (7.6)$$

где x_i – результаты наблюдений, $\bar{X}$ – среднее арифметическое выборки.

3. Вычисляется коэффициент

$$k = \begin{cases} 0.5n, & \text{если } n - \text{чётное;} \\ 0.5(n-1), & \text{если } n - \text{нечётное.} \end{cases} \qquad (7.7)$$

4. Вычисляется наблюдаемое значение критерия Шапиро-Уилка

$$W_{\text{набл}} = \frac{1}{s} \cdot \left[\sum_{i=1}^{k} a_{n-i+1} \left(x_{n-i+1} - x_i \right) \right]^2 , \qquad (7.8)$$

где a_{n-i+1} – константы, для которых существуют таблицы значений,

x_i – элементы выборки, представленной в виде ранжированного ряда.

Для автоматизации применения W-критерия можно использовать аппроксимацию коэффициентов a_{n-i+1} (метод Шапиро-Франчиа)

$$a_{n-i+1} = d_{n-i+1} \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} d_j^2 \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{7.9}$$

где $d_j = u_p^c$ – квантиль стандартного нормального распределения при $p = \dfrac{j - 0.375}{n + 0.25}$ (Приложение 1, формула (П1.4)).

5. При выбранном значении доверительной вероятности p определяется критическое значение критерия $W_{\text{êð}}$ из таблицы (Приложение 5.) для известного объема выборки n.

6. Нулевая гипотеза о нормальности закона распределения выборки принимается при заданной доверительной вероятности p, если

$$W_{\text{íàáë}} > W_{\text{êð}} . \tag{7.10}$$

Для наиболее распространенного в технических измерениях значения доверительной вероятности $p = 0.95$ можно применять модификацию W- критерия, позволяющую обойтись без всяких таблиц.

Наблюдаемое значение критерия при этом определяется по формуле

$$W'_{\text{íàáë}} = \left(1 - \frac{0.6695}{n^{0.6518}} \right) \cdot \frac{s}{b}, \tag{7.11}$$

где s и k – те же коэффициенты, что и в общем случае,

$$b = \left[\sum_{i=1}^{k} a_i \cdot \left(x_{n-i+1} - x_i \right) \right]^2, \; a_i = a_0 \left[d_i + \frac{1483}{(3 - d_i)^{10.845}} + \frac{71.610^{-10}}{(1.1 - d_i)^{8.26}} \right],$$

$$a_0 = \frac{0.899}{(n - 2.4)^{0.4162}} - 0.02, \; d_i = \frac{n - 2i + 1}{n - 0.5}.$$

Нулевая гипотеза о нормальности распределения принимается, если

$$W'_{\text{íàáë}} < 1 . \tag{7.12}$$

8. Определение случайной погрешности результата измерения

Случайная погрешность Δ определяет интервальную оценку результата измерения. Под *интервальной оценкой результата измерения* понимается интервал, который с заданной доверительной вероятностью содержит истинное значение измеряемой величины. Границы, зависящие от выбранной доверительной вероятности, могут быть заданы как симметричными, так и несимметричными. Чаще используются симметричные границы. Это означает, что с принятой доверительной вероятностью p истинное значение измеренной величины лежит в доверительном интервале

$$X^* - \Delta \leq X_{\text{ÈÑÒ}} \leq X^* + \Delta . \qquad (8.1)$$

Доверительная вероятность обычно принимается исходя из следующих соображений:

– При выполнении технических измерений, а также при контроле параметров технологического процесса принимают доверительную вероятность $p = 0.95$.

– При невозможности повторного измерения, доверительную вероятность допускается принимать равной $p = 0.99$.

– В особых случаях, когда результаты измерения имеют большое значение для здоровья людей, допускается принимать более высокую доверительную вероятность.

Для нормального закона распределения случайная погрешность определяется в зависимости от величины доверительной вероятности p по формуле

$$\Delta = t_{\frac{1+p}{2}}(k) \cdot S_x^* , \qquad (8.2)$$

где S_x^* – стандартное отклонение результата измерения,

$t_{\frac{1+p}{2}}(k)$ – квантиль распределения Стьюдента с числом степеней свободы $k = n-1$ (Приложение 3, формула (П3.1)).

Поскольку выбор доверительной вероятности при расчете границ доверительного интервала носит произвольный характер, то на практике часто применяется правило трех сигм. При этом случайная погрешность определяется по формуле

$$\Delta = 3 \cdot S_x^*, \tag{8.3}$$

а доверительная вероятность определяется в зависимости от объема выборки *n*

n	5	6	7	8	9	10	12	14	16	18	20	25	3
p	0.96	0.97	0.976	0.98	0.983	0.985	0.988	0.99	0.991	0.992	0.993	0.994	0.9

Результат многократных измерений записывается в виде

$$X_{\text{ÈÇÌ}}\ (p) = X^* \pm \Delta \tag{8.4}$$

Обработка результатов наблюдений отклика Y_i по пп.1-8 проводится для каждого уровня воздействия x_i. В результате исходная таблица экспериментальных данных преобразуется к виду

X	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	…	x_n
Y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	y_8	…	y_n

где $y_i = Y_i^*$ – результат многократного измерения отклика при *i*-ом уровне воздействия.

9. Проверка однородности дисперсий

Значимое отличие дисперсии результатов наблюдений отклика на каком-либо уровне воздействия от остальных значений (неоднородность дисперсий) может быть следствием использования средства измерения с другими свойствами (например, проводилась калибровка и, соответственно, изменились составляющие систематических погрешностей прибора) или следствием неисправности средства измерения. В этом случае использование результатов наблюдений на данном уровне вместе с остальными неправомерно.

Критерий Самиуддина

Для проверки гипотезы об однородности дисперсий отклика на всех уровнях воздействия можно использовать критерий равенства дисперсий Самиуддина. Этот критерий устойчив к отклонениям результатов наблюдений от нормального закона, и, кроме того, имеет мощность выше, чем у многих классических критериев (например, критериев Бартлетта и Фишера).

На предыдущих этапах были получены несмещенные оценки стандартных отклонений результатов наблюдений отклика на всех уровнях воздействия S_i^*. По их значениям вычисляется наблюдаемое значение критерия Самиуддина

$$W_{\text{í àáë}} = \frac{9}{2}\sum_{i=1}^{n}(m_i - 1)\cdot\left(\sqrt[3]{\frac{m}{c}\cdot\left(S_i^*\right)^2} - 1\right)^2, \qquad (9.1)$$

где n – количество оцениваемых дисперсий (т.е. количество уровней воздействия, на которых проверяется однородность дисперсий результатов наблюдений отклика),

m_i – объем результатов наблюдений отклика на i-ом уровне воздействия,

$$m=\sum_{i=1}^{n}(m_i-1)\,,\quad c=\sum_{i=1}^{n}\left(S_i^*\right)^2\cdot(m_i-1)\,.$$

Критическим значением критерия Самиуддина является квантиль распределения Пирсона с числом степеней свободы $n-1$ при заданной доверительной вероятности p (Приложение 2, формулы (П2.1) или (П2.2)), т.е.

$$W_{êð}=\chi_p^2(n-1)\,. \tag{9.2}$$

Нулевая гипотеза о равенстве дисперсий принимается при выполнении условия

$$W_{í\,àáë}\le W_{êð}\,. \tag{9.3}$$

Если нулевая гипотез отклоняется, то чтобы определить, какая из оценок дисперсий значимо отличается от других, можно попарно сравнивать медианное значение ряда дисперсий с остальными оценками. При обнаружении отличающейся дисперсии, необходимо исключить соответствующий ряд наблюдений из таблицы экспериментальных данных, поскольку его использование для поиска уравнения регрессии может привести к ошибкам.

10. Определение значимости корреляционной связи

Если измеряемые величины зависимы друг от друга, то они называются *коррелированными*, в противном случае – *некоррелированными*. Степень такой зависимости определяется *коэффициентом корреляции*.

Пусть имеются две выборки $X=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ и $Y=\{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ объемом n, тогда оценка коэффициента корреляции случайных величин X и Y определяется выражением

$$r_{xy} = \begin{cases} r \cdot \left(1 + \dfrac{1 - r^2}{2(n-3)}\right), & \text{åñëè } n < 15, \\ r, & \text{åñëè } n \geq 15, \end{cases} \qquad (10.1)$$

где $r = \dfrac{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{X}\right)\left(y_i - \bar{Y}\right)}{\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{X}\right)^2 \cdot \sum\limits_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{Y}\right)^2}}$,

$\bar{X}$, $\bar{Y}$ – средние арифметические значения.

Значимость корреляционной связи между величинами X и Y определяется проверкой статистической гипотезы.

Наблюдаемым значением критерия при этом является модуль оценки коэффициента корреляции, т.е.

$$R_{\text{íàáë}} = \left| r_{xy} \right|. \qquad (10.2)$$

Критическое значение критерия $R_{\hat{e}\eth}$ определяется в зависимости от объема результатов наблюдений *n* и значения доверительной вероятности *p*

– при $5 < n \leq 10$

$$R_{\hat{e}\eth} = \frac{a-1}{a+1}, \qquad (10.3)$$

где $a = \exp\left(\dfrac{2}{\sqrt{n-3}} \cdot u^{c}_{\frac{1+p}{2}}\right)$,

$u^{c}_{\frac{1+p}{2}}$ – квантиль стандартного нормального распределения

(Приложение 1, формула (П1.4)),

– при $10 < n \leq 200$

$$R_{\hat{e}\eth} = \sqrt{\frac{b^2}{n-2+b^2}}, \qquad (10.4)$$

где $b = t_{\frac{1+p}{2}}(k)$ – квантиль распределения Стьюдента с числом степеней свободы $k = n - 2$ (Приложение 3, формула (П3.1)),

– при $n > 200$

$$R_{êð} = \frac{u^{c}_{\frac{1+p}{2}}}{\sqrt{n-1}} \qquad (10.5)$$

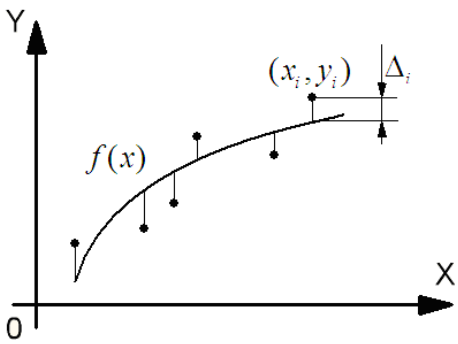
где $u^{c}_{\frac{1+p}{2}}$ – квантиль стандартного нормального распределения (Приложение 1, формула (П1.4)),

Корреляционная связь признается значимой с вероятностью p, если

$$R_{íàáë} \geq R_{êð} \,. \qquad (10.6)$$

11. Аппроксимация элементарными функциями

Пусть заданы значения аргумента $x_1, x_2, \ldots, x_n$ некоторой функции, называемые *узлами,* и соответствующие им значения этой функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Необходимо определить аналитический вид функции $y = f(x)$, близко проходящей через точки (x_i, y_i). Решение этой задачи называется *аппроксимацией*, а функция $f(x)$ называется *аппроксимирующей*.

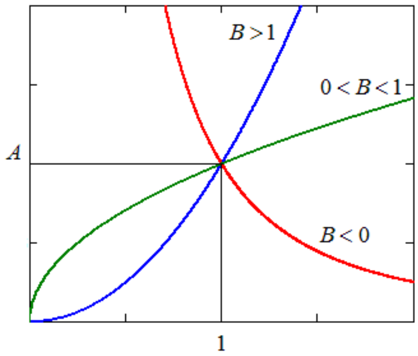
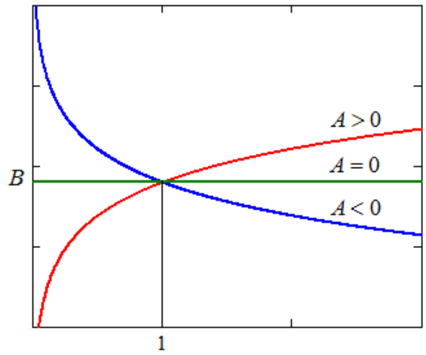
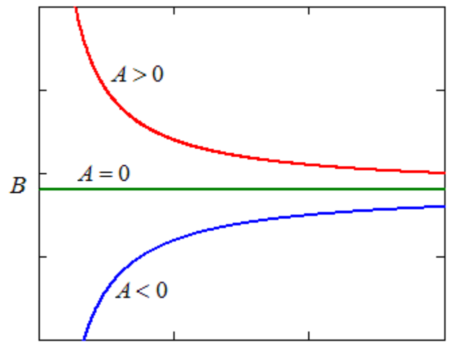


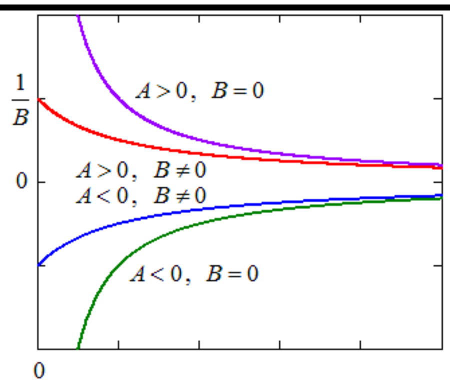
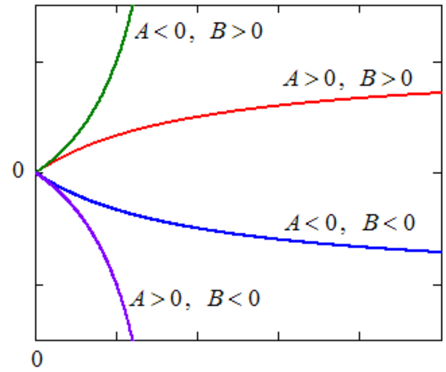
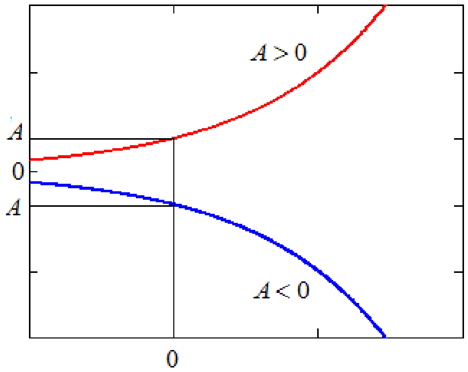
Δ_i – *уклонение* (разность в i-ой точке между значением аппроксимирующей функции и экспериментальным значением, т.е. $\Delta_i = f(x_i) - y_i$). В математической статистике уклонения называют *регрессионными остатками*. Критерием близости аппроксимирующей функции к экспериментальным точкам в методе наименьших квадратов является минимальная сумма квадратов уклонений, т.е.

$$\delta = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2 \to \min. \quad (11.1)$$

Аппроксимация может быть линейной, когда используется функция $y = Ax + B$ и нелиней-ной.

В качестве аппроксимирующих чаще всего используются следующие нелинейные функции

.Степенная	$y = Ax^B$	
Логарифмическая	$y = A\ln(x) + B$	
Гиперболическая	$y = \dfrac{A}{x} + B$	

Дробно-линейная 1	$y = \dfrac{1}{Ax + B}$	
Дробно-линейная 2	$y = \dfrac{x}{Ax + B}$	
Показательная	$y = AB^x$	

Выбор аппроксимирующей функции может проводится двумя методами:

1. Рассчитываются уклонения $\Delta_i = f(x_i) - y_i$ для нескольких функций и выбирается функция с минимальным значением критерия (11.1).

2. Аппроксимирующая функция методом замены переменных преобразуется к линейному виду (метод выравнивания)

Исходная функция	Замена переменных	Выровненная функция
$y = Ax^B$	$x' = \ln(x),\ y' = \ln(y)$	$y' = \ln(A) + Bx'$
$y = A\ln(x) + B$	$x' = \ln(x),\ y' = y$	$y' = Ax' + B$
$y = \dfrac{A}{x} + B$	$x' = \dfrac{1}{x},\ y' = y$	$y' = Ax' + B$
$y = \dfrac{x}{Ax + B}$	$x' = x,\ y' = \dfrac{x}{y}$	$y' = Ax' + B$
$y = \dfrac{1}{Ax + B}$	$x' = x,\ y' = \dfrac{1}{y}$	$Y = y'x' + B$
$y = AB^x$	$x' = x,\ y' = \ln(y)$	$y' = \ln(A) + \ln(B) \cdot x'$

Функция наилучшим образом проходит через экспериментальные точки, если эти точки в новой системе координат лежат на одной прямой. Для этого нужно, чтобы разделенные разности первого порядка

$$\delta y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad \delta y_2 = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}, \quad \dots, \quad \delta y_{n-1} = \frac{y_n - y_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} \qquad (11.2)$$

были примерно (а в идеальном случае строго) равны, т.е.

$$\delta y_1 \approx \delta y_2 \approx \ldots \approx \delta y_{n-1}. \qquad (11.3)$$

Таким образом, алгоритм выбора аппроксимирующей функции методом выравнивания следующий:

1. Рассчитываются разделенные разности первого порядка по координатам экспериментальных точек (x_i, y_i). Если они равны, то в качестве аппроксимирующей выбирается линейная функция. В противном случае переход к шагу 2.
2. Экспериментальные точки (x_i, y_i) пересчитываются в новую систему координат для нелинейных функций.
3. Вычисляются значения разделенных разностей первого порядка по формулам (11.2).

4. Выбирается та функция, для которой значения разделенных разностей наиболее близки друг к другу.

Коэффициенты A и B выбранной функции рассчитываются через вспомогательные коэффициенты P и Q, которые определяются по формулам

$$P = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i - n\sum_{i=1}^{n} k_i t_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} k_i^2}, \tag{11.4}$$

$$Q = \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i t_i - \sum_{i=1}^{n} t_i \cdot \sum_{i=1}^{n} k_i^2}{\left(\sum_{i=1}^{n} k_i\right)^2 - n\sum_{i=1}^{n} k_i^2}, \tag{11.5}$$

где

Аппроксимирующая функция	A	B	Переменные
$y = Ax + B$	$A = P$	$B = Q$	$k_i = x_i$, $t_i = y_i$
$y = Ax^B$	$A = e^Q$	$B = P$	$k_i = \ln x_i$, $t_i = \ln y_i$
$y = AB^x$	$A = e^Q$	$B = e^P$	$k_i = x_i$, $t_i = \ln y_i$
$y = A\ln x + B$	$A = P$	$B = Q$	$k_i = \ln x_i$, $t_i = y_i$
$y = \frac{x}{Ax + B}$	$A = P$	$B = Q$	$k_i = x_i$, $t_i = \frac{x_i}{y_i}$
$y = \frac{A}{x} + B$	$A = P$	$B = Q$	$k_i = \frac{1}{x_i}$, $t_i = y_i$
$y = \frac{1}{Ax + B}$	$A = P$	$B = Q$	$k_i = x_i$, $t_i = \frac{1}{y_i}$

Альтернативным методом поиска уравнения регрессии является аппроксимация полиномами Чебышева.

12. Регрессия полиномами Чебышева

Если не удается подобрать элементарную функцию, адекватно описывающую экспериментальные данные, то нужно применять регрессию полиномами.

Любое уравнение регрессии может быть представлено в виде полинома степени k

$$y = \sum_{i=0}^{k} A_i P_i(x) = A_0 P_0(x) + A_1 P_1(x) \ldots + A_k P_k(x), \quad (10.1)$$

где $P_i(x)$ – полином Чебышева порядка *i*.

Полиномы Чебышева первых двух порядков имеют вид

$$P_0(x) = 1, \quad (10.2)$$

$$P_1(x) = x - \bar{X} = x - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i\ . \quad (10.3)$$

Полином Чебышева произвольного порядка $P_i(x)$ можно найти, зная полиномы двух предыдущих порядков $P_{i-1}(x)$ и $P_{i-2}(x)$, по формуле

$$P_i(x) = (x + \alpha_i) P_{i-1}(x) + \beta_i P_{i-2}(x), \quad (10.4)$$

где

$$\alpha_i = -\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j P_{i-1}^2(x_j)}{\sum_{j=1}^{n} P_{i-1}^2(x_j)}, \quad \beta_i = -\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j P_{i-1}(x_j) P_{i-2}(x_j)}{\sum_{j=1}^{n} P_{i-2}^2(x_j)}, \quad (10.5)$$

$P_{i-1}(x_j), P_{i-2}(x_j)$ – значения полиномов Чебышева в точках x_j.

Коэффициенты уравнения регрессии находятся по формуле

$$A_i = \frac{\sum_{j=1}^{n} y_j P_i(x_j)}{\sum_{j=1}^{n} P_i^2(x_j)}. \quad (10.6)$$

Оптимальное значение степени полинома k находится последовательным уточнением (увеличением значения k, начиная с величины $k=1$). Значение степени полинома оптимально, если оно обеспечивает наименьшее значение *остаточной дисперсии* D_k (дисперсии, обусловленной разбросом экспериментальных точек вокруг линии регрессии). Иными словами, последовательное увеличение величины k обеспечивает приближение аппроксимирующей кривой к экспериментальным точкам (т.е. уменьшает остаточную дисперсию) до тех пор, пока не будет достигнуто оптимальное значение k, после которого его дальнейшее увеличение приводит к увеличению D_k.

Остаточная дисперсия определяется по формуле

$$D_k = \frac{S_k^2}{n-k-1}, \tag{10.7}$$

где

$$S_0^2 = \sum_{i=1}^{n} y_i^2 - \frac{1}{n}\left(\sum_{i=1}^{n} y_i\right)^2, \quad \ldots, \quad S_k^2 = S_{k-1}^2 - A_k^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} P_k^2(x_i). \tag{10.8}$$

Таким образом, алгоритм поиска уравнения регрессии в виде (10.1) следующий:

1. Принимается значение $k=1$.

1.1. Определяются выражения для полиномов $P_0(x)$ и $P_1(x)$.

1.2. Вычисляются значения полиномов $P_0(x_i)$ и $P_1(x_i)$ в экспериментальных точках x_i.

1.3. Вычисляются коэффициенты A_0 и A_1 и составляется уравнение регрессии порядка 1.

1.4. Вычисляется значение остаточной дисперсии D_1.

2. Принимается значение $k=2$.

2.1. Определяется выражение для полинома $P_2(x)$.

2.2. Вычисляются значения $P_2(x_i)$ в экспериментальных точках x_i.

2.3. Вычисляется коэффициент A_2 и составляется уравнение регрессии порядка 2.

2.4. Вычисляется значение остаточной дисперсии D_2.

3. Сравниваются значения D_1 и D_2. Если $D_1 < D_2$, то в качестве модели выбирается уравнение регрессии порядка 1. Если $D_2 < D_1$, то переходят к следующему шагу.

4. Проводятся аналогичные вычисления для $k = 3$, затем для $k = 4$ и т.д. Вычисления заканчиваются, когда будет установлено, что для некоторого значения k справедливо $D_k < D_{k+1}$. Таким образом, достигнуто наименьшее значение остаточной дисперсии и оптимальная степень полинома k установлена.

13. Устранение грубых ошибок совместного измерения

Наличие грубых отклонений (промахов) в значениях y_i, не связанных с естественным разбросом, может приводить к большим ошибкам при построении регрессии. Обнаружение промахов осуществляется проверкой статистической гипотезы. Наиболее простым является критерий Прескотта-Лунда. При этом вычисляются *регрессионные остатки*

$$e_i = y_i - y_i', \qquad (13.1)$$

где y_i – результат i-ого измерения величины Y,

$y_i' = f(x_i)$ – значение, вычисленное подстановкой i-ого наблюдения x_i величины X в уравнение регрессии.

Наблюдаемое значение критерия Прескотта-Лунда вычисляется по формуле

$$R_{\text{набл}} = \sqrt{\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} e_i^2}} \cdot \max|e_i|, \tag{13.2}$$

где $\max|e_i|$ – наибольшее значение модуля регрессионных остатков.

Критическое значение критерия при заданной доверительной вероятности p вычисляется по формуле

$$R_{\text{кр}} = \sqrt{\frac{(n-2)\cdot d}{n-1+d}}, \tag{13.3}$$

где $d = F_{1-\frac{1-p}{n}}(k_1, k_2)$ – квантиль распределения Фишера со степенями свободы $k_1 = 1,\ k_2 = n-3$ (Приложение 4, формула (П4.1)).

Гипотеза о наличии в i-ом результате наблюдений (x_i, y_i) промаха при заданном уровне доверительной вероятности p принимается, если

$$R_{\text{набл}} \geq R_{\text{кр}}. \tag{13.4}$$

Этот результат должен быть исключен из экспериментальных данных, а оценки коэффициентов уравнения регрессии должны быть пересчитаны.

14. Анализ коэффициентов уравнения регрессии

Анализ коэффициентов уравнения регрессии предполагает проверку гипотезы о их значимости (существенном отличии от нуля) и построение доверительных интервалов для них.

Анализ коэффициентов уравнения регрессии, построенного с помощью элементарной функции

Вычисляются оценки стандартных отклонений коэффициентов A и B

$$S_A = \sqrt{\frac{D}{S^2(n-1)}}, \quad S_B = \sqrt{D \cdot \left(\frac{1}{n} + \frac{\bar{X}'^2}{(n-1) \cdot S^2} \right)}, \tag{14.1}$$

где $D = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i' - B - A x_i' \right)^2$, $\bar{X}' = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i'$, $S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(x_i' - \bar{X}' \right)^2$,

$\left(x_i', y_i' \right)$ – экспериментальные точки, пересчитанные в систему координат, в которой выбранная аппроксимирующая функция линейна. Заметим, что для степенной функции нужно также пересчитать коэффициент A, а для показательной – оба коэффициента A и B (см. замену переменных в методе выравнивания (таблица перед формулой (11.2))).

Далее при заданном уровне доверительной вероятности p рассчитывается квантиль распределения Стьюдента с числом степеней свободы $n-2$, т.е. $t_{\frac{1+p}{2}}(n-2)$ (Приложение 3, формула (П3.1)).

Гипотеза о значимости коэффициента A или B принимается с вероятностью p, если, соответственно, справедливы условия

$$|A| > t_{\frac{1+p}{2}}(n-2) \cdot S_A, \quad |B| > t_{\frac{1+p}{2}}(n-2) \cdot S_B. \tag{14.2}$$

Если гипотеза о значимости какого-либо коэффициента отклоняется, то его значение следует принять равным нулю.

Доверительные интервалы для истинных значений коэффициентов уравнения регрессии определяются по формулам

$$A - t_{\frac{1+p}{2}}(n-2) \cdot S_A \le A_{\text{ÈÑÒ}} \le A + t_{\frac{1+p}{2}}(n-2) \cdot S_A, \tag{14.3}$$

$$B - t_{\frac{1+p}{2}}(n-2) \cdot S_B \le B_{\text{ÈÑÒ}} \le B + t_{\frac{1+p}{2}}(n-2) \cdot S_B, \tag{14.4}$$

Стандартное отклонение коэффициента A_i можно найти по формуле

$$S_{A_i} = \sqrt{\frac{S_i^2}{(n-1)\cdot\sum_{j=1}^{n} P_i^2(x_j)}}\,, \tag{14.5}$$

где $P_i(x_j)$ – значения полиномов Чебышева в экспериментальных точках x_j,

S_i^2 – значения, вычисляемые по формуле (10.8) .

Далее при заданном уровне доверительной вероятности *p* рассчитывается квантиль распределения Стьюдента $t_{\frac{1+p}{2}}(n-k-1)$ (Приложение 3, формула (П3.1)), где *k* – степень полинома, описывающего уравнение регрессии.

Коэффициент A_i является значимым с заданной доверительной вероятностью *p*, если

$$|A_i| > t_{\frac{1+p}{2}}(n-k-1)\cdot S_{A_i}\,. \tag{14.6}$$

Если гипотеза о значимости какого-либо коэффициента отклоняется, то его значение следует принять равным нулю.

Доверительный интервал для истинных значений коэффициентов уравнения регрессии строится по формуле

$$A_i - t_{\frac{1+p}{2}}(n-k-1)\cdot S_{A_i} \le A_{i\,\text{ÈÑÒ}} \le A_i + t_{\frac{1+p}{2}}(n-k-1)\cdot S_{A_i}\,. \tag{14.7}$$

15. Проверка адекватности модели

Под адекватностью модели (соответствие уравнения регрессии экспериментальным данным) понимается статистическая неразличимость результатов наблюдений y_i и значений y'_i, вычисляемых по уравнению регрессии. Статистическая неразличимость определяется проверкой гипотезы. При этом используется вся таблица экспериментальных данных

x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
y_{ij}	$y_{11}, y_{12}, \cdots, y_{1m}$	$y_{21}, y_{22}, \cdots, y_{2m}$	$\cdots$	$y_{n1}, y_{n2}, \cdots, y_{nm}$

1. Вычисляется значение дисперсии *D*, определяемой рассеянием значений y_i вокруг линии регрессии (остаточная дисперсия), по формуле

$$D = \frac{1}{n-l}\sum_{i=1}^{n}\left(\bar{Y}_i - y'_i\right)^2 \qquad (15.1)$$

где l – количество коэффициентов уравнения регрессии,

$\bar{Y}_i = \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} y_{ij}$ – среднее значение отклика при i-ом уровне воздействия.

2. Вычисляется значение дисперсии S^2, определяемой естественным рассеянием значений y_{ij} вокруг своих средних $\bar{Y}_i$, по формуле

$$S^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S_i^2\,, \qquad (15.2)$$

где $S_i^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{j=1}^{m}\left(y_{ij} - \bar{Y}_i\right)^2$.

3. При заданной доверительной вероятности p вычисляется квантиль распределения Фишера $F_p(n-2, m-1)$ (Приложение 3, формула (П3.1)).

4. Ошибка в определении регрессии с доверительной вероятностью p признается статистически значимой, если

$$\frac{D}{S^2} > F_p(n-2, m-1)\,. \qquad (15.3)$$

В этом случае уравнение регрессии не соответствует экспериментальным данным. Следует проверить правильность расчета коэффициентов уравнения регрессии и, если ошибки отсутствуют, выбрать другую аппроксимирующую функцию.

16. Прогнозирование по уравнению регрессии

Если найдено уравнение регрессии $y = f(x)$, адекватно описывающее экспериментальные данные, то можно с его помощью вычислить значение отклика Y при уровне X, отличном от условий проведения эксперимента, т.е. сделать прогноз о возможном значении Y. Это важно, когда нужно узнать о поведении исследуемого объекта в условиях, воспроизведение которых по разным причинам невозможно.

Расчет прогнозируемого значения отклика y_0 производится подстановкой требуемого значения воздействия x_0 в уравнение регрессии. Поскольку значение y_0 оценивается по реализации случайных величин X и Y (экспериментальные данные), то оно также случайно, поэтому необходимо определить доверительный интервал полученного значения y_0.

Если уравнение регрессии получено с помощью аппроксимации элементарными функциями, то границы доверительного интервала для заданной доверительной вероятности p вычисляются по формуле

$$y_{ãð} = Ax_0 + B \pm t_{\frac{1+p}{2}}(n-2)\sqrt{\frac{M}{n-2} \cdot \left[1 + \frac{1}{n} + \frac{\left(x_0 - \bar{X}\right)^2}{Q}\right]}, \qquad (16.1)$$

где $M = \sum_{i=1}^{n}\left(y_i - \bar{Y}\right)^2$, $Q = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i - \bar{X}\right)^2$, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$, $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i$,

(x_i, y_i) – экспериментальные точки,

A, B – коэффициенты уравнения регрессии,

x_0 – уровень воздействия, для которого ведется прогноз,

$t_{\frac{1+p}{2}}(n-2)$ – квантиль распределения Стьюдента (Приложение 3, формула (П3.1)).

Заметим, что формула (16.1) справедлива для системы координат, в которой уравнение регрессии является линейной функцией, поэтому, прежде чем её применять, следует пересчитать в эту систему участвующие в формуле координаты (см. замену переменных в методе выравнивания (таблица перед формулой (11.2))).

Для функций, которые предусматривают пересчет координаты *y*, ещё необходимо провести обратный перенос результата вычисления по формуле (16.1) в исходную систему координат.

Если уравнение регрессии получено с помощью полиномов Чебышева по равноотстоящим значениям x_i, то границы доверительного интервала для значения $y_{n+r} = f(x_{n+r})$ (*r – глубина прогноза*) вычисляются по формуле

$$y_{ãð} = y_{n+r} \pm t_{\frac{1+p}{2}}(n-k-1) \cdot \sqrt{D_k} \cdot \varphi(n,r), \tag{16.2}$$

где D_k – величина остаточной дисперсии,

$t_{\frac{1+p}{2}}(n-k-1)$ – квантиль распределения Стьюдента (Приложение 3, формула (П3.1)),

$\varphi(n,r)$ – коэффициент, зависящий от количества точек *n*, по которым определялось уравнение регрессии и глубины прогноза.

Для линейной регрессии ($k=1$)

$$\varphi(n,r) = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \left[(n+1)^2 + \frac{3(n+2r-1)^2}{(n-1)} \right]} \tag{16.3}$$

Для квадратичной регрессии ($k=2$)

$$\varphi(n,r)=\sqrt{1+\frac{(n+r)^2}{I_1}+\frac{I_2-2(n+1)^2 I_1+n(n+r)^4}{nI_2-I_1^2}}\,, \tag{16.4}$$

где $I_1=\sum_{i=1}^{n} i^2$, $I_2=\sum_{i=1}^{n} i^4$.

Для вычисления I_1 и I_2 можно использовать следующие формулы

$$I_1=\sum_{i=1}^{n} i^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}\,, \tag{16.5}$$

$$I_2=\sum_{i=1}^{n} i^4=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)}{30}\,. \tag{16.6}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 1

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ГАУССА

Обозначение	$N(\mu,\sigma)$
Параметры	μ,σ
Плотность вероятности	$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\},\quad(-\infty<x<+\infty)$
Функция распределения	$F(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{x}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}dt,\quad(-\infty<x<+\infty)$
Среднее	μ
Дисперсия	σ^2
Стандартное отклонение	σ
Коэффициент вариации	$\frac{\sigma}{\mu}$
Коэффициент асимметрии	0
Коэффициент эксцесса	0

В практических задачах используется нормированная случайная величина $z=\frac{x-\mu}{\sigma}$, распределение которой называется *нормированным нормальным распределением* (или *стандартным нормальным распределением*) $N(0,1)$.

Значение дифференциальной функции стандартного нормального распределения определяется по формуле

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}. \qquad (П1.1)$$

Значение интегральной функции стандартного нормального распределения $F(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{z}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$ можно определить с помощью аппроксимации

$$F(z)=\begin{cases}1-0.852\cdot\exp\left[-\left(\dfrac{z+1.5774}{2.0637}\right)^{2.34}\right] & \text{ï ðè } z\ge 0,\\ 1-F(-z) \quad \text{ï ðè } z<0.\end{cases} \tag{П1.2}$$

Значение функции Лапласа $\Phi(z)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_{0}^{z}\exp\left(-\frac{z^2}{2}\right)dz$ вычисляется через значение $F(z)$

$$\Phi(z)=2F(z)-1\,. \tag{П1.3}$$

Значение p-квантиля стандартного нормального распределения можно определить по аппроксимации

$$u_p^c=\begin{cases}2.0637\cdot\left(\ln\dfrac{1}{1-p}-0.16\right)^{0.4274}-1.5774, \quad \text{ï ðè } 0.5\le p\le 0.999,\\ -u_{1-p}^c, \quad \text{ï ðè } 0.001<p<0.5\end{cases} \tag{П1.4}$$

Значение p-квантиля u_p нормального распределения с параметрами μ и σ вычисляется через квантиль стандартного нормального распределения u_p^c

$$u_p=\mu+u_p^c\cdot\sigma\,. \tag{П1.5}$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 2

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПИРСОНА

Если $X_1, X_2, \ldots, X_k$ – независимые случайные величины, имеющие стандартное нормальное распределение, то сумма их квадратов подчиняется распределению χ^2 (хи-квадрат) Пирсона с числом степеней свободы k.

Обозначение	$\chi^2(k)$
Параметр	k – число степеней свободы
Плотность вероятности	$f(x)=\left[\sqrt{2}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^{-1}\cdot x^{\frac{k-2}{2}}\cdot\exp\left(-\frac{x}{2}\right),\quad x\geq 0$
Функция распределения	$F(x)=\left[\sqrt{2}\cdot\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^{-1}\int_0^x t^{\frac{k-2}{2}}\exp\left(-\frac{t}{2}\right)dt,\quad x>0$
Среднее	k
Дисперсия	$2k$
Стандартное отклонение	$\sqrt{2k}$
Коэффициент вариации	$\sqrt{\frac{2}{k}}$
Коэффициент асимметрии	$2\sqrt{\frac{2}{k}}$
Коэффициент эксцесса	$\frac{12}{k}$

Значение p-квантиля распределения Пирсона обозначается $\chi^2_p(k)$ и может быть рассчитано по формуле аппроксимации Голдштейна

$$\chi^2_p(k)=k\cdot\left[\sum_{i=0}^{6}k^{-\frac{i}{2}}\cdot d^i\cdot\left(a_i+\frac{b_i}{k}+\frac{c_i}{k^2}\right)\right]^3, \qquad (П2.1)$$

где $d=u_p^c$ – p-квантиль стандартного нормального распределения (Приложение 1),

a_i, b_i, c_i – константы

i	a_i	b_i	c_i
0	1.0000886	-0.2237368	-0.01513904

1	0.4713941	0.02607083	-
2	0.0001348028	0.01128186	0.008986007
3	-0.008553069	-0.01153761	0.02277679
4	0.00312558	0.005169654	-0.01323293
5	-0.0008426812	0.00253001	-
6	0.00009780499	-	0.006950356
		0.001450117	0.001060438
			0.001565326

или с помощью аппроксимации Корниша-Фишера (более простая, но менее точная, чем аппроксимация Голдштейна)

$$\chi_p^2(k) = k + A\sqrt{k} + B + \frac{C}{\sqrt{k}} + \frac{D}{k} + \frac{E}{k\sqrt{k}}, \qquad (\text{П2.2})$$

где $d = u_p^c$ – p-квантиль стандартного нормального распределения (Приложение 1),

$$A = d\sqrt{2}, \quad B = \frac{2}{3}\left(d^2 - 1\right), \quad C = d \cdot \frac{d^2 - 7}{9\sqrt{2}}, \quad D = \frac{6d^4 + 14d^2 - 32}{405},$$

$$E = d \cdot \frac{9d^4 + 256d^2 - 433}{4860\sqrt{2}}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 3

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СТЬЮДЕНТА

Если Y – случайная величина, распределенная по стандартному нормальному закону, а независимая от нее случайная величина X имеет распределение хи-квадрат с k степенями свободы, то случайная величина $t = Y \cdot \sqrt{\frac{k}{X}}$ подчиняется распределению Стьюдента с k степенями свободы.

Обозначение	$t(k)$
Параметр	k – число степеней свободы
Плотность вероятности	$f(t) = \Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right) \cdot \left[\sqrt{\pi k} \cdot \Gamma\left(\frac{k}{2}\right)\right]^{-1} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}}, \quad (-\infty < t < +\infty)$
Функция распределения	$F(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \int_{-\infty}^{t} \left(1 + \frac{y^2}{k}\right)^{-\frac{k+1}{2}} dy, \quad (-\infty < t < +\infty)$
Среднее	0
Дисперсия	$k \cdot (k-2)^{-1}, \quad k > 2$
Коэффициент вариации	0
Коэффициент асимметрии	0
Коэффициент эксцесса	$10 \cdot (k-4)^{-1}, \quad k > 4$

Значение p-квантиля распределения Стьюдента с k степенями свободы $t_p(k)$ можно вычислить с помощью аппроксимации Морана

$$t_p(k) = d \cdot \left(1 - \frac{d^2+1}{4k}\right)^{-1}, \tag{П3.1}$$

где $d = u_p^c$ $- p$-квантиль стандартного нормального распределения (Приложение 1).

Значение интегральной функции распределения Стьюдента можно вычислить с помощью аппроксимации

$$F(t) = \frac{1}{2} \cdot \left(\sum_{i=0}^{5} c_i \cdot \left| t^i \right| \right)^{-8}, \qquad (П3.2)$$

где $c_i = \left(1 + \sum_{j=1}^{2} \frac{b_{ij}}{k^j} \right)^{-1} \cdot \sum_{j=0}^{4} \frac{a_{ij}}{k^j}$,

a_{ij} – константа, значения которой даны в таблице

i \ j	1	2	3	4	5
0	0.09979441	0.04431742	0.009694901	-	0.000579602
1	-0.58121	-0.2206018	-0.1408854	0.0000918228	-0.02763334
2	1.390993	0.03317253	1.88993	0.03789901	0.4517029
3	-1.222452	5.679969	-12.75532	-1.280346	-2.657967
4	2.151185	-12.96519	25.77532	9.249528	5.127212
				-19.08115	

b_{ij} – константа, значения которой даны в таблице

i \ j	1	2	3	4	5
1	-5,537409	-5,166733	-4,233736	-2,777816	-0,5657187
2	11,42343	13,49862	14,3963	16,461132	21,83269

ПРИЛОЖЕНИЕ 4

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ФИШЕРА

Если две независимые случайные величины $X = \chi_1^2$ и $Y = \chi_2^2$ распределены по закону Пирсона со степенями свободы, соответственно, k_1 и k_2, то случайная величина $F = \dfrac{X \cdot k_2}{Y \cdot k_1}$ имеет распределение Фишера (*F*-распределение) со степенями свободы k_1 и k_2.

Обозначение	$F(k_1, k_2)$
Параметры	k_1, k_2
Плотность вероятности	$f(x) = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)} \cdot \left(\dfrac{k_1}{k_2}\right)^{\frac{k_1}{2}} \cdot \dfrac{x^{\frac{k_1}{2}-1}}{\left(1+\dfrac{k_1}{k_2}x\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}}}, \qquad x \ge 0$
Функция распределения	$F(x) = \dfrac{\Gamma\left(\dfrac{k_1+k_2}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{k_1}{2}\right)\cdot\Gamma\left(\dfrac{k_2}{2}\right)} \cdot k_1^{\frac{k_1}{2}} \cdot k_2^{\frac{k_2}{2}} \cdot \int\limits_0^x y^{\frac{k_1}{2}-1} \left(k_1+k_2\right)^{\frac{k_1+k_2}{2}} dy, \qquad x \ge 0$
Среднее	$\dfrac{k_2}{k_2-2}, \quad k_2 > 2$
Дисперсия	$\dfrac{2k_2^2\left(k_1+k_2-2\right)}{k_1\left(k_2-2\right)^2\left(k_2-4\right)}, \quad k_2 > 4$

Значение *p*-квантиля распределения Фишера со степенями свободы k_1 и k_2 можно найти с помощью аппроксимации Воглера-Нортона

$$F_p(k_1, k_2) = \left[\frac{(1-a)(1-b) + d\sqrt{a(1-b)^2 + b(1-a)^2 - c}}{\left(1-b\right)^2 - bd^2}\right]^3, \qquad (\text{П}4.1)$$

где $d = u_p^c$ – *p*-квантиль стандартного нормального распределения (Приложение 1).

$$a = \frac{2}{9k_1}, \; b = \frac{2}{9k_2}, \; c = \frac{4d^2}{81k_1k_2}.$$

ПРИЛОЖЕНИЕ 5

КРИТИЧЕСКИЕ ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ ШАПИРО-УИЛКА

n	*p*=0.99	*p*=0.98	*p*=0.95	*p*=0.90
3	0.737	0.756	0.767	0.789
4	0.687	0.707	0.748	0.792
5	0.686	0.715	0.762	0.806
6	0.713	0.743	0.788	0.826
7	0.730	0.760	0.803	0.838
8	0.749	0.778	0.818	0.851
9	0.764	0.791	0.829	0.859
10	0.781	0.806	0.842	0.869
11	0.792	0.817	0.850	0.876
12	0.805	0.828	0.859	0.883
13	0.814	0.837	0.866	0.889
14	0.825	0.846	0.974	0.895
15	0.835	0.855	0.881	0.901
16	0.844	0.863	0.887	0.906
17	0.851	0.869	0.892	0.910
18	0.858	0.874	0.897	0.914
19	0.863	0.879	0.901	0.917
20	0.868	0.884	0.905	0.920
21	0.873	0.888	0.908	0.923
22	0.878	0.892	0.911	0.926
23	0.881	0.895	0.914	0.928
24	0.884	0.889	0.916	0.930

25	0.888	0.901	0.918	0.931
26	0.891	0.904	0.920	0.933
27	0.894	0.906	0.923	0.935
28	0.896	0.908	0.924	0.936
29	0.898	0.910	0.926	0.937
30	0.900	0.912	0.927	0.939
31	0.902	0.914	0.929	0.940
32	0.904	0.915	0.930	0.941
33	0.906	0.917	0.931	0.942
34	0.908	0.919	0.933	0.943
35	0.910	0.920	0.934	0.944
36	0.912	0.922	0.935	0.945
37	0.914	0.924	0.936	0.946
38	0.916	0.925	0.938	0.947
39	0.917	0.927	0.939	0.948
40	0.919	0.928	0.940	0.949
41	0.920	0.929	0.941	0.950
42	0.922	0.930	0.942	0.951
43	0.923	0.932	0.943	0.951
44	0.924	0.933	0.944	0.952
45	0.926	0.934	0.945	0.953
46	0.927	0.935	0.945	0.953
47	0.928	0.936	0.946	0.954
48	0.929	0.937	0.947	0.954
49	0.929	0.937	0.947	0.955
50	0.930	0.938	0.947	0.955

ПРИЛОЖЕНИЕ 6

СПРАВОЧНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ЯЗЫКУ MATLAB

Описание языка MATLAB

Язык программирования MATLAB является интерпретируемым. Этап компиляции полной программы отсутствует и исполняемые программы не создаются. Программы существуют лишь в виде m-файлов (файлов с расширением m) и для их выполнения необходимо находиться в среде MATLAB. Однако существуют технологии автоматизированного перевода программ на языке MATLAB в коды языков программирования C и C++.

Существует 2 вида программ: m-функции и m-скрипты (сценарии).

Сценарий представляет собой последовательность команд без входных и выходных параметров. Он имеет следующую структуру:

% Основной комментарий

% Дополнительный комментарий

Тело файла

Комментарии нужны для того, чтобы ознакомиться с назначением файла через справочную систему. Основной комментарий выводится при исполнении команды

>> help имя_каталога

Полный комментарий выводится при исполнении команды

>> help имя_файла

Для выполнения сценария в среде Matlab необходимо ввести его имя

>> имя_файла

и нажать клавишу ENTER.

М-функция является типичным объектом языка программирования системы Matlab. Структура m-функции с одним выходным параметром выглядит следующим образом:

```
function var=func_name(par1,…,parN)
% Основной комментарий
% Дополнительный комментарий
Тело файла
var=выражение;
```

Здесь переменная var – выходной параметр, par1,…,parN – входные параметры, func_name – имя функции. Функция возвращает свое значение var и может использоваться в математических выражениях в виде

func_name(список параметров**);**

Файл m-функции должен иметь то же имя func_name, что и сама функция.

Все переменные, имеющиеся в теле файла-функции, являются *локальными*, то есть действуют только в пределах тела функции, в отличие от файла-сценария, все переменные которого являются *глобальными*.

Правила вывода комментариев те же, что и у файлов-сценариев.

Последняя конструкция var=выражение вводится, если требуется, чтобы функция возвращала результат вычислений. М-функция завершается по достижению конца файла. Для досрочного выхода из функции и возврата значения функции используется программный оператор return.

Если выходных параметров больше одного, то структура файла имеет вид:

```
function [var1,…,varN]=func_name(par1,…,parM)
```

```
% Основной комментарий
% Дополнительный комментарий
Тело файла с любыми выражениями
var1=выражение;
…
varN=выражение;
```

Данная функция вызывается в виде:

```
[var1,var2,…]=func_name(par1,…,parM);
```

Если такая функция используется в виде

```
func_name(par1,…,parM);
```

то возвращается значение только первого выходного параметра – переменной var1.

Циклы и операторы выбора

for var= b:s:e
  Инструкция1;
  Инструкция2;
  …
end
	Используется для организации вычислений с заданным числом повторений цикла
	b – начальное значение переменной цикла var,
	s – приращение (шаг) этой переменной,
	e–конечное значение управляющей переменной, при достижении которого цикл завершается.

while Условие
  Инструкция1;
  Инструкция2;
  …
end
	Цикл выполняется до тех пор, пока выполняется Условие

if Условие1 Инструкции1 [elseif Условие2 Инструкции2 else Инструкции3] end	Оператор выбора: позволяет сделать выбор хода вычислений в зависимости от условий. Если выполняется Условие1, то вызываются Инструкции1. В противном случае проверяется Условие2. Если выполняется Условие2, то вызываются Инструкции2. Если Условие2 не выполняется, то вызываются Инструкции3. Квадратными скобками выделены необязательные элементы оператора (при использовании оператора скобки ставить не нужно)
switch Выражение0 case Выражение1 Инструкции1 case Выражение2 Инструкции2 … otherwise Инструкции end	Оператор множественного выбора. Выполняются ИнструкцииN, если ВыражениеN соответствует Выражению0. Если ни одно из выражений после операторов case не соответствует Выражению0, то выполняются Инструкции после otherwise. Выражение1, Выражение2,… не должны быть равны между собой. Выражение после case может быть перечислением case {выражение1_1, выражение1_2, выражение1_3} В этом случае инструкции после case выполняются, если Выражение0 соответствует одному из перечисленных выражений.

Условие в операторах записывается в виде:

Выражение1 Оператор_отношения Выражение2

В качестве оператора отношения могут быть использованы:

Оператор	Значение
>	больше

<table>
<tr><td><</td><td>меньше</td></tr>
<tr><td>>=</td><td>не меньше</td></tr>
<tr><td><=</td><td>не больше</td></tr>
<tr><td>==</td><td>равно</td></tr>
<tr><td>~=</td><td>не равно</td></tr>
<tr><td>&</td><td>логическое И</td></tr>
<tr><td>|</td><td>логическое ИЛИ</td></tr>
</table>

Представление данных в MATLAB

Все данные в MATLAB представляются в виде массивов.

Массив – это упорядоченная, пронумерованная совокупность однородных данных. Массивы различаются по числу размерностей (измерений): одномерные, двумерные, многомерные.

Размер массива – это количество элементов вдоль каждого из измерений. Номер элемента в массиве называется *индексом*. В отличие от других языков программирования, в MATLAB нумерация элементов начинается не с нуля, а с единицы, поэтому индексы всегда ≥ 1.

Массивы являются способом хранения математических объектов – векторов и матриц. Скалярные величины хранятся в одномерных массивах с размерностью 1. Векторы могут записываться в виде строки или в виде столбца. В этом случае они называются соответственно *вектором-строкой* или *вектором-столбцом*.

Доступ к элементу массива (вектора) осуществляется с помощью его индексов (номера строки и номера столбца), которые записываются в круглых скобках после имени массива a(2,5). Если вместо одного из индексов поставить двоеточие :, то это равносильно обращению ко всему столбцу или всей строке a(:,5).

Удаление элемента матрицы осуществляется присвоением ему пустого массива, который обозначается квадратными скобками []. Например a(2,5)=[].

К векторам и матрицам можно применять арифметические операции

Оператор MATLAB	Назначение
+	сложение
-	вычитание
*	умножение
/	деление
^	степень

Следует помнить, что все арифметические операторы в MATLAB представляют матричные операции. Так например, выражение C=A*B вычислит произведение матриц A и B. Для того, чтобы выполнить поэлементные действия, нужно перед соответствующим арифметическим оператором ставить точку. В этом случае, например, выражение C=A.*B вычислит матрицу, состоящую из произведения соответствующих элементов матриц A и B, т.е. $c_{ij} = a_{ij} \cdot b_{ij}$.

Основные функции для работы с массивами.

Функция MATLAB	Назначение/результат выполнения
d=det(A)	d - определитель матрицы A
n=length(A)	n - длина вектора A
[n,m]=size(A)	n – количество строк матрицы A m – количество столбцов матрицы

	A
A=zeros(n,m)	A – матрица размером m×n, состоящая из нулей
A=eye(n,m)	A – единичная матрица размером m×n, (все элементы на главной диагонали раны 1, остальные элементы раны 0)
A=ones(n,m)	A – матрица размером m×n, состоящая из единиц
B=A'	B – матрица, полученная транспонированием матрицы A

Основные функции обработки статистических данных

Функция	**Результат**
min(X)	Наименьшее значение элемента выборки *X*
max(X)	Наибольшее значение элемента выборки *X*
mean(X)	Выборочное среднее арифметическое
trimmean(X,e)	Среднее арифметическое e-процентной выборки
mad(X)	Среднее абсолютное отклонение от среднего значения выборки *X*
median(X)	Медиана выборки *X*
sum(X)	Сумма элементов выборки *X*
cumsum(X)	Накопленная сумма элементов выборки *X*. (Например, если *X* -

	вектор значений частот статистического распределения, то результатом выполнения функции будет вектор значений накопленной частоты)
std(X)	Несмещенная оценка стандартного отклонения (СКО) выборки *X*
var(X)	Несмещенная оценка дисперсии выборки *X*
sort(X)	Ранжированный ряд, составленный из выборки *X*
prod(X)	Произведение элементов выборки *X*
moment(X,k)	Оценка центрального момента порядка k выборки *X*
range(X)	Размах выборки *X*
kurtosis(X)-3	Оценка коэффициента эксцесса выборки *X*
skewness(X)	Оценка коэффициента асимметрии выборки *X*
prctile(X,p)	p-квантиль (процентиль) выборки *X*

Создание паузы в вычислениях

Для приостановки программы используется оператор pause

pause	останавливает вычисления до нажатия любой клавиши

pause(N)	останавливает вычисления на N секунд

Форматы вывода результатов вычислений и функции округления

По умолчанию результаты вычислений представляются в формате short (4 знака после запятой). Для отображения большего количества знаков (например, при вычислении квантилей распределений) необходимо представить результат в формате long (15 знаков после запятой) с помощью инструкции format long. Эта инструкция вводится до вывода результата. Для возвращения к формату short следует выполнить инструкцию format short.

Для округления используются следующие функции

Функция MATLAB	Назначение/результат выполнения
round(x)	Окургление числа x до ближайшего целого
ceil(x)	Окургление числа x до ближайшего целого в сторону $+\infty$
floor(x)	Окургление числа x до ближайшего целого в сторону $-\infty$
fix(x)	Окургление числа x до ближайшего целого в сторону 0

Точность вычислений не зависит от формата вывода результатов. По умолчанию вычисления производятся в формате с плавающей точкой двойной точности. Это довольно высокая точность. Тем не менее, многие задачи требуют вычислений без какой-либо погрешности или с очень малой погрешностью. Для этого в Matlab существует аппарат вычислений с произвольной точностью. Функция vpa(x,d) возвращает результат вычислений выражения (или массива) x, используя арифметику произвольной точности с количеством знаков d.

Построение и оформление графиков функций

График функции, заданной таблицей экспериментальных данных строится с помощью функции

plot(x,y,s)

где x – вектор значений аргумента,

y - вектор значений функции,

s – строка, определяющая цвет и тип линии, а также маркер точек графика

Строка **s**	Значение
	Цвет линии
‘y’	Желтый
‘m’	Розовый
‘c’	Голубой
‘r’	Красный
‘w’	Белый
‘g’	Зеленый
‘b’	Синий
‘k’	Черный
	Тип линии
‘-’	Сплошная линия
‘:’	Пунктирная линия
‘-.’	Штрихпунктирная
‘--’	линия

Строка **s**	Значение
	Тип маркера
‘.’	Точка
‘o’	Круг
‘x’	Крест
‘+’	
‘*’	
‘s’	Квадрат
‘d’	Ромб
‘v’	Треугольник
‘^’	вершиной вниз
‘<’	Треугольник
‘>’	вершиной вверх
‘p’	Треугольник
‘h’	вершиной влево

	Штриховая линия

	Треугольник вершиной вправо Пятиконечная звезда Шестиконечная звезда

Строка s формируется из комбинации значений типа и цвета линии и типа маркера. Так, например, ‘k-.p’ указывает, что график будет построен черной штрихпунктирной линией, а точки будут отмечены пятиконечной звездой.

Если указать тип маркера точек, но не указывать тип линии, то на график будут нанесены только точки указанным маркером без соединяющей их линии.

Функция plot(y) строит график зависимости значений элементов вектора y от их индекса.

Функция plot(x,y) строит график зависимости $y=f(x)$ сплошной синей линией.

Для построения графика в отдельном окне нужно предварительно вызвать функцию figure (пустое графическое окно). С помощью этой функции можно установить цвет графического окна. Например, figure(‘Color’,’w’) устанавливает белый цвет и открывает новое графическое окно.

Для нанесения координатной сетки на график используется инструкция grid on, которую нужно указать сразу после функции plot.

Для построения нескольких графиков в одной системе координат возможны два варианта. Пусть нужно отобразить зависимости *y1=f(x1)* и *y2=f(x2)* .

- вариант 1:

plot(x1,y1,s1,x2,y2,s2)

- вариант 2:

plot(x1,y1,s1)

hold on

plot(x2,y2,s2)

Для построения гистограммы результатов наблюдений используется функция

hist(x,k)

где x – вектор значений результатов наблюдений,

k - количество интервалов (по умолчанию $k=10$).

Указав выходные аргументы для функции hist, можно получить координаты центров интервалов и соответствующие частоты: [m,centers]=hist(x,k)

Функции для оформления графиков

Функция	Назначение
title(‘Текст’)	Заголовок графика
xlabel(‘Текст’)	Подпись оси абсцисс
ylabel(‘Текст’)	Подпись оси ординат
legend(‘Текст1’,…,‘ТекстN’)	Легенда

Легенда представляет собой поясняющие надписи к линиям графика. Количество надписей должно соответствовать количеству линий на графике. Если указать после текстов надписей числовой параметр p legend(‘Текст1’,…,‘ТекстN’,p)

то можно управлять положением легенды на графике

Значение p	Положение легенды
-1	В правом верхнем углу графического окна (вне графика)
0	Положение, при котром легенда наименьшим образом перекрывает графики
1	В верхнем правом углу графика (по умолчанию)
2	В верхнем левом углу графика
3	В нижнем левом углу графика
4	В нижнем правом углу графика

Можно использовать формат TeX в надписях.

Функции диалогового ввода-вывода

Функция	Назначение
disp(X)	Отображает в рабочем окне Matlab массив X, не печатая имя массива. Если X – строка, то отображается текст
r=input('текст запроса')	Отображает текст запроса в рабочем окне Matlab и ждет ввода с клавиатуры числового значения. Введённое с клавиатуры значение присваивает переменной r. Если введено выражение, тогда сначала будет произведено вычисление этого выражения

r=input('текст запроса', 's')	отображает текст запроса в рабочем окне Matlab и ждет ввода с клавиатуры строкового значения. Введенное с клавиатуры значение присваивает переменной r. Если введено выражение, то оно не вычисляется, а принимается как строковое значение

ПРИЛОЖЕНИЕ 7

ТАБЛИЦЫ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНЫХ ДАННЫХ

T1

X	10.0	13.5	17.0	20.5	24.0	27.5	31.0	34.5	38.0	41.5
	7.90	15.07	21.89	29.00	35.84	43.19	50.02	57.33	64.21	71.35
	8.09	14.84	22.41	28.89	35.54	42.86	49.94	57.03	64.14	71.37
	7.75	15.26	21.83	29.00	35.62	43.14	50.15	56.73	64.03	71.21
	7.79	15.18	22.08	28.98	35.53	43.05	50.03	57.00	64.03	71.46
	7.98	14.93	22.00	29.05	35.52	42.90	50.07	57.04	63.87	71.12
	7.93	14.89	22.04	28.94	35.59	42.98	50.24	56.79	63.95	71.36
	7.80	15.04	21.66	28.96	35.55	43.11	50.26	57.14	63.85	71.29
	7.97	15.04	21.86	28.70	35.67	42.74	49.91	57.03	64.05	71.45
	8.08	15.02	22.02	29.15	35.91	42.66	50.11	57.17	64.17	71.15
Y	8.08	15.00	22.03	29.16	35.73	42.92	49.87	57.01	63.92	71.55
	7.83	15.28	21.98	29.12	35.61	43.09	49.86	57.05	63.99	71.34
	8.38	15.09	22.13	28.82	35.61	42.99	50.00	56.80	63.81	71.21
	8.04	15.00	21.74	28.81	35.83	42.98	50.07	57.02	64.14	71.07
	7.92	15.11	21.95	28.84	35.84	43.18	50.05	57.22	63.92	71.10
	7.97	15.07	21.96	29.12	35.82	42.94	49.99	57.11	64.01	71.31
	8.16	15.09	21.96	28.87	35.81	43.10	50.04	56.96	64.10	71.33
	8.18	15.20	21.90	28.91	35.72	43.26	50.20	57.20	64.09	71.35
	7.83	14.93	22.21	29.05	35.41	42.95	49.81	57.30	63.93	71.36
	7.61	15.15	22.07	28.58	35.82	43.23	50.17	56.98	63.95	71.48
	7.98	14.94	22.14	29.01	35.73	43.01	50.06	57.27	63.82	71.37

	8.26	14.98	21.86	29.21	35.73	42.98	50.09	56.89	63.86	71.28
	7.99	15.08	21.87	28.84	35.92	42.94	49.94	57.05	63.98	71.21
	8.01	15.03	22.10	28.93	35.68	42.86	49.88	57.16	63.88	71.15
	7.95	15.31	21.76	29.16	35.59	43.00	50.05	57.00	63.87	71.37
	8.04	15.06	22.19	28.97	35.82	43.01	50.06	56.92	64.11	71.24
	7.94	14.96	21.91	29.09	35.77	42.98	50.00	56.78	63.98	71.33
	8.05	14.95	22.12	28.93	35.81	42.99	50.03	56.87	64.06	71.24
	8.01	14.97	22.19	29.02	35.87	43.06	50.05	56.94	64.07	71.37
	8.12	15.38	21.93	28.81	35.68	43.07	50.15	56.82	63.90	71.50
	8.31	15.13	22.07	28.71	35.84	43.08	49.83	57.01	63.82	71.26
	7.79	14.94	21.82	29.20	35.62	43.14	49.79	57.09	63.71	71.00
	7.96	14.94	22.22	28.94	35.56	43.13	50.04	57.04	63.70	71.19
	8.13	14.95	22.17	28.73	35.50	43.09	49.61	57.15	64.04	71.42
	7.80	15.20	22.24	29.21	35.68	43.03	50.06	57.14	63.89	71.16
	8.24	15.07	21.95	28.70	35.47	43.11	50.15	56.76	63.74	71.40
	8.26	15.01	21.82	28.81	35.60	43.08	50.08	56.97	63.91	71.26
	8.21	14.98	21.93	29.20	35.62	43.04	50.23	56.98	63.97	71.16
	8.17	14.99	21.71	28.94	35.80	42.99	50.11	57.53	63.88	71.17
	8.14	15.18	22.00	29.25	35.91	42.97	50.07	56.85	63.93	71.04
	7.95	15.09	21.85	28.89	35.85	42.91	50.09	56.93	63.77	71.31

T2

X	2.00	3.25	4.50	5.75	7.00	8.25	9.50	10.75	12.00	13.25
Y	23.38	17.65	14.97	13.76	12.33	12.15	11.53	11.13	11.01	11.02
	23.44	17.88	14.92	13.96	12.59	12.16	11.52	11.08	11.10	11.25
	23.57	17.71	15.24	13.84	12.58	12.27	11.67	11.16	11.21	10.77
	23.32	17.88	15.32	13.76	12.42	12.21	11.83	11.37	10.97	11.07
	23.56	17.68	15.05	13.86	12.37	12.21	11.53	11.26	10.94	11.23
	23.44	17.68	15.20	13.82	12.58	12.29	11.79	11.12	11.25	10.85
	23.57	17.64	15.34	13.87	12.49	12.21	11.69	11.20	11.07	11.18
	23.42	17.89	15.15	13.34	12.53	12.18	11.79	11.70	11.00	11.16
	23.78	17.81	15.19	13.69	12.51	11.93	11.66	11.39	11.04	11.13
	23.36	17.79	15.19	13.68	12.48	12.15	11.95	11.25	11.02	11.09
	23.48	17.73	15.22	13.72	12.11	12.60	11.74	11.37	11.04	11.02
	23.46	17.78	15.05	13.68	12.40	12.06	11.81	11.22	11.01	11.10
	23.38	17.72	15.23	13.54	12.55	12.24	11.65	11.19	11.25	10.91
	23.62	17.85	15.31	13.33	12.49	12.15	11.47	11.13	10.99	11.02
	23.77	17.72	15.11	13.81	12.63	12.37	11.64	11.60	10.62	11.05
	23.50	17.96	14.93	13.81	12.55	12.30	11.65	10.96	11.25	11.00
	23.49	17.77	15.13	13.89	12.38	12.22	11.65	11.26	11.11	10.85
	23.57	17.86	15.10	13.70	12.40	12.04	11.65	11.26	11.13	10.96
	23.84	17.89	15.14	13.77	12.42	12.33	11.47	11.35	10.79	11.15
	23.28	17.79	15.04	13.81	12.48	12.23	11.53	11.34	11.10	11.07
	23.54	17.99	14.92	13.68	12.66	12.22	11.65	11.23	11.00	11.15
	23.43	17.48	15.28	13.81	12.68	12.09	11.45	11.11	10.76	10.88
	23.36	17.77	15.01	13.59	12.40	12.19	11.64	11.37	11.30	11.31
	23.37	17.95	14.94	13.77	12.49	12.09	11.51	11.07	10.93	10.79
	23.52	17.93	14.85	13.63	12.40	12.20	11.71	10.91	10.93	11.11
	23.69	17.73	15.23	13.88	12.62	12.07	11.70	11.25	11.07	11.17

	23.60	17.63	15.29	13.53	12.63	12.02	11.54	11.39	10.85	11.07
	23.56	17.66	15.27	13.96	12.76	12.24	11.73	11.06	11.12	11.13
	23.25	17.87	15.11	13.76	12.44	12.13	11.53	11.37	10.81	11.25
	23.52	17.58	15.11	13.46	12.50	12.14	11.40	11.10	10.86	11.14
	23.61	17.77	15.04	13.65	12.75	12.12	11.77	11.17	11.07	11.08
	23.60	17.73	15.05	13.73	12.31	12.12	11.66	11.37	10.94	10.97
	23.69	17.92	15.11	13.65	12.56	12.48	11.61	11.47	11.03	10.96
	23.32	18.01	15.05	13.77	12.32	12.02	11.52	11.44	11.14	11.25
	23.47	17.94	15.20	13.55	12.37	12.51	12.06	11.18	11.14	10.65
	23.56	17.71	15.07	13.49	12.51	11.91	11.66	11.13	10.90	11.20
	23.32	17.84	15.00	13.75	12.36	12.35	11.44	11.18	11.19	11.06
	23.76	17.82	15.24	13.74	12.56	12.50	11.93	11.37	11.05	11.06
	23.28	18.07	14.99	14.02	12.26	12.26	11.32	11.01	11.10	11.05
	23.90	17.73	15.08	13.81	12.36	12.28	11.58	11.25	10.90	11.21

T3

X	2.00	5.75	9.50	13.25	17.00	20.75	24.50	28.25	32.00	35.75
Y	7.40	34.09	46.31	54.78	60.41	65.85	69.98	73.52	75.78	80.34
	7.86	33.73	46.23	54.48	60.33	65.67	69.64	73.43	75.35	79.94
	7.73	34.25	46.38	54.66	60.48	65.88	69.98	73.51	77.05	78.88
	7.09	33.75	46.08	54.44	60.68	65.85	69.42	73.47	76.29	79.65
	7.63	33.95	46.44	54.41	60.61	66.32	69.55	73.46	77.30	80.22
	7.53	34.00	46.29	54.70	60.46	65.96	70.76	73.58	76.80	80.06
	7.54	33.93	46.15	54.28	60.25	66.15	69.43	73.37	75.39	80.14
	6.68	33.69	46.16	54.72	60.50	66.34	68.68	73.62	76.06	80.51
	7.11	33.51	46.24	54.52	60.53	64.78	69.95	73.48	77.06	79.63
	7.52	33.69	46.32	54.67	60.48	65.88	70.57	73.54	75.52	80.30
	7.30	33.81	46.11	54.95	60.39	66.12	70.20	73.85	76.49	79.12
	7.90	33.84	46.14	54.89	60.50	66.73	70.46	73.71	75.95	80.62
	7.09	33.69	46.13	54.59	60.29	65.79	70.54	73.42	77.27	79.82
	7.14	33.95	46.14	54.87	60.34	65.05	68.63	73.52	76.87	80.42
	7.48	33.53	46.11	54.49	60.63	65.83	69.13	73.33	76.65	79.81
	7.01	34.09	46.18	54.51	60.43	65.44	69.07	73.38	78.50	79.29
	7.83	33.96	46.25	54.88	60.59	65.89	71.32	73.72	76.85	79.25
	7.61	34.01	46.00	54.94	60.52	65.26	70.28	73.66	75.76	79.67
	7.35	33.80	46.15	54.61	60.49	66.48	69.53	73.70	75.13	79.60
	7.81	33.84	46.22	54.51	60.26	65.72	69.86	73.35	75.61	79.21
	7.22	33.95	46.10	54.72	60.49	67.31	70.83	73.41	76.75	79.40
	7.27	33.96	46.29	54.30	60.78	66.21	68.59	73.56	75.48	80.36
	6.17	33.72	46.02	54.78	60.48	65.28	70.71	73.64	76.91	80.20
	7.53	33.94	46.18	54.92	60.64	65.68	70.14	73.64	76.36	79.86
	7.10	33.15	46.47	54.09	60.79	66.00	69.48	73.68	75.97	79.43
	7.12	33.43	46.29	54.65	60.25	66.25	69.46	73.68	77.86	79.66

	8.11	33.93	46.34	54.69	60.63	66.61	69.27	73.49	76.43	80.27
	7.48	33.84	46.48	54.54	60.35	65.90	70.26	73.44	76.37	79.28
	6.84	33.89	46.33	54.97	60.48	65.79	69.41	73.49	76.55	80.22
	7.29	33.00	46.17	54.39	60.41	66.59	69.90	73.36	75.73	79.52
	7.33	34.03	46.16	55.00	60.57	64.92	70.28	73.79	75.26	79.24
	7.28	34.22	46.32	54.50	60.51	65.84	70.25	73.58	76.24	78.98
	8.10	33.84	46.11	54.58	60.57	65.50	70.37	73.51	76.47	80.33
	7.12	33.62	46.20	54.25	60.50	66.25	70.30	73.88	77.06	78.93
	7.26	33.45	46.23	54.01	60.52	64.91	70.93	73.59	76.05	79.33
	7.09	33.79	46.29	54.31	60.58	65.91	70.71	73.48	76.37	79.57
	7.34	33.66	46.37	54.42	60.53	65.73	70.68	73.02	76.58	80.15
	7.55	33.95	46.10	54.67	60.43	66.06	71.63	73.53	77.20	79.58
	6.89	33.58	46.25	54.90	60.64	65.64	70.31	73.73	76.80	79.78
	7.29	33.56	46.18	54.47	60.55	66.00	68.82	73.45	76.08	79.36

T4

X	1.0	2.5	4.0	5.5	7.0	8.5	10.0	11.5	13.0	14.5
Y	5.52	6.74	8.34	11.10	14.31	21.22	25.57	31.57	39.55	47.94
	5.60	6.20	8.22	10.99	14.45	20.14	24.75	31.34	39.40	47.52
	5.89	6.62	7.94	10.91	14.53	19.48	26.04	31.63	39.94	47.47
	5.84	6.30	8.04	11.17	14.64	19.40	24.97	31.80	37.26	47.77
	5.22	6.35	7.95	10.76	14.41	19.99	25.08	31.64	39.60	47.15
	5.34	6.34	8.09	11.14	14.53	19.26	23.54	31.85	38.07	47.31
	4.58	6.40	8.08	11.04	14.25	19.30	24.62	31.88	38.18	47.04
	6.10	6.46	8.24	10.44	14.57	20.02	25.19	31.73	39.40	47.94
	5.34	6.83	8.18	10.67	14.37	20.17	24.96	31.50	39.04	47.43
	4.87	6.14	8.07	10.83	14.21	19.42	25.21	31.81	39.65	47.03
	5.62	6.31	8.21	10.85	14.53	19.81	25.36	31.82	37.91	47.38
	4.61	6.38	8.32	10.88	14.48	20.32	26.15	31.62	38.66	47.69
	4.51	6.49	7.91	11.16	14.41	19.68	24.59	31.59	39.29	47.68
	4.66	6.69	8.41	11.03	14.83	19.41	25.24	31.63	37.66	47.20
	5.37	6.30	7.88	10.48	14.66	19.87	23.59	31.86	38.40	47.37
	5.19	6.37	8.26	11.39	14.26	20.43	25.28	31.91	39.28	47.34
	5.72	6.75	8.40	11.03	14.44	19.89	24.90	31.94	38.44	46.47
	5.35	6.30	8.04	10.77	14.25	20.52	26.52	31.74	38.21	47.19
	4.94	6.37	8.04	10.99	14.00	19.31	24.40	31.70	38.67	47.17
	5.43	6.30	8.06	10.90	14.55	19.60	25.23	31.62	38.61	47.40
	5.28	6.47	8.28	10.96	14.67	19.38	26.26	31.82	37.73	46.83
	5.47	6.44	8.23	10.94	14.62	18.88	23.89	31.58	38.79	47.28
	5.64	6.37	8.28	10.68	14.51	19.95	25.16	31.93	38.84	47.24
	5.10	6.04	8.06	11.33	14.49	20.20	27.32	31.54	39.82	47.64
	5.31	6.38	8.13	10.55	14.28	18.75	25.35	31.75	37.91	46.86
	5.44	6.52	7.92	11.17	14.35	19.58	24.96	31.81	37.99	47.00

	5.06	6.97	7.99	11.23	14.51	20.03	24.61	31.78	38.97	47.15
	5.19	6.50	8.17	11.02	14.49	19.49	24.45	32.00	39.36	47.96
	5.15	6.49	8.29	11.02	14.42	19.61	26.15	31.53	40.88	47.31
	6.02	6.63	8.35	10.50	14.57	19.43	25.99	31.77	39.49	47.20
	5.11	6.95	8.07	10.81	14.30	18.90	25.37	31.88	39.65	46.65
	5.26	6.92	8.17	10.81	14.66	19.43	25.68	31.61	38.07	47.48
	5.60	6.78	8.15	11.06	14.50	19.60	24.74	31.55	38.90	47.05
	5.23	6.38	8.05	11.06	14.53	20.82	24.16	31.73	37.69	47.11
	5.21	6.58	7.98	11.04	14.29	20.36	23.45	31.78	38.47	46.93
	5.39	6.04	8.31	11.01	14.26	19.43	25.57	32.02	37.66	47.54
	5.68	6.47	8.40	11.34	14.36	18.98	25.01	32.00	39.33	47.70
	5.02	6.36	8.17	10.85	14.17	19.31	25.54	31.56	38.03	46.97
	5.23	5.91	8.26	11.12	14.67	18.77	24.26	31.51	39.06	46.93
	5.34	6.67	8.08	11.50	14.42	20.32	25.12	31.71	39.52	47.48

T5

X	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110
	22.97	27.95	32.74	38.37	42.65	47.59	53.34	57.91	62.40	69.27
	23.26	27.84	33.03	38.00	42.71	47.71	52.32	58.09	63.28	68.12
	23.17	27.85	32.81	37.77	42.87	47.64	52.88	58.13	62.86	68.53
	23.26	28.46	33.11	38.50	42.59	48.81	53.38	58.15	62.66	68.26
	23.21	28.52	32.97	38.23	43.03	48.63	52.69	58.09	62.79	68.54
	22.57	27.98	33.22	38.16	42.44	47.76	53.31	58.09	62.42	67.98
	23.23	27.62	32.87	38.25	42.51	49.02	52.32	58.14	63.91	67.81
	22.53	27.75	32.83	37.82	42.76	48.15	51.82	57.91	62.02	69.14
	22.90	27.98	32.98	38.51	42.57	48.74	52.79	58.04	63.40	68.44
	22.83	28.04	33.00	38.37	42.88	47.73	52.47	58.26	63.41	68.35
	22.92	28.10	32.98	37.84	42.86	47.30	52.70	57.83	63.58	68.32
	22.76	28.28	32.93	37.92	42.81	48.74	53.05	58.17	62.66	67.75
Y	23.37	27.80	32.75	38.17	42.77	48.43	52.35	58.33	63.67	67.79
	22.62	28.03	33.09	38.15	42.53	49.06	54.05	57.97	62.64	67.63
	23.23	27.76	32.95	38.09	42.63	47.78	53.29	57.91	63.03	69.56
	22.77	27.89	32.91	38.02	42.78	47.29	53.57	57.83	64.23	68.54
	23.05	27.34	33.04	37.88	42.58	47.55	53.76	57.86	62.47	68.06
	22.71	27.91	33.05	37.73	42.53	47.49	52.30	58.00	64.48	68.14
	23.24	27.76	32.70	37.90	42.75	48.22	52.16	58.24	62.48	68.99
	22.60	28.31	32.96	37.61	42.70	47.79	53.55	58.14	62.93	68.44
	22.68	28.22	33.09	37.71	42.92	48.63	52.15	57.57	63.06	67.47
	23.05	27.46	32.91	37.99	42.64	47.83	54.90	57.82	62.75	68.12
	22.75	27.95	33.00	37.95	42.68	49.41	52.32	57.76	62.40	68.25
	23.13	27.68	33.03	38.05	42.69	48.36	52.80	58.43	62.49	68.15
	22.16	27.97	33.06	38.23	42.68	48.01	53.73	58.06	62.52	67.74
	23.46	27.98	33.09	37.77	42.76	47.79	52.21	58.15	63.49	68.55

	23.04	28.01	32.92	38.14	42.67	47.64	53.56	57.84	62.17	68.76
	22.66	28.15	32.83	37.80	42.63	48.65	52.59	57.83	63.14	68.08
	22.74	28.39	33.21	38.20	42.59	48.90	54.41	58.06	62.85	68.99
	23.25	28.01	32.90	37.38	42.67	48.27	53.25	58.17	62.94	68.62
	23.05	28.02	32.87	38.02	42.60	47.03	52.94	57.89	62.22	68.35
	22.85	27.90	32.97	37.90	42.58	46.35	52.44	57.79	61.88	68.61
	22.79	28.29	32.83	38.41	42.75	46.93	54.64	57.88	63.84	68.63
	23.75	27.82	32.93	37.61	42.58	48.55	52.88	57.76	63.93	68.17
	23.45	28.11	32.94	38.09	42.81	48.21	54.51	58.34	62.74	68.54
	23.03	27.93	32.63	37.94	42.33	48.41	54.26	58.04	63.38	68.03
	22.57	28.20	33.11	38.02	42.71	48.32	54.31	57.92	63.11	67.48
	23.29	27.49	33.09	38.24	42.93	48.76	53.06	57.71	63.09	68.01
	22.58	27.90	33.28	37.73	42.52	47.16	53.47	58.10	62.63	67.89
	23.21	27.62	32.91	37.83	42.68	48.26	52.43	58.00	62.94	67.84

X	0.10	0.25	0.40	0.55	0.70	0.85	1.00	1.15	1.30	1.45
Y	9.86	3.93	2.42	1.93	1.36	1.03	1.20	1.02	0.83	0.79
	9.99	4.13	2.61	1.80	1.51	1.33	0.86	0.92	0.73	0.58
	9.77	4.15	2.44	1.73	1.54	1.25	0.90	0.88	0.82	0.54
	10.20	4.19	2.38	1.80	1.25	1.05	0.87	1.05	0.84	0.52
	9.94	3.88	2.49	1.86	1.47	1.20	1.06	0.60	0.70	0.73
	9.76	3.91	2.27	1.74	1.37	1.13	1.23	0.96	0.71	0.67
	9.98	4.14	2.40	1.77	1.13	1.16	1.08	0.80	0.67	0.71
	9.81	4.05	2.33	1.83	1.20	1.35	1.05	1.01	0.72	0.63
	10.01	4.07	2.49	2.25	1.58	1.39	1.14	1.30	0.84	0.85
	10.28	4.11	2.36	1.58	1.56	1.23	1.12	1.28	0.90	0.71
	9.95	3.93	2.64	1.74	1.25	1.20	1.09	0.69	0.93	0.73
	9.97	4.26	2.41	1.79	1.47	1.38	0.93	1.09	0.78	0.67
	10.22	3.92	2.67	1.67	1.50	1.15	0.79	1.03	0.72	0.62
	9.93	4.17	2.52	1.62	1.04	1.19	0.97	1.16	0.85	0.82
	9.85	4.10	2.41	1.69	1.46	1.41	1.08	1.13	0.60	0.41
	10.14	3.90	2.66	2.00	1.61	1.44	0.88	0.89	0.71	0.43
	10.03	4.00	2.23	1.78	1.52	1.31	0.87	1.06	0.78	0.83
	9.95	4.24	2.54	1.59	1.39	1.11	1.08	0.74	1.07	0.52
	10.45	4.31	2.48	1.68	1.56	0.98	1.26	0.99	0.63	0.63
	9.82	3.90	2.62	1.87	1.67	0.98	1.21	0.94	0.69	0.80
	9.93	4.28	2.35	2.10	1.54	1.29	1.14	1.00	0.65	0.72
	10.09	3.91	2.40	1.59	1.65	1.05	1.07	1.20	0.95	0.65
	10.06	3.90	2.65	1.78	1.54	1.51	1.03	0.85	0.75	0.65
	10.00	4.22	2.59	1.78	1.33	1.33	0.98	0.83	0.95	0.77
	9.85	4.27	2.44	1.98	1.47	1.34	0.63	1.11	0.62	0.81
	9.80	4.11	2.46	1.61	1.20	1.04	0.95	0.80	0.70	0.67

	9.95	4.18	2.70	1.58	1.22	1.22	1.30	0.89	0.97	0.64
	10.12	4.03	2.51	1.91	1.09	1.05	1.44	0.51	1.08	0.67
	10.08	3.99	2.61	1.83	1.40	1.07	0.93	0.81	0.79	0.70
	9.94	3.69	2.32	1.78	1.23	1.30	0.86	0.72	0.98	0.68
	10.10	4.15	2.70	2.01	1.55	1.28	0.96	0.74	0.88	0.83
	9.90	4.06	2.48	1.95	1.21	1.26	0.91	1.29	0.55	0.80
	10.15	3.99	2.18	2.02	1.45	1.16	0.89	0.80	0.60	0.75
	10.15	4.15	2.50	1.83	1.03	1.33	1.01	1.04	0.77	0.59
	9.91	4.14	2.50	1.43	1.21	1.39	1.16	0.74	0.82	0.32
	9.95	3.96	2.57	1.85	1.52	0.92	0.89	0.60	0.81	0.69
	9.98	4.31	2.37	1.78	1.28	1.22	0.99	0.70	0.74	0.60
	9.87	4.02	2.16	1.80	1.46	1.02	1.02	1.16	0.93	0.60
	10.14	4.05	2.40	1.69	1.47	1.09	0.84	0.87	0.65	0.60
	10.12	4.17	2.52	1.81	1.27	1.21	0.59	0.81	0.95	0.76

T6

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев Е.Р., Чеснокова О.В. Решение задач вычислительной математики в пакетах MathCAD 12, MATLAB 7, Maple 9. – М.: НТ Пресс, 2006.
2. Ануфриев И.Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
3. Белашов В.Ю., Чернова Н.М. Эффективные алгоритмы и программы вычислительной математики. – Магадан: СВКНИИ ДВО РАН, 1997.
4. Гайдышев И. Анализ и обработка данных: специальный справочник. – СПб: Питер, 2001.
5. Джонсон Н., Лион Ф. Статистика и планирование эксперимента в технике и науке. Методы обработки данных. – М.: Мир, 1980.
6. Дрейпер Н., Смит Г. Прикладной регрессионный анализ. – 2-е изд. – М.: Финансы и статистика, 1986.
7. Дьяконов В, Круглов В. Математические пакеты расширения MATLAB. Специальный справочник. – СПб.: Питер, 2001.
8. Кетков Ю.Л., Кетков А.Ю., Шульц М.М. MATLAB 7: программирование, численные методы. – СПб.: БХВ-Петербург, 2005.
9. Крянев А.В, Лукин Г.В. Математические методы обработки неопределенных данных. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003.
10. Кобзарь А.И. Прикладная математическая статистика. Для инженеров и научных работников. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006.

11. Львовский Е.Н. Статистические методы построения эмпирических формул: Учеб. пособие для втузов. – М.: Высш. шк., 1988.
12. Маркин Н.С. Основы теории обработки результатов измерений. – М.: Издательство стандартов, 1991.
13. Половко А.М., Бутусов П.Н. Интерполяция. Методы и компьютерные технологии их реализации. – СПб.: БХВ-Петербург, 2004.
14. Справочник по прикладной статистике. В 2-х т: Пер. с англ. / Под ред. Э. Ллойда, У. Ледермана, Ю.Н. Тюрина. – М.: Финансы и статистика, 1989.
15. Тейлор Дж. Введение в теорию ошибок. – М.: Мир, 1985.
16. Третьяк Л.Н. Обработка результатов наблюдений: Учебное пособие. – Оренбург: ГОУ ОГУ, 2004.
17. Штефан И.А. Математические методы обработки экспериментальных данных: Учеб. пособие/ И.А. Штефан, В.В. Штефан. – ГУ КузГТУ. – Кемерово, 2003.