Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Владимирский государственный университет имени
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»(ВлГУ)**

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

(вспомогательный теоретический материал)
по дисциплине
"История и методология науки и техники"

Направление подготовки: 11.04.01 «Радиотехника»

Квалификация (степень) выпускника: __магистр________________

Форма обучения:_____________очная _______________________________

Составитель: П.А. Полушин

Владимир, 2018

Нахождение условных экстремумов функций

Это область математики, занимающаяся нахождением max-мов, min-мов функций. Если находится экстремум при каких-то условиях, то такие задачи называются условными.

$$Z = f(x_1, ..., x_n).$$

Дополнительные условия требуют, чтобы их формализовали (т.е. преобразовали в набор функций относительно x).

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x_1, ..., x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1, ..., x_n) = 0 \\ --------- \\ \varphi_m(x_1, ..., x_n) = 0 \end{array}\right\}, \text{ при } m<n.$$

Это типовая постановка задачи. Такие задачи решаются двумя способами.

Способ 1.

1. Из одного уравнения связи выражается одна из переменных
$x_1 \leftarrow \varphi_1(x_1, ..., x_n)$.

Полученное x_1 подставляется в целевую функцию и в $\varphi_2 ... \varphi_m$.

2. Выражается $x_2 \leftarrow \varphi_2$. Подставляется в f, $\varphi_3 ... \varphi_m$, и т.д. Так делается m раз.
   Получается $f(x_{n-m}, ..., x_n)$, а условий не остается вообще.

3. Ищется безусловный экстремум и подставляется в обратном порядке в условия связи.

Метод множителя Лагранжа

Условия применимости:

1. Необходимо чтобы функции $f(x_1 \div x_n)$ и $\varphi(x_1 \div x_m)$ были непрерывные и имели непрерывные частные производные $\dfrac{\partial \varphi_i}{\partial x_j}$; $i = 1 \div m$; $j = 1 \div n$.

2. Во всей области определения x, ранг матрицы должен быть не меньше m.

Составляется квадратная матрица.

а) составляется функция Лагранжа, вида

$$\Phi = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i,$$

где λ_i - неопределенные множители Лагранжа (неизвестные коэффициенты) б) Составляется n уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1 \dots x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1 \dots x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1 \dots x_n) = 0 \end{cases}.$$

Таким образом мы имеем m+n уравнений и m+n неизвестных. Решаем эту систему. Точки, в которых производная функции f по всем аргументам $x_1 \dots x_n$ равна нулю, называются стационарными точками. Если одно решение, то он называется глобальным экстремумом. Если несколько решений, то у функции несколько экстремумов. Полученные наборы x указывают координаты экстремума. Но на этом дело не исчерпывается. После этого необходимо проверять каждый экстремум. Возможно 3 варианта:

1) Максимум.
2) Минимум.
3) Седловая точка.

Проверка производится следующим образом:
Строится квадратичная форма

$$d^2\Phi = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k \Bigg|_{\substack{x_1 = x_1^{\nabla} \\ x_2 = x_2^{\nabla} \\ \vdots \\ x_n = x_n^{\nabla}}}.$$

Если в некоторой малой окрестности квадратичная форма

$d^2\Phi > 0$ - то мы нашли максимум,

$d^2\Phi < 0$ - то мы имеем минимум,

$d^2\Phi >< 0$ - седловая точка.

Пример 1.

Дана функция

$$z = (x-1)^2 + (y+1)^2.$$

Найти экстремум при условии

$$\varphi(x,y)=x+y-1=0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2(x-1)=0; \quad x^{\nabla}=1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=2(y+1)=0; \quad y^{\nabla}=-1;$$

$$z_{ex}=z_{\min}=0.$$

Из условия выразим y:

$$y=1-x;$$

$$z=(x-1)^2+(2-x)^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2(x-1)+2(2-x)=0; \quad x^{\nabla}=1{,}5; \quad y^{\nabla}=-0{,}5;$$

$$z_{\min}=1/2.$$

Примеры 2. (Способ 2).

$$f(x,y,z)=xyz;$$

$$\varphi_1(x,y,z)=x+y-z-3=0;$$

$$\varphi_2(x,y,z)=x-y-z-8=0;$$

$$\Phi(x,y,z)=xyz+\lambda_1(x+y-z-3)+\lambda_2(x-y-z-8);$$

$$\begin{cases}\dfrac{\partial \Phi}{\partial x}=yz+\lambda_1+\lambda_2=0\\[2mm] \dfrac{\partial \Phi}{\partial y}=xz+\lambda_1-\lambda_2=0\\[2mm] \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}=xy-\lambda_1-\lambda_2=0\\[2mm] x+y-z-3=0\\ x-y-z-8=0\end{cases};$$

$$\lambda_1=\frac{11}{32}; \ \lambda_2=\frac{231}{32}; \ x^{\nabla}=\frac{11}{4}; \ y^{\nabla}=-\frac{5}{2}; \ z^{\nabla}=-\frac{11}{4}; \ f_{ex}=\frac{605}{32};$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}=\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}=0;$$

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}=z; \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial z}=y; \quad \frac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial z}=x;$$

$$d^2\Phi = 2xdydz - 2ydxdy + 2zdxdy;$$

$$\begin{cases} dx + dy - dz = 0 \\ dx - dy - dz = 0 \end{cases};$$

$$dy = 0; \quad dx = dz;$$

$$d^2\Phi = 2y^{\nabla} dx^2.$$

При любом знаке x квадратичная больше нуля, то есть это минимум.

$$d^2\Phi = 2\left(-\frac{5}{2}\right)dx^2 = -5dx^2 < 0.$$

Функционал

Пусть дан некоторый класс M функций $y(x)$. Если каждой функции $y(x) \in M$ по некоторому правилу поставлено в соответствие некоторое число J, то говорят, что в классе M определен функционал J.

$$J = J[y(x)].$$

Класс M, в котором определен этот функционал, называется областью задания функционала.

Пример1.

Пусть M - совокупность всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$.

Определенный интеграл будет функционалом :

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x)dx;$$

$$y(x) = c \quad \to \quad J = c;$$

$$y(x) = e^x \quad \to \quad J = e - 1;$$

$$y(x) = \cos \pi x \quad \to \quad J = 0.$$

Пример2.

Пусть M - класс функций, имеющих непрерывную производную на отрезке $[a,b]$ и пусть $x_0 \in [a,b]$, тогда функционалом можно считать следующее:

$$J = y'(x_0); \quad a = 1; \quad b = 3; \quad x_0 = 2;$$

$$y(x) = x^2 \quad \to \quad J = 4;$$

$$y(x) = \ln(1 + x) \quad \to \quad J = \frac{1}{3}.$$

Вариации

Вариацией δy аргумента $y(x)$ функционала $J[y(x)]$ называется разность между двумя некоторыми функционалами, обе принадлежат классу *М*.

$$\delta y = y(x) - y(x_0).$$

Если функция y k-раз дифференцируема, то говорят, про вариацию порядка k.

$$(\delta y)^{(k)} = \delta y^{(k)}(x) = y^{(k)}(x) - y^{(k)}(x_0).$$

Говорят, что функции $y(x)$ и $y_1(x)$ близки в смысле нулевого порядка, если на рассмотренном отрезке $[a,b]$ выполняется условие: $|y(x) - y_1(x)|$ - мал. Геометрически это означает, что на рассмотренном участке функции близки по аргументам. Близость первого порядка - если мала не только их разность, но и разность между их производными.

$$\begin{cases} |y(x) - y_1(x)| \\ |y'(x) - y'(x)| \end{cases} \text{ - мала.}$$

Близость k-го порядка - добавляется условие:

$$\left| y^{(K)}(x) - y_1^{(K)}(x) \right| \text{ - мала.}$$

Вывод. Если выполняется близость k-го порядка, то выполняется и близость предыдущего порядка.

Пример.

Имеются кривые $y(x) = \dfrac{\sin^2}{n}$ и $y_1(x) \equiv 0$. Рассмотрим их на интервале $[0, \pi]$. Можно утверждать, что они близки в смысле нулевого порядка при больших n.

$$|y(x) - y_1(x)| = \left| \frac{\sin n^2 x}{n} \right| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0.$$

А в смысле первого порядка близости нет.

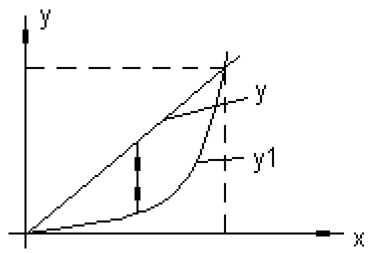
$$\left| y'(x) - y_1'(x) \right| = n \left| \cos n^2 x \right|;$$

$$x = \frac{2\pi}{n^2}.$$

Расстоянием между кривыми $y = f(x)$, $y_1 = f_1(x)$ на отрезке $a \div b$ (считаем обе функции непрерывными) называется неотрицательное число ρ, равное максимуму модуля разности между ними на этом отрезке.

Пример.

Имеются функции $y = x$ и $y_1 = x^2$, $a \div b = 0 \div 1$.



$$\rho_1(x) = y - y_1 = x - x^2;$$
$$\frac{d\rho_1}{dx} = 1 - 2x;$$
$$1 - 2x = 0;$$
$$x = \frac{1}{2};$$
$$\rho = \frac{1}{4}.$$

Расстоянием n-го порядка между кривыми называется наибольший из максимумов из следующих величин:

$$\left| f(x) - f_1(x) \right|$$
$$\left| f'(x) - f_1'(x) \right|$$
$$.$$
$$.$$
$$.$$
$$\left| f^{(n)}(x) - f_1^{(n)}(x) \right|,$$

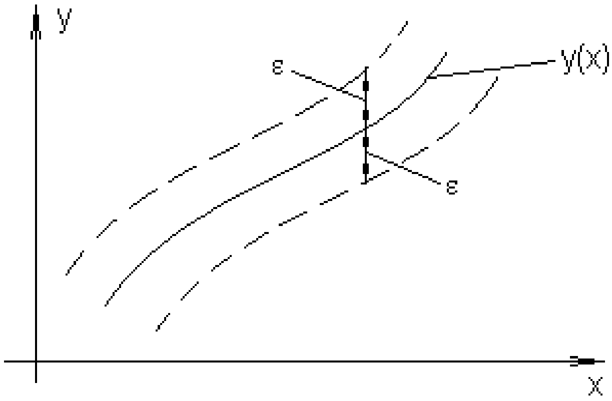
на отрезке $[a, b]$.

$$\rho_n = \rho_n\left[f(x),\ f_1(x) \right] = \max_{0 \le k \le n} \max_{a \le x \le b} \left| f^{(k)}(x) - f_1^{(k)}(x) \right|.$$

ε окрестностью n-го порядка кривой $y(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется совокупность кривых $f_1(x)$, расстояние n-го порядка которых от исходной кривой $y(x)$ меньше ε.

$$\rho_n = \rho_n\left[y(x),\ f_1(x) \right] < \varepsilon.$$

Окружность нулевого порядка называется сильной окружностью. Окружность первого порядка - слабой окружностью. Физический смысл сильной окружности - это совокупность всех непрерывных кривых, которые можно здесь провести.



Функционал $J[y(x)]$ в классе функций M называется непрерывным, при $y = y_0(x)$, в смысле близости n-го порядка, если для любого ε, можно подобрать такое число $\eta > 0$, чтобы выполнялось условие:

$$\rho_n\left[y(x), y_0(x)\right] < \eta;$$

$$\left|J[y(x)] - J[y_0(x)]\right| < \varepsilon.$$

В противном случае, он разрывный. Функционал называется линейным, если для него справедливы все свойства линейных операторов.

Простейшая задача вариационного исчисления

$$J[y] = \int_{x1}^{x2} F(x, y, y')dx,$$

где F - известная функция;

y - неизвестная, кусочно - гладкая функция.

Требуется найти минимум этого функционала, среди всех кусочно гладких функций y.

Условия:

1. Функция F должна соединять точки x_1 и x_2.
2. Необходимо чтобы $F(x, y, y') = F(X, Y, Z)$ была непрерывна по всем трем аргументам, а также чтобы были непрерывны все производные до третьего порядка.

Минимум (максимум) функционала $J[y]$, достигаемый в сильной (слабой) окрестности функции $y_0(x)$ называется сильным (слабым) минимумом (максимумом) функционала $J[y]$. Экстремум функционала $J[y]$ по всей совокупности функций y на которых он определен, называется абсолютным экстремумом.

Необходимое условие экстремума.
1-я и 2-я вариации функционала

Пусть $\eta(x)$ - некая произвольная кусочно - гладкая функция, которая удовлетворяет условию

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0 .$$

Тогда введем функцию

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x),$$

где α - некоторый параметр.

Тогда совокупность всех возможных функций $\tilde{y}(x)$ описывает слабую окрестность функции *y*.

$$J[\tilde{y}] = \int_{x1}^{x2} F(x, \tilde{y}, y^{'})dx .$$

Примем во внимание, что

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(x) = y(x_1) = y \\ \tilde{y}(x_2) = y(x_2) = y_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$J[\tilde{y}] = \int_{x1}^{x2} F(x, y + \alpha\eta, y^{'} + \alpha\eta^{'})dx = \Phi(\alpha) .$$

Показано, что $\Phi(\alpha)$ имеет минимум при $\alpha = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(\alpha)}{\partial \alpha} = 0, \quad \text{при } \alpha = 0 \\ \dfrac{\partial^2 \Phi(\alpha)}{\partial \alpha^2} \geq 0, \quad \text{при } \alpha = 0 \end{cases} ;$$

$$\frac{\partial \Phi}{\partial \alpha} = \int_{x1}^{x2} \left[\frac{\partial}{\partial y} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}^{'})\eta + \frac{\partial}{\partial (y^{'})} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}^{'})\eta \right] dx = 0 .$$

Производная $\dfrac{\partial \Phi}{\partial \alpha}$ в точке $\alpha = 0$ называется первой вариацией функционала $J[y]$ и обозначается

$$\delta J = \frac{d\Phi}{d\alpha}\Bigg|_{\alpha=0} .$$

Вторая производная называется второй вариацией.

$$\delta^2 J = \frac{d^2\Phi}{d\alpha^2}\Bigg|_{\alpha=0} .$$

Для того чтобы найденная функция y давала минимум (максимум) $J[y]$ необходимо чтобы

$$\begin{cases} \delta J = 0 \\ \delta^2 J > 0 - \text{минимум} \\ \delta^2 J < 0 - \text{максимум} \end{cases}.$$

Если выражение (*) проинтегрировать по частям, то получим:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial (y')} - \int_{x_1}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} dx \right] \eta' dx = 0 .$$

Это выражение мы получили для произвольных η. Из этого следует что

$$F_{y'} - \int_{x_1}^{x} F_y dx \equiv C .$$

Это уравнение Эйлера-Лагранжа в интегральной форме.

$$\frac{\partial F}{\partial (y')} = F_{y'}; \quad \frac{\partial F}{\partial y} = F_y;$$

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0 . \qquad (**)$$

Выражение (**) является основным уравнением вариационного исчисления. Оно же является первым необходимым экстремумом.

Гладкая функция $y(x)$, являющаяся решением этого уравнения называется экстремальной. Экстремали называют также лагранжевыми кривыми. Экстремаль, удовлетворяющая (**), удовлетворяет:

$$\frac{d}{dx}\left[F - y' F_{y'}\right] - F_x = 0 .$$

Кроме этого, применяется развернутая форма записи:

$$y'' F_{yy'} + y' F_{y'y} + F_{y'x} - F_y = 0;$$

$$F_{y'y'} = \frac{d}{d(y')}\left[\frac{d}{d(y')} F\right];$$

$$F_{y'y} = \frac{d}{dy}\left[\frac{d}{d(y')} F\right];$$

$$F(x, y, y') = F(X, Y, Z).$$

Хотя аргументы и связаны между собой, но когда мы производим дифференцирование по одному из аргументов, считаем, что он независимый.

Замечания.

1. Эта формула дает решение с точностью до двух констант, а они определяются из граничных условий.

2. Может оказаться, что при конкретных граничных условиях нет решений или бесконечное множество.

Примеры.

1) Дан функционал:

$$J\left[y(x)\right]=\int_1^2\left[y'^2-2xy\right]dx\,,\ y(1)=0,\ y(2)=-1;$$

$$F\left(x,y,y'\right)=y'^2-2xy\,;$$

$$F_{y'}=\frac{d}{d\left(y'\right)}F=2y'\,;$$

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)=\frac{d}{dx}\left(2y'\right)=2y''\,;\ \ F_y=\frac{\partial F}{\partial y}=-2x\,;\ \ -2x-2y''=0\,;\ \ y+x=0\,;$$

$$y=-\frac{x^3}{6}+C_1x+C_2\,.$$

Подставим граничные условия:

$$\begin{cases} C_1+C_2=\dfrac{1}{6} \\ 2C_1+C_2=\dfrac{2}{6} \end{cases};$$

$$C_1=\frac{1}{6}\,;\ \ C_2=0\,;\ \ y=\frac{x}{6}\left(1-x^2\right).$$

2) Найти экстремум функционала:

$$J\left[y(x)\right]=\int_1^3\left(3x-y\right)y\,dx\,.$$

Граничные условия:

$$y(1)=1;\ y(3)=4{,}5.$$

Уравнения Эйлера, в этом случае будут следующими:

$$3x-2y=0\,;$$

$$y(x)=1{,}5x\,.$$

Не трудно убедиться, что полученная экстремаль не удовлетворяет первому граничному условию. Значит задача решений не имеет.

3) Найти экстеремаль функционала:

$$J\left[y(x)\right]=\int_0^{2\pi}\left(y'^2-y^2\right)dx\,.$$

$$y(0)=1;\ y(2\pi)=1;\ y''+y=0;$$

$$y(x)=C_1\cos x+C_2\sin x\,;$$

$$y=\cos x+C\sin x\,.$$

Экстремалью являются все эти функции при любом *C*. То есть имеем бесконечное множество решений.

Теорема Вейерштрасса-Эрдмана

Пусть *y(x)* – решение уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0.$$

Тогда, если F имеет частные производные до 2-го порядка включительно, то во всех точках, где выполняется $\frac{\partial^2 F}{\partial(y')^2} \neq 0$, функция *y(x)* имеет непрерывную вторую производную, а значит в этой точке нет излома. Если $\frac{\partial^2 F}{\partial(y')^2} = 0$, то в этой точке излом. Линии составленные из кусков экстремалей, удовлетворяющие условию $\frac{\partial^2 F}{\partial(y')^2} \neq 0$ называются ломаными экстремалями.

Условие Лежандра. Во всех точках линии *y(x)*, доставляющей минимум функционалу *J*, должно выполняться условие:

Если $F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ - минимум.

Если $F_{y'y'}(x, y, y') \leq 0$ - максимум.

$$x_1 \leq x \leq x_2.$$

Условие Вейерштрасса: Если *y* – минимум (максимум), то

$$F(x, y, z) - F(x, y, y') - (z - y')F_{y'}(x, y, y') \geq 0, \ (\leq 0),$$

для произвольных z во всех точках этого интеграла.

Случай упрощения или понижения порядка уравнения Эйлера

$F(x, y, y')$.

Ситуация №1.

F не зависит от *y'*.

$$F_y = 0.$$

Возможности здесь меньше. Поэтому часто возникают ситуации, когда из-за граничных условий нет решения.

Пример.

$$J[y(x)] = \int\limits_0^{\pi/2} y(2x - y)dx\,,\ y(0) = 0\,,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\,,\ 2x - 2y = 0\,,\ y = x\,.$$

Ситуация №2.

$$F(x, y, y') = M(x, y) + N(x, y)y'.$$

Уравнение Эйлера превращается в более простое:

$$\frac{\partial M(x, y)}{\partial y} - \frac{\partial N(x, y)}{\partial x} = 0\,.$$

Бывают ситуации, когда в какой-то области это уравнение тождественно равно нулю. Это означает, что в пределах этой области функция $J[y]$ - постоянна.

Пример.

$$J[y(x)] = \int\limits_a^b \left(y^2 + 2yy'x\right)dx\,;$$

$$y(a) = A; \quad y(b) = B;$$

$$F = y^2 + 2yy'\left(y^2\right) + y'(2y);$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y; \quad \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0.$$

Ситуация №3.

F зависит только от y.

$$y''Fy'y' = 0\,.$$

Не трудно получить, что общим решением является:

$$y = C_1x + C_2;$$

где C_1, C_2 - произвольные константы.

Пример.

Найти экстремум функционала.

$$J[y(x)] = \int\limits_a^b \sqrt{1 + y^2(x)}dx;$$

$$y(a) = A; \quad y(b) = B;$$

$$y''(x) = 0; \quad y = C_1x + C_2; \quad y = \frac{B - A}{b - a}(x - a) + A.$$

Ситуация №4.

F не зависит от y.

$$F = F(x, y').$$

В этом случае уравнение Эйлера преобразуется:

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y') = 0; \quad F_{y'}(x, y') = C_1.$$

Пример.

Даны 2 точки $A(1,3)$, $B(2,3)$. Среди всевозможных кривых, соединяющих эти 2 точки, найти ту среди которых может достигаться экстремум следующего функционала:

$$J[y(x)] = \int\limits_a^b y'(x)\left[1 + x^2 y'(x)\right]dx.$$

В этом случае уравнение Эйлера имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dx}F_y(x, y') = 0; \quad \frac{d}{dx}\left(1 + 2x^2 y'\right) = 0;$$

$$1 + 2x^2 y' = C; \quad y' = \frac{C-1}{2x^2};$$

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2; \quad C_1 = \frac{1-C}{2};$$

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C \\ 5 = \dfrac{C_1}{2} + C_2 \end{cases}; \qquad y(x) = 7 - \frac{4}{x}.$$

Ситуация №5.

F не зависит от x в явном виде.

$$F = F(y, y').$$

В данном случае уравнение примет вид:

$$F_y - F_{y'y}y' - F_{y'y'}y'' = 0.$$

Умножим все на y'':

$$y'F_y - y'^2 F_{y'y} - y''y'F_{y'y'} = 0;$$

$$F_y = \frac{dF}{dy} = \frac{dy}{dx}\frac{dF}{dx};$$

$$\frac{d}{dx}\left(F - y'F_{y'}\right) = \frac{dy}{dx}F_y + \frac{d(y')}{dx}F_{y'} - \frac{d(y')}{dx}F_{y'} - y'\frac{dy}{dx}F_{y'y} - y'\frac{d(y')}{dx}F_{y'} = 0;$$

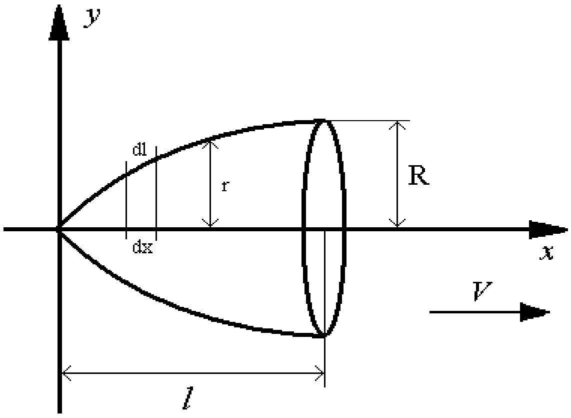
$$\frac{d}{dx}\left(F - y'F_{y'}\right) = 0,$$

где $F - y'F_{y'} = 0$.

Это уравнение решается разделением переменных.

Пример.

Поток газа. В нем движется тело. Какова должна быть форма тела, чтобы оно испытывало наименьшее сопротивление?



Если плотность газа мала и мы далеки от скорости звука, то угол падения равен углу отражения.

$$p = 2\rho V^2 \sin^2 \theta$$

$$dl = \left(1 + y'\right)^{1/2} dx; \quad r = y(x).$$

На такое кольцо действует сила:

$$dF = 2\rho V^2 \sin^2 \theta \left[2\pi y \left(1 + y'^2\right)^{1/2}\right] \sin\theta;$$

$$F = \int_0^l dF.$$

Упрощенное решение: $\sin\theta = \dfrac{y'}{\left(1 + y'^2\right)^{1/2}} \approx y'$, тогда сила, тормозящее тело

$$F = 4\pi\rho V^2 \int_0^l y'^3\, y dx; \quad y(0) = 0; \quad y(l) = R.$$

Уравнение Эйлера:

$$y'^3 - 3\frac{d}{dx}\left(yy'^2\right) = 0.$$

Умножим обе части на y'. Левая часть становится производной от выражения $y'^3 y$. Интегрируем:

$$y'^3\, y = C; \; y' = \frac{C_1}{\sqrt[3]{y}}; \; y = \left(C_1 x + C_2\right)^{3/4},$$

подставляя начальные условия: $y = R\left(\dfrac{x}{C}\right)^{3/4}$.

Инвариантность уравнений Эйлера

Если функционал вида

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx,$$

преобразуется посредством замены независимой переменной x или одновременной заменой x и y, то экстремаль по-прежнему находится с помощью уравнений Эйлера, но составленного из преобразованного уравнения.

Пусть x и y являются функциями новых переменных.

$$x = x(U,V); \quad y = y(U,V).$$

Причем соблюдается условие взаимной независимости функций :

$$x = x(U,V), y = y(U,V);$$

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial U}; & \frac{\partial x}{\partial V} \\ \frac{\partial y}{\partial U}; & \frac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\int F(x, y, y')dx = \int F\left[x(U,V), y(U,V), \frac{\frac{\partial y}{\partial U} + \frac{\partial y}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial U}}{\frac{\partial x}{\partial U} + \frac{\partial x}{\partial V}\frac{\partial}{\partial}} \right]\left(\frac{\partial x}{\partial U} + \frac{\partial x}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial U}\right)dU =$$

$$= \int \Phi(U,V,V')dU \ .$$

Определяются формулы для новой экстремали.

$$\Phi_V - \frac{d}{dU}\Phi_{V'} = 0 .$$

Она связана со старым экстремумом.

Пример.

Найти экстремум у функционала

$$J[y] = \int_0^{\ln 2} \left(e^{-x} y'^2 - e^x y^2\right)dx .$$

Уравнение Эйлера для подинтегральной функции:

$$y'' - y' + e^{2x} y = 0 .$$

Делаем замену переменных $(x = \ln U; \quad y = V)$. Тогда исходный функционал преобразуется к виду:

$$J[V] = \int_0^2 \left(e^{-\ln U} U^2 V'^2 - e^{\ln U} V^2\right)\frac{dU}{U} = \int_0^2 \left(V'^2 - V^2\right)dU .$$

Для такого функционала уравнение Эйлера существенно проще:

$$V'' + V = 0;$$

$$V = C_1 \cos U + C_2 \sin U.$$

Делая обратную подстановку:

$$y = C_1 \cos e^x + C_2 \sin e^x .$$

Вариационные задачи в параметрической форме

Во многих практических приложениях для удобства необходимо использовать параметрическое задание линий.

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \qquad t_0 \le t \le t_1.$$

Предполагается, что φ и ψ - непрерывны и имеют непрерывные производные или хотя бы кусочно-линейные. Необходимо, чтобы обе производные одновременно не обращались в нуль.

$$\varphi'^2 + \psi'^2 = 0\,.$$

Эллипс может задаваться различными видами параметрических уравнений:

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}, \qquad -\pi \le t \le \pi\,,$$

$$\begin{cases} x = \dfrac{a\left(1 - z^2\right)}{1 + z^2} \\ y = \dfrac{2bz}{1 + z^2} \end{cases}, \qquad -\infty \le z \le +\infty\,.$$

При неправильном подходе можно найти не истинный экстремум функционала. Зависит не от y, а от формы параметрического представления. Чтобы этого не случилось необходимо и достаточно чтобы подинтегральная функция не содержала t в явном виде.

$$F(x, y, kx', ky') = kF(x, y, x', y').$$

Такая функция называется положительная однородная функция первой степени по аргументам x', y':

$$x' = \frac{dx}{dt}; \quad y = \frac{dy}{dt}.$$

Если некоторая линия L, определена системой:

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases},$$

где t меняется на интервале $t_0 \le t \le t_1$, то эти функции удовлетворяют следующим уравнениям Эйлера:

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dx} - \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{dF}{dx'}\right] = 0 \\ \dfrac{dF}{dy} - \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{dF}{dy'}\right] = 0 \end{cases}.$$

Эти уравнения и являются ключом к отысканию функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Каждая из этих уравнений является следствием другого уравнения. Для этих ситуаций существует вейерштрассова форма уравнений Эйлера:

$$\frac{1}{r} = \frac{F_{y'x} - F_{x'y}}{F_1\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}; \qquad F_1 = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2} = \frac{F_{y'x'}}{y'x'},$$

где r - радиус кривизны экстремали.

Пример.

Найти экстремаль функционала.

$$J = \int_{0,0}^{x,y} y^2 y'^2\, dx; \qquad \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}.$$

Преобразуем подинтегральное выражение, чтобы исключить зависимость от t.

$$y^2 y'^2\, dx = y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 dx = y^2 \frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{dx}{dt}dt = y^2 \frac{y'^2_t}{x'^2_t}x'_t\, dt = y^2 \frac{y'^2_t}{x'_t}dt.$$

Рассмотрим первое уравнений Эйлера:

$$F_x = \frac{d}{dx}\left(y^2\frac{y'^2}{x'}\right) = 0; \quad F_{x'} = \frac{d}{dx'}\left(y^2\frac{y'^2}{x'}\right) = -\frac{y^2 y'^2}{x'^2};$$

$$\frac{d}{dt}\left(y^2\frac{y'^2}{x'^2}\right) = 0; \quad \left(y^2\frac{y'^2}{x'^2}\right) = C_1; \; y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = C_1; \; y\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1};$$

$$y^2 = 2\sqrt{C_1}x + C_2.$$

Она должна проходить через соответствующие граничные точки:

$$y^2 = \left(\frac{y_1^2}{x_1}\right)x,$$

где y_1, x_1- координаты точки.

Это уравнение параболы «в бок».

Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления

Формулы, зависящие от производных высших порядков. Минимизация функционала вида:

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F\left[x, y, y', ..., y^{(n)}\right] dx .$$

Функция F должна быть дифференцируема по всем переменным n+2 раза. Здесь граничное условие тоже существует. Граничные условия разваливаются на набор:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ y''(x_0) = y''_0 \\ .... \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases} ; \qquad \begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y'(x_1) = y'_1 \\ y''(x_1) = y''_1 \\ .... \\ y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)} \end{cases} .$$

Считаем граничные условия на обоих концах заданными. Необходимо решить уравнение Эйлера-Пуассона:

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2} F_{y''} - ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n} F_{y^{(n)}} = 0 .$$

Пример.

Найти экстремаль функционала:

$$J[y(x)] = \int_0^1 \left(720 x^2 y - y''\right) dx .$$

Граничные условия:

$$y(0) = 0 ; y'(0) = 1 ;$$
$$y(1) = 0 ;\ y'(1) = 1 .$$

Не трудно получить уравнение Эйлера-Пуассона:

$$720 x^2 + \frac{d^2}{dx^2}\left(-2y''\right) = 0 ; \quad y'' = 360 x^2 ;$$
$$y = x^6 + C_1 x^3 + C_2 x^2 + C_3 x + C_4 .$$

Подставляем граничные условия:

$$C_1 = -2;\ C_2 = 0;\ \ C_3 = 1;\ \ C_4 = 0;$$
$$y(x) = x^6 - 2x^3 + x .$$

Функционалы, зависящие от m функций

Граничные условия должны задаваться по всем функциям. Обозначим их следующим образом:

$$y_k(x_0) = y_k^{(0)};\ y_k(x_1) = y_k^{(1)};\ k = 1 \div m.$$

Требуется найти экстремум следующего функционала

$$J[y_1 ... y_m] = \int_{x0}^{x1} F(x, y_1, ..., y_m, y_1', ..., y_m')dx.$$

Для того, чтобы это сделать необходимо решить систему:

$$\begin{cases} F_{y1} - \dfrac{d}{dx} F_{y_1'} = 0 \\ F_{y1} - \dfrac{d}{dx} F_{y_2'} = 0 \\ ---------- \\ F_{y_m} - \dfrac{d}{dx} F_{y_m'} = 0 \end{cases}.$$

Пример.

Найти экстремум функционала

$$J[y(x), z(x)] = \int_1^2 (y'^2 + z^2 + z'^2)dx.$$

Граничные условия:

$$y(1) = 1;\ y(2) = 2;\ z(1) = 0;\ z(2) = 1.$$

Система дифференциальных уравнений для этого функционала будет иметь вид:

$$\begin{cases} y'' = 0 \\ z - z'' = 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{cases} y = c_1 x + c_2 \\ z = c_3 e^x - c_4 e^{-x} \end{cases}.$$

Для набора c можно получить следующие выражения:

$$c_1 = 1;$$

$$c_2 = 0;$$

$$c_3 = \frac{1}{e^2 - 1};$$

$$c_4 = \frac{e^2}{e^2 - 1}.$$

$$\begin{cases} y = x \\ z = \dfrac{sh(x-1)}{sh1} \cdot \end{cases}$$

В общем случае может оказаться, что граничных условий не хватает чтобы определить все c, тогда в решении некоторые c остаются произвольными.

Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных

Для простоты рассмотрим функционалы функций, зависящих от 2-х переменных.

Пусть функция $Z(x, y)$ зависит от 2-х переменных. Физический смысл $Z(x, y)$ - это некоторая произвольная поверхность. Таким образом, соответствующий функционал можно записать в виде:

$$J[Z(x,y)] = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) dxdy .$$

Чтобы задача имела решение *F* должна быть трижды дифференцированная функция. Будем считать, что искомая функция *Z* в области *D* непрерывна вместе со всеми производными до 2-го порядка включительно. Пусть область *D* имеет границу *Г*. Здесь мы будем вынуждены задавать граничные условия по всей области *Г*. Для того, чтобы поверхность $Z(x, y)$ обеспечивала экстремум функционала необходимо чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера - Остроградского:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} - \frac{\partial}{\partial y}\{F_q\} = 0,$$

где $p = \dfrac{\partial z}{\partial x}$; $q = \dfrac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_p\} = F_{px} + F_{pz}\frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp}\frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq}\frac{\partial q}{\partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\{F_q\} = F_{qy} + F_{qz}\frac{\partial z}{\partial y} + F_{qp}\frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Пример.
Найти экстремум функционала вида

$$J[Z(x,y)] = \iint_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 \right] dxdy .$$

Решение.
Подинтегральная функция имеет вид

$$F(x,y,z,p,q) = p^2 - q^2 .$$

Отсюда нетрудно получить уравнение Эйлера – Остроградского:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(2p) - \frac{\partial}{\partial y}(-2q) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

Далее решение стандартное!

Пусть искомая функция *Z* является функцией *N* переменных:

$$Z = Z(x_1, x_2, ..., x_N).$$

Имеем

$$J[Z(x_1, x_2 ... x_N)] = \int_D ... \int_D F(x_1, x_2, ... x_N, z, p, p_2, ..., p_N) dx_1 dx_2 ... dx_N .$$

$$p_k = \frac{\partial z}{\partial x_k},\ k = 1 \div n .$$

Уравнение Эйлера - Остроградского имеет вид:

$$F_z - \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ F_{p_i} \right\} = 0;$$

$$F_z - \sum_{i=1}^{n} (F_{x_i p_i} + F_{z p_i} p_i + F_{p_i p_i} \frac{\partial p_i}{\partial x_i}) = 0 .$$

В этой ситуации *Г* не линия, а некоторая многомерная граница многомерной области.

Условный экстремум

Вариационная задача, в которой находится экстремум функционала на искомую функцию называется задачей на условный экстремум.

1. Изопериметрическая задача.

Пусть даны 2 функции: $F(x, y, y'), G(x, y, y')$. Предполагается, что они имеют непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков на рассматриваемом интервале $x_0 \le x \le x_1$, при любом y'. Пусть функционал определяется следующим выражением:

$$K[y] = \int_{x0}^{x1} G(x, y, y')dx = l, \qquad (*)$$

где l - заданное значение.
Изопериметрическая задача сводится к следующим действиям.
Определяется экстремум функционала J.

$$J[y] = \int_{x0}^{x1} F(x, y, y')dx \to extr. \qquad (**)$$

При решении такой проблемы используется *теорема Эйлера*:
Если кривая $y = y(x)$ дает условный экстремум функционалу

$$J[y] = \int_{x0}^{x1} F(x, y, y')dx,$$

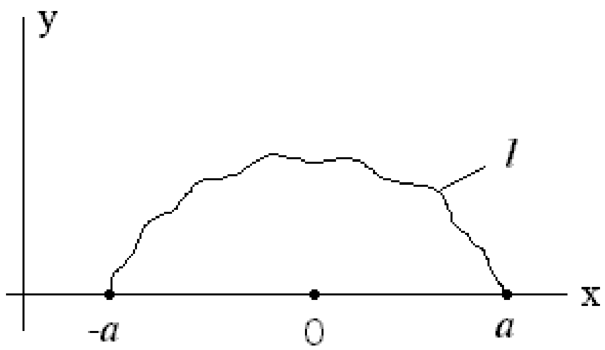
при условии

$$K[y] = \int_{x0}^{x1} G(x, y, y')dx = l,\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,$$

и $y(x)$ не является экстремалью функционала $K[y]$, то существует такая const λ, что кривая $y(x)$ есть безусловная экстремаль функционала

$$L = \int_{x0}^{x1} [F(x, y, y')dx + \lambda G(x, y, y')]dx.$$

Пример.



$y(-a) = y(a) = 0$.
Дана длина линии $l > 2a$.
Требуется найти такую функцию $y(x)$, чтобы площадь, охватываемая кривой l была максимальна.
Решение.
Задача сводится к отысканию экстремума выражения:

$$J[y(x)] = \int_a^b y(x)dx;$$

$$y(-a) = y(0) = 0;$$

$$K[y] = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}\,dx = l;$$

$$H = F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{1+y'^2};$$

$$L = \int_{-a}^{a} H(x, y, y')\,dx.$$

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 1;$$

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x + c_1;$$

$(x+c_1)^2 + (y+c_2)^2 = \lambda^2$ - уравнение фрагмента окружности.

Закон взаимности изопериметрических задач

$$\left.\begin{array}{l} J[y] \to extr \\ K[y] = const \end{array}\right\} y - ?$$

Те же самые экстремали *y* окажутся решением другой задачи.

$$\left.\begin{array}{l} K[y] \to extr \\ J[y] = const \end{array}\right\}$$

Случай 1.2.

Условий несколько.

Если функция $y(x)$ дает функционалу $J_0[y]$ условный экстремум при условиях

$$\begin{cases} J_1[y] = l_1 \\ J_2[y] = l_2 \\ ------ \\ J_k[y] = l_k \end{cases},$$

то существует такой набор const $\{\lambda_i\}$, $i = 0 \div k$, $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + ... + \lambda_k^2 = 1$, что кривая *y* дает безусловный экстремум для функционала

$$L = \int_{x0}^{x1} (\lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + ... + \lambda_k F_k)\,dx;$$

$$J_i[y] = \int_{x0}^{x1} F_i(x, y, y')\,dx.$$

Случай 1.3.
Изопериметрическими называют и следующие задачи

$$J[y]=\int_{x0}^{x1} F(x, y_1, y_2 ... y_n,\ y_1^{'}, y_2^{'} ... y_n^{'})dx\ ,$$

при условиях

$$\begin{cases} \int_{x0}^{x1} G_1(x, y_1 ... y_n, y_1^{'} ... y_n^{'})dx = l_1 \\ \int_{x0}^{x1} G_2(x, y_1 ... y_n, y_1^{'} ... y_n^{'})dx = l_2 \\ ----------------- \\ \int_{x0}^{x1} G_m(x, y_1 ... y_n, y_1^{'} ... y_n^{'})dx = l_m \end{cases}.$$

Требования на непрерывность функции такие же.

Решение.
Для получения решения составляют функционал

$$\Phi[y_1 \div y_n]=\int_{x0}^{x1}\left(F_0+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i G_i\right)dx\ .$$

Его решают обычным способом на поиск безусловного экстремума.

Пример.
Найти экстремаль функционала следующего вида:

$$J[y(x), Z(x)]=\int_0^1 (y'^2+z'^2-4xz'-4z)dx\,;$$

$$\begin{cases} y(0)=0, \quad z(0)=0 \\ y(1)=1, \quad z(1)=1 \end{cases};$$

$$\int_0^1 (y'^2-xy'-z'^2)dx = 2\,;$$

$$\Phi=\int_0^1 [y'^2+z'^2-4xz'-4z+\lambda(y'^2-xy'-z'^2)]dx\,;$$

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}(2y'+2\lambda y'-\lambda x)=0 \\ -4-\frac{d}{dx}(2z'-4x-2\lambda z')=0 \end{cases};$$

Ее решение

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{\lambda x^2 + 2c_1 x}{4(1+\lambda)} + c_2 \\ z(x) = \dfrac{c_3 x}{2(1-\lambda)} + c_4 \end{cases};$$

Расчет граничных условий дает следующее:

$$c_1 = \frac{3\lambda + 4}{2},\ c_2 = 0,\ c_3 = 2(1-\lambda),\ c_4 = 0;$$

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{\lambda x^2 + (3\lambda + 4)x}{4(1+\lambda)} \\ z(x) = x \end{cases};$$

$$\frac{1}{3}(23\lambda^2 + 46\lambda + 24) = 48(\lambda^2 + 2\lambda + 1);$$

$$\lambda_1 = -\frac{10}{11};$$

$\lambda_1 = -\dfrac{12}{11}$ - не удовлетворяет исходному изопериметрическому условию

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{7x - 5x^2}{2} \\ z(x) = x \end{cases}.$$

Задача Лагранжа

Это тоже задачи на условный экстремум.
Постановка задачи.
Найти функции $y_1, y_2, ..., y_n$, обеспечивающие экстремум функционала:

$$J\left[y_1 \div y_n\right] = \int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y_1, ... y_n, y'_1, ... y'_n\right) dx,$$

при граничных условиях:

$$y_j\left(x_0\right) = y_{j0};\ \ y_j\left(x_1\right) = y_{j1};\ \ j = 1 \div n.$$

Дополнительные условия, которые относятся не к функционалам от искомых функций, а к соотношениям между ними:

$$\begin{cases} \varphi_1 = \varphi_1(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0 \\ \varphi_2 = \varphi_2(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m = \varphi_m(x, y_1, y_2, ..., y_n) = 0 \end{cases}, \qquad m<n.$$

Для поиска решения пользуются следующей теоремой.

Теорема: функции $y_1, y_2, ..., y_n$, реализующие экстремум функционала J при наборе условий φ_i,, $i=1\div m$, удовлетворяют при соответствующем выборе множителя $\lambda_i(x)$, $i=1\div m$, уравнениям Эйлера для следующего функционала:

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1} \left[F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i(x) \varphi_i \right] dx .$$

$\varphi_i=0$ можно считать уравнениями Эйлера для функционала J^*, если аргументами функционала считать не только функции $y_1(x) \div y_n(x)$, но и функции $\lambda_1(x) \div \lambda_m(x)$. Обозначим

$$F + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i = \Phi(x, y_1, ..., y_n, y'_1, ..., y'_n).$$

Тогда и функции $y_j(x)$ и функции $\lambda_i(x)$ опеределяются из совместного решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \Phi_{y_i} - \dfrac{d}{dx} \Phi_{y'_j} = 0; \quad (j = 1...n) \\ \varphi_i(x, y_1, ..., y_n) = 0; \quad (i = 1...m) \end{cases}.$$

Пример.

Дана поверхность, удовлетворяющая следующему уравнению:

$$15x - 7y + z - 22 = 0.$$

На ней даны две точки: A(1;-1;0); B(2;1;-1). Найти уравнение линии кротчайшего расстояния.

Решение.

На любой поверхности, удовлетворяющей уравнению $\varphi(x, y, z) = 0$ расстояние между точками $A(x_0,y_0,z_0)$; $B(x_1,y_1,z_1)$ определяется по формуле:

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$; $y=y(x)$; $z=z(x)$ – линии поверхности.

Найти $\min\, l$ при граничных условиях A и B и дополнительном условии, описывающем плоскость:

$x_0=1$; $x_1=2$; $\varphi(x,y,z)$ – уравнение плоскости.

Составим вспомогательный функционал вида:

$$J^* = \int_1^2 [\sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda(x)(15x-7y+z-22)]dx.$$

Выпишем из него уравнение Эйлера:

$$\begin{cases} \lambda(x)(-7) - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right) = 0 \\ \lambda(x)\cdot 1 - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right) = 0 \\ 15x-7y+z-22=0 \end{cases}.$$

Умножим 2-е уравнение на 7 и сложим с первым:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'-7z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right) = 0;$$

$$\frac{y'-7z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C_1; \quad z' = 7y'-15;$$

$$y(x) = C_3 x + C_2; \quad C_3=2; \quad C_2=-3;$$

$$\begin{cases} y(x) = 2x-3 \\ z(x) = 1-x \end{cases};$$

$$\lambda(x) \equiv 0; \quad l = \sqrt{6}.$$

Геодезической линией называется линия наименьшей длины, лежащая на данной поверхности и соединяющая две заданные ее точки.

Вариационные задачи

Это класс задач, когда пределы интеграла не являются постоянными.

1. Постейшая задача с подвижными концами.

Пусть $F(x,y,y')$ - трижды дифференцируемая функция по всем своим аргументам. Пусть в плоскости XOY заданы две кривые:

$$y_0 = \varphi(x);$$

$$y_1 = \psi(x).$$

Рассмотрим фунционал:

$$J[y]=\int_{\gamma} F(x,y,y')dx\,.$$

Будем считать, что этот функционал определен в классе кривых $y(x)$ таких, что их концы лежат на этих линиях $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Требуется найти экстремум исходного функционала. Для решения воспользуемся следующей *теоремой:*
Пусть кривая $y(x)$ дает экстремум функционалу

$$J[y]=\int_{\gamma} F(x,y,y')dx\,.$$

Среди всех кривых, соединяющих две произвольные точки двух заданных линий $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. Тогда $y(x)$ тоже называется экстремалью и на ее концах $A(x_0,y_0,z_0)$; $B(x_1,y_1,z_1)$ выполняются условия трансверсальности вида:

$$\begin{cases}\left[F+(\varphi'-y')F_{y'}\right]_{x=x_0}=0\\ \left[F+(\psi'-y')F_{y'}\right]_{x=x_1}=0\end{cases}.$$

Эти условия трансверсальности и есть способы нахождения экстремали. Решение с использованием этой теоремы находится следующей последовательностью действий:

1. Написать и решить соответствующее уравнение Эйлера обычным способом, считая границы неподвижными. При этом мы получим $y=f(x,c_1,c_2)$.
2. Используем два уравнения трансверсальности и два новых уравнения.

$$f(x_0,c_1,c_2)=\varphi(x_0);$$
$$f(x_0,c_1,c_2)=\varphi(x_0).$$

Мы получаем систему из 4-х уравнений с четырьмя неизвестными.

3. Решая эту систему мы находим const c_1,c_2,x_0,x_1.

Пример.
Найти наикратчайшее расстояние между двумя линиями, которые задаются следующими уравнениями:

$$y=x^2,\ x-y=5.$$

Решение.
Оно сводится к нахождению экстремального значения функционала

$$J=\int_{x0}^{x1}\sqrt{1+y'^2}\,dx.$$

$$\varphi(x)=x^2;$$
$$\psi(x)=x-5.$$

1. Решаем исходное уравнение Эйлера, считая граничные точки как бы фиксированными: $y = c_1 x + c_2$. Условие трансверсальности для этой ситуации имеет следующий вид:

$$\begin{cases} \left[\sqrt{1+y'^2} + (2x - y')\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = 0, \quad \text{при } x = x_0 \\ \left[\sqrt{1+y'^2} + (1 - y')\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} \right] = 0, \quad \text{при } x = x_1 \end{cases};$$

$$\begin{cases} c_1 x_0 + c_1 = x_0^2 \\ c_1 x_1 + c_1 = x_1 - 5 \end{cases};$$

$$y' = c_1;$$

$$\begin{cases} \sqrt{1+c_1^2} + (2x_0 - c_1)\dfrac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} = 0 \\ \sqrt{1+c_1^2} + (1 - c_1)\dfrac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}} = 0 \end{cases};$$

$$c_1 = -1; \quad c_2 = \frac{3}{4};$$

$$x_0 = \frac{1}{2}; \quad x_1 = \frac{23}{8}.$$

Экстремум достигается на функции $y = -x + 3/4$. При этом минимальное расстояние равно $l = \int\limits_{1/2}^{23/8} \sqrt{1+(-1)^2}\,,\, dx = \sqrt{2}x \Big|_{1/2}^{23/8} = \dfrac{19\sqrt{2}}{8}$.

Задача для 3-х мерного пространства

Для этой задачи линии находятся в 3-х мерном пространстве, т.е. необходимо найти функционал вида:

$$J[y,z] = \int\limits_{x0}^{x1} F(x, y, z, y', z')dx .$$

При этом считаем, что хотя бы одна из граничных точек перемещается по заданной кривой.

Тогда экстремум функционала J может достигаться лишь на кривых, удовлетворяющих системе уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0 \\ F_z - \dfrac{d}{dx} F_{z'} = 0 \end{cases}.$$

Для простоты будем считать, что точка *A* закреплена неподвижно, а точка *B* может перемещаться по кривой, которая задается системой уравнений:

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases};$$

$$A(x_0, y_0, z_0),\ B(x, y, z).$$

В этом случае условие трансверсальности примет вид:

$$F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - Z')F_{z'} = 0, \quad \text{при } x = x_1.$$

Если же и точка *B* перемещается по кривой, то это значит, что положение точки *A* можно определить системой:

$$\begin{cases} y = \tilde{\varphi}(x) \\ z = \tilde{\psi}(x) \end{cases}.$$

Условие трансверсальности для точки А имеет вид:

$$F - (\tilde{\varphi} - y')F_{y'} + (\tilde{\psi} - Z')F_{z'} = 0, \quad \text{при } x = x_0.$$

Пример.

Найти кратчайшее расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до прямой

$$\begin{cases} y = mx + p \\ z = nx + q \end{cases}.$$

Решение.

Задача сводится к отысканию интеграла

$$J[y, z] = \int_{x0}^{x1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx,$$

при условии что x_1 лежит на линии. Можно записать

$$\begin{cases} \varphi(x) = mx + p \\ \psi(x) = nx + q \end{cases}.$$

Общее решение в этом случае имеет вид:

$$\sqrt{1+y'^2+z'^2}+(m-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+(n-z')\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=0, \quad \text{при } x=x_1$$

Для облегчения решения учтем, что $y'=c_1, z'=c_3$. Подставляя это в условие трансверсальности и упрощая, получаем $1+mc_1+nc_3=0$. Необходимо учесть, что искомая экстремаль должна проходить через точку m, а следовательно, порождать систему уравнений:

$$\begin{cases} y=c_1x+c_2 \\ z=c_3x+c_4 \end{cases}.$$

Другой конец перемещается по прямой, значит точка x_1 связана системой:

$$\begin{cases} c_1x_1+c_2=mx_1+p \\ c_3x_1+c_4=nx_1+q \end{cases}.$$

Таким образом, имеется 5 уравнений и 5 неизвестных x_1, c_1, c_2, c_3, c_4. Решая эти уравнения, получаем:

$$x_1=\frac{x_0+m(y_0-p)+n(z_0-q)}{1+n^2+m^2};$$

$$c_1=\frac{mx_0+mn(z_0-q)-(1+n^2)(y_0-p)}{m(y_0-p)+n(z_0-q)-(m^2+n^2)x_0};$$

$$c_2=\frac{nx_0+mn(y_0-p)-(1+m^2)(z_0-q)}{m(y_0-p)+n(z_0-q)-(m^2+n^2)x_0}.$$

Пусть одна из точек неподвижна $A(x_0, y_0, z_0)$. Другая точка может перемещаться по некоторой поверхности, уравнение которой задается уравнением $z=\varphi(x,y)$. В этом случае условие трансверсальности принимает вид:

$$\begin{cases} \left[F-y'F_{y'}+(\varphi'_x-z')F_{z'}\right]_{x=x_1}=0 \\ \left[F_{y'}+F_{z'}\varphi'_y\right]_{x=x_1}=0 \end{cases};$$

Эти условия, совместно с уравнением $z=\varphi(x,y)$ дают возможность найти две произвольные константы в уравнении Эйлера, а другие две константы определяются из условия прохождения экстремали через неподвижную точку A.

Пример.

Дана точка $A(1,1,1)$, дана сфера, поверхность которой описывается уравнением $x^2+y^2+z^2=1$. Найти кротчайшее расстояние от точки до сферы.

Решение.

Задача сводится к исследованию на экстремум следующего функционала:

$$J[y,z]=\int_{x_1}^{1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx\,.$$

Экстремум в общем виде дается следующей системой уравнений:

$$\begin{cases} y=C_1x+C_2 \\ z=C_3x+C_4 \end{cases}.$$

Условие трансверсальности примет вид:

$$\begin{cases} \left.\left[\sqrt{1+y'^2+z'^2}-\dfrac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\left(\dfrac{-x}{\sqrt{1-x^2-y^2}}-z'\right)\cdot\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right]\right|_{x=x_1}=0 \\ \left.\left[\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}+\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\cdot\dfrac{(-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\right]\right|_{x=x_1}=0 \end{cases}.$$

Отсюда получается следующее:

$$\begin{cases} z_1+C_3x_1=0 \\ C_1z_1-C_3y_1=0 \end{cases},$$

где x_1,y_2,z_1 – координаты точки *B*. Они нам пока не известны.

$$\begin{cases} y_1=C_1x_1+C_2 \\ z_1=C_3x_1+C_4 \end{cases};$$

$$C_1=1;\; C_2=0;C_3=1;C_4=0\,.$$

Отсюда следует:

$$\begin{cases} y(x)=y=x \\ z(x)=z=x \end{cases}.$$