Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет имени
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»(ВлГУ)

Институт информационных технологий и радиоэлектроники

Кафедра радиотехники и радиосистем

Полушин Петр Алексеевич

"Математический аппарат теории сигналов и систем"

Методические указания
к практическим занятиям по дисциплине «Математический аппарат теории сигналов и систем» для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению 11.04.01 «Радиотехника»

Владимир, 2018

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к практическим работам по изучению дисциплины «Математический аппарат теории сигналов и систем» по направлению «Радиотехника».
Составлено согласно документированной процедуре системы менеджмента качества ВлГУ по самостоятельной работе студентов СМК-ДП-7.5-10-2012, версия 1.0.,
«Регламента подготовки материалов УМКД в соответствии с ФГОС ВО»
и «Положения о самостоятельной работе обучающихся по основным профессиональным образовательным программам (ОПОП) высшего образования.»

Методические рекомендации представляют собой комплекс заданий, позволяющих студенту выполнять практические работы при изучении данной дисциплины.

Задачами практических рекомендаций являются:

- активизация навыков практической работы;
- управление познавательной деятельностью студента;
- развитие навыков й работы с литературой.

При выполнении студент должен руководствоваться:

- учебным планом дисциплины;
-методическими рекомендациями по выполнению практическихработ;
-списком рекомендованной литературы;
-указаниями и рекомендациями преподавателя.

Приемами контроля самостоятельной работы студентов являются:

- устный контроль;
- письменный контроль;

В рамках осуществления работ студентом может проводиться:

- решение задач

- подготовка к письменным контрольным работам, рубежным и итоговым испытаниям;

- самостоятельный поиск информации в Интернете.

Общая схема практических занятий студента соответствует учебному плану дисциплины «Математический аппарат теории сигналов и систем».

Использование метода Фредгольма

Пример.

Имеется ядро интегрального уравнения

$$K(t,S) = e^{t-s}.$$

Построить его резольвенту.

$$0 \le t \le 1,\ 0 \le S \le 1,\ a = 0,\ b = 1.$$

$$C_i = ?, \quad B_i = ?$$

$$C_0 = 1, \quad B_0(t,S) = e^{t-S};$$

$$C_1 = \int_0^1 B_0(\alpha_1, \alpha_1) d\alpha_1 = 1;$$

$$B_1(t,S) = \int_0^1 \begin{vmatrix} e^t e^S & e^t e^{-\alpha 1} \\ e^{\alpha 1} e^{-S} & e^{\alpha 1} e^{-\alpha 1} \end{vmatrix} d\alpha_1 = e^t \int_0^1 e^{\alpha 1} \begin{vmatrix} e^{-S} & e^{-\alpha 1} \\ e^{-S} & e^{-\alpha 1} \end{vmatrix} d\alpha = 0;$$

$$C_2 = \int_0^1 B_1(\alpha_1, \alpha_1) d\alpha_1 = 0;$$

$$B_k, C_k = 0;$$

$$K > 1;$$

Остальные $B_k, C_k = 0$.

$$D(\lambda) = 1 - \lambda;$$

$$D(t,S,\lambda) = e^{t-S};$$

$$R(t,S,\lambda) = \frac{e^{t-S}}{1-\lambda};$$

$$\varphi(t) = f(t) + \frac{\lambda}{1-\lambda} \int_0^1 e^{t-S} f(S) dS,$$

где $\lambda_c = 1$ - единственное собственное число.

$$\varphi(t) = \int_0^1 e^{t-S} \varphi(S) dS,$$

где $K_c(t,S) = e^{t-S}$ - единственная собственная функция.

Интегральные уравнения с вырожденным ядром

Пример.

$$\varphi(t) = 1 + \lambda \int_0^1 (t - S) \varphi(S) dS;$$

$$k(t,S) = t - S;\ a_1(t) = t;\ a_2(t) = 1;\ b_1(S) = 1;\ b_2(S) = -S;$$

$$\varphi(t) = 1 + \lambda t \int_0^1 \varphi(S)dS + \lambda \int_0^1 (-S)\varphi(S)dS ;$$

$$C_1 = \int_0^1 \varphi(S)dS; \quad C_2 = \int_0^1 (-S)\varphi(S)dS;$$

$$\varphi(t) = 1 + \lambda C_1 t + \lambda C_2 .$$

Умножим обе части первого уравнения на b_1 и проинтегрируем по t:

$$\begin{cases} \int_0^1 \varphi(t)dt = \int_0^1 dt + \lambda C_1 \int_0^1 tdt + \lambda \int_0^1 dt \\ \int_0^1 (-1)\varphi(t)dt = \int_0^1 (-t)dt + \lambda C_1 \int_0^1 (-t^2)dt + \lambda C_2 \int_0^1 (-t)dt \end{cases} ;$$

$$\begin{cases} C_1\left(1 - \frac{\lambda}{2}\right) - \lambda C_2 = 1 \\ C_1 \frac{\lambda}{3} + \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right) C_2 = -\frac{1}{2} \end{cases} ;$$

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} 1 - \frac{\lambda}{2}; & -\lambda \\ \frac{\lambda}{3} ; & 1 + \frac{\lambda}{2} \end{vmatrix} = 1 + \frac{\lambda^2}{12} .$$

Это интегральное уравнение всегда имеет решение, так как $D \neq 0$ всегда при действительных λ.

$$C_1 = \frac{12}{12 + \lambda^2}; \quad C_2 = -\frac{6 + \lambda}{12 + \lambda^2};$$

$$\varphi(t) = \frac{6(2 - 2\lambda t - \lambda)}{12 + \lambda^2} .$$

Использование вырожденных ядер для приближенного решения интегральных уравнений

Пример.

$$\varphi(t) = \int_0^1 t\left(1 - e^{tS}\right)\varphi(S)dS + e^t - t .$$

Точное решение $\varphi(t) \equiv 1$.

$$k_b(t, S) = -t^2 S - \frac{t^3 S^2}{2} - \frac{t^4 S^3}{6};$$

$$\varphi(t) = e^t - t - 0{,}5t^2 - 0{,}17t^3 - 0{,}04t^4 .$$

Метод приближенных решений для интегрального уравнения Вольтерра 1-го прядка

Пример.

Найти неизвестную функцию φ:

$$\varphi(t) = t - \int_a^t (t-S)\varphi(S)dS$$

Решение.

Положим $\varphi_0 = 0$. Тогда $\varphi_1(t) = t$.

$$\varphi_2(t) = t - \int_a^t (t-S)SdS = t - \frac{t^3}{3!}$$

.

.

$$\varphi_n(t) = t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{t^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$\varphi(t) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n = \sin t .$$

Использование линейных операторов для решения интегральных уравнений

Примеры.

1. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t) = \lambda \int_0^1 tS\varphi(S)dS + f(t);$$

$$K(t,S) = tS, \ a = 0, \quad b = 1;$$

$$\max \left|K(t,S)\right| = 1 \quad \text{при} \quad 0 \le t, S \le 1 .$$

Найдем последовательность интегрированных ядер

$$K_1(t,S) = tS;$$

$$K_2(t,S) = \int_0^1 K(t,\tau)K(\tau,S)d\tau = \int_0^1 t\tau\tau d\tau = \frac{ts}{3};$$

$$K_3(t,S) = \frac{tS}{3^2};$$

$$K_n(t,S)=\frac{tS}{3^{n-1}};$$

$$R(t,S,\lambda)=ts+\frac{\lambda}{3}tS+\frac{\lambda^2}{3^2}+\ldots+\frac{\lambda^n}{3^n}tS+\ldots+=\frac{3tS}{3-\lambda};$$

Это справедливо при $|\lambda|<3$.

Таким образом, общее решение исходного уравнения имеет вид:

$$\varphi(t)=f(t)+\int_0^1\frac{3tS}{3-\lambda}f(S)dS;$$

2. Решить интегральное уравнение

$$\varphi(t)=e^t+\int_0^t e^{t-S}\varphi(S)dS;$$

$$\lambda=1;$$

$$K_1(t,S)=e^{t-S};$$

$$K_2(t,S)=\int_S^t e^{t-\tau}e^{\tau-S}d\tau=e^{t-S}(t-S);$$

$$K_3(t,S)=e^{t-S}\frac{(t-S)^2}{2!};$$

$$K_n(t,S)=e^{t-S}\frac{(t-S)^{n-1}}{(n-1)!};$$

$$R(t,S,1)=e^{t-S}+\ldots+e^{t-S}\frac{(t-S)^{n-1}}{n!}+\ldots+=e^{2(t-S)};$$

$$\varphi(t)=e^t+\int_0^t e^{2(t-S)}e^S dS=e^{2t}$$ - решение интегрального уравнения.

Уравнения типа свертки

Пример.

$$\varphi(t)=\lambda\int k(t-S)\varphi(S)dS+f(t).$$

Обозначим

$$F[\varphi]=\Phi;\;\; F[f]=F;\;\; F[k]=K.$$

Тогда после преобразования Фурье:

$$\Phi(\omega)=\lambda\sqrt{2\pi}K(\omega)\Phi(\omega)+F(\omega).$$

Отсюда можно найти $\Phi(\omega)$:

$$\Phi(\omega)=\frac{F(\omega)}{1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\omega)}.$$

Взяв обратное преобразование Фурье, мы получаем нашу функцию:

$$\varphi(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{F(\omega)e^{j\omega t}}{1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\omega)}d\omega.$$

Пусть $R(t,\lambda)$ - это обратное преобразование Фурье от следующей функции:

$$\frac{K(\omega)}{1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\omega)};$$

$$R(t,\lambda)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{K(\omega)}{1-\lambda\sqrt{2\pi}K(\omega)}e^{j\omega t}d\omega.$$

Тогда решение можно найти по формуле:

$$\varphi(t)=f(t)+\lambda\int\limits_{-\infty}^{\infty}k(t-S,\lambda)f(S)dS.$$

Применение преобразования Меллина

Пример.

Пусть имеем интегральное уравнение вида:

$$\varphi(x)=e^{-\alpha x}+\frac{1}{2}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}e^{-\frac{x}{t}}\varphi(t)\frac{dt}{t}, \quad \alpha>0;$$

$$M\left\{e^{-\alpha x}\right\}=\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-\alpha x}x^{S-1}dx=\alpha^{-S}\int\limits_{0}^{+\infty}e^{-z}z^{S-1}dz=\frac{\Gamma(S)}{\alpha^{S}}=F(S) \quad , \quad (S>0);$$

$$z=\alpha x;$$

$$M\left\{\frac{1}{2}e^{-x}\right\}=\frac{1}{2}\Gamma(S)=K(S) \quad , \quad S>0;$$

$$\Phi(S)=\frac{\Gamma(S)}{\alpha^{S}}+\frac{1}{2}\Gamma(S)\Phi(S);$$

$$\Phi(S)=\frac{\Gamma(S)}{\alpha^{S}\left[1-\frac{1}{2}\Gamma(S)\right]}\overset{M}{\leftrightarrow}\varphi(t).$$

Список литературы

1. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения – М.: Наука,1973.
2. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1970.
3. Полушин П.А., Вариационное исчисление. Краткий курс лекций для магистров по направлению 552500. – Владимир, ВлГУ, 2003.
4. Корн. Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970.
5. Муп Р. Хаотические колебания. Вводный курс для научных работников и инженеров – М.: Мир, 1990.
6. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. – М.: Прогресс, 1986.
7. Арнольд В. Теория катастроф. – М.: Изд.МГУ, 1983.

Заключение.

Магистратура, как форма образования, следующая за бакалавриатом, в служит для дальнейшего обучения на основе знаний, полученных при обучении бакалавров. По роду из будущей работы особо актуальными являются знания принципов расчета характеристик систем, используемых в радиотехнике. Это необходимо для понимания принципов работы оборудования, его особенностей, а также текущих и принципиально достижимых возможностей.

В связи с этим приобретает принципиальную важность научной подготовки магистров, получение ими фундаментальных знаний по различным направлениям науки, которые в дальнейшем помогут внедрять и осваивать наиболее современные виды оборудования.

Магистрант в процессе обучения должен освоить методы использования соответствующей справочной литературы и других источников технической информации, включая электронные источники, а также принципов классификации радиоэлектронных деталей различных видов и технические ограничения их параметров.

При выполнении практических работ наряду с теоретическими знаниями студенты приобретут соответствующие практические навыки.