Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Владимирский государственный университет имени
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»(ВлГУ)**

Институт информационных технологий и радиоэлектроники

Кафедра радиотехники и радиосистем

Полушин Петр Алексеевич

"История и методология науки и техники"

Методические указания
к практическим занятиям по дисциплине «История и методология науки и техники» для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению 11.04.01 «Радиотехника»

Владимир, 2018

Целями практических занятий студентов является приобретение навыков решения задач в области вариационного исчисления, как одного из современных методов исследований в научной области. Такие навыки выступают важной частью во многих областях научно-технического творчества и должны быть освоены работниками, специализирующимися в радиотехническом направлении.

Приобретения навыков производится в последовательности, определяемой структурой рабочей программы. Задания приведены в части 1. Для облегчения овладевания навыками практических расчетов в методических указаниях в части 2 приведены необходимые начальные теоретические сведения.

ЧАСТЬ 1.

Задачи на поиск условных экстремумов функций.

Прямой метод.

Дана функция

$$z = (x-1)^2 + (y+1)^2.$$

Найти экстремум при условии

$$\varphi(x,y) = x + y - 1 = 0;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1) = 0; \quad x^{\nabla} = 1;$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 2(y+1) = 0; \quad y^{\nabla} = -1;$$

$$z_{ex} = z_{\min} = 0.$$

Из условия выразим *y*:

$$y = 1 - x;$$

$$z = (x-1)^2 + (2-x)^2;$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2(x-1) + 2(2-x) = 0; \quad x^{\nabla} = 1{,}5; \quad y^{\nabla} = -0{,}5;$$

$$z_{\min} = 1/2.$$

Метод множителей Лагранжа

$$f(x,y,z) = xyz; \quad \begin{matrix} \varphi_1(x,y,z) = x + y - z - 3 = 0; \\ \varphi_2(x,y,z) = x - y - z - 8 = 0; \end{matrix}$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = xz + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = xy - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \\ x - y - z - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\Phi(x,y,z) = xyz + \lambda_1(x + y - z - 3) + \lambda_2(x - y - z - 8);$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} = yz + \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial y} = xz + \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = xy - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ x + y - z - 3 = 0 \\ x - y - z - 8 = 0 \end{cases}$$

$$\lambda_1 = \frac{11}{32}; \ \lambda_2 = \frac{231}{32}; \ x^{\triangledown} = \frac{11}{4}; \ y^{\triangledown} = -\frac{5}{2}; \ z^{\triangledown} = -\frac{11}{4}; \ f_{ex} = \frac{605}{32};$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = z; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = y; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = x;$$

$$d^2 \Phi = 2xdydz - 2ydxdy + 2zdxdy;$$

$$\begin{cases} dx + dy - dz = 0 \\ dx - dy - dz = 0 \end{cases};$$

$$dy = 0; \quad dx = dz;$$

$$d^2\Phi = 2y^{\nabla} dx^2.$$

При любом знаке x квадратичная больше нуля, то есть это минимум.

$$d^2\Phi = 2\left(-\frac{5}{2}\right)dx^2 = -5dx^2 < 0.$$

Примеры функционалов

Пример1.

Пусть M - совокупность всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$.

Определенный интеграл будет функционалом :

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x)dx;$$

$$y(x) = c \quad \to \quad J = c;$$

$$y(x) = e^x \quad \to \quad J = e - 1;$$

$$y(x) = \cos \pi x \quad \to \quad J = 0.$$

Пример2.

Пусть M - класс функций, имеющих непрерывную производную на отрезке $[a,b]$ и пусть $x_0 \in [a,b]$, тогда функционалом можно считать следующее:

$$J = y'(x_0); \quad a = 1; \quad b = 3; \quad x_0 = 2;$$

$$y(x) = x^2 \quad \to \quad J = 4;$$

$$y(x) = \ln(1 + x) \quad \to \quad J = \frac{1}{3}.$$

Задача Эйлера-Лагранжа

Примеры.

1) Дан функционал:

$$J[y(x)] = \int_1^2 [y'^2 - 2xy]dx, \; y(1)=0, \; y(2)=-1;$$

$$F(x, y, y') = y'^2 - 2xy;$$

$$F_{y'} = \frac{d}{d(y')} F = 2y';$$

$$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = \frac{d}{dx}(2y') = 2y''; \;\; F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = -2x; \;\; -2x - 2y'' = 0; \;\; y + x = 0;$$

$$y = -\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 .$$

Подставим граничные условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{1}{6} \\ 2C_1 + C_2 = \dfrac{2}{6} \end{cases};$$

$$C_1 = \frac{1}{6}; \;\; C_2 = 0; \;\; y = \frac{x}{6}\left(1 - x^2\right).$$

2) Найти экстремум функционала:

$$J[y(x)] = \int_1^3 (3x - y) y dx .$$

Граничные условия:

$y(1)=1; \; y(3)=4{,}5.$

Уравнения Эйлера, в этом случае будут следующими:

$$3x - 2y = 0;$$

$$y(x) = 1{,}5x .$$

Не трудно убедиться, что полученная экстремаль не удовлетворяет первому граничному условию. Значит задача решений не имеет.

3) Найти экстремум функционала:

$$J[y(x)] = \int_0^{2\pi} \left(y'^2 - y^2\right) dx .$$

$y(0)=1; \; y(2\pi)=1; \; y''+y=0;$

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x ;$$

$$y = \cos x + C \sin x .$$

Экстремалью являются все эти функции при любом C. То есть имеем бесконечное множество решений.

Случаи упрощения или понижения порядка уравнения Эйлера

<u>*F* не зависит от *y'*.</u>

Пример.

$$J[y(x)] = \int_0^{\pi/2} y(2x - y) dx, \; y(0) = 0,$$

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{\pi}{2},\ 2x-2y=0,\ y=x.$$

F -линейная функция от y'

Пример.

$$J[y(x)]=\int_a^b\left(y^2+2yy'x\right)dx;$$

$$y(a)=A;\quad y(b)=B;$$

$$F=y^2+2yy'\left(y^2\right)+y'(2y);$$

$$\frac{\partial M}{\partial y}=2y;\quad \frac{\partial N}{\partial x}=2y;\quad \frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\equiv 0.$$

F зависит только от y.

Пример.
Найти экстремум функционала.

$$J[y(x)]=\int_a^b\sqrt{1+y^2(x)}dx;$$

$$y(a)=A;\quad y(b)=B;$$

$$y''(x)=0;\quad y=C_1x+C_2;\quad y=\frac{B-A}{b-a}(x-a)+A.$$

F не зависит от y.

Пример.
Даны 2 точки $A(1,3)$, $B(2,3)$. Среди всевозможных кривых, соединяющих эти 2 точки, найти ту среди которых может достигаться экстремум следующего функционала:

$$J[y(x)]=\int_a^b y'(x)\left[1+x^2y'(x)\right]dx.$$

В этом случае уравнение Эйлера имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dx}F_y(x,y')=0;\quad \frac{d}{dx}\left(1+2x^2y'\right)=0;$$

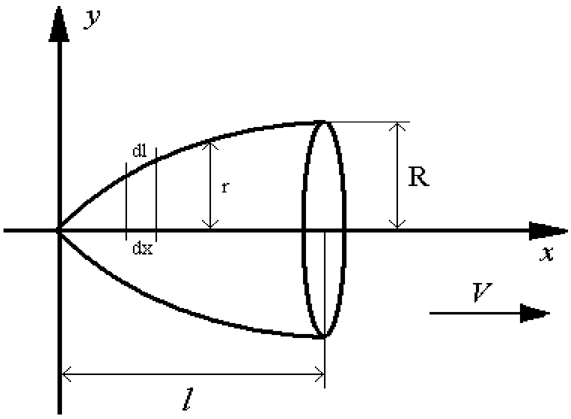
$$1+2x^2y'=C;\quad y'=\frac{C-1}{2x^2};$$

$$y(x)=\frac{C_1}{x}+C_2;\quad C_1=\frac{1-C}{2};$$

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C \\ 5 = \dfrac{C_1}{2} + C_2 \end{cases}; \qquad y(x) = 7 - \frac{4}{x}.$$

<u>*F* не зависит от *x* в явном виде</u>.

Пример.
Поток газа. В нем движется тело. Какова должна быть форма тела, чтобы оно испытывало наименьшее сопротивление?



Если плотность газа мала и мы далеки от скорости звука, то угол падения равен углу отражения.

$$p = 2\rho V^2 \sin^2\theta$$

$$dl = (1 + y')^{1/2} dx; \quad r = y(x).$$

На такое кольцо действует сила:

$$dF = 2\rho V^2 \sin^2\theta \left[2\pi y \left(1 + y'^2\right)^{1/2}\right] \sin\theta$$

$$F = \int_0^l dF.$$

Упрощенное решение: $\sin\theta = \dfrac{y'}{\left(1 + y'^2\right)^{1/2}} \approx y'$, тогда сила, тормозящее тело

$$F = 4\pi\rho V^2 \int_0^l y'^3\, y dx; \quad y(0) = 0; \quad y(l) = R.$$

Уравнение Эйлера:

$$y'^3 - 3\frac{d}{dx}\left(yy'^2\right) = 0.$$

Умножим обе части на *y'*. Левая часть становится производной от выражения $y'^3 y$. Интегрируем:

$$y'^3\, y = C; \;\; y' = \frac{C_1}{\sqrt[3]{y}}; \;\; y = \left(C_1 x + C_2\right)^{3/4},$$

подставляя начальные условия: $y = R\left(\dfrac{x}{C}\right)^{3/4}.$

Инвариантность уравнения Эйлера

Пример.
Найти экстремум у функционала
$$J[y]=\int_0^{\ln 2}\left(e^{-x}y'^2-e^x y^2\right)dx\,.$$
Уравнение Эйлера для подинтегральной функции:
$$y''-y'+e^{2x}y=0\,.$$
Делаем замену переменных $(x=\ln U;\quad y=V)$. Тогда исходный функционал преобразуется к виду:
$$J[V]=\int_0^2\left(e^{-\ln U}U^2V'^2-e^{\ln U}V^2\right)\frac{dU}{U}=\int_0^2\left(V'^2-V^2\right)dU\,.$$
Для такого функционала уравнение Эйлера существенно проще:
$$V''+V=0;$$
$$V=C_1\cos U+C_2\sin U.$$
Делая обратную подстановку:
$$y=C_1\cos e^x+C_2\sin e^x\,.$$

Вариационные задачи в параметрической форме

Пример.
Найти экстремаль функционала.
$$J=\int_{0,0}^{x,y}y^2y'^2\,dx\,;\qquad \begin{cases}x=x(t)\\ y=y(t)\end{cases}.$$
Преобразуем подинтегральное выражение, чтобы исключить зависимость от *t*.
$$y^2y'^2\,dx=y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2dx=y^2\,\frac{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\frac{dx}{dt}dt=y^2\,\frac{y'^2_t}{x'^2_t}x'_t\,dt=y^2\,\frac{y'^2_t}{x'_t}dt\,.$$
Рассмотрим первое уравнений Эйлера:
$$F_x=\frac{d}{dx}\left(y^2\,\frac{y'^2}{x'}\right)=0;\quad F_{x'}=\frac{d}{dx'}\left(y^2\,\frac{y'^2}{x'}\right)=-\frac{y^2y'^2}{x'^2};$$
$$\frac{d}{dt}\left(y^2\,\frac{y'^2}{x'^2}\right)=0;\quad \left(y^2\,\frac{y'^2}{x'^2}\right)=C_1;\;\; y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2=C_1;\; y\frac{dy}{dx}=\sqrt{C_1}\,;$$
$$y^2=2\sqrt{C_1}\,x+C_2\,.$$

Она должна проходить через соответствующие граничные точки:

$$y^2 = \left(\frac{y_1^2}{x_1}\right)x,$$

где y_1, x_1 - координаты точки.

Обобщение задачи Эйлера

Функционалы, зависящие от производных высших порядков.

Пример.
Найти экстремаль функционала:

$$J[y(x)] = \int_0^1 \left(720x^2 y - y''\right)dx.$$

Граничные условия:

$$y(0) = 0;\ y'(0) = 1;$$
$$y(1) = 0;\ y'(1) = 1.$$

Не трудно получить уравнение Эйлера-Пуассона:

$$720x^2 + \frac{d^2}{dx^2}(-2y'') = 0;\quad y'' = 360x^2;$$
$$y = x^6 + C_1x^3 + C_2x^2 + C_3x + C_4.$$

Подставляем граничные условия:

$$C_1 = -2;\ C_2 = 0;\ C_3 = 1;\ C_4 = 0;$$
$$y(x) = x^6 - 2x^3 + x.$$

Функционалы, зависящие от m функций

Пример.
Найти экстремум функционала

$$J[y(x), z(x)] = \int_1^2 (y'^2 + z^2 + z'^2)dx.$$

Граничные условия:

$$y(1) = 1;\ y(2) = 2;\ z(1) = 0;\ z(2) = 1.$$

Система дифференциальных уравнений для этого функционала будет иметь вид:

$$\begin{cases} y'' = 0 \\ z - z'' = 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, получим:

$$\begin{cases} y = c_1x + c_2 \\ z = c_3e^x - c_4e^{-x} \end{cases}.$$

Для набора *c* можно получить следующие выражения:

$$c_1 = 1;$$

$$c_2 = 0;$$

$$c_3 = \frac{1}{e^2 - 1};$$

$$c_4 = \frac{e^2}{e^2 - 1}.$$

$$\begin{cases} y = x \\ z = \dfrac{sh(x-1)}{sh1} \cdot \end{cases}$$

<u>Функционалы, зависящие от функции нескольких независимых переменных</u>

Пример.

Найти экстремум функционала вида

$$J[Z(x,y)] = \iint\limits_D \left[\left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right] dxdy .$$

Решение.

Подинтегральная функция имеет вид

$$F(x, y, z, p, q) = p^2 - q^2 .$$

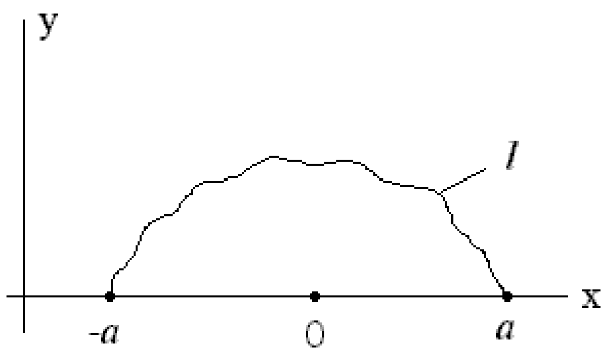
Отсюда нетрудно получить уравнение Эйлера – Остроградского:

$$-\frac{\partial}{\partial x}(2p) - \frac{\partial}{\partial y}(-2q) = 0;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0.$$

Задачи на условный экстремум

Пример.



$y(-a) = y(a) = 0$.

Дана длина линии $l > 2a$.

Требуется найти такую функцию $y(x)$, чтобы площадь, охватываемая кривой l была максимальна.

Решение.

Задача сводится к отысканию экстремума выражения:

$$J[y(x)] = \int_a^b y(x)dx;$$

$$y(-a) = y(0) = 0;$$

$$K[y] = \int_{-a}^{a} \sqrt{1+y'^2}dx = l;$$

$$H = F + \lambda G = y + \lambda\sqrt{1+y'^2};$$

$$L = \int_{-a}^{a} H(x, y, y')dx.$$

Уравнение Эйлера имеет вид:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}\right) = 1;$$

$$\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}} = x + c_1;$$

$$(x+c_1)^2 + (y+c_2)^2 = \lambda^2$$ - уравнение фрагмента окружности

Задача Лагранжа

Пример.
Дана поверхность, удовлетворяющая следующему уравнению:

$$15x - 7y + z - 22 = 0.$$

На ней даны две точки: A(1;-1;0); B(2;1;-1). Найти уравнение линии кротчайшего расстояния.

Решение.

На любой поверхности, удовлетворяющей уравнению $\varphi(x, y, z) = 0$ расстояние между точками $A(x_0,y_0,z_0)$; $B(x_1,y_1,z_1)$ определяется по формуле:

$$l = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\, dx$$; $y=y(x)$; $z=z(x)$ – линии поверхности.

Найти min l при граничных условиях A и B и дополнительном условии, описывающем плоскость:

$x_0=1$; $x_1=2$; $\varphi(x,y,z)$ – уравнение плоскости.

Составим вспомогательный функционал вида:

$$J^* = \int_1^2 [\sqrt{1+y'^2+z'^2} + \lambda(x)(15x - 7y + z - 22)]dx.$$

Выпишем из него уравнение Эйлера:

$$\begin{cases} \lambda(x)(-7) - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right) = 0 \\ \lambda(x)\cdot 1 - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right) = 0 \\ 15x - 7y + z - 22 = 0 \end{cases}.$$

Умножим 2-е уравнение на 7 и сложим с первым:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'-7z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right) = 0;$$

$$\frac{y'-7z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = C_1; \quad z' = 7y' - 15;$$

$$y(x) = C_3 x + C_2; \quad C_3=2; \quad C_2=-3;$$

$$\begin{cases} y(x) = 2x - 3 \\ z(x) = 1 - x \end{cases};$$

$$\lambda(x) \equiv 0; \quad l = \sqrt{6}.$$

Теоретический материал

Нахождение условных экстремумов функций

Это область математики, занимающаяся нахождением max-мов, min-мов функций. Если находится экстремум при каких-то условиях, то такие задачи называются условными.

$$Z = f(x_1, ..., x_n).$$

Дополнительные условия требуют, чтобы их формализовали (т.е. преобразовали в набор функций относительно *x*).

$$\left\{\begin{array}{l} \varphi_1(x_1,..., x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1,..., x_n) = 0 \\ --------- \\ \varphi_m(x_1,..., x_n) = 0 \end{array}\right\}, \text{ при } m<n.$$

Это типовая постановка задачи. Такие задачи решаются двумя способами.

Способ 1.

1. Из одного уравнения связи выражается одна из переменных
$x_1 \leftarrow \varphi_1(x_1,..., x_n)$.

Полученное x_1 подставляется в целевую функцию и в $\varphi_2 ... \varphi_m$.

2. Выражается $x_2 \leftarrow \varphi_2$. Подставляется в f, $\varphi_3 ... \varphi_m$, и т.д. Так делается m раз. Получается $f(x_{n-m},..., x_n)$, а условий не остается вообще.

3. Ищется безусловный экстремум и подставляется в обратном порядке в условия связи.

Метод множителя Лагранжа

Условия применимости:

1. Необходимо чтобы функции $f(x_1 \div x_n)$ и $\varphi(x_1 \div x_m)$ были непрерывные и имели непрерывные частные производные $\dfrac{\partial\varphi_i}{\partial x_j}$; $i = 1 \div m$; $j = 1 \div n$.

2. Во всей области определения *x* , ранг матрицы должен быть не меньше *m*.

Составляется квадратная матрица.

а) составляется функция Лагранжа, вида

$$\Phi = f + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \varphi_i,$$

где λ_i - неопределенные множители Лагранжа (неизвестные коэффициенты) б) Составляется n уравнений вида:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_2} = 0 \\ \dots\dots\dots \\ \dfrac{\partial \Phi}{\partial x_n} = 0 \end{cases}.$$

$$\begin{cases} \varphi_1(x_1 \ldots x_n) = 0 \\ \varphi_2(x_1 \ldots x_n) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_m(x_1 \ldots x_n) = 0 \end{cases}.$$

Таким образом мы имеем m+n уравнений и m+n неизвестных. Решаем эту систему. Точки, в которых производная функции f по всем аргументам $x_1 \ldots x_n$ равна нулю, называются стационарными точками. Если одно решение, то он называется глобальным экстремумом. Если несколько решений, то у функции несколько экстремумов. Полученные наборы x указывают координаты экстремума. Но на этом дело не исчерпывается. После этого необходимо проверять каждый экстремум. Возможно 3 варианта:

1) Максимум.
2) Минимум.
3) Седловая точка.

Проверка производится следующим образом:
Строится квадратичная форма

$$d^2\Phi = \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_k} \Delta x_i \Delta x_k \Bigg|_{\substack{x_1 = x_1^\nabla \\ x_2 = x_2^\nabla \\ \vdots \\ x_n = x_n^\nabla}}.$$

Если в некоторой малой окрестности квадратичная форма

$d^2\Phi > 0$ - то мы нашли максимум,

$d^2\Phi < 0$ - то мы имеем минимум,

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = z; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = y; \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y \partial z} = x;$$

$$d^2\Phi = 2xdydz - 2ydxdy + 2zdxdy;$$

$$\begin{cases} dx + dy - dz = 0 \\ dx - dy - dz = 0 \end{cases};$$

$$dy = 0; \quad dx = dz;$$

$$d^2\Phi = 2y^{\nabla} dx^2.$$

При любом знаке *x* квадратичная больше нуля, то есть это минимум.

$$d^2\Phi = 2\left(-\frac{5}{2}\right)dx^2 = -5dx^2 < 0.$$

Функционал

Пусть дан некоторый класс *M* функций *y(x)*. Если каждой функции $y(x) \in M$ по некоторому правилу поставлено в соответствие некоторое число *J*, то говорят, что в классе *M* определен функционал *J*.

$$J = J[y(x)].$$

Класс *M*, в котором определен этот функционал, называется областью задания функционала.

Пример1.

Пусть *M* - совокупность всех непрерывных функций на отрезке $[0,1]$.

Определенный интеграл будет функционалом :

$$J[y(x)] = \int_0^1 y(x)dx;$$

$$y(x) = c \quad \to \quad J = c;$$

$$y(x) = e^x \quad \to \quad J = e - 1;$$

Вариации

Вариацией δy аргумента $y(x)$ функционала $J[y(x)]$ называется разность между двумя некоторыми функционалами, обе принадлежат классу *M*.

$$\delta y = y(x) - y(x_0).$$

Если функция *y* *k*-раз дифференцируема, то говорят, про вариацию порядка *k*.

$$(\delta y)^{(k)} = \delta y^{(k)}(x) = y^{(k)}(x) - y^{(k)}(x_0).$$

Говорят, что функции $y(x)$ и $y_1(x)$ близки в смысле нулевого порядка, если на рассмотренном отрезке $[a,b]$ выполняется условие: $\left|y(x) - y_1(x)\right|$ - мал. Геометрически это означает, что на рассмотренном участке функции близки по аргументам. Близость первого порядка - если мала не только их разность, но и разность между их производными.

$$\begin{cases} \left|y(x) - y_1(x)\right| \\ \left|y'(x) - y'(x)\right| \end{cases} \text{- мала.}$$

Близость *k*-го порядка - добавляется условие:

$$\left|y^{(K)}(x) - y_1^{(K)}(x)\right| \text{ - мала.}$$

Вывод. Если выполняется близость *k*-го порядка, то выполняется и близость предыдущего порядка.

Пример.

Имеются кривые $y(x) = \dfrac{\sin^2}{n}$ и $y_1(x) \equiv 0$. Рассмотрим их на интервале $[0, \pi]$. Можно утверждать, что они близки в смысле нулевого порядка при больших n.

$$\left|y(x) - y_1(x)\right| = \left|\frac{\sin n^2 x}{n}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

А в смысле первого порядка близости нет.

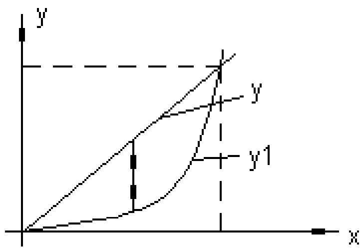
$$\left|y'(x) - y_1'(x)\right| = n\left|\cos n^2 x\right|;$$

$$x = \frac{2\pi}{n^2}.$$

Расстоянием между кривыми $y = f(x)$, $y_1 = f_1(x)$ на отрезке $a \div b$ (считаем обе функции непрерывными) называется неотрицательное число ρ, равное максимуму модуля разности между ними на этом отрезке.

Пример.

Имеются функции $y = x$ и $y_1 = x^2$, $a \div b = 0 \div 1$.



$$\rho_1(x) = y - y_1 = x - x^2;$$

$$\frac{d\rho_1}{dx} = 1 - 2x;$$

$$1 - 2x = 0;$$

$$x = \frac{1}{2};$$

$$\rho = \frac{1}{4}.$$

Расстоянием *n*-го порядка между кривыми называется наибольший из максимумов из следующих величин:

$$\left| f(x) - f_1(x) \right|$$

$$\left| f'(x) - f_1'(x) \right|$$

$$\vdots$$

$$\left| f^{(n)}(x) - f_1^{(n)}(x) \right|,$$

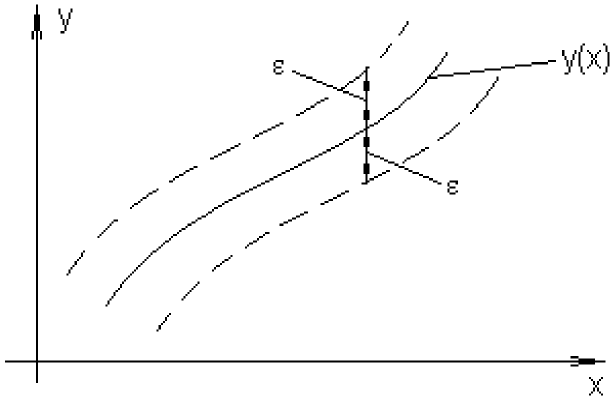
на отрезке $[a, b]$.

$$\rho_n = \rho_n\left[f(x),\, f_1(x)\right] = \max_{0 \le k \le n} \max_{a \le x \le b} \left| f^{(k)}(x) - f_1^{(k)}(x) \right|.$$

ε окрестностью *n*-го порядка кривой $y(x)$ на отрезке $[a, b]$ называется совокупность кривых $f_1(x)$, расстояние *n*-го порядка которых от исходной кривой $y(x)$ меньше ε.

$$\rho_n = \rho_n\left[y(x),\, f_1(x)\right] < \varepsilon.$$

Окружность нулевого порядка называется сильной окружностью. Окружность первого порядка - слабой окружностью. Физический смысл сильной окружности - это совокупность всех непрерывных кривых, которые можно здесь провести.



Функционал $J[y(x)]$ в классе функций *M* называется непрерывным, при $y = y_0(x)$, в смысле близости *n*-го порядка, если для любого ε, можно подобрать такое число $\eta > 0$, чтобы выполнялось условие:

$$\rho_n[y(x), y_0(x)] < \eta;$$

$$|J[y(x)] - J[y_0(x)]| < \varepsilon.$$

В противном случае, он разрывный. Функционал называется линейным, если для него справедливы все свойства линейных операторов.

Простейшая задача вариационного исчисления

$$J[y] = \int_{x1}^{x2} F(x, y, y')dx,$$

где *F* - известная функция;

y - неизвестная, кусочно - гладкая функция.

Требуется найти минимум этого функционала, среди всех кусочно гладких функций *y*.

Условия:

1. Функция *F* должна соединять точки x_1 и x_2.

2. Необходимо чтобы $F(x, y, y') = F(X, Y, Z)$ была непрерывна по всем трем аргументам, а также чтобы были непрерывны все производные до третьего порядка.

Минимум (максимум) функционала $J[y]$, достигаемый в сильной (слабой) окрестности функции $y_0(x)$ называется сильным (слабым) минимумом (максимумом) функционала $J[y]$. Экстремум функционала $J[y]$ по всей совокупности функций *y* на которых он определен, называется абсолютным экстремумом.

Необходимое условие экстремума.
1-я и 2-я вариации функционала

Пусть $\eta(x)$ - некая произвольная кусочно - гладкая функция, которая удовлетворяет условию

$$\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0.$$

Тогда введем функцию

$$\tilde{y}(x) = y(x) + \alpha\eta(x),$$

где α - некоторый параметр.

Тогда совокупность всех возможных функций $\tilde{y}(x)$ описывает слабую окрестность функции *y*.

$$J[\tilde{y}] = \int_{x1}^{x2} F(x, \tilde{y}, y^{'})dx.$$

Примем во внимание, что

$$\begin{bmatrix} \tilde{y}(x) = y(x_1) = y \\ \tilde{y}(x_2) = y(x_2) = y_2 \end{bmatrix}.$$

Следовательно,

$$J[\tilde{y}] = \int_{x1}^{x2} F(x, y + \alpha\eta, y^{'} + \alpha\eta^{'})dx = \varPhi(\alpha).$$

Показано, что $\varPhi(\alpha)$ имеет минимум при $\alpha = 0$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial\varPhi(\alpha)}{\partial\alpha} = 0, \quad \text{при } \alpha = 0 \\ \dfrac{\partial^2\varPhi(\alpha)}{\partial\alpha^2} \geq 0, \quad \text{при } \alpha = 0 \end{cases};$$

$$\frac{\partial\varPhi}{\partial\alpha} = \int_{x1}^{x2} \left[\frac{\partial}{\partial y} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}^{'})\eta + \frac{\partial}{\partial(y^{'})} F(x, \tilde{y}, \tilde{y}^{'})\eta \right] dx = 0.$$

Производная $\dfrac{\partial\varPhi}{\partial\alpha}$ в точке $\alpha = 0$ называется первой вариацией функционала $J[y]$ и обозначается

$$\delta J = \frac{d\varPhi}{d\alpha}|_{\alpha=0}.$$

Вторая производная называется второй вариацией.

$$\delta^2 J = \frac{d^2\varPhi}{d\alpha^2}|_{\alpha=0}.$$

Для того чтобы найденная функция y давала минимум (максимум) $J[y]$ необходимо чтобы

$$\begin{cases} \delta J = 0 \\ \delta^2 J > 0 - \text{минимум} \\ \delta^2 J < 0 - \text{максимум} \end{cases}.$$

Если выражение (*) проинтегрировать по частям, то получим:

$$\delta J = \int_{x_1}^{x_2} \left[\frac{\partial F}{\partial(y')} - \int_{x_1}^{x} \frac{\partial F}{\partial y} dx \right] \eta' dx = 0.$$

Это выражение мы получили для произвольных η. Из этого следует что

$$F_{y'} - \int_{x_1}^{x} F_y dx \equiv C.$$

Это уравнение Эйлера-Лагранжа в интегральной форме.

$$\frac{\partial F}{\partial(y')} = F_{y'}; \ \frac{\partial F}{\partial y} = F_y;$$

$$F_y - \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) = 0. \qquad (**)$$

Выражение (**) является основным уравнением вариационного исчисления. Оно же является первым необходимым экстремумом.

Гладкая функция *y(x)*, являющаяся решением этого уравнения называется экстремальной. Экстремали называют также лагранжевыми кривыми. Экстремаль, удовлетворяющая (**), удовлетворяет:

$$\frac{d}{dx}\left[F - y' F_{y'}\right] - F_x = 0.$$

Кроме этого, применяется развернутая форма записи:

$$y'' F_{yy'} + y' F_{y'y} + F_{y'x} - F_y = 0;$$

$$F_{y'y'} = \frac{d}{d(y')}\left[\frac{d}{d(y')} F\right];$$

$$F_{y'y} = \frac{d}{dy}\left[\frac{d}{d(y')} F\right];$$

$$F(x, y, y') = F(X, Y, Z).$$

Хотя аргументы и связаны между собой, но когда мы производим дифференцирование по одному из аргументов, считаем, что он независимый.

Замечания.

1. Эта формула дает решение с точностью до двух констант, а они определяются из граничных условий.

2. Может оказаться, что при конкретных граничных условиях нет решений или бесконечное множество.
1) Дан функционал:

$$J[y(x)] = \int_1^2 [y'^2 - 2xy]dx,\ y(1)=0,\ y(2)=-1;$$

$$F(x, y, y') = y'^2 - 2xy;$$

$$F_{y'} = \frac{d}{d(y')} F = 2y';$$

$$\frac{d}{dx}(F_{y'}) = \frac{d}{dx}(2y') = 2y'';\ \ F_y = \frac{\partial F}{\partial y} = -2x;\ \ -2x - 2y'' = 0;\ \ y + x = 0;$$

$$y = -\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2.$$

Подставим граничные условия:

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \dfrac{1}{6} \\ 2C_1 + C_2 = \dfrac{2}{6} \end{cases};$$

$$C_1 = \frac{1}{6};\ \ C_2 = 0;\ \ y = \frac{x}{6}(1 - x^2).$$

2) Найти экстремум функционала:

$$J[y(x)] = \int_1^3 (3x - y)y dx.$$

Граничные условия:

$$y(1)=1;\ y(3)=4{,}5.$$

Уравнения Эйлера, в этом случае будут следующими:

$$3x - 2y = 0;$$

$$y(x) = 1{,}5x.$$

Не трудно убедиться, что полученная экстремаль не удовлетворяет первому граничному условию. Значит задача решений не имеет.

3) Найти экстеремаль функционала:

$$J[y(x)] = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2)dx.$$

$$y(0)=1;\ y(2\pi)=1;\ y''+y=0;$$

$$y(x) = C_1 \cos x + C_2 \sin x;$$

$$y = \cos x + C \sin x.$$

Экстремалью являются все эти функции при любом *C*. То есть имеем бесконечное множество решений.

Теорема Вейерштрасса-Эрдмана

Пусть *y(x)* – решение уравнения Эйлера

$$F_y - \frac{d}{dx} F_{y'} = 0.$$

Тогда, если *F* имеет частные производные до 2-го порядка включительно, то во всех точках, где выполняется $\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \neq 0$, функция *y(x)* имеет непрерывную вторую производную, а значит в этой точке нет излома. Если $\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} = 0$, то в этой точке излом.

Линии составленные из кусков экстремалей, удовлетворяющие условию $\frac{\partial^2 F}{\partial (y')^2} \neq 0$ называются ломаными экстремалями.

Условие Лежандра. Во всех точках линии *y(x)*, доставляющей минимум функционалу *J*, должно выполняться условие:

Если $F_{y'y'}(x, y, y') \geq 0$ - минимум.

Если $F_{y'y'}(x, y, y') \leq 0$ - максимум.

$$x_1 \leq x \leq x_2.$$

Условие Вейерштрасса: Если *y* – минимум (максимум), то

$$F(x, y, z) - F(x, y, y') - (z - y')F_{y'}(x, y, y') \geq 0, \ (\leq 0),$$

для произвольных *z* во всех точках этого интеграла.

Случай упрощения или понижения порядка уравнения Эйлера

$$F(x, y, y').$$

Ситуация №1.

F не зависит от *y'*.

$$F_y = 0.$$

Возможности здесь меньше. Поэтому часто возникают ситуации, когда из-за граничных условий нет решения.

Бывают ситуации, когда в какой-то области это уравнение тождественно равно нулю. Это означает, что в пределах этой области функция $J[y]$ - постоянна.

Пример.

$$J[y(x)] = \int_a^b \left(y^2 + 2yy'x\right)dx\,;$$

$$y(a) = A; \quad y(b) = B;$$

$$F = y^2 + 2yy'\left(y^2\right) + y'(2y);$$

$$\frac{\partial M}{\partial y} = 2y; \quad \frac{\partial N}{\partial x} = 2y; \quad \frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x} \equiv 0.$$

Ситуация №3.

F зависит только от y.

$$y''Fy'y' = 0\,.$$

Не трудно получить, что общим решением является:

$$y = C_1 x + C_2\,;$$

где C_1, C_2 - произвольные константы.

Пример.

Найти экстремум функционала.

$$J[y(x)] = \int_a^b \sqrt{1 + y^2(x)}\,dx;$$

$$y(a) = A; \quad y(b) = B;$$

$$y''(x) = 0; \quad y = C_1 x + C_2; \quad y = \frac{B - A}{b - a}(x - a) + A.$$

Ситуация №4.

F не зависит от y.

$$F = F(x, y').$$

В этом случае уравнение Эйлера преобразуется:

$$\frac{d}{dx}F_{y'}(x, y') = 0; \quad F_{y'}(x, y') = C_1.$$

.

Даны 2 точки $A(1,3)$, $B(2,3)$. Среди всевозможных кривых, соединяющих эти 2 точки, найти ту среди которых может достигаться экстремум следующего функционала:

$$J[y(x)] = \int_a^b y'(x)\left[1 + x^2 y'(x)\right]dx.$$

В этом случае уравнение Эйлера имеет следующий вид:

$$\frac{d}{dx}F_y(x, y') = 0; \quad \frac{d}{dx}\left(1 + 2x^2 y'\right) = 0;$$

$$1 + 2x^2 y' = C; \quad y' = \frac{C - 1}{2x^2};$$

$$y(x) = \frac{C_1}{x} + C_2; \quad C_1 = \frac{1 - C}{2};$$

$$\begin{cases} 3 = C_1 + C \\ 5 = \dfrac{C_1}{2} + C_2 \end{cases}; \quad y(x) = 7 - \frac{4}{x}.$$

Ситуация №5.

F не зависит от x в явном виде.

$$F = F(y, y').$$

В данном случае уравнение примет вид:

$$F_y - F_{y'y} y' - F_{y'y'} y'' = 0.$$

Умножим все на y'':

$$y' F_y - y'^2 F_{y'y} - y'' y' F_{y'y'} = 0;$$

$$F_y = \frac{dF}{dy} = \frac{dy}{dx} \frac{dF}{dx};$$

$$\frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right) = \frac{dy}{dx} F_y + \frac{d(y')}{dx} F_{y'} - \frac{d(y')}{dx} F_{y'} - y' \frac{dy}{dx} F_{y'y} - y' \frac{d(y')}{dx} F_{y'} = 0;$$

$$\frac{d}{dx}\left(F - y' F_{y'}\right) = 0,$$

где $F - y' F_{y'} = 0$.

Это уравнение решается разделением переменных.

Инвариантность уравнений Эйлера

Если функционал вида

$$J[y] = \int_a^b F(x, y, y')dx,$$

преобразуется посредством замены независимой переменной x или одновременной заменой x и y, то экстремаль по-прежнему находится с помощью уравнений Эйлера, но составленного из преобразованного уравнения.

Пусть x и y являются функциями новых переменных.

$$x = x(U, V); \quad y = y(U, V).$$

Причем соблюдается условие взаимной независимости функций :

$$x = x(U, V), y = y(U, V);$$

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial U}; & \dfrac{\partial x}{\partial V} \\ \dfrac{\partial y}{\partial U}; & \dfrac{\partial y}{\partial V} \end{vmatrix} \neq 0;$$

$$\int F(x,y,y')dx=\int F\left[x(U,V),y(U,V),\frac{\dfrac{\partial y}{\partial U}+\dfrac{\partial y}{\partial V}\dfrac{\partial V}{\partial U}}{\dfrac{\partial x}{\partial U}+\dfrac{\partial x}{\partial V}\dfrac{\partial}{\partial}}\right]\left(\frac{\partial x}{\partial U}+\frac{\partial x}{\partial V}\frac{\partial V}{\partial U}\right)dU=$$

$$=\int \Phi(U,V,V')dU\ .$$

Определяются формулы для новой экстремали.

$$\Phi_V-\frac{d}{dU}\Phi_{V'}=0\,.$$

Она связана со старым экстремумом.Вариационные задачи в параметрической форме

Во многих практических приложениях для удобства необходимо использовать параметрическое задание линий.

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},\qquad t_0\le t\le t_1.$$

Предполагается, что φ и ψ - непрерывны и имеют непрерывные производные или хотя бы кусочно-линейные. Необходимо, чтобы обе производные одновременно не обращались в нуль.

$$\varphi'^2+\psi'^2=0\,.$$

Эллипс может задаваться различными видами параметрических уравнений:

$$\begin{cases}x=a\cos t\\ y=b\sin t\end{cases},\qquad -\pi\le t\le\pi\,,$$

$$\begin{cases}x=\dfrac{a(1-z^2)}{1+z^2}\\ y=\dfrac{2bz}{1+z^2}\end{cases},\qquad -\infty\le z\le+\infty\ .$$

При неправильном подходе можно найти не истинный экстремум функционала. Зависит не от *y*, а от формы параметрического представления. Чтобы этого не случилось необходимо и достаточно чтобы подинтегральная функция не содержала t в явном виде.

$$F(x,y,kx',ky')=kF(x,y,x',y').$$

Такая функция называется положительная однородная функция первой степени по аргументам *x’,y’*:

$$x'=\frac{dx}{dt};\quad y=\frac{dy}{dt}\,.$$

Если некоторая линия L, определена системой:

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},$$

где t меняется на интервале $t_0\le t\le t_1$, то эти функции удовлетворяют следующим уравнениям Эйлера:

$$\begin{cases} \dfrac{dF}{dx} - \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{dF}{dx'}\right] = 0 \\ \dfrac{dF}{dy} - \dfrac{d}{dt}\left[\dfrac{dF}{dy'}\right] = 0 \end{cases}.$$

Эти уравнения и являются ключом к отысканию функций $\varphi(t)$ и $\psi(t)$. Каждая из этих уравнений является следствием другого уравнения. Для этих ситуаций существует вейерштрассова форма уравнений Эйлера:

$$\frac{1}{r} = \frac{F_{y'x} - F_{x'y}}{F_1\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}}; \qquad F_1 = \frac{F_{x'x'}}{y'^2} = \frac{F_{y'y'}}{x'^2} = \frac{F_{y'x'}}{y'x'},$$

где r - радиус кривизны экстремали.

Рассмотрим первое уравнений Эйлера:

$$F_x = \frac{d}{dx}\left(y^2 \frac{y'^2}{x'}\right) = 0; \quad F_{x'} = \frac{d}{dx'}\left(y^2 \frac{y'^2}{x'}\right) = -\frac{y^2 y'^2}{x'^2};$$

$$\frac{d}{dt}\left(y^2 \frac{y'^2}{x'^2}\right) = 0; \quad \left(y^2 \frac{y'^2}{x'^2}\right) = C_1; \; y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = C_1; \; y\frac{dy}{dx} = \sqrt{C_1};$$

$$y^2 = 2\sqrt{C_1}x + C_2.$$

Она должна проходить через соответствующие граничные точки:

$$y^2 = \left(\frac{y_1^2}{x_1}\right)x,$$

где y_1, x_1 - координаты точки.

Это уравнение параболы «в бок».Обобщение простейшей задачи вариационного исчисления

Формулы, зависящие от производных высших порядков. Минимизация функционала вида:

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F\left[x, y, y', ..., y^{(n)}\right]dx.$$

Функция F должна быть дифференцируема по всем переменным n+2 раза. Здесь граничное условие тоже существует. Граничные условия разваливаются на набор:

$$\begin{cases} y(x_0) = y_0 \\ y'(x_0) = y'_0 \\ y''(x_0) = y''_0 \\ .... \; .... \, . \\ y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \end{cases}; \qquad \begin{cases} y(x_1) = y_1 \\ y'(x_1) = y'_1 \\ y''(x_1) = y''_1 \\ .... \; .... \, . \\ y^{(n-1)}(x_1) = y_1^{(n-1)} \end{cases}.$$

Считаем граничные условия на обоих концах заданными. Необходимо решить уравнение Эйлера-Пуассона:

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} + \frac{d^2}{dx^2}F_{y''} - ... + (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}F_{y^{(n)}} = 0.$$

Функционалы, зависящие от m функций

Граничные условия должны задаваться по всем функциям. Обозначим их следующим образом:

$$y_k(x_0) = y_k^{(0)};\ y_k(x_1) = y_k^{(1)};\ k = 1 \div m.$$

Требуется найти экстремум следующего функционала

$$J[y_1 ... y_m] = \int_{x0}^{x1} F(x, y_1, ..., y_m, y_1^{'}, ..., y_m^{'})dx.$$

Для того, чтобы это сделать необходимо решить систему:

$$\begin{cases} F_{y1} - \frac{d}{dx}F_{y_1^{'}} = 0 \\ F_{y1} - \frac{d}{dx}F_{y_2^{'}} = 0 \\ ------------ \\ F_{y_m} - \frac{d}{dx}F_{y_m^{'}} = 0 \end{cases}.$$

$$c_4 = \frac{e^2}{e^2 - 1}.$$

$$\begin{cases} y = x \\ z = \frac{sh(x-1)\cdot}{sh1} \end{cases}$$

В общем случае может оказаться, что граничных условий не хватает чтобы определить все *c*, тогда в решении некоторые *c* остаются произвольными.

Функционалы, зависящие от функций нескольких независимых переменных

Для простоты рассмотрим функционалы функций, зависящих от 2-х переменных.

Пусть функция $Z(x, y)$ зависит от 2-х переменных. Физический смысл $Z(x, y)$ - это некоторая произвольная поверхность. Таким образом, соответствующий функционал можно записать в виде:

$$J[Z(x, y)] = \iint_D F\left(x, y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)dxdy.$$

Чтобы задача имела решение *F* должна быть трижды дифференцированная функция. Будем считать, что искомая функция *Z* в области *D* непрерывна вместе со всеми производными до 2-го порядка включительно. Пусть область *D* имеет границу *Г*. Здесь мы будем вынуждены задавать граничные условия по всей области *Г*. Для того, чтобы поверхность $Z(x, y)$ обеспечивала экстремум функционала необходимо чтобы она удовлетворяла уравнению Эйлера - Остроградского:

$$F_z - \frac{\partial}{\partial x}\left\{F_p\right\} - \frac{\partial}{\partial y}\left\{F_q\right\} = 0,$$

где $p = \frac{\partial z}{\partial x}$; $q = \frac{\partial z}{\partial y}$.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{F_p\right\} = F_{px} + F_{pz}\frac{\partial z}{\partial x} + F_{pp}\frac{\partial p}{\partial x} + F_{pq}\frac{\partial q}{\partial x};$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{F_q\right\} = F_{qy} + F_{qz}\frac{\partial z}{\partial y} + F_{qp}\frac{\partial p}{\partial y} + F_{qq}\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Условный экстремум

Вариационная задача, в которой находится экстремум функционала на искомую функцию называется задачей на условный экстремум.

1. Изопериметрическая задача.

Пусть даны 2 функции: $F(x, y, y'), G(x, y, y')$. Предполагается, что они имеют непрерывные частные производные 1-го и 2-го порядков на рассматриваемом интервале $x_0 \le x \le x_1$, при любом y'. Пусть функционал определяется следующим выражением:

$$K[y] = \int_{x0}^{x1} G(x, y, y')dx = l, \qquad (*)$$

где *l* - заданное значение.

Изопериметрическая задача сводится к следующим действиям.

Определяется экстремум функционала J.

$$J[y] = \int_{x0}^{x1} F(x, y, y')dx \to extr. \qquad (**)$$

При решении такой проблемы используется *теорема Эйлера*:

Если кривая $y = y(x)$ дает условный экстремум функционалу

$$J[y] = \int_{x0}^{x1} F(x, y, y')dx,$$

при условии

$$K[y] = \int_{x0}^{x1} G(x, y, y')dx = l,\ y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1,$$

и $y(x)$ не является экстремалью функционала $K[y]$, то существует такая const λ, что кривая $y(x)$ есть безусловная экстремаль функционала

$$L = \int_{x0}^{x1} [F(x, y, y')dx + \lambda G(x, y, y')]dx.$$

Закон взаимности изопериметрических задач

$$\left.\begin{aligned} J[y] &\to extr \\ K[y] &= const \end{aligned}\right\} y - ?$$

Те же самые экстремали *y* окажутся решением другой задачи.

$$\left.\begin{aligned} K[y] &\to extr \\ J[y] &= const \end{aligned}\right\}$$

Случай 1.2.
Условий несколько.
Если функция $y(x)$ дает функционалу $J_0[y]$ условный экстремум при условиях

$$\begin{cases} J_1[y] = l_1 \\ J_2[y] = l_2 \\ ------ \\ J_k[y] = l_k \end{cases},$$

то существует такой набор const $\{\lambda_i\}$, $i = 0 \div k$, $\lambda_0^2 + \lambda_1^2 + ... + \lambda_k^2 = 1$, что кривая *y* дает безусловный экстремум для функционала

$$L = \int_{x0}^{x1} (\lambda_0 F_0 + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2 + ... + \lambda_k F_k) dx;$$

$$J_i[y] = \int_{x0}^{x1} F_i(x, y, y') dx.$$

Случай 1.3.
Изопериметрическими называют и следующие задачи

$$J[y] = \int_{x0}^{x1} F(x, y_1, y_2 ... y_n, y_1', y_2' ... y_n') dx,$$

при условиях

$$\begin{cases} \int_{x0}^{x1} G_1(x, y_1 ... y_n, y_1' ... y_n') dx = l_1 \\ \int_{x0}^{x1} G_2(x, y_1 ... y_n, y_1' ... y_n') dx = l_2 \\ ---------------- \\ \int_{x0}^{x1} G_m(x, y_1 ... y_n, y_1' ... y_n') dx = l_m \end{cases}.$$

Требования на непрерывность функции такие же.

Решение.
Для получения решения составляют функционал

$$\Phi[y_1 \div y_n] = \int_{x0}^{x1} \left(F_0 + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i G_i \right) dx .$$

Его решают обычным способом на поиск безусловного экстремума.Ее решение

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{\lambda x^2 + 2c_1 x}{4(1+\lambda)} + c_2 \\ z(x) = \dfrac{c_3 x}{2(1-\lambda)} + c_4 \end{cases};$$

Расчет граничных условий дает следующее:

$$c_1 = \frac{3\lambda + 4}{2},\ c_2 = 0,\ c_3 = 2(1-\lambda),\ c_4 = 0;$$

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{\lambda x^2 + (3\lambda + 4)x}{4(1+\lambda)} \\ z(x) = x \end{cases};$$

$$\frac{1}{3}(23\lambda^2 + 46\lambda + 24) = 48(\lambda^2 + 2\lambda + 1);$$

$$\lambda_1 = -\frac{10}{11};$$

$\lambda_1 = -\dfrac{12}{11}$ - не удовлетворяет исходному изопериметрическому условию

$$\begin{cases} y(x) = \dfrac{7x - 5x^2}{2} \\ z(x) = x \end{cases}.$$

Задача Лагранжа

Это тоже задачи на условный экстремум.
Постановка задачи.
Найти функции $y_1, y_2, ..., y_n$, обеспечивающие экстремум функционала:

$$J[y_1 \div y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, ... y_n, y'_1, ... y'_n) dx,$$

при граничных условиях:

$$y_j(x_0) = y_{j0};\ \ y_j(x_1) = y_{j1};\ \ j = 1 \div n.$$

Дополнительные условия, которые относятся не к функционалам от искомых функций, а к соотношениям между ними:

$$\begin{cases}\varphi_1=\varphi_1(x,y_1,y_2,...,y_n)=0\\ \varphi_2=\varphi_2(x,y_1,y_2,...,y_n)=0\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \varphi_m=\varphi_m(x,y_1,y_2,...,y_n)=0\end{cases},\qquad m<n.$$

Для поиска решения пользуются следующей теоремой.

Теорема: функции $y_1, y_2, ..., y_n$, реализующие экстремум функционала J при наборе условий φ_i, $i=1\div m$, удовлетворяют при соответствующем выборе множителя $\lambda_i(x)$, $i=1\div m$, уравнениям Эйлера для следующего функционала:

$$J^*=\int_{x_0}^{x_1}\left[F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i(x)\varphi_i\right]dx.$$

$\varphi_i=0$ можно считать уравнениями Эйлера для функционала J^*, если аргументами функционала считать не только функции $y_1(x)\div y_n(x)$, но и функции $\lambda_1(x)\div\lambda_m(x)$. Обозначим

$$F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_i\varphi_i=\Phi(x,y_1,...,y_n,y'_1,...,y'_n).$$

Тогда и функции $y_j(x)$ и функции $\lambda_i(x)$ определяются из совместного решения следующей системы уравнений:

$$\begin{cases}\Phi_{y_i}-\dfrac{d}{dx}\Phi_{y'_j}=0; & (j=1...n)\\ \varphi_i(x,y_1,...,y_n)=0; & (i=1...m)\end{cases}.$$

Найти min l при граничных условиях A и B и дополнительном условии, описывающем плоскость:

$x_0=1$; $x_1=2$; $\varphi(x,y,z)$ – уравнение плоскости.

Составим вспомогательный функционал вида:

$$J^*=\int_1^2[\sqrt{1+y'^2+z'^2}+\lambda(x)(15x-7y+z-22)]dx.$$

Выпишем из него уравнение Эйлера:

$$\begin{cases}\lambda(x)(-7)-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0\\ \lambda(x)\cdot 1-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0\\ 15x-7y+z-22=0\end{cases}.$$

Умножим 2-е уравнение на 7 и сложим с первым:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{y'-7z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0;$$

$$\frac{y'-7z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=C_1;\quad z'=7y'-15;$$

$$y(x)=C_3x+C_2;\ C_3=2;\ C_2=-3;$$

$$\begin{cases} y(x)=2x-3 \\ z(x)=1-x \end{cases};$$

$$\lambda(x)\equiv 0;\ \ l=\sqrt{6}.$$

Геодезической линией называется линия наименьшей длины, лежащая на данной поверхности и соединяющая две заданные ее точки.

Вариационные задачи с подвижными концами

Это класс задач, когда пределы интеграла не являются постоянными.

1. Постейшая задача с подвижными концами.

Пусть $F(x,y,y')$ - трижды дифференцируемая функция по всем своим аргументам. Пусть в плоскости XOY заданы две кривые:

$$y_0=\varphi(x);$$

$$y_1=\psi(x).$$

Рассмотрим функционал:

$$J[y]=\int\limits_{\gamma} F(x,y,y')dx.$$

Будем считать, что этот функционал определен в классе кривых *y(x)* таких, что их концы лежат на этих линиях *φ(x)* и *ψ(x)*. Требуется найти экстремум исходного функционала. Для решения воспользуемся следующей *теоремой:*

Пусть кривая *y(x)* дает экстремум функционалу

$$J[y]=\int\limits_{\gamma} F(x,y,y')dx.$$

Среди всех кривых, соединяющих две произвольные точки двух заданных линий *φ(x)* и *ψ(x)*. Тогда *y(x)* тоже называется экстремалью и на ее концах $A(x_0,y_0,z_0)$; $B(x_1,y_1,z_1)$ выполняются условия трансверсальности вида: Рассмотрим функционал:

$$J[y]=\int\limits_{\gamma} F(x,y,y')dx.$$

Будем считать, что этот функционал определен в классе кривых *y(x)* таких, что их концы лежат на этих линиях *φ(x)* и *ψ(x)*. Требуется найти экстремум исходного функционала. Для решения воспользуемся следующей *теоремой:*

Пусть кривая *y(x)* дает экстремум функционалу

$$J[y]=\int\limits_{\gamma} F(x,y,y')dx.$$

Среди всех кривых, соединяющих две произвольные точки двух заданных линий *φ(x)* и *ψ(x)*. Тогда *y(x)* тоже называется экстремалью и на ее концах $A(x_0,y_0,z_0)$; $B(x_1,y_1,z_1)$ выполняются условия трансверсальности вида: Рассмотрим функционал:

$$J[y]=\int\limits_{\gamma} F(x,y,y')dx.$$

Будем считать, что этот функционал определен в классе кривых *y(x)* таких, что их концы лежат на этих линиях *φ(x)* и *ψ(x)*. Требуется найти экстремум исходного функционала. Для решения воспользуемся следующей *теоремой:*

Пусть кривая *y(x)* дает экстремум функционалу

$$J[y]=\int\limits_{\gamma} F(x,y,y')dx.$$

Среди всех кривых, соединяющих две произвольные точки двух заданных линий *φ(x)* и *ψ(x)*. Тогда *y(x)* тоже называется экстремалью и на ее концах $A(x_0,y_0,z_0)$; $B(x_1,y_1,z_1)$ выполняются условия трансверсальности вида:

$$\begin{cases} \left[F+(\varphi'-y')F_{y'}\right]_{x=x_0}=0 \\ \left[F+(\psi'-y')F_{y'}\right]_{x=x_1}=0 \end{cases}.$$

Эти условия трансверсальности и есть способы нахождения экстремали. Решение с использованием этой теоремы находится следующей последовательностью действий:

1. Написать и решить соответствующее уравнение Эйлера обычным способом, считая границы неподвижными. При этом мы получим $y=f(x,c_1,c_2)$.

2. Используем два уравнения трансверсальности и два новых уравнения.

$$f(x_0,c_1,c_2)=\varphi(x_0);$$

$$f(x_0, c_1, c_2) = \varphi(x_0).$$

Мы получаем систему из 4-х уравнений с четырьмя неизвестными.

3. Решая эту систему мы находим const c_1, c_2, x_0, x_1.

Задача для 3-х мерного пространства

Для этой задачи линии находятся в 3-х мерном пространстве, т.е. необходимо найти функционал вида:

$$J[y,z] = \int_{x0}^{x1} F(x, y, z, y', z')dx .$$

При этом считаем, что хотя бы одна из граничных точек перемещается по заданной кривой. Тогда экстремум функционала J может достигаться лишь на кривых, удовлетворяющих системе уравнений Эйлера:

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{d}{dx} F_{y'} = 0 \\ F_z - \dfrac{d}{dx} F_{z'} = 0 \end{cases}.$$

Для простоты будем считать, что точка *A* закреплена неподвижно, а точка *B* может перемещаться по кривой, которая задается системой уравнений:

$$\begin{cases} y = \varphi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases};$$

$$A(x_0, y_0, z_0),\ B(x, y, z).$$

В этом случае условие трансверсальности примет вид:

$$F + (\varphi' - y')F_{y'} + (\psi' - Z')F_{z'} = 0, \quad \text{при } x = x_1 .$$

Если же и точка *B* перемещается по кривой, то это значит, что положение точки *A* можно определить системой:

$$\begin{cases} y = \tilde{\varphi}(x) \\ z = \tilde{\psi}(x) \end{cases}.$$

Условие трансверсальности для точки А имеет вид:

$$F - (\tilde{\varphi} - y')F_{y'} + (\tilde{\psi} - Z')F_{z'} = 0, \quad \text{при } x = x_0 .$$

Пример.

Найти кратчайшее расстояние от точки $M(x_0, y_0, z_0)$ до прямой

$$\begin{cases} y = mx + p \\ z = nx + q \end{cases}.$$

Решение.

Задача сводится к отысканию интеграла

$$J[y,z] = \int_{x0}^{x1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,dx ,$$

при условии что x_1 лежит на линии. Можно записать

$$\begin{cases} \varphi(x) = mx + p \\ \psi(x) = nx + q \end{cases}.$$

Соответствующее решение в этом случае имеет вид:

$$\sqrt{1+y'^2+z'^2} + (m-y')\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} + (n-z')\frac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}} = 0, \quad \text{при } x = x_1$$

Для облегчения решения учтем, что $y' = c_1, z' = c_3$. Подставляя это в условие трансверсальности и упрощая, получаем $1 + mc_1 + nc_3 = 0$. Необходимо учесть, что искомая экстремаль должна проходить через точку *m*, а следовательно, порождать систему уравнений:

$$\begin{cases} y = c_1 x + c_2 \\ z = c_3 x + c_4 \end{cases}.$$

Другой конец перемещается по прямой, значит точка x_1 связана системой:

$$\begin{cases} c_1 x_1 + c_2 = m x_1 + p \\ c_3 x_1 + c_4 = n x_1 + q \end{cases}.$$

Таким образом, имеется 5 уравнений и 5 неизвестных x_1, c_1, c_2, c_3, c_4. Решая эти уравнения, получаем:

$$x_1 = \frac{x_0 + m(y_0 - p) + n(z_0 - q)}{1 + n^2 + m^2};$$

$$c_1 = \frac{mx_0 + mn(z_0 - q) - (1+n^2)(y_0 - p)}{m(y_0 - p) + n(z_0 - q) - (m^2 + n^2)x_0};$$

$$c_2 = \frac{nx_0 + mn(y_0 - p) - (1+m^2)(z_0 - q)}{m(y_0 - p) + n(z_0 - q) - (m^2 + n^2)x_0}.$$

Пусть одна из точек неподвижна $A(x_0, y_0, z_0)$. Другая точка может перемещаться по некоторой поверхности, уравнение которой задается уравнением $z = \varphi(x, y)$. В этом случае условие трансверсальности принимает вид:

$$\begin{cases} \left[F - y'F_{y'} + (\varphi'_x - z')F_{z'}\right]_{x=x_1} = 0 \\ \left[F_{y'} + F_{z'}\varphi'_y\right]_{x=x_1} = 0 \end{cases};$$

Эти условия, совместно с уравнением $z = \varphi(x, y)$ дают возможность найти две произвольные константы в уравнении Эйлера, а другие две константы определяются из условия прохождения экстремали через неподвижную точку *A*.

Список литературы

1. Краснов М.Л., Макаренко Г.И., Киселев А.И. Вариационное исчисление. Задачи и упражнения – М.: Наука,1973.
2. Цлаф Л.Я. Вариационное исчисление и интегральные уравнения. – М.: Наука, 1970.
3. Полушин П.А., Вариационное исчисление. Краткий курс лекций для магистров по направлению 552500. – Владимир, ВлГУ, 2003.

4. Корн. Г., Корн Т. Справочник по математике для научных работников и инженеров. – М.: Наука, 1970.

5. Муп Р. Хаотические колебания. Вводный курс для научных работников и инженеров – М.: Мир, 1990.

6. Пригожин И., Стенгерс И. Порядок из хаоса. Новый диалог человека с природой. – М.: Прогресс, 1986.

7. Арнольд В. Теория катастроф. – М.: Изд.МГУ, 1983.

Заключение.

Магистратура, как форма образования, следующая за бакалавриатом, в служит для дальнейшего обучения на основе знаний, полученных при обучении бакалавров. По роду из будущей работы особо актуальными являются знания принципов расчета характеристик систем, используемых в радиотехнике. Это необходимо для понимания принципов работы оборудования, его особенностей, а также текущих и принципиально достижимых возможностей.

В связи с этим приобретает принципиальную важность научной подготовки магистров, получение ими фундаментальных знаний по различным направлениям науки, которые в дальнейшем помогут внедрять и осваивать наиболее современные виды оборудования.

Магистрант в процессе обучения должен освоить методы использования соответствующей справочной литературы и других источников технической информации, включая электронные источники, а также принципов классификации радиоэлектронных деталей различных видов и технические ограничения их параметров.

При выполнении практических работ наряду с теоретическими знаниями студенты приобретут соответствующие практические навыки.