

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

И. И. ШИШОВ М. В. ЛУКИН

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ  
ДВОЯКОВЫПУКЛОЙ  
ОБОЛОЧКИ И ПОДЗЕМНОГО  
РЕЗЕРВУАРА

Учебное пособие



Владимир 2016

УДК 001.8.69.07

ББК 38.704

Ш65

Рецензенты:

Доктор технических наук, профессор  
профессор кафедры инженерных конструкций и архитектуры  
Северного (Арктического) федерального университета  
имени М. В. Ломоносова (САФУ)  
*Б. В. Лабудин*

Кандидат технических наук  
профессор кафедры строительного производства  
Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых  
*К. А. Дубов*

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

**Шишов, И. И.** Расчет и конструирование двояковыпуклой Ш65 оболочки и подземного резервуара : учеб. пособие / И. И. Шишов, М. В. Лукин ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2016. – 84 с. – ISBN 978-5-9984-0688-1.

Рассматриваются оболочки положительной гауссовой кривизны на прямоугольном плане, армирование и конструирование оболочек. Определяются усилия, действующие в срединной поверхности, и моменты в приконтурной зоне. Излагаются вопросы конструирования и армирования цилиндрических резервуаров, приводятся два примера расчета.

Предназначено для обучающихся по магистерской программе «Теория и проектирование зданий и сооружений» направления 08.04.01 «Строительство». Может быть полезно инженерам-строителям, занимающимся проектированием и возведением специальных конструкций зданий и сооружений.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 34. Табл. 5. Библиогр.: 7 назв.

УДК 001.8.69.07

ББК 38.704

ISBN 978-5-9984-0688-1

© ВлГУ, 2016

## ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ.....	5
1. ДВОЯКОВЫПУКЛЫЕ ОБОЛОЧКИ.....	6
1.1. Некоторые сведения о поверхностях.....	6
1.2. Ортогональная координатная сеть.....	10
1.3. Деформации в окрестности заданной точки некоторого тела.....	12
1.4. Геометрические уравнения теории оболочек.....	14
1.5. Уравнения равновесия.....	20
1.6. Физические уравнения теории оболочек.....	23
1.7. Напряженно-деформированное состояние пологих оболочек.....	23
1.8. Контурные конструкции и граничные условия.....	27
1.9. Покрытия с оболочками положительной гауссовой кривизны, прямоугольные в плане.....	27
1.10. Безмоментная теория оболочек.....	28
1.11. Теория пологих оболочек.....	31
1.12. Вариационный метод Бубнова – Галеркина.....	33
1.13. Метод коллокации.....	33
1.14. Безмоментное состояние пологих оболочек.....	34
1.15. Безмоментное решение для оболочек с опорными конструкциями, недоформируемыми вдоль контура.....	37
1.16. Определение усилий в оболочках с шарнирно-подвижным опиранием.....	43
1.17. Оболочки с опорными конструкциями, деформируемыми вдоль контура.....	46
1.18. Моменты в тонкостенных пологих оболочках переноса.....	49
1.19. Конструирование и армирование оболочек.....	52
1.20. Задание на курсовой проект.....	55
Темы для закрепления знаний.....	57

2. ПОДЗЕМНЫЕ ИНЖЕНЕРНЫЕ СООРУЖЕНИЯ .....	58
2.1. Резервуары .....	58
2.2. Классификация и примеры конструктивных решений .....	58
2.3. Защита резервуаров от проницаемости .....	64
2.4. Расчет резервуаров. Общие положения .....	66
2.5. Расчет стенки цилиндрического резервуара на осесимметричные нагрузки .....	66
2.6. Стенка постоянной толщины .....	67
2.7. Влияние граничных воздействий на усилия и перемещения в оболочке .....	69
2.8. Стенка переменной толщины .....	70
2.9. Определение давления предварительно напряженной кольцевой арматуры на цилиндрическую оболочку .....	73
2.10. Определение потерь предварительных напряжений в арматуре при навивке машинным методом .....	74
2.10.1. Давление навивки арматуры на бесконечно длинную оболочку .....	75
2.10.2. Давление навивки арматуры на оболочку конечной длины .....	77
Темы для закрепления знаний .....	79
3. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ .....	79
ЗАКЛЮЧЕНИЕ .....	83
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК .....	84

## **ВВЕДЕНИЕ**

Оболочки и другие тонкостенные пространственные конструкции находят широкое применение в строительстве промышленных и гражданских зданий, надземных и подземных инженерных сооружений. Они обладают высокой прочностью, жесткостью и устойчивостью при относительно небольшом расходе бетона и арматуры. Способность перекрывать большие пролеты без промежуточных опор делает их незаменимыми при строительстве некоторых общественных зданий, спортивных или специальных сооружений, наземных и подземных резервуаров для хранения жидкостей.

Начало науки об оболочках связывают с именами немецкого и английского ученых Н. Арон (1874) и А. Лов (1888). Сначала она развивалась как чисто математическая наука, но к тридцатым годам прошлого века строители стали широко применять железобетонные оболочки в качестве покрытий различных зданий. Конструирование, расчет и возведение таких сооружений обособились в отдельную сферу знаний для специалистов строительной отрасли.

# 1. ДВОЯКОВЫПУКЛЫЕ ОБОЛОЧКИ

## 1.1. Некоторые сведения о поверхностях

Поверхность можно рассматривать как геометрическое место точек, описываемое концом радиуса-вектора  $\vec{r}$ , исходящего из фиксированной точки  $O$ , переменного по направлению и величине. В точку  $O$  поместим начало координат системы  $xuz$  (рис. 1.1). Поверхность может быть задана в явном виде  $z = f(x, y)$  или в неявном  $f(x, y, z) = 0$ .

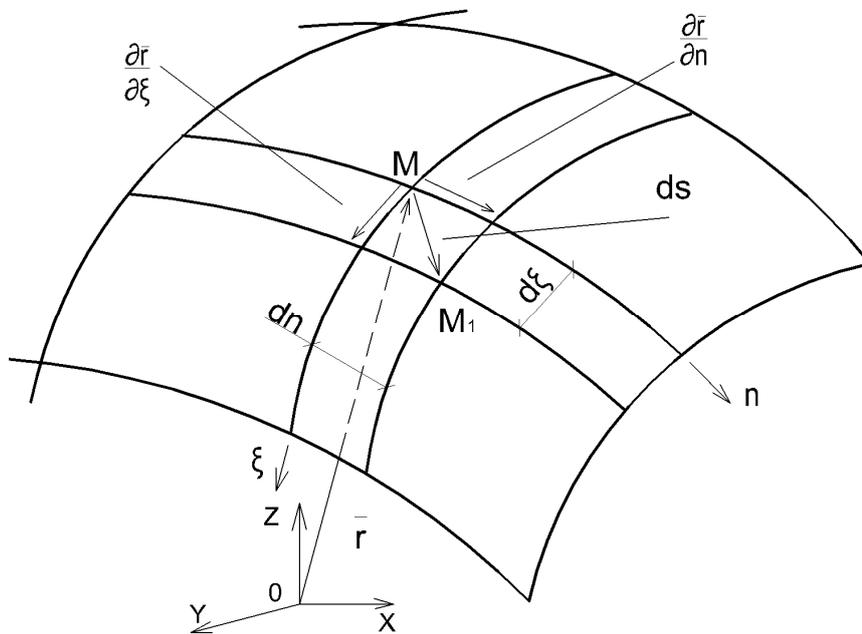


Рис. 1.1. К понятию оболочки

На поверхности вводится криволинейная система координат  $\xi\eta$ . Радиус-вектор некоторой точки  $M$  поверхности определяется выражением

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}, \quad (1.1)$$

где  $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$  – единичные векторы, направленные по осям  $x, y, z$ .

Компоненты вектора  $x, y, z$  связаны с координатами точки  $M$

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta), \quad z = z(\xi, \eta).$$

Можно написать  $\vec{r} = \vec{r}(\xi, \eta)$ .

Если конец вектора  $\bar{r}$  исходит из точки  $M$  и движется по координатной линии  $\xi$ , то  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} = 0$ , а  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}$  представляет собой вектор, выходящий из точки  $M$  по касательной к координатной линии  $\xi$ . Аналогично  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}$  – вектор, исходящий из точки  $M$  по касательной к координатной линии  $\eta$ . Вместе эти два вектора определяют плоскость, касательную к поверхности в точке  $M$ .

Расстояние между точками  $M(\xi, \eta)$  и  $M_1(\xi + d\xi, \eta + d\eta)$  равно по величине и направлению вектору

$$d\bar{s} = \frac{(\partial \bar{r})}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} d\eta.$$

Квадрат этого расстояния равен

$$ds^2 = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}\right)^2 d\xi^2 + 2\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta} d\xi d\eta + \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}\right)^2 d\eta^2.$$

Пишут так:

$$ds^2 = Ed\xi^2 + 2Fd\xi d\eta + Gd\eta^2, \quad (1.2)$$

где  $E = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}\right)^2$ ,  $F = \frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi} \frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}$ ,  $G = \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}\right)^2$ .

Выражение (1.2) – первая квадратичная форма поверхности;  $E$ ,  $F$ ,  $G$  – её коэффициенты

$$E = E(\xi, \eta), \quad F = F(\xi, \eta), \quad G = G(\xi, \eta).$$

Из выражения (1.1) следует:

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2;$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} + \frac{\partial z}{\partial \xi} \frac{\partial z}{\partial \eta};$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2.$$

Коэффициенты первой квадратичной формы дают возможность вычислять углы между кривыми на поверхности, площади выделенных участков, длины отрезков кривых.

Например, длина отрезка кривой  $MM_1$  равна

$$L_{MM_1} = \int_L ds = \int_L \sqrt{Ed\xi^2 + 2Fd\xi d\eta + Gd\eta^2}. \quad (1.3)$$

Если уравнение поверхности задано в параметрической форме  $\xi = \xi(t)$ ,  $\eta = \eta(t)$ , то

$$L_{MM_1} = \int_{t_0}^t \sqrt{E \left(\frac{d\xi}{dt}\right)^2 + 2F \left(\frac{d\xi}{dt} \frac{d\eta}{dt}\right) + G \left(\frac{d\eta}{dt}\right)^2} dt.$$

Площадь элемента поверхности с размерами  $\Delta\xi$ ,  $\Delta\eta$  определяется выражением

$$\Delta s = \sqrt{(EG - F^2)} d\xi \cdot d\eta. \quad (1.4)$$

Предположим, что на поверхности через точку  $M$  проходит кривая, заданная уравнением в векторной форме:

$$\bar{r} = \bar{r}(\xi, \eta), \quad (1.5)$$

где  $\xi = \xi(s)$ ,  $\eta = \eta(s)$  или  $\bar{r} = \bar{r}(s)$ .

Здесь в качестве параметра принята длина дуги этой кривой. Вектор её кривизны может быть выражен так:

$$\frac{d^2\bar{r}(s)}{ds^2} = k\bar{v},$$

где  $\bar{v}$  – единичный вектор нормали к кривой.

Проекция вектора кривизны на нормаль к поверхности в какой-нибудь точке (например,  $M$ ) носит название нормальной кривизны кривой, заданной уравнением (1.5). Она равна

$$K_n = \frac{d^2\bar{r}(s)}{ds^2} \bar{n} = K\bar{v}\bar{n} = K \cdot \cos\theta,$$

где  $\theta$  – угол между направлениями векторов  $\bar{v}$  и  $\bar{n}$ .

Дифференцируя уравнение (1.5), получаем

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{r}}{ds} &= \frac{\partial\bar{r}}{\partial\xi} \frac{d\xi}{ds} + \frac{\partial\bar{r}}{\partial\eta} \frac{d\eta}{ds}; \\ \frac{d^2\bar{r}}{ds^2} &= \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial\xi^2} \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial\eta^2} \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + \frac{\partial\bar{r}}{\partial\xi} \left(\frac{d^2\xi}{ds^2}\right) + \frac{\partial\bar{r}}{\partial\eta} \left(\frac{d^2\eta}{ds^2}\right) + 2 \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial\xi\partial\eta} \frac{d\xi}{ds} \frac{d\eta}{ds}. \end{aligned}$$

Поскольку вектор касательной и единичный вектор нормали  $\bar{n}$  перпендикулярны,  $\frac{\partial\bar{r}}{\partial\xi} \bar{n} = 0$  и  $\frac{\partial\bar{r}}{\partial\eta} \bar{n} = 0$ , то выражение нормальной кривизны  $K_n = \frac{d^2\bar{r}(s)}{ds^2} \bar{n}$  принимает вид

$$K_n = \bar{n} \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial\xi^2} \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + \bar{n} \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial\eta^2} \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2 + 2\bar{n} \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial\xi\partial\eta} \frac{d\xi}{ds} \frac{d\eta}{ds}.$$

Пишут так:

$$K_n = L(\xi, \eta) \left(\frac{d\xi}{ds}\right)^2 + 2M(\xi, \eta) \frac{d\xi}{ds} \frac{d\eta}{ds} + N(\xi, \eta) \left(\frac{d\eta}{ds}\right)^2,$$

где  $L(\xi, \eta) = \bar{n} \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial\xi^2}$ ,  $M(\xi, \eta) = \bar{n} \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial\xi\partial\eta}$ ,  $N(\xi, \eta) = \bar{n} \frac{\partial^2\bar{r}}{\partial\eta^2}$ .

Привлекая выражение для первой квадратичной формы (1.2), выражение для нормальной кривизны можно написать

$$K_n = \frac{Ld\xi^2 + 2Md\xi d\eta + Nd\eta^2}{Ed\xi^2 + 2Fd\xi d\eta + Gd\eta^2}. \quad (1.6)$$

Числитель этого выражения носит название второй квадратичной формы поверхности. Первая и вторая квадратичные формы характеризуют поверхность.

Если в выражении (1.6) положить поочередно  $d\eta = 0$  и  $d\xi = 0$ , то получим нормальные кривизны координатных линий

$$K_\xi = \frac{L}{E} = \frac{\bar{n} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial \xi^2}}{\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}\right)^2}, K_\eta = \frac{N}{G} = \frac{\bar{n} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial \eta^2}}{\left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}\right)^2}.$$

Коэффициент  $K_{\xi\eta} = M = \bar{n} \frac{\partial^2 \bar{r}}{\partial \xi \partial \eta}$  является параметром кручения поверхности.

Выражение (1.6) записывается в виде уравнения

$$Ld\xi^2 + 2Md\xi d\eta + Nd\eta^2 - K_n (Ed\xi^2 + 2Fd\xi d\eta + Gd\eta^2) = 0.$$

Если поочередно приравнять нулю частные производные левой части по  $\xi$  и  $\eta$ , то получим два уравнения:

$$Ld\xi + Md\eta - K_n (Ed\xi + Fd\eta) = 0; \quad (1.7)$$

$$Md\xi + Nd\eta - K_n (Fd\xi + Gd\eta) = 0.$$

Исключая  $d\xi$  и  $d\eta$ , получаем квадратное уравнение относительно нормальной кривизны  $K_n$

$$(EG - F^2)K_n^2 - (EN + GL - 2FM)K_n + (LN - M^2) = 0.$$

Корни этого уравнения дают экстремальные значения нормальных кривизн  $K_1$  и  $K_2$ ; одна из них максимальна, другая минимальна относительно кривизн всех линий, которые можно провести через данную точку поверхности.

Главные радиусы кривизн  $R_1$  и  $R_2$

$$R_1 = 1/K_1, \quad R_2 = 1/K_2.$$

Направления, соответствующие главным кривизнам, называются главными направлениями. Они определяются соотношением  $\frac{d\eta}{d\xi}$ , которое может быть найдено из уравнения

$$(FN - GM) \left(\frac{d\eta}{d\xi}\right)^2 + (EN - FL) \frac{d\eta}{d\xi} + (EM - FL) = 0,$$

которое получится из системы (1.7) исключением  $K_n$ . Произведение главных кривизн называется гауссовой кривизной

$$K = K_1 K_2 = \frac{1}{R_1 R_2} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}.$$

Полусумма главных кривизн – средняя кривизна

$$\frac{K_1 + K_2}{2} = -\frac{2MF - EN - GL}{2(EG - F^2)}.$$

При  $K > 0$  точка  $M$  называется эллиптической; при  $K = 0$  – параболической; при  $K < 0$  – гиперболической.

Когда уравнение поверхности задано в явном виде  $Z = f(x, y)$ , коэффициенты квадратичных форм определяются выражениями:

$$E = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 = 1 + p^2; \quad F = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial f}{\partial y} = pq;$$

$$G = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 1 + q^2;$$

$$L = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} = \frac{r}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

$$M = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} = \frac{s}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}};$$

$$N = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}} = \frac{t}{\sqrt{1 + p^2 + q^2}}.$$

Здесь введены обозначения Монжа:

$$p = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial f}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Гауссова кривизна может быть выражена

$$K = K_1 K_2 = \frac{K_x K_y - K_{xy}^2}{(1 + p^2 + q^2)^2}, \quad (1.8)$$

где  $K_x K_y$  – кривизны поверхности в направлении осей  $x, y$ ;  $K_{xy}$  – кривизна кручения поверхности.

Знаменатель выражения (1.8) – величина существенно положительная. Поэтому знак гауссовой кривизны можно определять по числителю. Если начало координат системы  $x, y, z$  поместить на поверхность в точке  $M_0$ , оси  $x, y$  – в касательной к поверхности плоскости, а ось  $z$  направить по нормали к поверхности, то окажется  $p_0 = 0, q_0 = 0$ .

## 1.2. Ортогональная координатная сеть

Координатная сеть называется ортогональной, если в любой точке поверхности векторы  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \xi}$  и  $\frac{\partial \bar{r}}{\partial \eta}$  ортогональны между собой.

В этом случае коэффициент первой координатной формы  $F$  тождественно равен нулю. Параметры ортогональной координатной системы принято обозначать  $\alpha$  и  $\beta$ . Два других коэффициента первой квадратной формы обозначаются:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \alpha}\right)^2 &= A^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2; \\ \left(\frac{\partial \bar{r}}{\partial \beta}\right)^2 &= B^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \beta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \beta}\right)^2. \end{aligned}$$

Кроме того,  $ds^2 = A^2 d\alpha^2 + B^2 d\beta^2$ , где  $A$  и  $B$  – параметры Ламе.

В теории поверхностей доказывается, что параметры Ламе и главные радиусы кривизны связаны между собой условиями Кодацци – Гаусса.

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{A}{R_1} \right) &= \frac{1}{R_2} \frac{\partial A}{\partial \beta}, \\ \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{B}{R_2} \right) &= \frac{1}{R_1} \frac{\partial B}{\partial \alpha}; \end{aligned} \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{1}{A} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{1}{B} \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) = -\frac{AB}{R_1 R_2}. \quad (1.10)$$

В соответствии с выражениями (1.3) и (1.4) длины участков кривых  $\alpha$  и  $\beta$  определяются по формулам

$$L_\alpha = \int_{\alpha_0}^{\alpha} A d\alpha; \quad L_\beta = \int_{\beta_0}^{\beta} B d\beta,$$

а площадь элемента поверхности размерами  $\Delta\alpha$ ,  $\Delta\beta$  – по выражению  $\Delta S = AB\Delta\alpha\Delta\beta$ .

В расчетах оболочек используются нормальные сечения – сечения, содержащие нормаль к поверхности.

Для оболочек с прямоугольным основанием применяют поверхности переноса (трансляционные), которые образуются перемещением плоской кривой (образующей) по параллельным направляющим. Их поверхность может быть задана уравнением

$$z = f_1(x) + f_2(y).$$

Если в качестве образующей и направляющих используются квадратные параболы однозначной кривизны, то получается эллиптический параболоид, а если параболы с кривизнами разных знаков, то гиперболический параболоид. Гиперболический параболоид может быть образован перемещением прямолинейной образующей по двум прямолинейным непараллельным направляющим, расположенным в параллельных плоскостях (рис. 1.2).

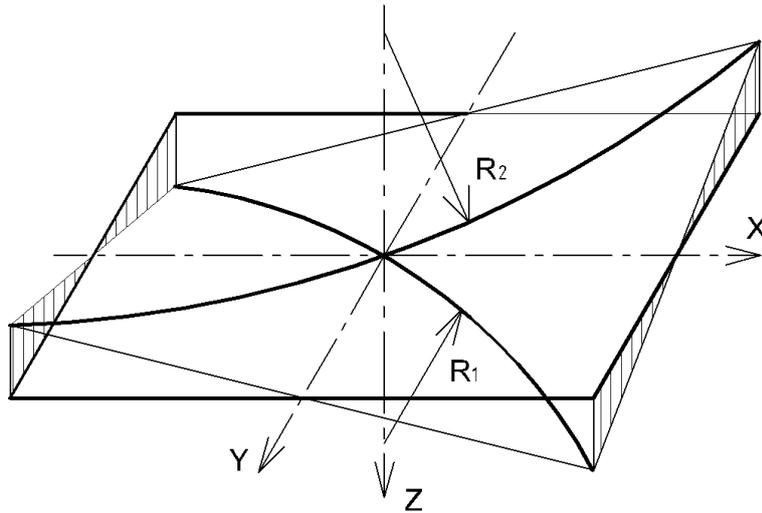


Рис. 1.2. Образование гиперболического параболоида  
прямолинейными образующими

### 1.3. Деформации в окрестности заданной точки некоторого тела

В системе осей координат  $x, y, z$  рассмотрим отрезок  $MN$ , соединяющий бесконечно близкие точки  $M(x, y, z)$  и  $N(x+dx, y+dy, z+dz)$  (рис. 1.3). Длина отрезка  $L$ , направляющие косинусы  $l, m, n$ .

$$L^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2;$$

$$l = \frac{dx}{L}, \quad m = \frac{dy}{L}, \quad n = \frac{dz}{L}.$$

Требуется определить удлинение  $\varepsilon$  отрезка, возникающее при деформировании тела.

Точка  $M$  получает в направлении осей  $x, y, z$  перемещения  $u, v, w$ ; точка  $N - u', v', w'$ ; отрезок  $M_1N_1$  получает длину  $L_1$ .

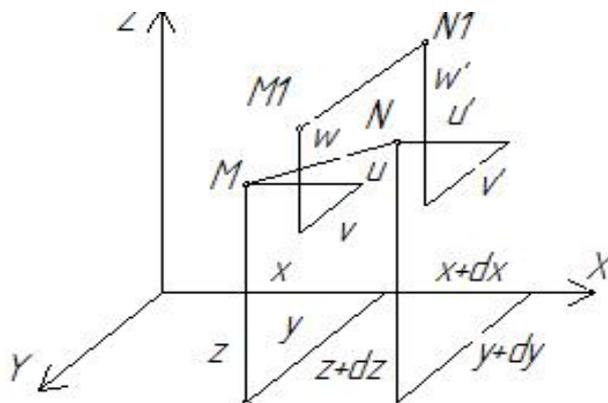


Рис. 1.3. Перемещение бесконечно близких точек

$$L_1^2 = (dx + u' - u)^2 + (dy + v' - v)^2 + (dz + w' - w)^2$$

или  $L_1^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2dx(u' - u) + 2dy(v' - v) + 2dz(w' - w) + (u' - u)^2 + (v' - v)^2 + (w' - w)^2$ .

$$L_1 = L(1 + \varepsilon),$$

$$L_1^2 = L^2(1 + 2\varepsilon + \varepsilon^2).$$

Пренебрегая бесконечно малыми высшего порядка, можно написать

$$L_1^2 - L^2 = L^2\varepsilon = dx(u' - u) + dy(v' - v) + dz(w' - w) \text{ или}$$

$$\varepsilon = \frac{dx}{L} \frac{u' - u}{L} + \frac{dy}{L} \frac{v' - v}{L} + \frac{dz}{L} \frac{w' - w}{L}. \quad (1.11)$$

$$u' - u = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy + \frac{\partial u}{\partial z} dz;$$

$$v' - v = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy + \frac{\partial v}{\partial z} dz;$$

$$w' - w = \frac{\partial w}{\partial x} dx + \frac{\partial w}{\partial y} dy + \frac{\partial w}{\partial z} dz;$$

$$\frac{u' - u}{L} = \frac{\partial u}{\partial x} l + \frac{\partial u}{\partial y} m + \frac{\partial u}{\partial z} n;$$

$$\frac{v' - v}{L} = \frac{\partial v}{\partial x} l + \frac{\partial v}{\partial y} m + \frac{\partial v}{\partial z} n;$$

$$\frac{w' - w}{L} = \frac{\partial w}{\partial x} l + \frac{\partial w}{\partial y} m + \frac{\partial w}{\partial z} n.$$

С учетом равенства (1.11) получается

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} l^2 + \frac{\partial v}{\partial y} m^2 + \frac{\partial w}{\partial z} n^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) lm + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\right) mn + \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}\right) ln.$$

Если учесть, что

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_x; \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \gamma_{xy};$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_y; \quad \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \gamma_{yz};$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \varepsilon_z; \quad \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = \gamma_{xz},$$

то

$$\varepsilon = \varepsilon_x l^2 + \varepsilon_y m^2 + \varepsilon_z n^2 + \gamma_{xy} lm + \gamma_{yz} mn + \gamma_{xz} ln, \quad (1.12)$$

где  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$  – линейные деформации в направлении осей  $x, y, z$ ;

$\gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  – угловые деформации в координатных плоскостях системы  $xuz$ .

## 1.4. Геометрические уравнения теории оболочек

В ортогональной системе криволинейных осей координат  $\alpha, \beta, \gamma$  задается бесконечно малый отрезок  $PQ$  длиной  $ds$ .  $P(\alpha, \beta, \gamma)$ ,  $Q(\alpha+d\alpha, \beta+d\beta, \gamma+d\gamma)$ . Касательные к осям  $\alpha, \beta, \gamma$ , проведенные в точке  $P$ , составляют прямоугольную систему осей  $x, y, z$ . Направляющие косинусы отрезка  $PQ$  в осях  $x, y, z$  –  $l, m, n$  (рис. 1.4).

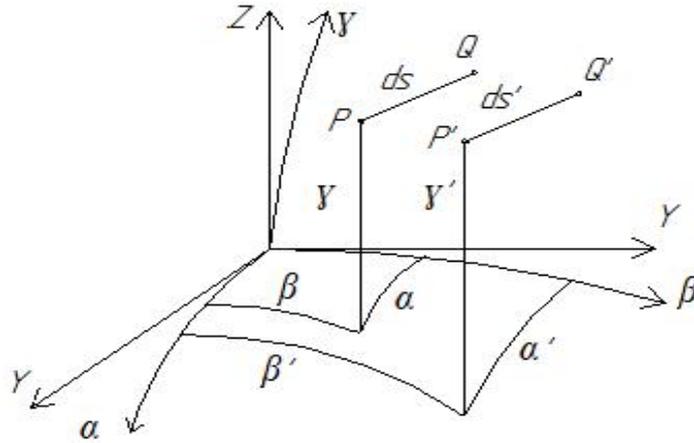


Рис. 1.4. Определение деформации отрезка в криволинейной системе координат

$$l = \cos(ds, x), \quad m = \cos(ds, y), \quad n = \cos(ds, z).$$

Проекции отрезка  $ds$  на оси  $x, y, z$ :

$$lds = \tilde{A}d\alpha,$$

$$mds = \tilde{B}d\beta,$$

$$nds = \tilde{C}d\gamma,$$

$\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  – коэффициенты искажения, преобразующие приращения координат  $\alpha, \beta, \gamma$  в линейные отрезки осей  $x, y, z$ .

$$ds^2 = (\tilde{A}d\alpha)^2 + (\tilde{B}d\beta)^2 + (\tilde{C}d\gamma)^2.$$

При деформировании оболочки отрезок  $PQ$  перемещается в  $P'Q'$  и изменяет свою длину. Точка  $P'$  определяется координатами:

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha + m_1; \\ \beta' &= \beta + m_2; \\ \gamma' &= \gamma + m_3. \end{aligned} \tag{1.13}$$

Проекции перемещения точки  $P$  на оси  $x, y, z$

$$u = \tilde{A}m_1; \quad v = \tilde{B}m_2; \quad w = \tilde{C}m_3.$$

Координаты точки  $Q$  –  $\alpha''$ ,  $\beta''$ ,  $\gamma''$ :

$$\begin{aligned}\alpha'' &= \alpha' + d\alpha' = \alpha + m_1 + d\alpha + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial m_1}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial m_1}{\partial \gamma} d\gamma; \\ \beta'' &= \beta' + d\beta' = \beta + m_2 + d\beta + \frac{\partial m_2}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial m_2}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial m_2}{\partial \gamma} d\gamma; \\ \gamma'' &= \gamma' + d\gamma' = \gamma + m_3 + d\gamma + \frac{\partial m_3}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial m_3}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial m_3}{\partial \gamma} d\gamma.\end{aligned}\quad (1.14)$$

Коэффициенты искажения  $\tilde{A}, \tilde{B}, \tilde{C}$  есть непрерывные функции координат  $\alpha, \beta, \gamma$ . Для точки  $P'$  они равны:

$$\begin{aligned}\tilde{A}_1 &= \tilde{A} + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \alpha} m_1 + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \beta} m_2 + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \gamma} m_3; \\ \tilde{B}_1 &= \tilde{B} + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \alpha} m_1 + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \beta} m_2 + \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \gamma} m_3; \\ \tilde{C}_1 &= \tilde{C} + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \alpha} m_1 + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \beta} m_2 + \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \gamma} m_3.\end{aligned}\quad (1.15)$$

Определим длину отрезка  $P'Q' \sim ds'$ . Пусть  $l', m', n'$  – его направляющие косинусы в осях  $x, y, z$ , проведенных в точке  $P'$ . Проекция отрезка  $ds'$  на эти оси:

$$\begin{aligned}l' ds' &= \tilde{A}_1 (\alpha'' - \alpha'); \\ m' ds' &= \tilde{B}_1 (\beta'' - \beta'); \\ n' ds' &= \tilde{C}_1 (\gamma'' - \gamma').\end{aligned}\quad (1.16)$$

С учетом (1.13) – (1.15) первое из равенств (1.16)

$$l' ds' = \left( \tilde{A} + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \alpha} m_1 + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \beta} m_2 + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \gamma} m_3 \right) \left( d\alpha + \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} d\alpha + \frac{\partial m_1}{\partial \beta} d\beta + \frac{\partial m_1}{\partial \gamma} d\gamma \right).$$

Раскрывая скобки и пренебрегая малыми высшего порядка, получаем

$$l' ds' = \tilde{A} d\alpha + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \alpha} m_1 d\alpha + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \beta} m_2 d\alpha + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \gamma} m_3 d\alpha + \tilde{A} \frac{\partial m_1}{\partial \alpha} d\alpha + \tilde{A} \frac{\partial m_1}{\partial \beta} d\beta + \tilde{A} \frac{\partial m_1}{\partial \gamma} d\gamma$$

или

$$l' ds' = \tilde{A} d\alpha + \frac{\partial}{\partial \alpha} (\tilde{A} m_1) d\alpha + \frac{v}{\tilde{B}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \beta} d\alpha + \frac{w}{\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \gamma} d\alpha + \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{\tilde{A}} \right) \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} m ds + \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{u}{\tilde{A}} \right) \frac{\tilde{A}}{\tilde{C}} n ds,$$

или

$$l' ds' = l ds \left\{ 1 + \frac{1}{\tilde{A}} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{\tilde{A}\tilde{B}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \beta} + \frac{w}{\tilde{A}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \gamma} \right\} + m ds \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{\tilde{A}} \right) + n ds \frac{\tilde{A}}{\tilde{C}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{u}{\tilde{A}} \right).$$

Подобным образом находим проекции  $m`ds`$  и  $n`ds`$ :

$$\begin{aligned} m`ds` &= mds \left\{ 1 + \frac{1}{\tilde{B}} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{\tilde{A}\tilde{B}} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \alpha} + \frac{w}{\tilde{B}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \gamma} \right\} + lds \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{\tilde{B}} \right) + \\ &+ nds \frac{\tilde{B}}{\tilde{C}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{u}{\tilde{B}} \right); \\ n`ds` &= nds \left\{ 1 + \frac{1}{\tilde{C}} \frac{\partial w}{\partial \gamma} + \frac{v}{\tilde{B}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \beta} + \frac{u}{\tilde{A}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \alpha} \right\} + lds \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{w}{\tilde{C}} \right) + \\ &+ mds \frac{\tilde{C}}{\tilde{B}} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{w}{\tilde{C}} \right). \end{aligned}$$

Длина отрезка  $P`Q`$  определяется из уравнения

$$(P`Q`)^2 = (l`ds`)^2 + (m`ds`)^2 + (n`ds`)^2.$$

Его продольная деформация

$$\varepsilon = \frac{P`Q` - PQ}{PQ};$$

$$P`Q` = PQ(1 + \varepsilon) = ds(1 + \varepsilon).$$

Получается

$$\begin{aligned} (1 + \varepsilon)^2 &= \frac{(P`Q`)^2}{ds^2} = \\ &= \left\{ l \left( 1 + \frac{1}{\tilde{A}} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{\tilde{A}\tilde{B}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \beta} + \frac{w}{\tilde{A}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \gamma} \right) + m \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{\tilde{A}} \right) + n \frac{\tilde{A}}{\tilde{C}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{u}{\tilde{A}} \right) \right\}^2 + \\ &+ \left\{ m \left( 1 + \frac{1}{\tilde{B}} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{\tilde{A}\tilde{B}} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \alpha} + \frac{w}{\tilde{A}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \gamma} \right) + l \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{\tilde{B}} \right) + n \frac{\tilde{B}}{\tilde{C}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{v}{\tilde{B}} \right) \right\}^2 + \\ &+ \left\{ n \left( 1 + \frac{1}{\tilde{C}} \frac{\partial w}{\partial \gamma} + \frac{v}{\tilde{B}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \beta} + \frac{u}{\tilde{A}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \alpha} \right) + l \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{w}{\tilde{C}} \right) + m \frac{\tilde{C}}{\tilde{B}} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{w}{\tilde{C}} \right) \right\}^2. \end{aligned}$$

Раскроем квадраты сумм в левой и правой частях, учтем, что  $l^2 + m^2 + n^2 = 1$ , пренебрежем бесконечно малым высшего порядка.

Получится выражение для  $\varepsilon$ :

$$\varepsilon = \varepsilon_1 l^2 + \varepsilon_2 m^2 + \varepsilon_3 n^2 + \gamma_{12} lm + \gamma_{23} mn + \gamma_{31} nl, \quad (1.17)$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{\tilde{A}} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{\tilde{A}\tilde{B}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \beta} + \frac{w}{\tilde{A}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \gamma}; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{\tilde{B}} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{\tilde{A}\tilde{B}} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \alpha} + \frac{w}{\tilde{B}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{B}}{\partial \gamma}; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{\tilde{C}} \frac{\partial w}{\partial \gamma} + \frac{v}{\tilde{B}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \beta} + \frac{u}{\tilde{A}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{C}}{\partial \alpha}; \\ \gamma_{12} &= \frac{\tilde{B}}{\tilde{A}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{\tilde{B}} \right) + \frac{\tilde{A}}{\tilde{B}} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{\tilde{A}} \right); \end{aligned} \quad (1.18)$$

$$\begin{aligned}\gamma_{23} &= \frac{\tilde{C}}{\tilde{B}} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{w}{\tilde{C}} \right) + \frac{\tilde{B}}{\tilde{C}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{v}{\tilde{B}} \right); \\ \gamma_{31} &= \frac{\tilde{A}}{\tilde{C}} \frac{\partial}{\partial \gamma} \left( \frac{u}{\tilde{A}} \right) + \frac{\tilde{C}}{\tilde{A}} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{w}{\tilde{C}} \right).\end{aligned}\quad (1.18)$$

Сравнивая выражения (1.17) и (1.12), находим, что  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$  — компоненты продольной деформации в направлении осей  $x, y, z$ , а  $\gamma_{12}, \gamma_{23}, \gamma_{31}$  — деформации сдвига в плоскостях  $Oxy, Oyz, Ozx$  — касательной и нормальных к оболочке.

В теории оболочек принимаются следующие геометрические гипотезы:

- 1) прямой элемент, перпендикулярный срединной поверхности, при деформировании оболочки остается прямым перпендикулярным срединной поверхности и не изменяет своей длины;
- 2) на площадках, параллельных срединной поверхности, нормальные напряжения пренебрежимо малы.

В соответствии с этими гипотезами деформации сдвига в нормальных сечениях и линейная деформация по нормали к срединной поверхности равны

$$\gamma_{13} = 0, \quad \gamma_{32} = 0, \quad \varepsilon_3 = 0. \quad (1.19)$$

Пусть срединная поверхность имеет главные радиусы кривизны  $R_\alpha$  и  $R_\beta$  и коэффициенты первой квадратичной формы  $A$  и  $B$  (рис. 1.5). Если начало системы осей  $\alpha, \beta, z$  поместить в срединной поверхности, то:

$$\tilde{A} = A \left( 1 + \frac{z}{R_\alpha} \right); \quad \tilde{B} = B \left( 1 + \frac{z}{R_\beta} \right); \quad \tilde{C} = 1, 0.$$

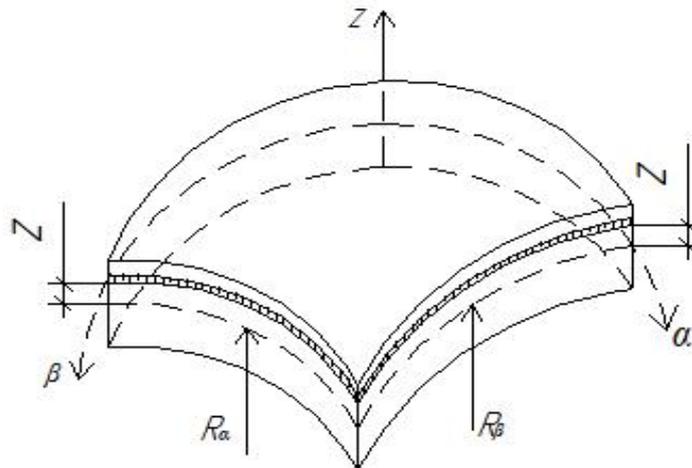


Рис. 1.5. К определению коэффициентов искажения в начале координат в срединной поверхности

Равенства (1.19) и (1.18) дают:

$$\varepsilon_3 = 0: \quad \frac{\partial w}{\partial \gamma} = 0; \quad \text{отсюда } w = w(\alpha, \beta);$$

$$\gamma_{32} = 0: \quad \frac{1}{B \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \frac{\partial w}{\partial \beta} + B \left(1 + \frac{z}{R_2}\right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{v}{B \left(1 + \frac{z}{R_2}\right)} \right) = 0;$$

$$\gamma_{31} = 0: \quad A \left(1 + \frac{z}{R_1}\right) \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{u}{A \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \right) + \frac{1}{A \left(1 + \frac{z}{R_1}\right)} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0.$$

Для срединной поверхности  $z = 0$ . Два последних уравнения запишем в виде:

$$\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{v}{R_2} = 0, \quad \text{откуда } \left( \frac{\partial v}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta}; \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{u}{R_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} = 0, \quad \text{откуда } \left( \frac{\partial u}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}.$$

Интегрируем выражения (1.20)

$$v = v_0 + z \left( \frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) = v_0 \left( 1 + \frac{z}{R_2} \right) - z \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta};$$

$$u = u_0 + z \left( \frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) = u_0 \left( 1 + \frac{z}{R_1} \right) - z \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha}.$$

С учетом этих выражений и того, что  $\frac{\partial \tilde{A}}{\partial z} = \frac{A}{R_1}$ ,  $\frac{\partial \tilde{B}}{\partial z} = \frac{B}{R_2}$ ,  $w = w(\alpha, \beta)$ ,

по выражениям (1.18) определяют деформации  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$ ,  $\gamma_{12}$ .

Для  $\varepsilon_1$  по слагаемым:

$$\frac{1}{\tilde{A}} \frac{\partial u}{\partial \alpha} = \frac{1}{A} \frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \frac{1}{A} z \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right);$$

$$\frac{v}{\tilde{A}\tilde{B}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \beta} = \frac{1}{AB} v_0 \frac{\partial A}{\partial \beta} + z \frac{1}{AB} \left( \frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \frac{\partial A}{\partial \beta};$$

$$\frac{w}{\tilde{A}\tilde{C}} \frac{\partial \tilde{A}}{\partial \gamma} = \frac{w_0}{R_1}.$$

Получается:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{A} \frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} v_0 \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w_0}{R_1} - z \left\{ \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( -\frac{u_0}{R_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha} \right) + \frac{1}{AB} \left( -\frac{v_0}{R_2} + \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) \frac{\partial A}{\partial \beta} \right\};$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 &= \frac{1}{B} \frac{\partial v_0}{\partial \beta} + \frac{u_0}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w_0}{R_2} - \\ &- z \left\{ \frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( -\frac{v_0}{R_2} + \frac{1}{B} \frac{\partial w_0}{\partial \beta} \right) + \frac{1}{AB} \left( -\frac{u_0}{R_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right\}; \\ \gamma_{12} &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v_0}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_0}{A} \right) + \\ &+ z \left\{ \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{B} \left( \frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{A} \left( \frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right\}. \end{aligned}$$

Эти формулы можно написать сокращенно:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_{10} + z\alpha_1; \quad \varepsilon_2 = \varepsilon_{20} + z\alpha_2; \quad \gamma_{12} = \gamma_0 + 2z\chi,$$

где

$$\begin{aligned} \varepsilon_{10} &= \frac{1}{A} \frac{\partial u_0}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w_0}{R_1}; \\ \varepsilon_{20} &= \frac{1}{B} \frac{\partial v_0}{\partial \beta} + \frac{u_0}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w_0}{R_2}; \\ \gamma_0 &= \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v_0}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u_0}{A} \right); \\ \alpha_1 &= -\frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( -\frac{u_0}{R_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha} \right) - \frac{1}{AB} \left( -\frac{v_0}{R_2} + \frac{1}{B} \frac{\partial w_0}{\partial \beta} \right) \frac{\partial A}{\partial \beta}; \\ \alpha_2 &= -\frac{1}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( -\frac{v_0}{R_2} + \frac{1}{B} \frac{\partial w_0}{\partial \beta} \right) - \frac{1}{AB} \left( -\frac{u_0}{R_1} + \frac{1}{A} \frac{\partial w_0}{\partial \alpha} \right) \frac{\partial B}{\partial \alpha}; \quad (1.21) \\ \chi &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \frac{1}{B} \left( \frac{v_0}{R_2} - \frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \frac{1}{A} \left( \frac{u_0}{R_1} - \frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} \right) \right\}, \end{aligned}$$

где  $\varepsilon_{10}$ ,  $\varepsilon_{20}$ ,  $\gamma_0$  – относительные удлинения и углы сдвига в срединной поверхности;  $\alpha$ ,  $\alpha_2$  – кривизны срединной поверхности в направлениях  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно;  $\chi$  – кручение срединной поверхности – предел отношения угла взаимного закручивания противоположных граней элемента к расстоянию между ними, когда размеры элемента стремятся к нулю.

Выражения для деформаций (1.21) в обозначениях, принятых у В. Н. Байкова:

$$\varepsilon_{10} = \varepsilon_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{v}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} + \frac{w}{R_\alpha}; \quad (1.22)$$

$$\varepsilon_{20} = \varepsilon_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{u}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} + \frac{w}{R_\beta}; \quad (1.23)$$

$$\gamma_0 = \omega = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right). \quad (1.24)$$

Перемещения и деформации изгиба оболочки:

$$\alpha_1 \equiv \alpha_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial v}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} \psi; \quad (1.25)$$

$$\alpha_2 \equiv \alpha_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial \psi}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} v. \quad (1.26)$$

$$\chi \equiv \tau = \frac{1}{A} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha} + \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} - \frac{1}{AB} \left( \frac{\partial A}{\partial \beta} v + \frac{\partial B}{\partial \alpha} \psi \right) \quad (1.27).$$

Здесь

$$v = -\frac{1}{A} \frac{\partial w}{\partial \alpha} + \frac{u}{R_\alpha}; \quad \psi = -\frac{1}{B} \frac{\partial w}{\partial \beta} + \frac{v}{R_\beta}. \quad (1.28)$$

Величины  $\varepsilon_\alpha$ ,  $\varepsilon_\beta$ ,  $\omega$  – компоненты тангенциальной деформации;  $\alpha_\alpha$ ,  $\alpha_\beta$  – компоненты изгибной деформации;  $\tau$  – кручение срединной поверхности.

Шесть компонентов деформации связаны между собой тремя компонентами перемещения  $u$ ,  $v$ ,  $w$ . Кроме того, они связаны уравнениями неразрывности деформаций, которые получаются из выражения (1.27) с использованием условий Кодацци – Гаусса (1.9), (1.10).

## 1.5. Уравнения равновесия

Будем брать суммы проекций сил на касательные к осям  $\alpha$  и  $\beta$ . Грани элемента, перпендикулярные оси  $\alpha$ , имеют площади  $Bd\beta$  и  $Bd\beta + \frac{\partial(Bd\beta)}{\partial \alpha} d\alpha$  (рис. 1.6). Нормальные усилия в этих гранях равны  $N_\alpha B d\beta$  и  $\left( N_\alpha + \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} d\alpha \right) \left( B d\beta + \frac{\partial B d\beta}{\partial \alpha} d\alpha \right) = N_\alpha B d\beta + \left( \frac{\partial N_\alpha}{\partial \alpha} B + N_\alpha \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) d\alpha d\beta$ .

Касательные силы в этих гранях

$$N_{\beta\alpha} B d\beta \text{ и } \left( \frac{\partial N_{\beta\alpha}}{\partial \alpha} B + N_{\beta\alpha} \frac{\partial B}{\partial \alpha} \right) d\alpha d\beta.$$

Грани, перпендикулярные оси  $\beta$ , имеют площади  $A d\alpha$  и  $A d\alpha + \frac{\partial A d\alpha}{\partial \beta} d\beta$ . Нормальные усилия в них  $N_\beta A d\alpha$  и  $N_\beta A d\alpha + \left( \frac{\partial N_\beta}{\partial \beta} A + N_\beta \frac{\partial A}{\partial \beta} \right) d\alpha d\beta$ .

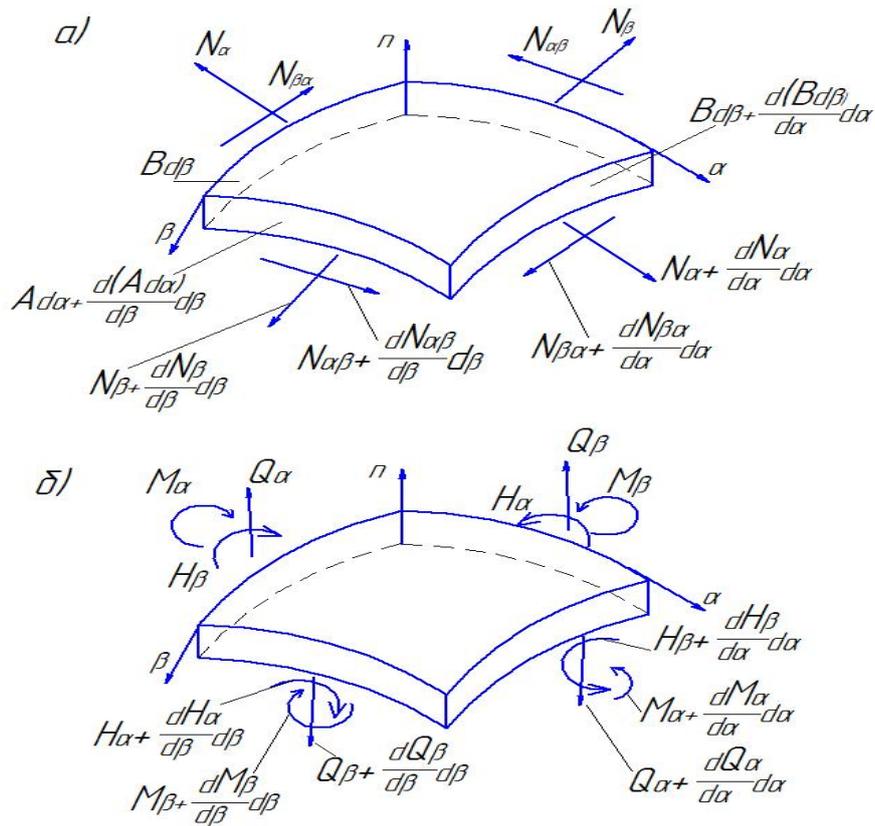


Рис. 1.6. Усилия, действующие по граням элемента оболочки:  
 а – усилия в срединной поверхности; б – моментные усилия

Касательные  $N_{\alpha\beta}Ad\alpha$  и  $N_{\alpha\beta}Ad\alpha + \left(\frac{\partial N_{\alpha\beta}}{\partial\beta}A + N_{\alpha\beta}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)d\alpha d\beta$ .

В уравнении  $\sum\alpha = 0$  также участвуют силы  $N_{\beta}Ad\alpha$  и  $N_{\beta\alpha}Bd\beta$ . Их проекции на ось  $\alpha$  (рис 1.7).

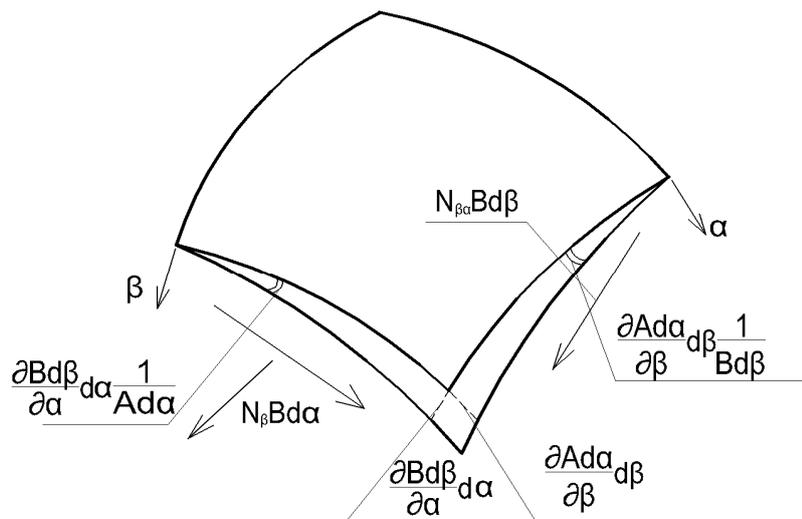


Рис. 1.7. К определению проекций сил  $N_{\beta}Bd\alpha$  и  $N_{\beta\alpha}Bd\beta$  на ось  $\alpha$

$$-N_\beta A d\alpha \frac{\partial B d\beta}{\partial \alpha} d\alpha \frac{1}{A \partial \alpha} = -N_\beta \frac{\partial B}{\partial \alpha} d\alpha d\beta;$$

$$N_\beta B d\beta \frac{\partial A d\alpha}{\partial \beta} d\beta \frac{1}{B \partial \beta} = N_{\beta\alpha} \frac{\partial A}{\partial \beta} d\alpha d\beta.$$

Уравнения  $\sum \alpha = 0$ ,  $\sum \beta = 0$ ,  $\sum n = 0$  запишем в виде:

$$\frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta \right\} - K_\alpha Q_\alpha -$$

$$-K_{\alpha\beta} Q_\beta + q_\alpha = 0;$$

$$\frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_\beta) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta\alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_\alpha \right\} -$$

$$-K_\beta Q_\beta - K_{\alpha\beta} Q_\alpha + q_\beta = 0; \quad (1.29)$$

$$\frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BQ_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AQ_\beta) \right\} + K_\alpha N_\alpha + K_\beta N_\beta + K_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} +$$

$$+ K_{\beta\alpha} N_{\beta\alpha} - q_n = 0.$$

Аналогично записывают уравнения  $\sum M_\alpha = 0$ ,  $\sum M_\beta = 0$ ,  $\sum M_n = 0$  (см. рис. 1.6).

$$\frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AH_\beta) + \frac{\partial A}{\partial \beta} H_\alpha - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta \right\} + Q_\alpha = 0;$$

$$\frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BH_\beta) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_\beta) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} H_\beta - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha \right\} + Q_\beta = 0; \quad (1.30)$$

$$N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha} + K_\alpha H_\alpha - K_\beta H_\beta + K_{\alpha\beta} M_\beta - K_{\alpha\beta} M_\alpha = 0.$$

Если координатными линиями служат главные линии кривизны поверхности, то кручение  $K_{\alpha\beta} = 0$  и уравнения (1.29), (1.30) принимают вид:

$$\frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta \right\} - K_\alpha Q_\alpha + q_\alpha = 0;$$

$$\frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_\beta) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta\alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_\alpha \right\} -$$

$$-K_\beta Q_\beta + q_\beta = 0; \quad (1.31)$$

$$\frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BQ_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AQ_\beta) \right\} + K_\alpha N_\alpha + K_\beta N_\beta - q_n = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BM_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AH_\beta) + \frac{\partial A}{\partial \beta} H_\alpha - \frac{\partial B}{\partial \alpha} M_\beta \right\} + Q_\alpha &= 0; \\ \frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BH_\beta) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AM_\beta) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} H_\beta - \frac{\partial A}{\partial \beta} M_\alpha \right\} + Q_\beta &= 0; \quad (1.32) \\ N_{\alpha\beta} - N_{\beta\alpha} + K_\alpha H_\alpha - K_\beta H_\beta &= 0. \end{aligned}$$

В тонкостенных оболочках моменты имеют существенно меньшее значение, чем силы, действующие в срединной поверхности. Поэтому в последнем уравнении (1.32) момент можно опустить. Тогда будет

$$N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}.$$

Кроме того, обычно вводится усредненное значение крутящего момента

$$H = \frac{H_\alpha + H_\beta}{2}.$$

## 1.6. Физические уравнения теории оболочек

Рассматриваются упругие оболочки. На основе обобщенного закона Гука устанавливаются зависимости между силами и деформациями, а также между моментами и кривизнами:

$$\begin{aligned} N_\alpha &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\alpha + \nu\varepsilon_\beta); & M_\alpha &= \frac{EI}{1-\nu^2} (\alpha_\alpha + \nu\alpha_\beta); \\ N_\beta &= \frac{Eh}{1-\nu^2} (\varepsilon_\beta + \nu\varepsilon_\alpha); & M_\beta &= \frac{EI}{1-\nu^2} (\alpha_\beta + \nu\alpha_\alpha); \\ N_{\alpha\beta} &= \frac{Eh}{2(1+\nu)} \omega; & H &= \frac{EI}{1+\nu} \tau, \end{aligned} \quad (1.33)$$

где  $E$  – модуль упругости материала;  $\nu$  – коэффициент Пуассона;  $h$  – толщина оболочки;  $\omega$  – угловая деформация в срединной поверхности.

Обратные соотношения имеют вид:

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha &= \frac{1}{Eh} (N_\alpha - \nu N_\beta); & \alpha_\alpha &= \frac{1}{EI} (M_\alpha - \nu M_\beta); \\ \varepsilon_\beta &= \frac{1}{Eh} (N_\beta - \nu N_\alpha); & \alpha_\beta &= \frac{1}{EI} (M_\beta - \nu M_\alpha); \\ \omega &= \frac{2(1+\nu)}{Eh} N_{\alpha\beta}; & \tau &= \frac{1+\nu}{EI} H. \end{aligned} \quad (1.34)$$

## 1.7. Напряженно-деформированное состояние пологих оболочек

Оболочку называют полой, если угол между касательной к ее поверхности и плоскостью ее основания не превышает  $18^\circ$ . В оболоч-

ках с прямоугольным планом стрела подъема должна быть не более 1/5 размера меньшей стороны основания, в осесимметричных оболочках вращения с круглым планом стрела подъема не должна превышать 1/5 диаметра основания. Длина дуги срединной поверхности полой оболочки отличается от длины ее проекции на основание незначительно. Поэтому геометрические соотношения в срединной поверхности оболочки могут быть заменены геометрическими соотношениями в ее основании.

Для пологих оболочек с прямоугольным планом в качестве координатной сети на поверхности удобно принять ортогональные линии  $x = \text{const}$ ,  $y = \text{const}$ , получаемые пересечением оболочки плоскостями, параллельными плоскостям  $Oxy$ ,  $Oyz$  (рис. 1.8).

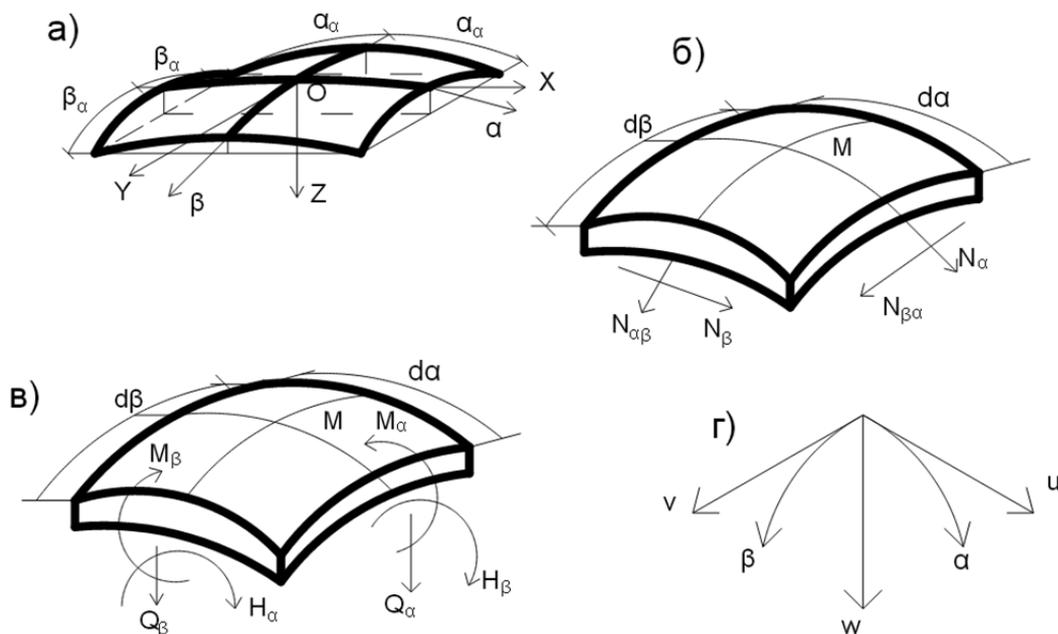


Рис. 1.8. Пологая оболочка двоякой кривизны на прямоугольном плане: а – общий вид; б – элемент оболочки двоякой кривизны на прямоугольном плане; в – элемент с моментными усилиями в сечениях; г – компоненты перемещений

Тогда можно считать  $\alpha \approx x$ ,  $\beta \approx y$ , а коэффициенты первой квадратичной формы  $A \approx 1$ ,  $B \approx 1$ . Коэффициенты второй квадратичной формы принимают вид:

$$L = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad M = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad N = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2},$$

а кривизны поверхности при направлении оси  $z$  вниз будут:

$$K_x = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}; \quad K_{xy} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}; \quad K_y = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

В уравнениях деформаций (1.22) – (1.24) члены, содержащие  $\frac{\partial A}{\partial \alpha}$ ,  $\frac{\partial A}{\partial \beta}$ ,  $\frac{\partial B}{\partial \beta}$ , могут быть отброшены. Для деформации в срединной поверхности получается:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} - K_x \omega; \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} - K_y \omega; \quad \omega = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Более точные выражения для деформации срединной поверхности можно найти в книге [4]:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\partial u}{\partial x} - K_x \omega + \left( \frac{\partial \omega}{\partial x} \right)^2; \\ \varepsilon_y &= \frac{\partial v}{\partial y} - K_y \omega + \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} \right)^2; \\ \omega &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + 2 \frac{\partial \omega}{\partial x} \frac{\partial \omega}{\partial y}. \end{aligned}$$

Деформации изгиба оболочки (1.25) – (1.27) с учетом выражений (1.28) приобретают вид:

$$\alpha_x = \frac{-\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad \alpha_y = \frac{-\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \tau = -2 \frac{-\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}.$$

(Слагаемые, содержащие перемещения  $u$  и  $v$  в выражении для  $\tau$ , отброшены ввиду их малости).

Для пологих оболочек в уравнениях равновесия (1.29), (1.30) можно опустить слагаемые  $K_\alpha Q_\alpha$ ,  $K_\beta Q_\beta$ ,  $K_{\alpha\beta} Q_\alpha$ ,  $K_{\alpha\beta} Q_\beta$ ,  $K_\alpha H_\alpha$ ,  $K_\beta H_\beta$ . Тогда из третьего из уравнений (1.30) следует  $N_{xy} = N_{yx}$ . Кроме того, полагают, что  $H_x = H_y$ . При вертикальной нагрузке, когда  $q_n \approx q$ ,  $q_\alpha \approx 0$ ,  $q_\beta \approx 0$ , уравнения (1.29), (1.30) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} &= 0; \quad \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0; \\ -\frac{\partial Q_x}{\partial x} - \frac{\partial Q_y}{\partial y} + K_x N_x + K_y N_y + 2K_{xy} N_{xy} + q_0 &= 0; \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} + Q_x &= 0; \quad \frac{\partial M_y}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial x} + Q_y = 0. \end{aligned} \tag{1.35}$$

$$\text{Здесь } K_x = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}; \quad K_y = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}; \quad K_{xy} = \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}.$$

Из четвертого и пятого уравнений (1.35) выражаем  $Q_x$  и  $Q_y$  и подставляем в третье уравнение. Получаются три уравнения равновесия:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 H}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -q_0. \quad (1.36)$$

Если координатная сеть оболочки представлена главными линиями кривизны, то  $K_x = K_1$ ,  $K_y = K_2$ ,  $K_{xy} = 0$ . Зависимости между внутренними силами и деформациями и между деформациями и перемещениями определяются выражениями (1.33) и (1.22) – (1.24). В конструкциях из железобетона коэффициент Пуассона мало влияет на конечные результаты. В выражениях (1.33) он может быть опущен. Тогда

$$N_x = Eh\varepsilon_x = Eh \left( \frac{\partial u}{\partial x} - K_x \omega \right); \quad N_y = Eh\varepsilon_y = Eh \left( \frac{\partial v}{\partial y} - K_y \omega \right); \quad (1.37)$$

$$N_{xy} = \frac{1}{2} Eh \omega = \frac{1}{2} Eh \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + 2K_{xy} \omega \right);$$

$$M_x = EI\alpha_x = -EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}; \quad M_y = EI\alpha_y = -EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}; \quad (1.38)$$

$$H = EI\tau = -EI \frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y}.$$

Контурные конструкции, как правило, плоские. Их жесткость на изгиб из своей плоскости принимается равной нулю. В своей плоскости они могут быть жесткими (недеформируемыми) или деформируемыми как в вертикальном направлении, так и вдоль контура. Если у контура  $\beta = \beta_0$  вырезать малый элемент оболочки, то на грани, выходящей на контур, силы  $N_\beta$ ,  $N_{\alpha\beta}$ ,  $Q_\beta$  и моменты  $M_\beta$ ,  $H$  могут быть отличны от нуля лишь в том случае, если они могут быть восприняты контурной конструкцией. При записи граничных условий крутящий момент  $H$  заменяют касательными силами. Если бы момент был постоянным по сечению  $\beta = \beta_0$ , он заменялся бы одной горизонтальной силой  $\frac{H}{R_\alpha}$ , которую можно добавить к силе  $N_{\alpha\beta}$ . Изменение момента по длине сечения вызывает дополнительную вертикальную касательную силу  $\frac{1}{A} \frac{\partial H}{\partial \alpha}$ , которую добавляют к силе  $Q_\beta$ . Получается, что на границе  $\beta = \beta_0$  имеются четыре воздействия:

$$N_\beta, \quad N_{\alpha\beta} + \frac{H}{R_\alpha}, \quad Q_\beta + \frac{1}{A} \frac{\partial H}{\partial \alpha}, \quad M_\beta.$$

## 1.8. Контурные конструкции и граничные условия

Оболочки могут опираться в отдельных точках контура, в частности, по углам или непрерывно по всему контуру. Чаще применяется опирание по всему контуру; несущая способность в этом случае выше. В качестве контурных конструкций (опорных диафрагм) применяются фермы, арки с затяжками или угловыми устоями, брусья. Возможно опирание оболочек на ряды часто расположенных колонн. Такое опирание не воспринимает касательных сил  $N_{\alpha\beta}$ . В одноволновой однопролетной оболочке на ее границах перемещения в направлении, перпендикулярном контуру, ничем не стеснены. Поэтому, например, при  $\beta = \pm\beta_0$  должно быть  $N_\beta = 0$ . Дальше может быть:

- 1)  $N_\alpha \neq 0, N_{\alpha\beta} \neq 0$ ;
- 2)  $N_\alpha = 0, N_{\alpha\beta} \neq 0$ ;
- 3)  $N_\alpha \neq 0, N_{\alpha\beta} = 0$ .

Аналогичны граничные условия на краю  $\alpha = \pm\alpha_0$ . Если оболочка соединена с контурной конструкцией шарнирно, то  $M_\beta = 0$ , но  $H \neq 0$  и  $Q_\beta \neq 0$ .

Граничные условия могут быть заданы не только в силах, но и в деформациях или перемещениях, или углах наклона линий кривизны  $\frac{\partial W}{\partial \alpha}, \frac{\partial \omega}{\partial \beta}$ . При жестких в своей плоскости контурных элементах  $W \neq 0$ , при арках с затяжками или устоями  $W = 0$ . При контурных элементах, жестких вдоль контура, по сторонам  $\beta = \pm\beta_0$   $\frac{\partial u}{\partial \alpha} = 0$ , по сторонам  $\alpha = \pm\alpha_0$   $\frac{\partial v}{\partial \beta} = 0$ .

Граничные условия могут задаваться и в смешанном виде. Общее их число должно быть равно четырем.

## 1.9. Покрывтия с оболочками положительной гауссовой кривизны, прямоугольные в плане

При расчете оболочек принимаются упрощающие дело гипотезы и допущения. Например, для тонкостенных оболочек для большей их области вполне достоверными принимаются результаты, полученные по безмоментной теории. В зонах местного изгиба

такие результаты являются приближенными, но достаточно надежными. Железобетонные оболочки, гладкие или ребристые, обладают малой жесткостью на изгиб, которая ещё больше уменьшается после образования трещин. Такие оболочки можно считать тонкостенными. Значительные упрощения получаются, если поверхность оболочки имеет постоянные кривизны; а при переменных кривизнах во многих случаях допускается заменять в расчете фактические оболочки фиктивными с постоянными кривизнами. Более простыми зависимости оказываются для пологих оболочек, что также используется в проектной практике. Прибегают к идеализации свойств контурных конструкций: придают им или абсолютную жесткость, или нулевую.

### 1.10. Безмоментная теория оболочек

Все моменты и поперечные силы  $Q_\alpha$  и  $Q_\beta$  принимаются равными нулю. Из формул (1.30) остается только последняя, из которой следует  $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$ . С учетом этого переписываются уравнения (1.29).

$$\frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_\alpha) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial A}{\partial \beta} N_{\alpha\beta} - \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_\beta \right\} = -q_\alpha;$$

$$\frac{1}{AB} \left\{ \frac{\partial}{\partial \alpha} (BN_{\alpha\beta}) + \frac{\partial}{\partial \beta} (AN_\beta) + \frac{\partial B}{\partial \alpha} N_{\beta\alpha} - \frac{\partial A}{\partial \beta} N_\alpha \right\} = -q_\beta;$$

$$K_\alpha N_\alpha + K_\beta N_\beta + 2K_{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} = q_n.$$

Можно показать, что порядок этой системы равен 2. Деформации определяют на основе выражений (1.22) – (1.24) и (1.34).

$$\varepsilon_\alpha = \frac{1}{A} \frac{\partial u}{\partial \alpha} + \frac{1}{AB} \frac{\partial A}{\partial \beta} v + K_\alpha w = \frac{1}{Eh} N_\alpha;$$

$$\varepsilon_\beta = \frac{1}{B} \frac{\partial v}{\partial \beta} + \frac{1}{AB} \frac{\partial B}{\partial \alpha} u + K_\beta w = \frac{1}{Eh} N_\beta;$$

$$\omega = \frac{B}{A} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left( \frac{v}{B} \right) + \frac{A}{B} \frac{\partial}{\partial \beta} \left( \frac{u}{A} \right) = \frac{2}{Eh} N_{\alpha\beta}.$$

Во многих случаях удобнее пользоваться соотношениями не в осях  $\alpha$ ,  $\beta$ , а в осях  $x$ ,  $y$ ,  $z$  (рис. 1.9).

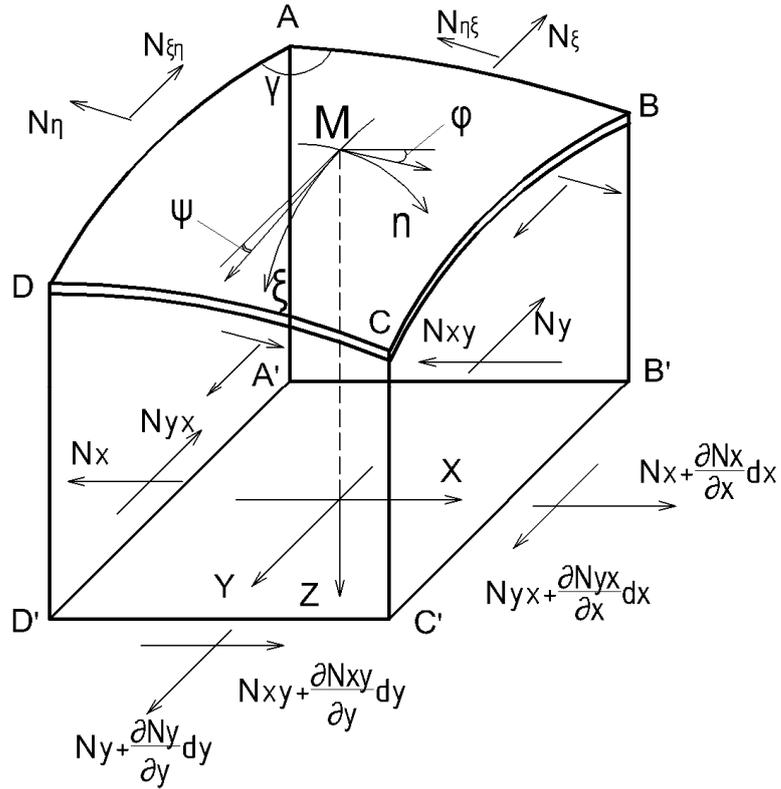


Рис. 1.9. Проектирование элемента оболочки с усилиями по его граням на основание оболочки

Если оболочка задана в явном виде  $Z = f(x, y)$ , то:

$$d\eta = \sqrt{1 + p^2} dx = \frac{dx}{\cos\varphi} ;$$

$$d\xi = \sqrt{1 + q^2} dy = \frac{dy}{\cos\psi} ;$$

$$d\Omega = \sqrt{1 + p^2 + q^2} dx dy = \frac{dx dy}{\cos\delta} ,$$

где  $p = \frac{\partial f}{\partial x}$ ,  $q = \frac{\partial f}{\partial y}$ ,  $d\Omega$  – площадь элемента  $ABCD$ ;  $\delta$  – угол между нормальными к площадкам  $ABCD$  и  $A'B'C'D'$ .

Соотношения между усилиями в элементе и их проекциями:

$$N_\eta = \sqrt{\frac{1+p^2}{1+q^2}} N_x ; \quad (1.39)$$

$$N_\xi = \sqrt{\frac{1+q^2}{1+p^2}} N_y ; \quad (1.40)$$

$$N_{\eta\xi} = N_{xy} ; \quad N_{\xi\eta} = N_{yx} . \quad (1.41)$$

Компоненты равномерно распределенной нагрузки на оболочке  $q_x, q_y, q_z$ , а в проекции на оси  $x, y, z - X, Y, Z$ .

$$X = q_x \frac{d\Omega}{dxdy} = q_x \sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

$$Y = q_y \sqrt{1 + p^2 + q^2};$$

$$Z = q_z \sqrt{1 + p^2 + q^2}.$$

Уравнения равновесия в виде суммы проекций сил на оси  $x, y, z$ :

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = -X; \quad \frac{\partial N_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} = -Y;$$

$$K_x N_x + K_y N_y + 2K_{xy} N_{xy} = pX + qY - Z.$$

Грани элемента поверхности, вырезанного в системе осей  $\eta\xi$ , не ортогональны друг другу. Силы  $N_\eta, N_\xi$  не ортогональны граням (рис. 1.10). Раскладывая их по нормальным и касательным к граням, получаем нормальные и касательные усилия в ортогональных осях  $\alpha\beta$ .

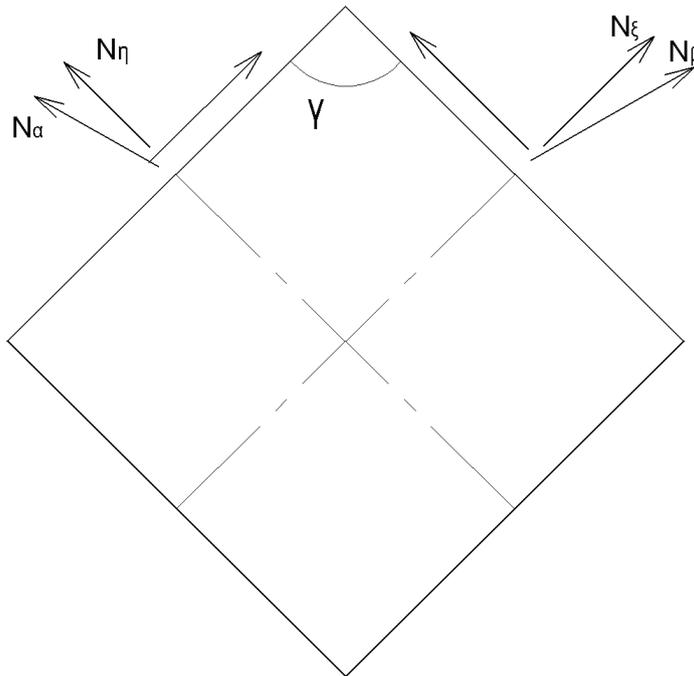


Рис. 1.10. Определение усилий в ортогональной системе  $\alpha\beta$

$$N_\alpha = N_\eta \sin\gamma; \quad N_\beta = N_\xi \sin\gamma;$$

$$N_{\alpha\beta} = N_\xi \cos\gamma + N_{\eta\xi}; \quad N_{\beta\alpha} = N_\eta \cos\gamma + N_{\xi\eta}.$$

$$\cos\gamma = \frac{pq}{\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)}}; \quad \sin\gamma = \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{\sqrt{(1+p^2)(1+q^2)}}.$$

На основе этих выражений и формул (1.39) – (1.41) находим:

$$N_{\alpha} = N_x \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{1+q^2}; \quad N_{\beta} = N_y \frac{\sqrt{1+p^2+q^2}}{1+p^2};$$

$$N_{\alpha\beta} = N_{xy} + N_y \frac{pq}{1+p^2}; \quad N_{\beta\alpha} = N_{yx} + N_x \frac{pq}{1+q^2}.$$

Часто разница между усилиями  $N_{\eta}, N_{\xi}, N_{\eta\xi}$  и  $N_{\alpha}, N_{\beta}, N_{\alpha\beta}$  невелика. Тогда можно пользоваться формулами (1.69), (1.70), (1.71).

Главные усилия определяются по формуле

$$N_{\frac{\max}{\min}} = \frac{N_{\eta} + N_{\xi} + 2N_{\eta\xi} \cos\gamma \pm \sqrt{(N_{\eta} + N_{\xi} + 2N_{\eta\xi} \cos\gamma)^2 - 4 \sin^2 \gamma (N_{\eta} N_{\xi} - N_{\eta\xi}^2)}}{2 \sin\gamma}.$$

Направление действия усилия  $N_{\max}$  определяется углом  $\theta$ , отсчитываемым от оси  $\beta$  (рис. 1.11).

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{N_{\xi} \sin\gamma \cos\gamma + N_{\eta\xi} \sin\gamma}{N_{\max} \sin\gamma - N_{\eta} - N_{\xi} \cos^2\gamma - 2N_{\eta\xi} \cos\gamma}.$$

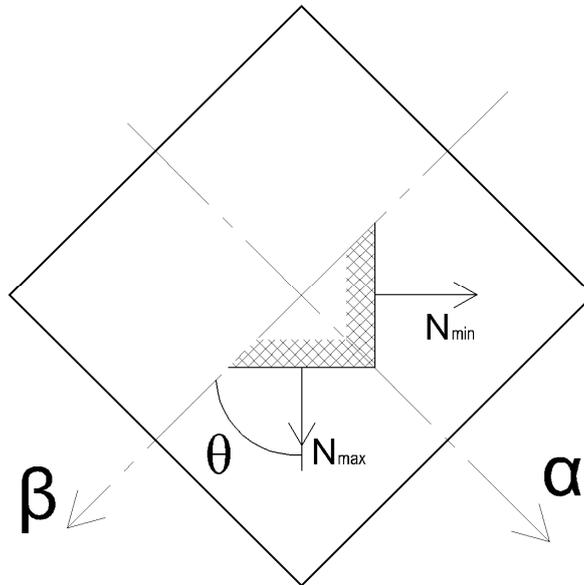


Рис. 1.11. Определение главных усилий

## 1.11. Теория пологих оболочек

Вместо системы дифференциальных уравнений, связывающих шесть неизвестных  $N_x, N_y, N_{xy}, M_x, M_y, H$ , для пологих оболочек можно получить систему, состоящую из двух дифференциальных уравнений относительно двух неизвестных. Вводится функция напряжений  $\phi(x, y)$  такая, что

$$N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}; \quad N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}; \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}. \quad (1.42)$$

Первые два уравнения системы (1.36) удовлетворяются тождественно. По выражениям (1.37) запишем

$$\frac{\partial^2 N_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 N_y}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 N_{xy}}{\partial x \partial y} = -Eh \left\{ \frac{\partial^2 (K_y \omega)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (K_x \omega)}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 (K_{xy} \omega)}{\partial x \partial y} \right\}$$

или с учетом (1.42)

$$\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \varphi}{\partial y^4} = -Eh \left\{ \frac{\partial^2 (K_y \omega)}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 (K_{xy} \omega)}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 (K_x \omega)}{\partial y^2} \right\}. \quad (1.43)$$

Другое уравнение, связывающее функции  $\varphi$  и  $\omega$ , получается подстановкой в третье из уравнений (1.36) выражений (1.38) и (1.42)

$$\begin{aligned} -D \left( \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 \omega}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 \omega}{\partial y^4} \right) + K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \\ - 2K_{xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -q. \end{aligned} \quad (1.44)$$

Уравнения (1.43) и (1.44), решаемые совместно, определяют напряженное состояние пологой оболочки. Определенная из решения функция напряжений  $\varphi = \varphi(x, y)$  позволяет определить все действующие в сечениях оболочки усилия и моменты. Если в уравнении (1.44) положить  $D = 0$ , то есть принять, что изгибная жесткость оболочки равна нулю, то получается уравнение равновесия безмоментного напряженного состояния пологой оболочки

$$K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2K_{xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = -q \quad (1.45)$$

или

$$K_x N_x + 2K_{xy} N_{xy} + K_y N_y = -q.$$

Для пологих оболочек  $p^2 \approx 0$ ,  $q^2 \approx 0$  и, следовательно,

$$N_\eta \approx N_\alpha \approx N_x; \quad N_\xi \approx N_\beta \approx N_y; \quad N_{\eta\xi} \approx N_{\alpha\beta} \approx N_{xy}.$$

Главные усилия в пологих оболочках и углы, определяющие их направления, находятся по формулам теории плоского напряженного состояния:

$$N_{\max}^{\min} = \frac{N_x + N_y}{2} \pm \sqrt{\left( \frac{N_x - N_y}{2} \right)^2 + N_{xy}^2}; \quad (1.46)$$

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \mp \frac{2N_{xy}}{N_x - N_y}. \quad (1.47)$$

При расчете пологой оболочки задача состоит в том, чтобы подобрать функцию напряжений  $\varphi = \varphi(x, y)$ , которая удовлетворяла бы граничным условиям задачи и уравнению равновесия (1.45). Существуют несколько методов подбора функции: метод сеток, когда

уравнение записывается в конечных разностях, представление усилий, прогибов и нагрузки в одинарных или двойных тригонометрических рядах, вариационные методы.

### 1.12. Вариационный метод Бубнова – Галеркина

Функция напряжений выбирается в виде суммы функций, каждая из которых умножена на постоянный множитель – неизвестный постоянный параметр.

$$\varphi(x, y) = \alpha_1 \varphi_1(x, y) + \alpha_2 \varphi_2(x, y) + \dots = \sum_{i=1,2,3\dots} \alpha_i \varphi_i(x, y), \quad (1.48)$$

где  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  – неизвестные постоянные параметры.

Используют два варианта:

1. Функции  $\varphi_i(x, y)$  выбирают так, чтобы каждая из них удовлетворяла всем граничным условиям, а постоянные параметры подбирают так, чтобы выполнялись условия равновесия.

2. Функции  $\varphi_i(x, y)$  выбирают так, чтобы по всей оболочке удовлетворялись уравнения равновесия, а постоянные параметры подбирают так, чтобы выполнялись граничные условия.

В методе Бубнова – Галеркина применяется первый вариант. Функции  $\varphi_i(x, y)$  могут быть выбраны в виде алгебраических полиномов или тригонометрических функций. Уравнение (1.45) запишется в виде

$$L(x, y) = K_x \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - 2K_{xy} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + K_y \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + q(x, y) = 0.$$

Постоянные параметры  $\alpha_i$  определяют из условия

$$\int_{-a}^a \int_{-b}^b L(x, y) \varphi_i(x, y) dx dy = 0.$$

В подынтегральное выражение последовательно подставляют все функции  $\varphi_i(x, y)$ . Интегрирование дает систему уравнений для определения постоянных параметров  $\alpha_i$ . Метод весьма надежен. С увеличением числа функций  $\varphi_i(x, y)$  решение уточняется; но оно трудоемко. Метод удобен при числе функций не более 5.

### 1.13. Метод коллокации

Коллокация – это удовлетворение определенным условиям в отдельных точках. Функция напряжений может быть выбрана в виде

(1.48) и определена любым из двух вариантов, описанных выше. Удобнее выбирать функции  $\varphi_i(x, y)$ , удовлетворяющие всем граничным условиям, а постоянные параметры  $a_i$  – удовлетворяющие уравнениям равновесия. В области оболочки выбирают точки, наиболее характерные для очертаний эпюр искомых усилий. Число таких точек равно числу постоянных параметров  $a_i$ . Координаты этих точек поочередно подставляют в уравнение равновесия. Получается система уравнений для определения параметров  $a_i$ . Функция напряжений дает решение всей задачи. В точках коллокации получается точное решение; в остальных – приближенное. Можно повторять решение несколько раз с малым числом точек коллокаций в разных местах. Решение отличается простотой и малой трудоемкостью, но требуется некоторый навык.

### 1.14. Безмоментное состояние пологих оболочек

Безмоментное состояние возникает, когда внешняя нагрузка нормальна к поверхности оболочки, распределена равномерно и уравнивается касательными силами, действующими по контуру. В отношении перемещений на контуре не накладываеся никаких ограничений. Для пологой оболочки вертикальную нагрузку приближенно принимают за нормальную.

Пусть поверхность задана функцией

$$Z(x, y) = Z_1(x) + Z_2(y) = \frac{f_1}{a^2} x^2 + \frac{f_2}{b^2} y^2.$$

Это эллиптический параболоид (рис. 1.12).

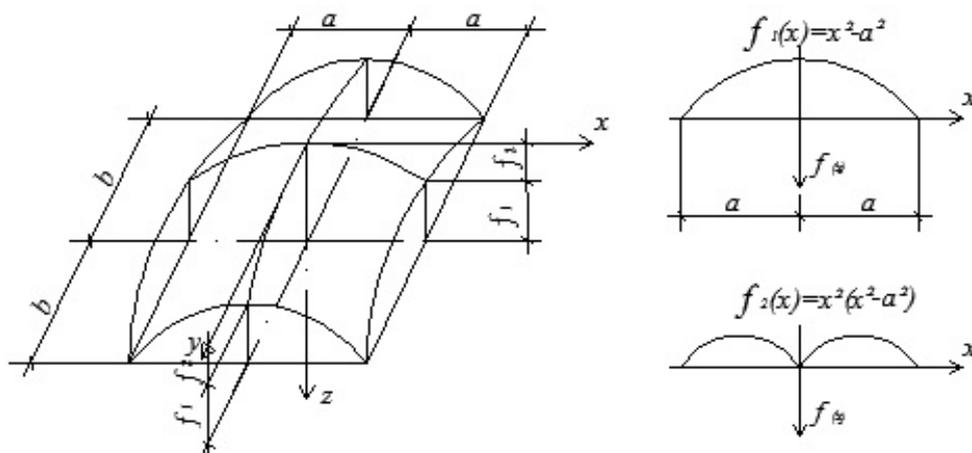


Рис. 1.12. К выбору функций напряжений

Главные кривизны

$$K_1 = K_x = \frac{\partial^2 Z}{\partial x^2} = 2 \frac{f_1}{a^2}; \quad K_2 = K_y = \frac{\partial^2 Z}{\partial y^2} = 2 \frac{f_1}{b^2}.$$

$K = K_1 \cdot K_2 > 0$  – это оболочка положительной гауссовой кривизны.

Кривизна кручения  $\frac{\partial^2 Z}{\partial x \partial y} = 0$ .

Граничные условия:

$$\text{при } x = \pm a \quad N_x = 0, \quad N_y \neq 0, \quad N_{xy} \neq 0;$$

$$\text{при } y = \pm b \quad N_y = 0, \quad N_x \neq 0, \quad N_{xy} \neq 0.$$

Выберем функцию напряжения в виде

$$\varphi(x, y) = a_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) + a_2x^2(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) + a_3y^2(x^2 - a^2)(y^2 - b^2). \quad (1.49)$$

Здесь  $\varphi(x, y) = \sum a_i \varphi_i(x) \varphi_i(y)$ .

Графики функций  $\varphi_i(x)$ , представленные на рис. 1.12:

$\varphi_1(x) = x^2 - a^2$ ;  $\varphi_2(x) = x^2(x^2 - a^2)$ . Функции  $\varphi_i(x)$ ,  $\varphi_i(y)$  удовлетворяют граничным условиям.

Уравнение равновесия (1.45) принимает вид

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mu_K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -\frac{q}{K_2}, \quad (1.50)$$

где  $\mu_K = \frac{K_1}{K_2}$ .

После подстановки функции напряжений получается

$$a_1 2(y^2 - b^2) + a_2 2(6x^2 - a^2)(y^2 - b^2) + a_3 2y^2(y^2 - b^2) + \mu_K \{a_1 2(x^2 - a^2) + a_2 2x^2(x^2 - a^2) + a_3 2(x^2 - a^2)(6y^2 - b^2)\} = -\frac{q}{K_2}.$$

Выберем три точки коллокации: А(0, 0), В(0,  $\frac{b}{\sqrt{2}}$ ), С( $\frac{a}{\sqrt{2}}$ , 0). Поочередно подставим их координаты в уравнение, разделим уравнения на  $2a^2$ , введем обозначение  $\frac{b^2}{a^2} = \lambda$ .

$$\begin{aligned} -a_1(\mu_K + \lambda) + a_2 b^2 + a_3 \mu_K b^2 &= -\frac{q}{2a^2 K_2}; \\ -a_1 \left( \mu_K + \frac{\lambda}{2} \right) + a_2 \frac{b^2}{2} + a_3 \left( -2\mu_K - \frac{\lambda}{4} \right) b^2 &= -\frac{q}{2a^2 K_2}; \\ -a_1 \left( \frac{\mu_K}{2} + \lambda \right) + a_2 b^2 \left( -2 - \frac{\mu_K}{4\lambda} \right) + a_3 \frac{b^2}{2} &= -\frac{q}{2a^2 K_2}. \end{aligned} \quad (1.51)$$

### Пример

Определить напряженное состояние оболочки с квадратным планом при равных постоянных кривизнах в обоих направлениях при равномерном распределении нагрузки  $q$ .

$$a = b, \quad f_1 = f_2, \quad K_x = K_y = \frac{1}{R} = \frac{2f_1}{a^2}, \quad q = \text{const.}$$

В силу симметрии конструкции в функции напряжений должно быть  $a_2 = a_3$ .  $\mu_K = 1$ ,  $\lambda = 1$ . Уравнения (1.51) запишем в виде

$$\begin{aligned} -a_1 + a_2 a^2 &= -\frac{qR}{4a^2}; \\ -a_1 - a_2 \frac{14}{12} a^2 &= -\frac{qR}{3a^2}. \end{aligned}$$

Из решения находим

$$a_1 = 0,2885 \frac{qR}{a^2}; \quad a_2 = 0,0385 \frac{qR}{a^4}. \quad (1.52)$$

Функция напряжений приобретает вид

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= a_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) + a_2(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)(x^2 + y^2) \\ \text{или } \varphi(x, y) &= a_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) + a_2\{(x^4 - x^2 a^2)(y^2 - b^2) + \\ &+ (x^2 - a^2)(y^4 - y^2 b^2)\}. \end{aligned}$$

Касательные силы получают выражение

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} = -a_1 4xy - a_2\{(4x^3 - 2xa^2)2y + 2x(4y^3 - 2yb^2)\}.$$

На контуре  $x = a$

$$\begin{aligned} N_{xy} \Big|_{x=a} &= -a_1 4ay - a_2\{(4a^3 y + 2a(4y^3 - 2yb^2))\} = -a_1 4ay - \\ &- a_2 4a(a^2 y + 2y^3 - yb^2). \end{aligned}$$

Для оболочки с квадратным планом при  $a = b$

$$N_{xy} \Big|_{x=a} = -a_1 4ay - a_2 8ay^3,$$

где  $a_1, a_2$  – по выражениям (1.52).

Вводят обозначения:

$$S_1 = 4a_1 a_2 = 1,154 qR; \quad S_2 = 8a_2 a_4 = 0,308 qR. \quad (1.53)$$

$$N_{xy} \Big|_{x=a} = -S_1 \frac{y}{a} - S_2 \left(\frac{y}{a}\right)^3 = -1,154 qR \frac{y}{a} - 0,308 qR \left(\frac{y}{a}\right)^3. \quad (1.54)$$

Функцию напряжений перепишем в виде

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= \frac{S_1}{4a^2} (x^2 - a^2)(y^2 - a^2) + \\ &+ \frac{S_2}{8a^2} \{(x^4 - x^2 a^2)(y^2 - a^2) + (x^2 - a^2)(y^4 - y^2 a^2)\}. \end{aligned}$$

Усилия в оболочке:  $N_x = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$ ,  $N_y = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$ ,  $N_{xy} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}$ ;

$$N_x = \frac{S_1}{2a^2} (x^2 - a^2) + \frac{S_2}{4a^4} \{x^2(x^2 - a^2) + (x^2 - a^2)(6y^2 - a^2)\};$$

$$N_y = \frac{S_1}{2a^2} (y^2 - a^2) + \frac{S_2}{4a^4} \{(6x^2 - a^2)(y^2 - a^2) + y^2(y^2 - a^2)\};$$

$$N_{xy} = -\frac{S_1}{a^2}xy - \frac{S_2}{2a^4}\{(2x^3 - xa^2)y + x(2y^3 - ya^2)\}$$

ИЛИ

$$N_x = (x^2 - a^2) \left\{ \frac{S_1}{2a^2} + \frac{S_2}{4a^4} (6y^2 + x^2 - a^2) \right\}; \quad (1.55)$$

$$N_y = (y^2 - a^2) \left\{ \frac{S_1}{2a^2} + \frac{S_2}{4a^4} (6x^2 + y^2 - a^2) \right\}; \quad (1.56)$$

$$N_{xy} = xy \left\{ -\frac{S_1}{a^2} - \frac{S_2}{a^4} (x^2 + y^2 - a^2) \right\}. \quad (1.57)$$

Эпюры  $N_x$  по сечениям  $x = 0$ ,  $y = 0$  и  $N_{xy}$  по сечениям  $x = a$  показаны на рис. 1.13.

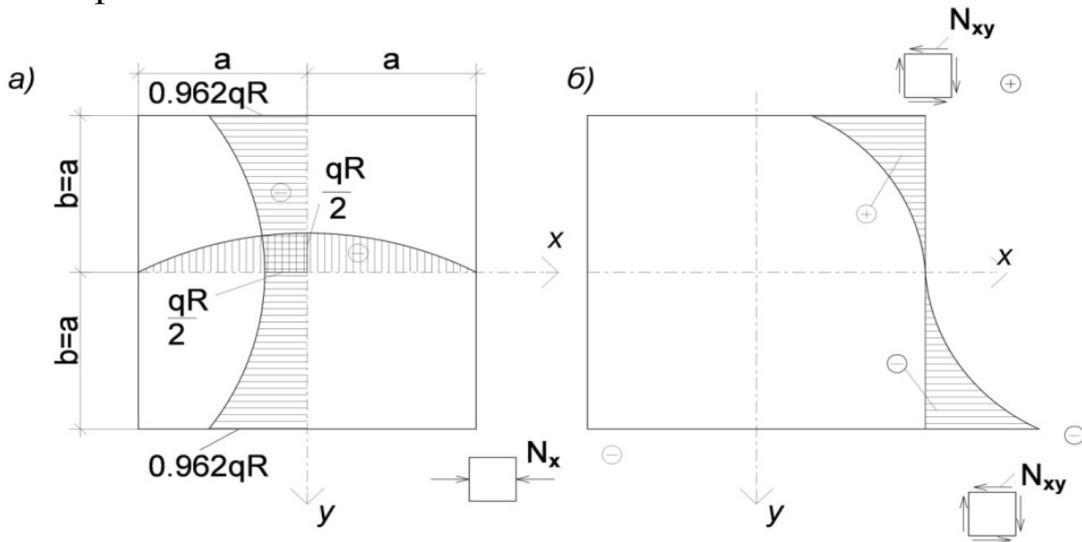


Рис. 1.13. Эпюры усилий в оболочке:  
а – нормальные усилия  $N_x$ ; б – касательные силы  $N_{xy}$

### 1.15. Безмоментное решение для оболочек с опорными конструкциями, недеформируемыми вдоль контура

Многие контурные конструкции (железобетонные балки, стены, некоторые фермы) обладают в своей плоскости высокой жесткостью и вдоль сторон контура могут считаться недеформируемыми. Тогда и оболочка не может деформироваться в этом направлении  $\varepsilon_x|_{y=\pm b} = 0$ ,  $\varepsilon_y|_{x=\pm a} = 0$ .

Поскольку  $N_x = EA\varepsilon_x$ ,  $N_y = EA\varepsilon_y$ , то

$$N_x|_{y=\pm b} = 0, \quad N_y|_{x=\pm a} = 0. \quad (1.58)$$

Из своей плоскости контурные конструкции обладают малой жесткостью, которая принимается нулевой. Тогда

$$N_x|_{x=\pm a} = 0, \quad N_y|_{y=\pm b} = 0.$$

Такие контурные конструкции воспринимают только касательные усилия в своей плоскости. Иногда функцию напряжений принимают в виде двойного ряда тригонометрических функций

$$\varphi(x, y) = a_1 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} + a_2 \cos \frac{3\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b} + \\ + a_3 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b} + \dots$$

Она удовлетворяет граничным условиям задачи. Практика показала, однако, что удобнее функцию напряжений принять в виде суммы степенных полиномов.

Если начало координат взять в вершине оболочки, то функции  $\varphi$ ,  $N_x$ ,  $N_y$  должны быть четными. Поэтому в полиномах сохраняют только члены с четными показателями степени. При этом удобно представить функцию напряжений в виде суммы произведений двух функций с разделенными переменными

$$\varphi(x, y) = \sum_i a_i \varphi_i(x, y) = \sum_i a_i \varphi_i(x) \varphi_i(y),$$

где  $a_i$  – постоянные параметры;  $\varphi_i(x)$ ,  $\varphi_i(y)$  – четные степенные полиномы, число членов которых определяется числом граничных и иных требований, предъявляемых к функции.

Первый член функции напряжений должен быть таким, чтобы на сторонах контура  $x = \pm a$  выполнялись условия (1.58):

$$N_x^{(1)}|_{x=\pm a} = a_1 \frac{\partial^2 \varphi_1(x, y)}{\partial y^2} |_{x=\pm a} = a_1 \varphi_1(x) \frac{\partial^2 \varphi_1(y)}{\partial y^2} |_{x=\pm a} = 0;$$

$$N_y^{(1)}|_{x=\pm a} = a_1 \frac{\partial^2 \varphi_1(x, y)}{\partial x^2} |_{x=\pm a} = a_1 \varphi_1(y) \frac{\partial^2 \varphi_1(x)}{\partial x^2} |_{x=\pm a} = 0.$$

Следовательно, функция  $\varphi_1(x)$  должна удовлетворять двум требованиям:

$$\varphi_1(x)|_{x=\pm a} = 0; \quad \frac{\partial^2 \varphi_1(x)}{\partial x^2} |_{x=\pm a} = 0. \quad (1.59)$$

Она может быть принята в виде

$$\varphi_1(x) = x^4 + A_1 x^2 a^2 + A_2 a^4,$$

где  $A_1, A_2$  – постоянные коэффициенты полинома.

Используя условия (1.59), находим  $A_1, A_2$  и получаем

$$\varphi_1(x) = x^4 - 6x^2 a^2 + 5a^4. \quad (1.60)$$

Графики функций  $N_x^{(1)}$  и  $N_y^{(1)}$ , соответствующие первому члену функции напряжений, показаны на рис. 1.14.

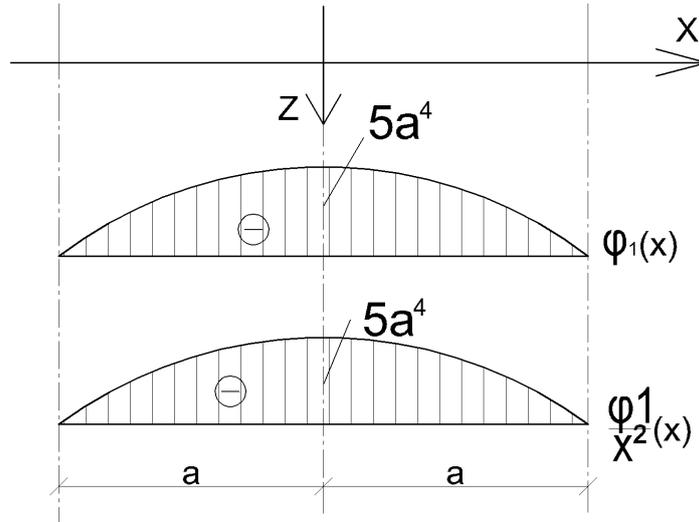


Рис.1.14. Графики функций  $\varphi_1(x)$ ,  $\frac{\partial^2 \varphi_1(x)}{\partial x^2}$

Второй член  $\varphi_2(x, y)$  выбираем так, чтобы удовлетворялись граничные условия (1.58) и условия  $N_x^{(2)}$  и  $N_y^{(2)}$  принимали нулевые значения в начале координат. Тогда вторые функции  $N_x^{(2)}$  и  $N_y^{(2)}$  можно рассматривать как поправочные (корректирующие) к первым. Накладываются следующие требования:

$$\varphi_2(x)|_{x=\pm a} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_2(x)}{\partial x^2} |_{x=\pm a} = 0; \quad (1.61)$$

$$\varphi_2(x)|_{x=0} = 0, \quad \frac{\partial^2 \varphi_2(x)}{\partial x^2} |_{x=0} = 0.$$

Полином может быть принят в виде

$$\varphi_2(x) = x^8 + A_1 x^6 a^2 + A_2 x^4 a^4 + A_3 x^2 a^6 + A_4 a^8.$$

Используя условия (1.61), получаем четыре уравнения для определения величин  $A_1, A_2, A_3, A_4$ . Получается

$$\varphi_2(x) = x^8 - \frac{22}{9} x^6 a^2 + \frac{13}{9} x^4 a^4. \quad (1.62)$$

На основании полиномов (1.60) и (1.62) записывается функция напряжений

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) = & a_1(x^4 - 6x^2 a^2 + 5a^4)(y^4 - 6y^2 b^2 + 5b^4) + \\ & + a_2 \left( x^8 - \frac{22}{9} x^6 a^2 + \frac{13}{9} x^4 a^4 \right) (y^4 - 6y^2 b^2 + 5b^4) + \\ & + a_3(x^4 - 6x^2 a^2 + 5a^4) \left( y^8 - \frac{22}{9} y^6 b^2 + \frac{13}{9} y^4 b^4 \right) + \\ & + a_4 \left( x^8 - \frac{22}{9} x^6 a^2 + \frac{13}{9} x^4 a^4 \right) \left( y^8 - \frac{22}{9} y^6 b^2 + \frac{13}{9} y^4 b^4 \right). \end{aligned}$$

Уравнение равновесия (1.50)  $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \mu_K \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = -q/K_2$  примет вид

$$\begin{aligned}
& a_1(12x^2 - 12a^2)(y^4 - 6y^2b^2 + 5b^4) + \\
& + a_2 \left( 56x^6 - \frac{22}{9} 30x^4a^2 + \frac{13}{9} 12x^2a^4 \right) (y^4 - 6y^2b^2 + 5b^4) + \\
& + a_3(12x^2 - 12a^2) \left( y^8 - \frac{22}{9} y^6b^2 + \frac{13}{9} y^4b^4 \right) + \\
& + a_4 \left( 56x^6 - \frac{22}{9} 30x^4a^2 + \frac{13}{9} 12x^2a^4 \right) \left( y^8 - \frac{22}{9} y^6b^2 + \frac{13}{9} y^4b^4 \right) + \quad (1.63) \\
& + \mu \left\{ a_1(x^4 - 6x^2a^2 + 5a^4)(12y^2 - 12b^2) + a_2 \left( x^8 - \frac{22}{9} x^6a^2 + \right. \right. \\
& \quad \left. \left. + \frac{13}{9} x^4a^4 \right) (12y^2 - 12b^2) + a_3(x^4 - 6x^2a^2 + 5a^4) \left( 56y^6 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{22}{9} 30y^4b^2 + \frac{13}{9} 12y^2b^4 \right) + a_4 \left( x^8 - \frac{22}{9} x^6a^2 + \frac{13}{9} x^4a^4 \right) \left( 56y^6 - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{22}{9} 30y^4b^2 + \frac{13}{9} 12y^2b^4 \right) \right\} = -\frac{q}{K_2}.
\end{aligned}$$

Выбираем точки коллокации  $A(0; 0)$ ;  $B(0; 0,9b)$ ;  $C(0,9a; 0)$ ;  $D(0,8a; 0,8b)$ ; находим:

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{q}{60K_2a^6(\lambda^2 + \mu\lambda)}; \quad a_2 = \frac{q - a_1K_2a^6(11,4\lambda^2 + 9,552\mu\lambda)}{K_2a^{10}(21,655\lambda^2 + 0,972\mu\lambda)}; \\
a_3 &= \frac{q - a_1K_2a^6(9,552\lambda^2 + 11,4\mu\lambda)}{K_2a^{10}(0,972\lambda^4 + 21,655\mu\lambda^3)}; \\
a_4 &= \frac{q - a_16,78a^6(\lambda^2 - \mu\lambda) - a_2a^{10}(6,72\lambda^2 + 0,514\mu\lambda) - a_3a^{10}(0,514\lambda^4 + 6,72\mu\lambda^3)}{K_20,51a^{14}(\lambda^4 + \mu\lambda^3)}.
\end{aligned}$$

Определенная вполне функция напряжений характеризует усилия в оболочке. Усилия  $N_x = \frac{d^2 \varphi}{dy^2}$  и  $N_y = \frac{d^2 \varphi}{dx^2}$  легко видеть из сравнения уравнений (1.50) и (1.63).

$$\begin{aligned}
N_{xy} &= -\frac{d^2 \varphi}{dxdy} = -a_1(x^3 - 3xa^2)(y^3 - 3yb^2)16 - \\
& - a_2 \left( 2x^7 - \frac{11}{3} x^5a^2 + \frac{13}{9} x^3a^4 \right) (y^3 - 3yb^2)16 - a_3 \times \\
& \quad \times (x^3 - 3xa^2) \left( 2y^7 - \frac{11}{3} y^5b^2 + \frac{13}{9} y^3b^4 \right) 16 - \quad (1.64) \\
& - a_4 \left( 2x^7 - \frac{11}{3} x^5a^2 + \frac{13}{9} x^3a^4 \right) \left( 2y^7 - \frac{11}{3} y^5b^2 + \frac{13}{9} y^3b^4 \right) 16.
\end{aligned}$$

Для оболочки с квадратным планом при  $a = b$  с кривизнами, одинаковыми в обоих направлениях,  $K_x = K_y = \frac{1}{R}$ ,  $\mu = 1$ ,  $\lambda = 1$ ,  $a_1 = 0,00833 \frac{qR}{a^6}$ ,  $a_2 = a_3 = 0,0365 \frac{qR}{a^{10}}$ ,  $a_4 = 0,353 \frac{qR}{a^{14}}$ .

Усилия  $N_x$  для сечений  $y = 0$ ,  $x = 0$ :

$$N_x|_{y=0} = -a_1(x^4 - 6x^2a^2 + 5a^4)12b^2 - a_2\left(x^8 - \frac{22}{9}x^6a^2 + \frac{13}{9}x^4a^4\right)12b^2;$$

$$N_x|_{x=0} = a_160a^4(y^2 - b^2) + a_320a^4\left(14y^6 - \frac{55}{3}y^4b^2 + \frac{13}{3}y^2b^4\right).$$

Усилие  $N_{xy}$  для сечения  $x = a$

$$N_{xy}|_{x=a} = a_132a^3(y^3 - 3yb^2) + a_2\frac{32}{9}a^7(y^3 - 3yb^2) + a_332a^3\left(2y^7 - \frac{11}{3}y^5b^2 + \frac{13}{9}y^3b^4\right) + a_4\frac{32}{9}\left(2y^7 - \frac{11}{3}y^5b^2 + \frac{13}{9}y^3b^4\right).$$

Эпюры усилий  $N_x$  и  $N_y$  по этим сечениям показаны на рис. 1.15.

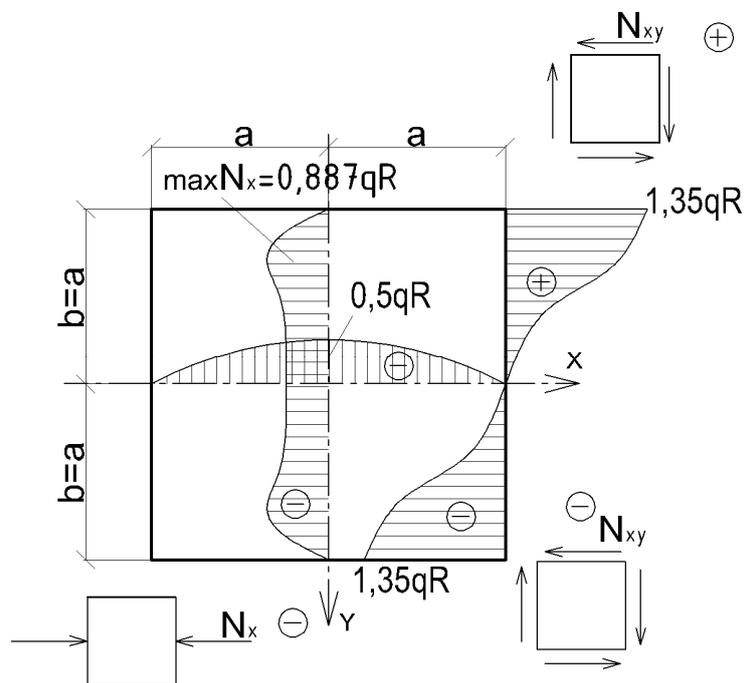


Рис. 1.15. Эпюры усилий  $N_x$  и  $N_y$

Решение данной задачи впервые получено В. З. Власовым в двойных тригонометрических рядах по моментной теории, но ряды в

выражениях  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  сходятся медленно. Позже также по моментной теории В. В. Дикович получила решение в гиперболотригонометрических рядах. В этом решении усилия выражаются сложными формулами, но ряды сходятся быстро.

Для конструирования и армирования оболочек необходимо знать главные усилия. Они могут быть вычислены по формуле (1.46), а углы, определяющие их направление – по формуле (1.47). Для оболочки, квадратной в плане, в диагональном сечении  $x = y$  в силу симметрии задача  $N_x = N_y$ . В этом случае формулы (1.46), (1.47) упрощаются  $N_{\frac{\max}{\min}} = N_x \pm N_{xy}$ ;  $\text{tg } 2\alpha = \pm\infty$ . Эпюры главных усилий показаны на рис. 1.16.

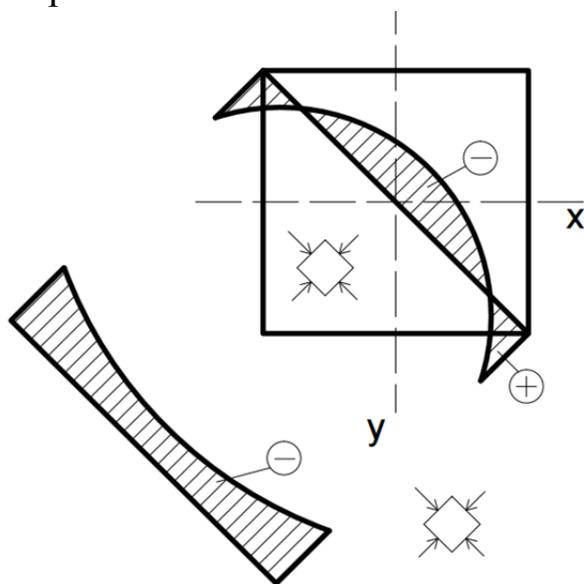


Рис. 1.16. Эпюры главных усилий в диагональном сечении

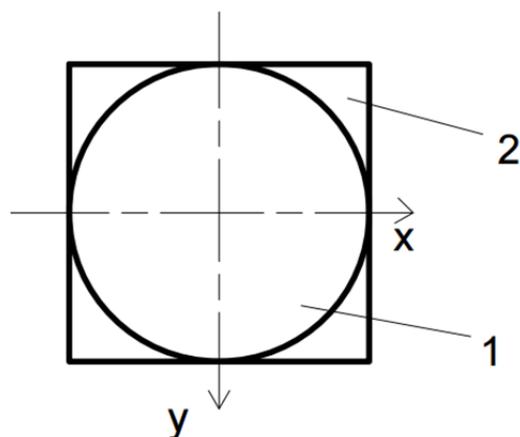


Рис. 1.17. Деформированные оболочки

В угловых областях оболочки действуют больше растягивающие усилия в диагональных сечениях. В сечениях  $x = 0$  и  $y = 0$  касательные усилия равны нулю, а нормальные  $N_x$  и  $N_y$  оказываются главными. В обширной области 1 (рис. 1.17) оба главных усилия сжимающие – это область всестороннего сжатия. В области 2  $N_{\max} > 0$ ,  $N_{\min} < 0$  – в одном направлении сжатие в другом растяжение, причем растягивающее усилие достигает величин сжимающего.

В угловых областях в направлении действия растягивающих усилий ставится рабочая арматура; в направлении действия сжимаю-

щих усилий проверяется прочность оболочки на сжатие и, если требуется, увеличивается ее толщина в этих местах. В области двухосного сжатия проверяется устойчивость оболочки.

Для тонкостенных оболочек полученные по безмоментному решению усилия  $N_x$ ,  $N_y$ ,  $N_{xy}$  на большей части оболочки вполне достоверны; в зонах местного изгиба (вблизи контура) они несколько завышены.

### 1.16. Определение усилий в оболочках с шарнирно-подвижным опиранием

Приближенно шарнирно-подвижному опиранию соответствует опирание на ряды часто расположенных колонн или на стены, если конструктивно обеспечивается свободное перемещение оболочки вдоль контура, например, с помощью листовых закладных опорных деталей со смазкой. Оболочка на контуре не может иметь только вертикальные перемещения; перемещения вдоль контура и в поперечном к нему направлении могут происходить свободно. Граничные условия:

$$\text{При } x = \pm a \quad N_x = 0, \quad N_{xy} = 0, \quad N_y \neq 0; \quad (1.65)$$

$$\text{При } y = \pm b \quad N_y = 0, \quad N_{xy} = 0, \quad N_x \neq 0.$$

Рассматриваем пологую оболочку с поверхностью переноса

$$z(x, y) = z_1(x) + z_2(y) = \frac{f_1}{a^2} x^2 + \frac{f_2}{b^2} y^2.$$

Для расчета заданную оболочку заменяют расчетной, имеющей по границе сплошное шарнирно-подвижное вдоль контура нормальное к поверхности радиально направленное опирание. Для пологих оболочек такая замена допустима.

Задача решается в несколько этапов.

1. Определяется безмоментное состояние оболочки под действием внешней нагрузки  $q$ , нормальной поверхности оболочки и равномерно распределенной, в предположении, что она уравнивается касательными силами, действующими вдоль контура. Для оболочки с квадратным планом такая задача решена в примере (см. рис. 1.13). Функция напряжений принималась в виде (1.49).

$$\varphi^I(x, y) = a_1(x^2 - a^2)(y^2 - b^2) + a_2\{(x^4 - x^2 a^2)(y^2 - b^2) + (x^2 - a^2)(y^4 - y^2 b^2)\}.$$

Касательные силы на контуре  $x = a$  принимают значение (1.54).

$$N_{xy}|_{x=a} = -S_1 \frac{y}{a} - S_2 \left(\frac{y}{a}\right)^3,$$

где  $S_1 = 4a_1 a^2$ ;  $S_2 = 8a_2 a^4$ ;  $a_1 = 0,2885 \frac{qR}{a^2}$ ;  $a_2 = 0,0385 \frac{qR}{a^4}$ .

2. Рассматривается оболочка под действием одних касательных сил, приложенных вдоль контура, равных по величине и противоположно направленных силам, полученным на первом этапе (рис. 1.18).

$$N_{xy}|_{x=a} = -S_1 \frac{y}{a} - S_2 \left(\frac{y}{a}\right)^3;$$

(1.66)

$$N_{xy}|_{y=b} = S_1 \frac{x}{b} + S_2 \left(\frac{x}{b}\right)^3.$$

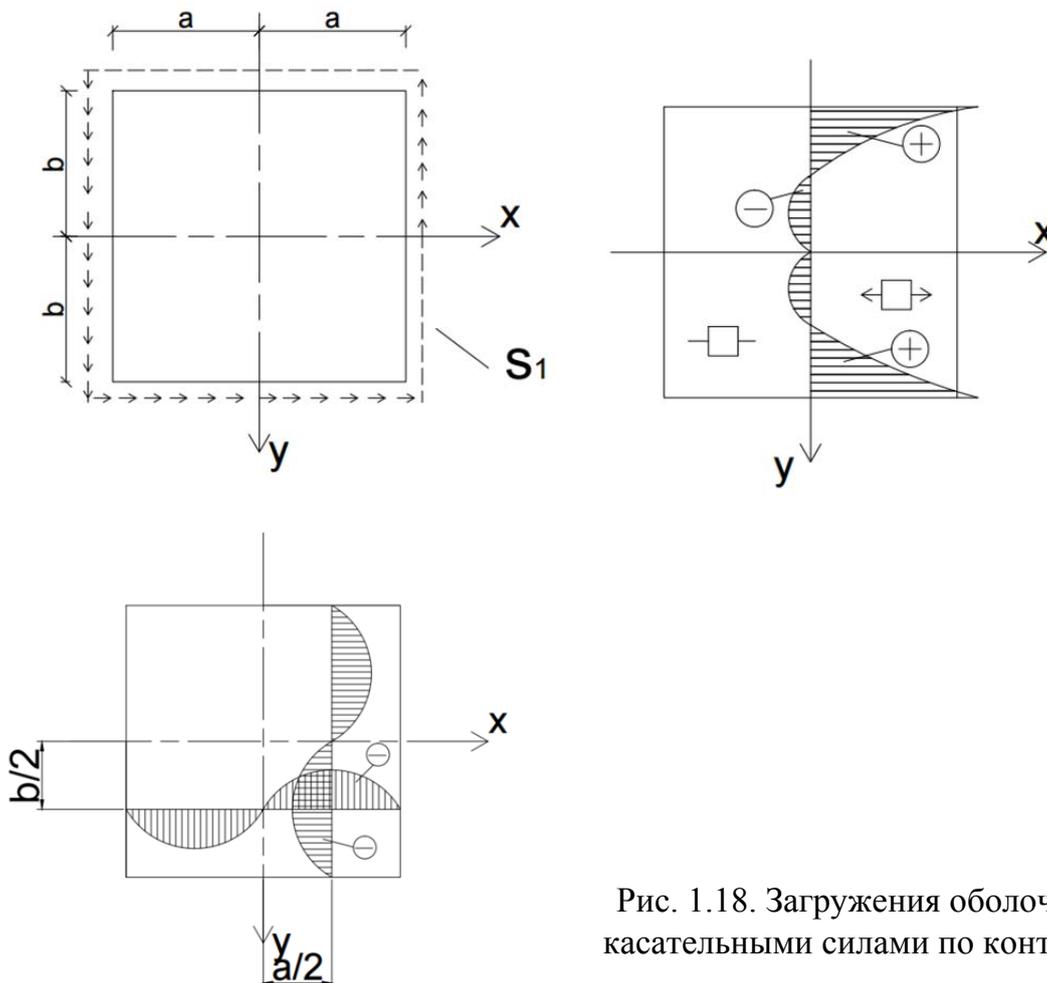


Рис. 1.18. Загружения оболочки касательными силами по контуру

На этом этапе функцию напряжения выбираем в виде

$$\varphi(x, y) = -\varphi^I(x, y) + b_1(x^2 - a^2)^2(y^2 - a^2)^2 + b_2 x^2(x^2 - a^2)^2(y^2 - a^2)^2 + b_2(x^2 - a^2)^2 y^2(y^2 - a^2)^2. \quad (1.67)$$

Новые слагаемые в этой сумме выбираются так, чтобы каждое из них удовлетворяло условиям (1.65). Постоянные параметры  $b_1$  и  $b_2$

определяют из уравнения равновесия, которое для этого этапа запишем в виде

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2} + \frac{d^2\varphi}{dy^2} = 0.$$

Решение методом коллокации по двум точкам  $A(0; 0)$  и  $B(0; 0,707a)$  дает

$$b_1 = \frac{1}{a^6} (0,3437S_1 + 0,0312S_2); \quad (1.68)$$

$$b_2 = \frac{1}{a^8} (0,4375S_1 + 0,1875S_2).$$

Теперь функция напряжений определена полностью. Напряжения получают выражения:

$$N_x = \frac{d^2\varphi}{dy^2} = (x^2 - a^2) \left\{ -\frac{S_1}{2a^2} - \frac{S_2}{4a^4} (6y^2 + x^2 - a^2) \right\} + (x^2 - a^2)^2 \{ 4(b_1 + b_2x^2)(3y^2 - a^2) + 2b_2(15y^4 - 12y^2a^2 + a^4) \}; \quad (1.69)$$

$$N_y = \frac{d^2\varphi}{dx^2} = (y^2 - a^2) \left\{ -\frac{S_1}{2a^2} - \frac{S_2}{4a^4} (6x^2 + y^2 - a^2) \right\} + (y^2 - a^2)^2 \{ 4(b_1 + b_2y^2)(3x^2 - a^2) + 2b_2(15x^4 - 12x^2a^2 + a^4) \}; \quad (1.70)$$

$$N_{xy} = -\frac{d^2\varphi}{dxdy} = xy \left\{ \frac{S_1}{a^2} \frac{S_2}{a^4} (x^2 + y^2 - a^2) \right\} - 8xy \{ 2b_1(x^2 - a^2)(y^2 - a^2) + b_2(3x^4 - 4x^2a^2 + a^4) \times (y^2 - a^2) + b_2(x^2 - a^2)(3y^4 - 4y^2a^2 + a^4) \}. \quad (1.71)$$

Для сечения  $x = 0$

$$N_x = \frac{S_1}{2} + \frac{S_2}{4a^2} (6y^2 - a^2) + 4b_1a^4(3y^2 - a^2) + 2b_2a^4(15y^4 - 12y^2a^2 + a^4).$$

$$\text{При } x = \frac{a}{2}, y = \frac{a}{2} N_{xy} = -0,2772S_1 - 0,0897S_2 = -0,3475qR.$$

Здесь по формулам (1.53)  $S_1 = 4a_1a^2$ ;  $S_2 = 8a_2a^4$ ;  $a_1, a_2$  — по формулам (1.52).

Эпюры  $N_x$  по сечению  $x = 0$  и  $N_{xy}$  по сечениям  $x = \frac{a}{2}$ ,  $y = \frac{a}{2}$  показаны на рис. 1.18.

3. Складываем решения, полученные на этапах 1 и 2, и соответственно формулы (1.55), (1.56), (1.57) и (1.69), (1.70), (1.71). Получается решение для оболочки, нагруженной равномерно распределён-

ной вертикальной нагрузкой и опирающейся на контурные конструкции, которые касательных напряжений, препятствующих деформированию, не создают, а препятствуют лишь вертикальным перемещениям:

$$N_x^{(q)} = (x^2 - a^2)^2 \{4(b_1 + b_2 x^2)(3y^2 - a^2) + 2b_2(15y^4 - 12y^2 a^2 + a^4)\};$$

$$N_y^{(q)} = (y^2 - a^2)^2 \{4(b_1 + b_2 y^2)(3x^2 - a^2) + 2b_2(15x^4 - 12x^2 a^2 + a^4)\};$$

$$N_{xy}^{(q)} = -8xy \{2b_1(x^2 - a^2)(y^2 - a^2) + b_2(3x^4 - 4x^2 a^2 + a^4)(y^2 - a^2) + b_2(x^2 - a^2)(3y^4 - 4y^2 a^2 + a^4)\}.$$

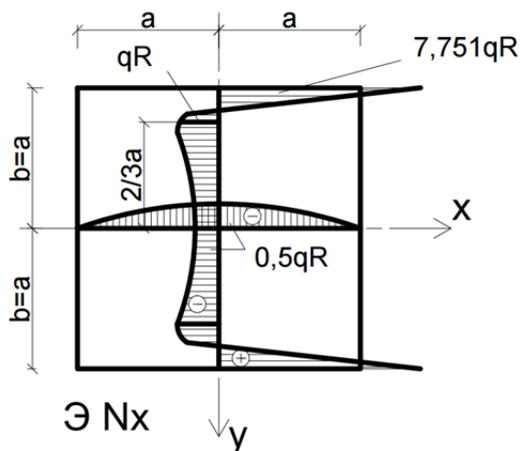


Рис. 1.19. Эпюры усилий  $N_x^{(q)}$

большие нормальные усилия, направленные вдоль контура. Поэтому оболочку необходимо обрамлять контурными брусками, препятствующими деформированию края.

### 1.17. Оболочки с опорными конструкциями, деформируемыми вдоль контура

Теперь учитывается, что опорные контурные конструкции создают касательные силы  $S_k$ , препятствующие деформированию оболочки (рис. 1.20). Их распределение по контуру может быть принято по формулам (1.66), но численно они другие и их направление противоположно: величины  $S_1$  и  $S_2$  необходимо заменить на  $-S_{k1}$ ,  $-S_{k2}$  (которые надо ещё определить).

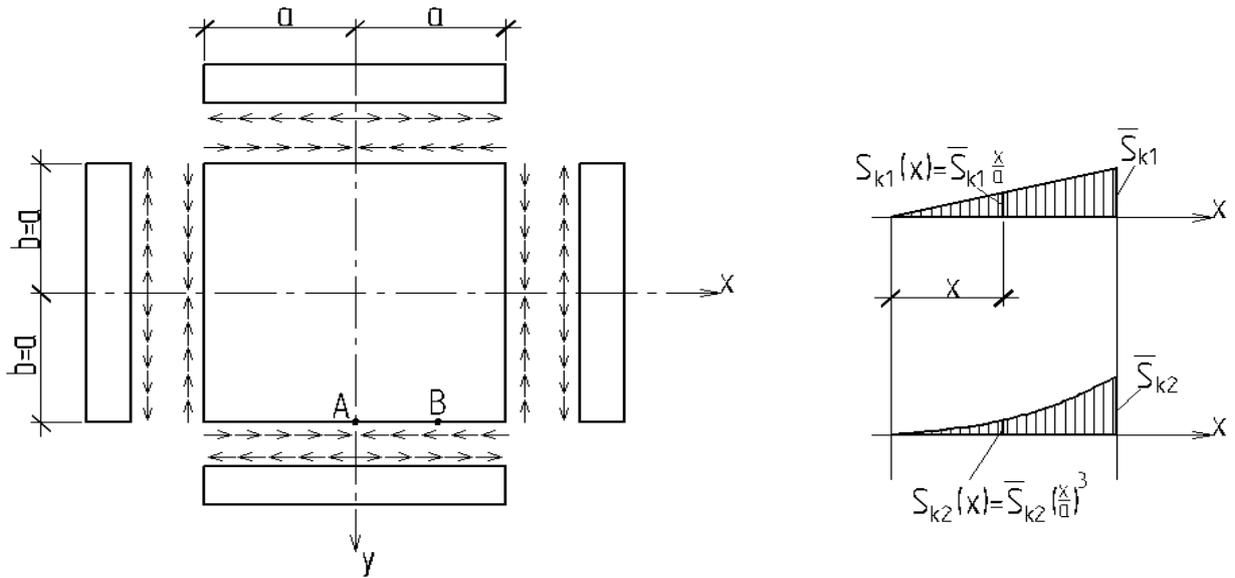


Рис. 1.20. Распределение касательных сил по контуру оболочки

Они создают в оболочке напряжённое состояние в соответствии с функцией напряжений (1.67), если в ней вместо  $S_1$ ,  $S_2$  поставить  $-S_{k1}$ ,  $-S_{k2}$  и постоянные параметры  $b_1$ ,  $b_2$  вычислять по формулам (1.68) также с заменой  $S_1$ ,  $S_2$  на  $-S_{k1}$ ,  $-S_{k2}$ . Обозначая эти параметры через  $b_{k1}$ ,  $b_{k2}$ , получаем выражения для напряжений  $N_x^{(s)}$ ,  $N_y^{(s)}$ ,  $N_{xy}^{(s)}$ , создаваемых в оболочке касательными силами со стороны контурного бруса:

$$N_x^{(s)} = (x^2 - a^2) \left\{ \frac{S_{k1}}{2a^2} + \frac{S_{k2}}{4a^4} (6y^2 + x^2 - a^2) \right\} + (x^2 - a^2)^2 \times \\ \times \{ 4(b_{k1} + b_{k2}x^2)(3y^2 - a^2) + 2b_{k2}(15y^4 - 12y^2a^2 + a^4) \};$$

$$N_y^{(s)} = (y^2 - a^2) \left\{ \frac{S_{k1}}{2a^2} + \frac{S_{k2}}{4a^4} (6x^2 + y^2 - a^2) \right\} + \\ + (y^2 - a^2)^2 \{ 4(b_{k1} + b_{k2}y^2)(3x^2 - a^2) + 2b_{k2}(15x^4 - 12x^2a^2 + a^4) \};$$

$$N_{xy}^{(s)} = -xy \left\{ \frac{S_{k1}}{a^2} + \frac{S_{k2}}{a^4} (x^2 + y^2 - a^2) \right\} - 8xy \{ 2b_{k1}(x^2 - a^2) \times \\ \times (y^2 - a^2) + b_{k2}(3x^4 - 4x^2a^2 + a^4)(y^2 - a^2) + b_{k2}(x^2 - a^2) \times \\ \times (3y^4 - 4y^2a^2 + a^4) \}.$$

Эти напряжения, вызываемые в оболочке касательными силами, действующими со стороны контурного бруса, складываются с напряжениями  $N_x^{(q)}$ ,  $N_y^{(q)}$ ,  $N_{xy}^{(q)}$ , возникающими от нагрузки  $q$  при шарнирно-подвижном опирании. Для оболочки, взаимодействующей с контурными конструкциями, получается:

$$N_x = (x^2 - a^2) \left\{ \frac{S_{k1}}{2a^2} + \frac{S_{k2}}{4a^4} (6y^2 + x^2 - a^2) \right\} + (x^2 - a^2)^2 \{4(c_1 + c_2 x^2)(3y^2 - a^2) + 2c_2(15y^4 - 12y^2 a^2 + a^4)\};$$

$$N_y = (y^2 - a^2) \left\{ \frac{S_{k1}}{2a^2} + \frac{S_{k2}}{4a^4} (6x^2 + y^2 - a^2) \right\} + (y^2 - a^2)^2 \{4(c_1 + c_2 y^2)(3x^2 - a^2) + 2c_2(15x^4 - 12x^2 a^2 + a^4)\};$$

$$N_{xy} = -xy \left\{ \frac{S_{k1}}{a^2} + \frac{S_{k2}}{a^4} (x^2 + y^2 - a^2) \right\} - 8xy \{2c_1(x^2 - a^2) \times (y^2 - a^2) + c_2(3x^4 - 4x^2 a^2 + a^4)(y^2 - a^2) + c_2(x^2 - a^2) \times (3y^4 - 4y^2 a^2 + a^4)\},$$

где  $c_1 = b_1 + b_{k1}$ ;  $c_2 = b_2 + b_{k2}$ .

Деформации оболочки по линии контакта с контурным брусом

$$\varepsilon_x|_{y=\pm a} = \frac{1}{Eh} N_x|_{y=\pm a},$$

где  $Eh$  – жёсткость сечения оболочки на растяжение.

Контурная конструкция, оказывая сжимающее действие на оболочку, сама подвергается растяжению. Усилие в ней по краю оболочки  $y = \pm a$  равно

$$N_k(x) = \int \left\{ S_{k1} \frac{x}{a} + S_{k2} \left( \frac{x}{a} \right)^3 \right\} dx + C.$$

Из условия при  $x = a$   $N_k(x) = 0$  получается

$$N_k(x) = \frac{S_{k1}}{2a} (x^2 - a^2) + \frac{S_{k2}}{4a^3} (x^4 - a^4).$$

Если контурный брус испытывает центральное растяжение, то продольная деформация его

$$\varepsilon_k = \frac{N_k(x)}{(EA)_k},$$

где  $(EA)_k$  – жёсткость бруса на растяжение.

При внецентренном растяжении при определении размеров поперечного сечения бруса необходимо учитывать и возникающие моменты.

Величины  $S_{k1}$  и  $S_{k2}$  определяются из условия совместности деформаций контурного бруса и оболочки, которое может быть решено методом коллокации

$$\left( \frac{N_x}{Eh} \right)_{\text{оболочки}} = \left( \frac{N_k(x)}{EA} \right)_{\text{контур.констр.}}.$$

Чем выше жесткость контурной конструкции, тем больше она разгружает приконтурную зону оболочки от растяжения.

## 1.18. Моменты в тонкостенных пологих оболочках переноса

При нагрузке, равномерно распределённой по поверхности оболочки, в узких полосах, примыкающих к контурным элементам, возникает местный изгиб. Если контурные элементы в своей плоскости жёсткие, а из плоскости абсолютно гибкие, то на опорах прогиб оболочки  $W = 0$ , а в направлении, перпендикулярном контуру – шарнирно-подвижное опирание. Если оси  $x$  и  $y$  совместить с краями оболочки (рис. 1.21), то для края  $x = 0$  будет

$$W|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial x}|_{x=0} \neq 0; \quad (1.72)$$

$$M_x|_{x=0} = 0; \quad Q_x|_{x=0} \neq 0. \quad (1.73)$$

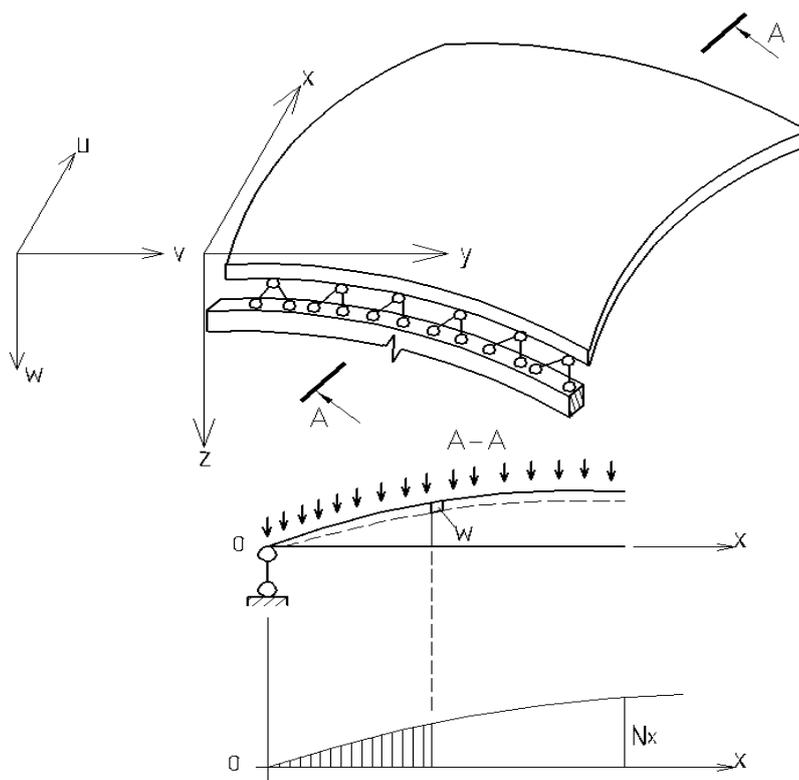


Рис. 1.21. Опирание контура и зона местного изгиба

Рассматриваем эллиптический параболоид

$$z(x, y) = z_1(x) + z_2(x) = \frac{f_1}{a^2} x^2 + \frac{f_2}{b^2} y^2,$$

для которого  $K_{xy} = 0$ . Уравнение равновесия, полученное В. З. Власовым, имеет вид

$$D \left( \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 W}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \right) - K_x N_x - K_y N_y = q, \quad (1.74)$$

где  $D = \frac{EI}{1-\nu^2} \approx E \frac{h^3}{12}$ ;  $h$  – толщина оболочки.

Это уравнение моментной теории относится только к зоне местного изгиба, которая примыкает к контуру и имеет небольшую протяжённость в сравнении с полупролётом оболочки. В этой зоне перемещения зависят только от  $x$  и не зависят от  $y$ .

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial y} = 0.$$

Тогда

$$\varepsilon_y = -K_y W, \text{ а } N_y = Eh\varepsilon_y = -EhK_y W. \quad (1.75)$$

Можно принять, что в пределах этой зоны усилие  $N_x$  возрастает пропорционально  $x$ :

$$N_x = Ax, \text{ где } A = \frac{\partial N_x}{\partial x} \text{ при } x = -a.$$

Уравнение (1.74) принимает вид

$$D \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} - K_x Ax + EhK_y^2 W = q$$

$$\text{или } \frac{D}{EhK_y^2} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + W = \frac{1}{EhK_y^2} (q + K_x Ax). \quad (1.76)$$

Вводится обозначение  $\frac{D}{EhK_y^2} = \frac{S^4}{4}$  или, если учесть, что  $D = \frac{Eh^3}{12}$

и  $K_y = \frac{1}{R_y}$ , то

$$S = \sqrt[4]{\frac{4D}{EhK_y^2}} = 0,76\sqrt{R_y h}. \quad (1.77)$$

Теперь уравнение (1.76) совпадает по виду с уравнением для балки на упругом основании

$$\frac{S^4}{4} \frac{\partial^4 W}{\partial x^4} + W = \frac{1}{EhK_y^2} (q + K_x Ax). \quad (1.78)$$

Решение уравнения (1.78) представляется в виде

$$W = \frac{1}{D} \left\{ \frac{S^2}{2} (C_1 e^{-\varphi} \sin \varphi + C_2 e^{-\varphi} \cos \varphi) \right\} + \frac{S^4}{4} (q + K_x AS \varphi), \quad (1.79)$$

где  $\varphi = x/S$ ;  $C_1, C_2$  – постоянные, которые находятся из граничных условий (1.72), (1.73). Получается

$$C_1 = 0, \quad C_2 = -\frac{S^2 q}{2};$$

$$W = -\frac{1}{D} \left\{ \frac{S^4}{4} q e^{-\varphi} \cos \varphi + \frac{S^4}{4} (q + K_x A S \varphi) \right\};$$

$$M_x = -D \frac{d^2 W}{dx^2} = -C_2 e^{-\varphi} \sin \varphi = \frac{S^2 q}{2} e^{-\varphi} \sin \varphi. \quad (1.80)$$

С учётом выражения для  $S$  (1.77)

$$M_x = 0,289 q R_y h e^{-\varphi} \sin \varphi.$$

Исследуем функцию  $M_x$  на максимум:

$$\frac{dM_x}{d\varphi} = 0; \quad 0,289 q R_y h (-e^{-\varphi} \sin \varphi + e^{-\varphi} \cos \varphi) = 0;$$

$$\sin \varphi = \cos \varphi; \quad \varphi = \frac{\pi}{4}.$$

Наибольший момент  $M_x$  возникает в сечении с координатой

$$x_0 = \frac{\pi}{4} S = 0,597 \sqrt{R_y h};$$

$$\max M_x = 0,289 q R_y h e^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2}}{2} = 0,204 q R_y h e^{-\frac{\pi}{4}};$$

$$\left( e^x = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right).$$

Эпюра момента показана на рис. 1.22.

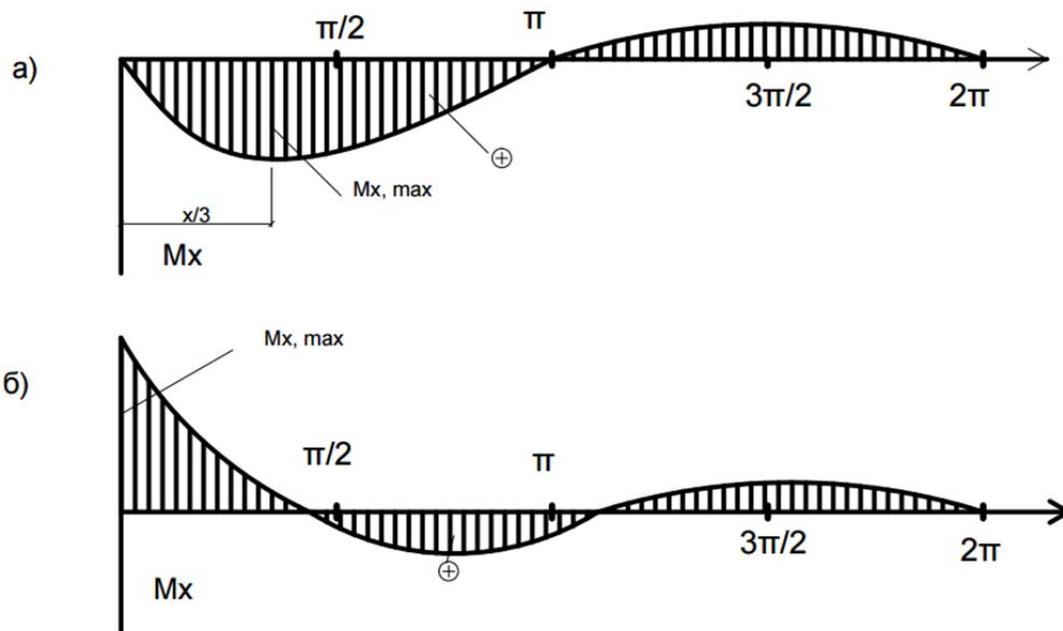


Рис. 1.22. Эпюры момента  $M_x$  в зоне местного изгиба:

а – при шарнирном опирании оболочки;

б – при жестком опирании

Влияние местного изгиба на усилие  $N_x$  невелико. Усилие  $N_y$  может быть найдено из уравнения (1.74) с учётом решения (1.79) или (1.80):

$$D \frac{d^4 W}{dx^4} - K_x N_x - K_y N_y = q;$$

$$N_y = \frac{1}{K_y} \left( D \frac{d^4 W}{dx^4} - q \right) - \frac{K_x}{K_y} N_x; \quad D \frac{d^4 W}{dx^4} = q e^{-\varphi} \cos \varphi;$$

при  $K_y = K_x = \frac{1}{R_y}$   $N_y = -q R_y (1 - e^{-\varphi} \cos \varphi) - N_x.$

Значение  $N_y$  получается несколько большим, чем по безмоментному решению. Прогибы в зоне местного изгиба определяются из формулы (1.75)

$$W = -\frac{N_y}{EhK_y} = -\frac{N_y R_y}{Eh}.$$

Если оболочка закреплена и перпендикулярно контуру поворачиваться не может, что может быть, например, при сильно развитом верхнем поясе конструкции или на промежуточных диафрагмах многопролётных или многоволновых покрытий, то граничные условия будут другими:

$$W|_{x=0} = 0; \quad \frac{\partial W}{\partial x}|_{x=0} \neq 0.$$

В этом случае для изгибающего момента получается

$$M_x = -\frac{S^2}{2} (q + SK_x A) e^{-\varphi} \cos \varphi + \frac{S^2}{2} q e^{-\varphi} \sin \varphi.$$

Наибольшее его значение – в опорном сечении (см. рис. 1.22)

$$\max M_x = -\frac{S^2}{2} (q + SK_x A).$$

### 1.19. Конструирование и армирование оболочек

Пространственные железобетонные покрытия на основе оболочек конструируют и армируют в соответствии с требованиями расчёта железобетонных конструкций с учётом эпюр возникающих внутренних усилий и моментов. Главные сжимающие напряжения не должны превышать величины  $R_b$ , главные растягивающие – величины  $R_{bt}$ , или они должны полностью восприниматься арматурой. Усилия опреде-

ляются от действия снега и собственного веса конструкции. По всей поверхности оболочку армируют сетками из арматуры класса А500 с шагом стержней 200 – 250 мм и коэффициентом армирования  $\mu \geq 0,002$  ( $\mu = A_s/bh$ ).

Эта арматура необходима для уменьшения деформаций от усадки и ползучести бетона, температурных деформаций, а также для обеспечения прочности оболочки при действии местных нагрузок, например, от людей с инструментом. Располагается она обычно в середине толщины оболочки и стыкуется внахлестку без сварки; при толщине оболочки 90 мм и более ставят двойные сетки.

В приконтурных полосах устанавливают продольную арматуру, воспринимающую растяжение оболочки вдоль контура. Это высокопрочная предварительно напряжённая растянутая арматура часто в виде изделий заводского изготовления: канатов, пучков, стержней с анкерами. Такую же арматуру ставят в угловых зонах в направлении действия главных растягивающих усилий.

В приконтурных полосах устанавливают арматуру класса А500 или В500 перпендикулярно контуру для восприятия изгибающих моментов. Сечение её определяют расчётом, конструируют обычно в виде двойных сеток, длину стержней определяют с обеспечением достаточной анкеровки. Сетки соединяют внахлестку без сварки.

Деформации оболочки со временем возрастают из-за ползучести сжатого бетона. Возникает возможность потери устойчивости сжатой оболочки. Условие устойчивости записывается в виде

$$q \leq 0,2E_{bl} \left(\frac{h}{R}\right)^2, \quad (1.81)$$

где  $E_{bl}$  – модуль деформации бетона при длительном действии нагрузки; принимается  $E_{bl} = 0,25 E_b$ ;  $h$ ,  $R$  – толщина и радиус кривизны оболочки.

Устойчивость ребристых оболочек выше, чем гладких. Расстояние между рёбрами берётся не более чем  $7\sqrt{Rh}$ , где  $R$  – меньший радиус кривизны оболочки. Устойчивость проверяют также по формуле (1.81), но вводят фиктивные величины толщины  $h_\phi$  и модуль деформации  $E_{b,\phi}$ .

$$h_\phi = \sqrt{\frac{12I}{A}}; E_{b,\phi} = E_b \frac{A}{bh_\phi},$$

где  $b$  – расстояние между осями смежных рёбер;  $A, I$  – площадь и момент инерции сечения ребра с примыкающими частями плит шириной « $b$ ».

Монолитные железобетонные оболочки обычно выполняют гладкими толщиной не менее 60 мм (из условий качественного бетонирования) с утолщениями в угловых зонах, а иногда и в приконтурных полосах до 120 – 200 мм. Применяют бетон класса В25 и выше достаточно жёсткой консистенции, чтобы не было сползания при бетонировании. В местах примыкания к контурным конструкциям делают утолщения, сглаживающие острые углы. Для возведения монолитных оболочек необходимы леса и опалубка. Опалубочные, арматурные и бетонные работы на стройке трудно поддаются индустриализации.

Для сборных оболочек необходимо разрабатывать способ членения на элементы и способ монтажа. В центральной части оболочки могут применяться квадратные элементы с номинальными размерами 3,0×3,0 м; по мере удаления от центра они становятся ромбическими с различными размерами и углами. Конструктивные размеры назначаются так, чтобы швы, которые будут иметь переменную толщину, не превышали 100 – 120 мм.

Сборные панели усиливают бортовыми рёбрами, которые и образуют рёбра оболочки. Толщина панелей 30 – 40 мм. В панелях угловых зон предусматривают диагональные рёбра с каналами для предварительно напряжённой арматуры. Соединения сборных панелей с контурными конструкциями и между собой в угловых частях оболочки выполняют шпоночной формы для восприятия сдвигающих усилий (рис. 1.23).

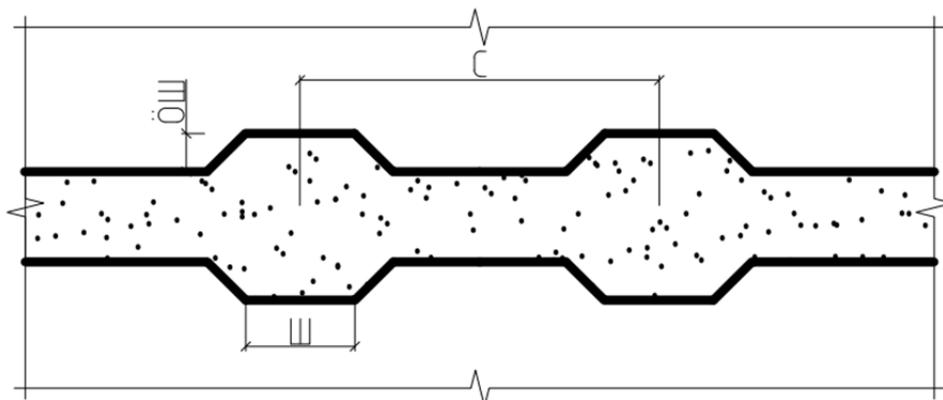


Рис. 1.23. К расчету шпоночного соединения

Расстояние между бетонными шпонками «С», их размеры: длина  $l_{ш}$ , углубление в тело панели  $\delta_{ш}$ , высота шпонки  $h_{ш}$  определяют расчётом на прочность шпонки на раздавливание и на срез

$$S_{ш} \leq R_b \delta_{ш} h_{ш}; \quad S_{ш} \leq R_{bt} l_{ш} h_{ш} K,$$

где  $S_{ш} = SC$  – расчётное сдвигающее усилие на шпонку;  $S$  – интенсивность касательных сил;  $R_b$ ,  $R_{bt}$  – расчётное сопротивление бетона на сжатие и растяжение;  $K$  – опытный коэффициент.  $K = 2$  при необжатых швах;  $K = 4$  – при обжатых.

Сборные оболочки монтируют на специальных кондукторах, представляющих собой довольно сложную конструкцию. Положение монтажных элементов контролируют с помощью геодезических инструментов. Сборные элементы соединяют друг с другом и с контурными элементами сваркой выпусков арматуры или закладных металлических деталей. После фиксации сборных элементов в проектном положении швы замоноличиваются бетоном при строгом обеспечении качества работ. Сборные оболочки индустриальны, отдельные элементы просты в изготовлении, число типоразмеров невелико. В то же время монтаж с помощью кондукторов трудоёмок и дорог, много сварных монтажных соединений, большая протяжённость швов и повышенный расход бетона на их заполнение; качество работ должно быть высоким, а контроль за ним затруднителен. В качестве контурных конструкций при пролётах до 30 – 36 м и отсутствии стен по контуру применяют чаще всего фермы или арки с затяжками. При больших пролётах целесообразно устройство рядов колонн с бортовыми брусьями по ним.

### **1.20. Задание на курсовой проект**

Спроектировать общественное или производственное здание с покрытием на основе пологой оболочки двоякой кривизны. Здание отапливаемое, II класса ответственности. Оболочка на квадратном плане размерами  $2a \times 2a$ , полупролёт «а» и снеговой район задаются индивидуально (см. таблицу). Покрытие содержит пароизоляционный, теплоизоляционный и гидроизоляционный слой.

Исходные данные для расчета и конструирования  
двояковыпуклой оболочки на квадратном плане

Номер варианта	Полупролет «а», м	Снеговой район
1	15	II
2	18	III
3	21	IV
4	24	II
5	15	III
6	18	IV
7	21	II
8	24	III
9	15	IV
10	18	II
11	21	III
12	24	IV

*Геометрические параметры оболочки*

Номинальный пролёт оболочки – это расстояние  $l$  между осями контурных элементов, в качестве которых рекомендуется принять брус сечением  $b \times b$ , где  $b = 400 - 600$  мм в зависимости от пролёта. Расчётный пролёт  $l_0$  определяют по формуле

$$l_0 = l - b - 2\Delta,$$

где  $\Delta$  – конструктивный зазор (рис. 1.24).

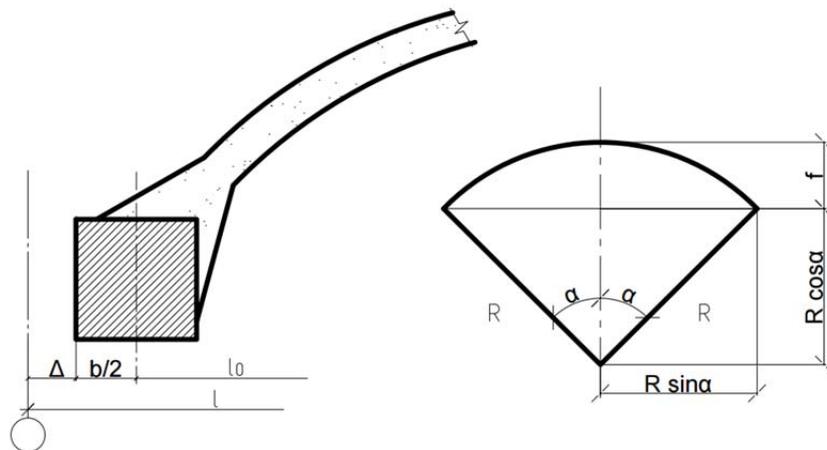


Рис. 1.24. К определению расчетного пролёта  
и радиуса кривизны оболочки

Расчётная длина полупролёта  $a = \frac{l_0}{2}$ .

Стрела подъёма оболочки принимается в пределах  $f = \left(\frac{1}{5} \dots \frac{1}{10}\right) l_0$ .

Радиус кривизны оболочки  $R$  определяют из решения системы уравнений (см. рис. 1.24).

$$R \sin \alpha = \frac{l_0}{2};$$

$$R \cos \alpha = R - f.$$

*Внешняя нагрузка*

Оболочку рассчитывают на нагрузки от собственного веса покрытия и снега в соответствии с заданным районом.

*Состав проекта*

В пояснительной записке приводят полный расчёт на прочность железобетонной оболочки с опорными конструкциями, деформируемыми вдоль контура. Расчёт выполняют в несколько этапов в соответствии со сказанным выше. Для каждого этапа в пояснительной записке приводят таблицы и эпюры усилий в оболочке по характерным сечениям.

В графической части проекта должны быть представлены фасады здания, планы, разрезы, опалубочные чертежи и схемы армирования оболочки, необходимые спецификации, узлы и детали, эпюры усилий в оболочке, общие указания по конструированию и армированию.

### **Темы для закрепления знаний**

1. Первая и вторая квадратичные формы поверхности.
2. Нормальные кривизны поверхности и их экстремальные значения.
3. Главные радиусы кривизны.
4. Гауссова кривизна поверхности.
5. Ортогональная координатная сеть.
6. Уравнения равновесия для оболочек.
7. Физические уравнения теории оболочек.
8. Особенности пологих оболочек.
9. Геометрические, статические и физические уравнения теории оболочек.
10. Контурные конструкции и граничные условия.
11. Безмоментное состояние оболочки.

12. Решение задачи с помощью функции напряжений.
13. Вариационный метод Бубнова – Галеркина.
14. Метод коллокации.
15. Решение для оболочки с недеформируемыми опорными конструкциями.
16. Оболочка с шарнирно-подвижным опиранием.
17. Решение задачи при деформируемых опорных конструкциях.
18. Определение моментов в оболочках.
19. Конструирование и армирование оболочек.

## **2. ПОДЗЕМНЫЕ ИНЖЕНЕРНЫЕ СООРУЖЕНИЯ**

К таким сооружениям относятся резервуары для хранения воды, нефти, керосина, бензина, смазочных материалов; подпорные стены для удержания грунта или сыпучих материалов; подземные сооружения, возводимые без вскрытия дневной поверхности: гидротехнические, автомобильные и железнодорожные тоннели, станции и тоннели метрополитенов, сооружения гражданской обороны – убежища, укрытия, подземные узлы связи и т. п.

### **2.1. Резервуары**

Резервуары применяются во многих отраслях промышленности, на транспорте, в сельском хозяйстве, в водопроводно-канализационном хозяйстве городов и промышленных предприятий, в нефтяной и нефтеперерабатывающей промышленности. Ряд санитарно-технических сооружений – метантенки, отстойники, бассейны для охлаждения воды также отличаются от резервуаров только технической оснасткой.

### **2.2. Классификация и примеры конструктивных решений**

Резервуары подразделяются по назначению, форме в плане, положению относительно дневной поверхности земли, конструктивным особенностям.

В зависимости от назначения – для чистой холодной или горячей воды, нефти или нефтепродуктов, масел, мазута – к ним предъявляются различные специальные требования.

По форме в плане резервуары бывают в основном круглыми или прямоугольными (рис. 2.1). Круглые имеют меньшую смачиваемую поверхность на единицу объема. Резервуары могут иметь форму шара или капли, но изготовление таких резервуаров сложно, особенно в железобетоне.

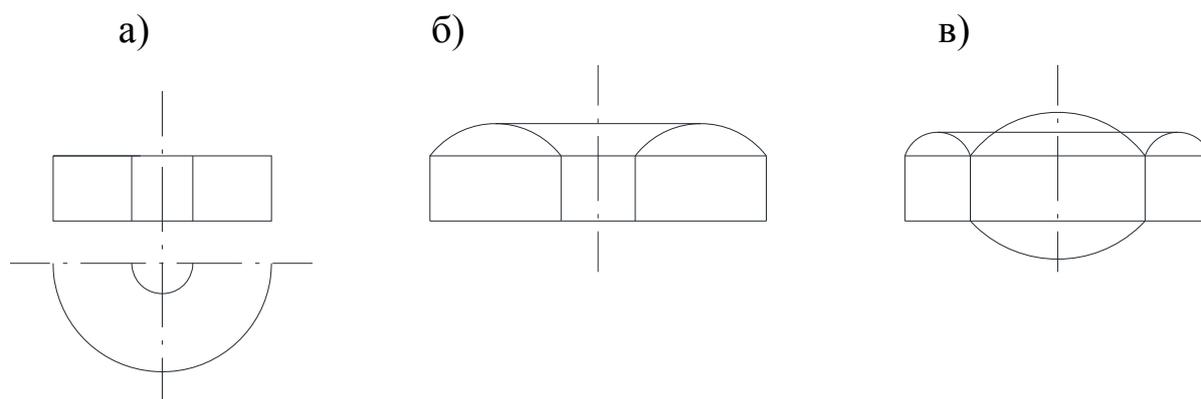


Рис. 2.1. Схема круглых резервуаров: а – с плоским покрытием, опирающимся на промежуточную круглую опору; б – с покрытием из кольцевой оболочки и круглой плиты; в – с покрытием из кольцевой и сферической оболочек

Резервуары бывают подземными, полуподземными (полузаглубленными) или наземными. Выбор здесь определяется вопросами пожарной безопасности.

По конструктивным особенностям железобетонные резервуары могут быть сборными, монолитными и сборно-монолитными, в которых часть элементов выполняется из сборного железобетона (например, стенки, покрытие), часть из монолитного (например, днище).

В зависимости от назначения резервуары могут быть с покрытиями или без них. Опорами для покрытий могут служить стены, колонны, перегородки. Часто покрытия опираются только на стены; иногда они выполняются в виде оболочек. Колонны могут передавать давление на днище, толщина которого и армирование

определяются в этом случае расчетом. Если колонны проходят через днище и опираются на свой фундамент, то возникают трудности с обеспечением непроницаемости сопряжения днища с колоннами.

При отсутствии промежуточных опор изгибающие моменты в днище возникают только в небольшой зоне у мест примыкания днища к стенам. Такое днище наиболее экономично, но, если имеется подпор грунтовых вод, то колонны играют положительную роль. Иногда днище и покрытие выполняют в виде одинаковой пространственной конструкции – купола или оболочки.

Покрытия круглых резервуаров могут быть купольные, плоские или комбинированные. Монолитные купольные покрытия наиболее экономичны, но они требуют сложной опалубки. Сборное купольное покрытие при монтаже не работает как несущая пространственная конструкция. Отдельные его элементы испытывают монтажные нагрузки. Это увеличивает его материалоемкость.

На нефтеперекачивающих станциях нефтепровода «Дружба» эксплуатируются подземные резервуары вместимостью 30000 м<sup>3</sup> для хранения нефтепродуктов, имеющие днища из монолитного железобетона, а стенки и покрытия – из сборного (рис. 2.2). Стенки смонтированы из предварительно напряженных в вертикальном направлении панелей размерами 2100 × 9640 мм, толщиной 157 мм вверху и 240 мм внизу. Масса такой панели 10 т. Сопряжение стенки с кольцевым железобетонным фундаментом жесткое, осуществляется сваркой закладных деталей. Панели при монтаже соединялись сваркой выпусков арматуры диаметром 10 мм, расположенных по вертикальным длинным сторонам с шагом 1 м. Для удобства сварки и замоноличивания между панелями оставлялся зазор 150 мм. Предварительному напряжению подвергались не только стенки резервуара, но и кольцевой фундамент, днище, кольцевой бортовой элемент, уложенный по консольному карнизу по верху стенки, и покрытие. Для этого в верхней и нижней зонах стенки производилась навивка высокопрочной напрягаемой проволоки в несколько слоев с последующим нанесением торкретбетона.

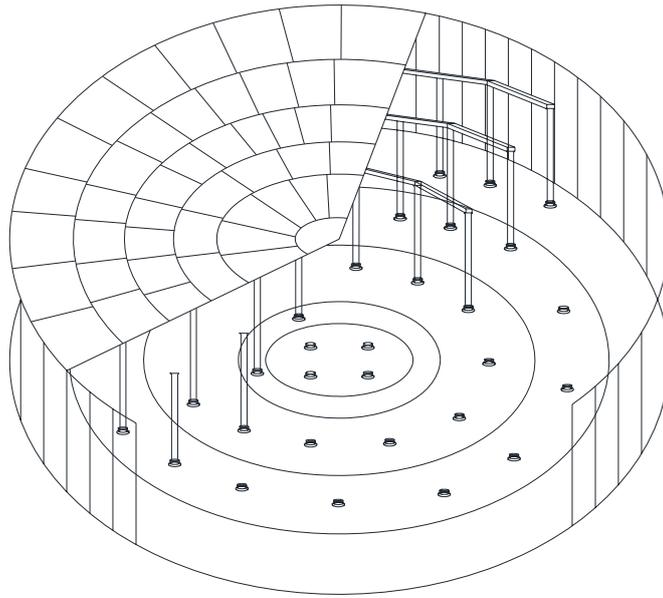


Рис. 2.2. Заглубленный железобетонный резервуар для нефтепродуктов вместимостью 30000 м<sup>3</sup>

Аналогичные по конструкции резервуары разработаны институтом «Союзводоканалпроект» для хранения нефти вместимостью от 1000 до 30000 м<sup>3</sup> и для мазута вместимостью от 5000 до 20000 м<sup>3</sup>.

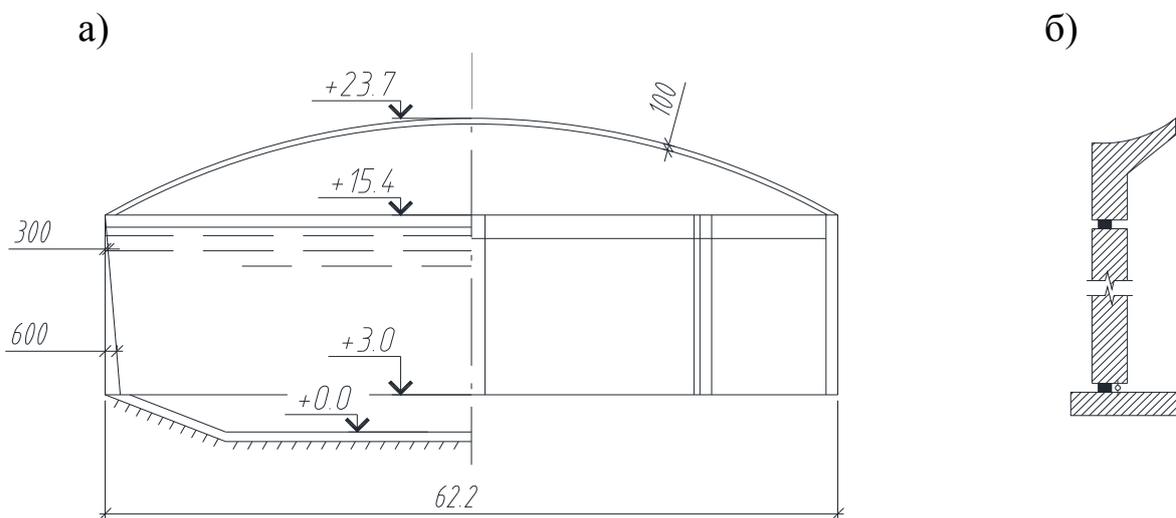


Рис. 2.3. Предварительно напряженный резервуар вместимостью 45000 м<sup>3</sup>:  
а – общий вид; б – положение опорных прокладок до навивки предварительно-напряженной арматуры

На рис. 2.3 показан цилиндрический резервуар для воды вместимостью 45000 м<sup>3</sup>, построенный в Оклэнде (США). Резервуар ци-

цилиндрический диаметром 62,2 м, высотой 12,2 м; толщина стенки сверху 0,3 м, внизу у основания, 0,6 м. Днище имеет форму перевернутого усеченного конуса высотой 3 м. Стенка армирована вертикальной и горизонтальной предварительно напряженной арматурой. Стык стенки с днищем подвижный (скользящий, допускающий перемещение стенки по днищу в радиальном направлении). Такие сопряжения стенки с днищем, фундаментным кольцом или опорным кольцом покрытия получили широкое распространение. В местах сопряжений укладываются непрерывные резиновые, неопреновые, хортеновые (заменители каучука) опорные прокладки. Такая конструкция позволяет осуществить плотное обжатие стенки по всей высоте, включая зоны, прилегающие к опорным элементам. При жестком сопряжении или шарнирном без возможности радиального смещения стенки предварительное напряжение ее не обеспечивает плотности обжатия и герметичности стыков в зонах опорных узлов. Кроме того, в этих зонах и от внешних нагрузок, и от навивки напрягаемой проволоки возникают изгибающие моменты, и возможно образование трещин.

В Южной Африке французская фирма построила два резервуара для воды, днища и стенки которых выполнены из сборных железобетонных элементов. Это открытые полузаглубленные цилиндрические резервуары вместимостью 35000 м<sup>3</sup>, диаметром около 85 м, высотой 5,2 м (рис. 2.4). Днище имеет форму опрокинутого усеченного конуса и опирается на скалистые отложения, расположенные на 2,4 м ниже нулевой отметки. При замоноличивании плит днища в швы укладывали медные V-образные пластинки и заполняли швы битумной мастикой. Стенка резервуара собрана из 147 железобетонных панелей высотой 5,3 м, шириной 1,5 м и толщиной 150 мм сверху и 254 мм внизу. При установке панелей на место между ними оставляли зазоры шириной 300 мм, которые затем армировали и бетонировали с применением вакуумирования. Для повышения плотности швов участки стены по 12 панелей в каждом подвергали предварительному обжатию натяжением гидравлическими домкратами проволочных струн, расположенных по высоте в трех уровнях с обеих сторон стенки. По окончании замоноличивания и обжатия на внешнюю поверхность стенки дополнительно навивалась арматура из тросов прямоугольного сечения. На рис. 2.5 показаны детали анкеровки такой арматуры.

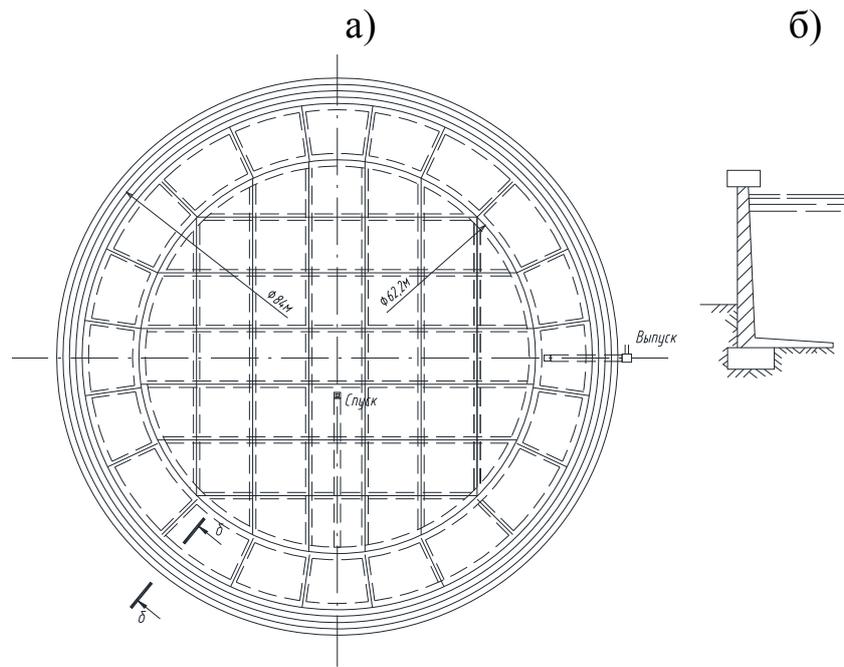


Рис. 2.4. Сборный предварительно-напряженный резервуар вместимостью 35000 м<sup>3</sup>: а – общий вид; б – разрез б-б

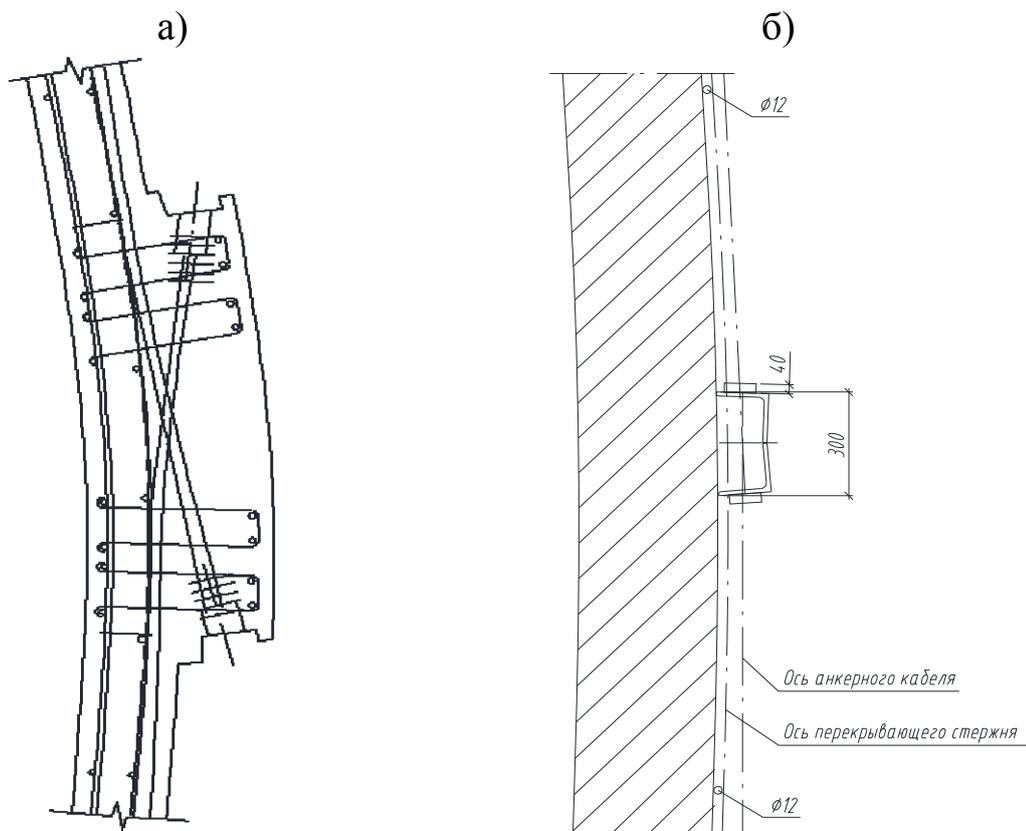


Рис. 2.5. Анкерование напрягаемой кольцевой арматуры: а – в железобетонных пилястрах стенки; б – в металлических приставных анкерных устройствах

Один из самых больших в мире – круглый резервуар вместимостью 275000 м<sup>3</sup> – построен в 1956 г. в Южной Африке. Он имеет диаметр 186,5 м и высоту стенки 10 м; занимает площадь 2,8 га; выполнен в монолитном железобетоне.

НИИЖБом и ЦНИИпромзданий разработаны резервуары вместимостью от 50 до 500 м<sup>3</sup>, стенки которых монтируются из сборных цилиндрических панелей-оболочек, обращенных выпуклостью внутрь, то есть против направления давления содержимого продукта. Предварительно напряженная арматура размещается по краевым опорным диафрагмам, из которых образуются верхнее и нижнее опорные кольца.

### **2.3. Защита резервуаров от проницаемости**

При проектировании железобетонных резервуаров особое внимание уделяется их непроницаемости, защите материала, из которого выполнен резервуар, от вредного воздействия хранимого продукта, а также сохранению физико-химических свойств продукта в течение длительного срока. В резервуарах для чистой воды трещиностойкость и водонепроницаемость обеспечиваются применением плотных бетонов и предварительного напряжения арматуры. Чистая вода вредного воздействия на бетон не оказывает. Сырая нефть и темные нефтепродукты также практически не оказывают химического воздействия на бетон. В Баку железобетонные резервуары для хранения нефти, построенные в 1912 г., эксплуатируются и сейчас.

Светлые нефтепродукты обладают высокой просачиваемостью через бетон; требуются специальные меры по изоляции. Кислоты и растительные масла действуют на бетон разрушающе; необходимо избегать их прямого контакта. Для защиты от вредного воздействия и от проницаемости устраивают облицовку или покрытие поверхностей, которые должны обладать прочностью и достаточной деформативностью, устойчивостью против температурных воздействий, стойкостью и безвредностью по отношению к хранимому продукту. Все эти качества должны сохраняться длительное время.

В США и Франции наиболее распространены защитные покрытия на основе тиокол-латекса (тиокол-латекс-алкилполисульфид – поддающаяся вулканизации пластмасса). Устройство покрытия производится наклейкой листового тиокола (хлопчатобумажной или

стеклянной ткани, пропитанной тиокол-латексом) или окраской поверхности составами на основе тиокол-латекса. В России применяются покрытия из пленочного винилпласта толщиной 0,4 – 0,6 мм, наклеиваемого на бетон цементно-латексной смесью, обмазки, изготовленные на основе эпоксидных смол, стеклопластиковая изоляция.

Используется также облицовка листовой сталью толщиной 1 – 4 мм. Облицовку можно производить как после монтажа железобетонных конструкций, так и в процессе бетонирования, используя стальную облицовку как внутреннюю опалубку. При первом способе возможно образование раковин и, следовательно, коррозии облицовки со стороны бетона. При втором – листы облицовки должны иметь значительную толщину, так как на них действует нагрузка от бетонной смеси. В сборных резервуарах, разработанных институтом Гипрогазнефть, стенки и днища собираются из панелей, облицованных стальным листом толщиной 2,5 – 4 мм.

Стальная облицовка обеспечивает непроницаемость резервуара, но и сама нуждается в защите от вредного воздействия продукта. К тому же такая облицовка требует большого расхода листовой стали. Непроницаемость может быть достигнута без защитных покрытий. Имеются бензонепроницаемые бетоны на основе портландцементов с добавками гидрата окиси железа или хлористых солей кальция, натрия, а также бетон, в котором роль вяжущего выполняют эпоксидные смолы, – пластбетон. Армированный пластбетон может применяться как для несущих конструкций, обладающих высокой коррозионной стойкостью, так и в качестве изоляционного слоя в сочетании с обычным железобетоном (двухслойные конструкции).

При строительстве резервуаров принимаются меры для уменьшения испарения продукта и повышения газонепроницаемости резервуара:

- предварительное напряжение всех конструктивных элементов: стен, днища, покрытия;
- устройство плавающих покрытий в виде понтонов из армоцементных конструкций или из синтетических материалов;
- устройство на покрытии водяного экрана, то есть покрытие устраивается в виде ванны со слоем воды 100 – 150 мм. Вода заполняет капилляры в бетоне и значительно повышает его непроницаемость. Этот же принцип используется и для стен и днища: выполняется гидроизоляция поверхностей, и бетон насыщается водой. При

длительном хранении продукта в резервуаре создают постоянный температурный режим.

## 2.4. Расчет резервуаров. Общие положения

В резервуарах не допускается появление трещин. Их расчет принято выполнять по упругой стадии деформирования.

Рассматриваются следующие случаи загрузки:

- 1) резервуар заполнен водой, но не обсыпан грунтом (при испытании);
- 2) пустой резервуар засыпан грунтом;
- 3) резервуар обсыпан грунтом и заполнен водой частично или полностью;
- 4) конструкция подвержена неравномерному нагреву или охлаждению.

Сочетания нагрузок принимаются в соответствии со СНиП.

## 2.5. Расчет стенки цилиндрического резервуара на осесимметричные нагрузки

Силы, действующие на элемент оболочки, проецируем на ось  $Z$  (рис. 2.6)  $\sum Z = 0: \frac{dQ}{dx} + \frac{T_2}{R_0} - Z = 0$ , где  $Z$  – давление на стенку резервуара;

$$Q = \frac{dM_1}{dx}. \quad (2.1)$$

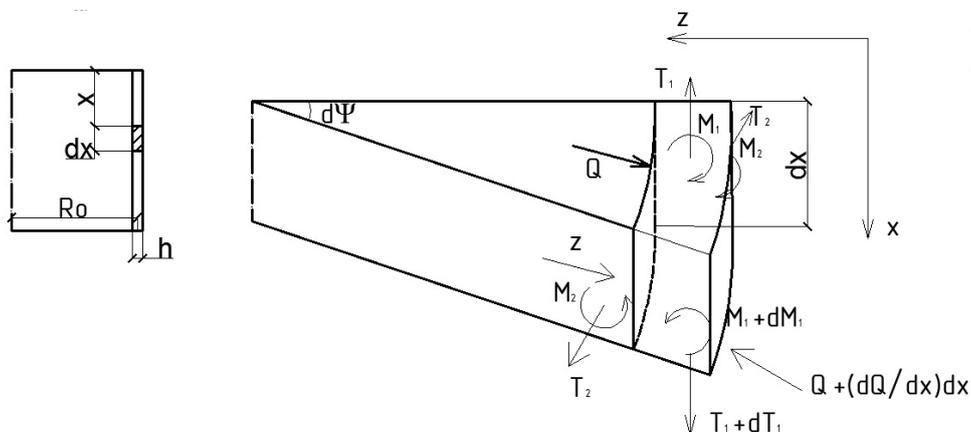


Рис. 2.6. К расчету стенки резервуара

$$\varepsilon_2 = \frac{2\pi(R_0 - W) - 2\pi R_0}{2\pi R_0} = -\frac{W}{R_0}, \quad (2.2)$$

где  $W$  – перемещение оболочки в радиальном направлении (в направлении оси  $z$ );  $\varepsilon_2$  – деформация срединной поверхности в кольцевом направлении.

Кривизна образующей срединной поверхности при малых перемещениях  $W$

$$\alpha_1 = -\frac{d^2 W}{dx^2}. \quad (2.3)$$

При упругом деформировании по закону Гука

$$T_2 = -Eh \frac{W}{R_0}; \quad M_1 = -D \frac{d^2 W}{dx^2}, \quad (2.4)$$

где  $D = \frac{Eh^3}{12}$  – изгибная жесткость оболочки (с пренебрежением коэффициента Пуассона).

Уравнение (2.1) можно записать в виде

$$\frac{d^2 M_1}{dx^2} + \frac{T_2}{R_0} - Z = 0, \quad (2.5)$$

а с учетом выражений (2.4)

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( D \frac{d^2 W}{dx^2} \right) + \frac{Eh}{R_0^2} W + Z = 0. \quad (2.6)$$

Это основное разрешающее уравнение симметрично нагруженной цилиндрической оболочки с переменной толщиной стенки. На практике чаще всего толщина стенки или постоянна, или изменяется по линейному закону.

## 2.6. Стенка постоянной толщины

При постоянной толщине стенки  $h$  уравнение (2.6) сходно с уравнением изгиба балки постоянной жесткости на упругом основании с постоянным коэффициентом постели.

Разделим уравнение (2.6) на  $D = \frac{Eh^3}{12}$

$$\frac{d^4 W}{dx^4} + \frac{12}{h^2 R_0^2} W = -\frac{12}{Eh^3} Z. \quad (2.7)$$

Вводим обозначение  $\frac{12}{h^2 R_0^2} = \frac{4}{S^4}$ ; то есть  $S = \sqrt[4]{\frac{4h^2 R_0^2}{12}} = \sqrt[4]{\frac{h^2 R_0^2}{3}}$  или

$$S = 0,76 \sqrt{h R_0}.$$

Вводим новую переменную

$$\varphi = x/s. \quad (2.8)$$

Уравнение принимает вид

$$\frac{d^4 W}{d\varphi^4} + 4W = -\frac{4R_0^2}{Eh} Z. \quad (2.9)$$

Уравнение (2.9) – неоднородное дифференциальное уравнение четвертого порядка с постоянными коэффициентами. Его решение состоит из общего решения соответствующего ему однородного уравнения

$$\frac{d^4 W}{d\varphi^4} + 4W = 0 \quad (2.10)$$

и частного решения неоднородного уравнения (2.9).

В качестве частного решения неоднородного уравнения можно взять решение для безмоментного состояния оболочки при осесимметричной нагрузке. Если нагрузкой служит только гидростатическое давление жидкости объемным весом  $\gamma$ , то есть  $Z = \gamma x$ , то из уравнения (2.5) следует  $T_2 = \gamma R_0 x$ , а из уравнения (2.9)

$$w = -\frac{\gamma R_0^2}{Eh} x. \quad (2.11)$$

Общее решение уравнения (2.10) может быть найдено в виде

$$W = C_1 \eta_1 + C_2 \eta_2 + C_3 \tilde{\eta}_1 + C_4 \tilde{\eta}_2, \quad (2.11a)$$

где  $C_1, C_2, C_3, C_4$  – постоянные интегрирования;

$$\eta_1 = e^{-\varphi} \cos \varphi; \quad \eta_2 = e^{-\varphi} \sin \varphi;$$

$$\tilde{\eta}_1 = e^{\varphi} \cos \varphi; \quad \tilde{\eta}_2 = e^{\varphi} \sin \varphi; \quad (2.12)$$

$e$  – основание натурального логарифма.

Если  $\frac{l}{5} \geq 2,5$ , то высоту стенки можно считать достаточной, чтобы пренебрегать влиянием нагрузки, действующей на одном краю, на деформации и напряжения – в зоне другого края. Тогда принимается вместо (2.11a)

$$W = C_1 \eta_1 + C_2 \eta_2. \quad (2.13)$$

С учетом равенств (2.4) и выражений

$$\frac{d\eta_1}{d\varphi} = -(\eta_1 + \eta_2); \quad \frac{d\eta_2}{d\varphi} = \eta_1 - \eta_2; \quad \eta_1(0) = 1,0; \quad \eta_2(0) = 0 \text{ получаем:}$$

$$T_2 = -\frac{Eh}{R_0} (C_1 \eta_2 + C_2 \eta_1);$$

$$v = \frac{dW}{dx} = \frac{1}{s} \frac{dW}{d\varphi} = \frac{1}{s} [-C_1(\eta_1 + \eta_2) + C_2(\eta_1 - \eta_2)]; \quad (2.14)$$

$$M_1 = -D \frac{d^2 W}{d\varphi^2} \frac{1}{s^2} = -\frac{2D}{s^2} (C_1 \eta_2 + C_2 \eta_1);$$

$$Q = -D \frac{1}{s^3} \frac{d^3 W}{d\varphi^3} = -\frac{2D}{s^3} [C_1(\eta_1 - \eta_2) + C_2(\eta_1 + \eta_2)],$$

где  $\nu$  – угол поворота образующей стенки.

Постоянные  $C_1$  и  $C_2$  определяются из граничных условий. За начало отсчета  $\varphi$  принимается нижний край оболочки, на который действуют момент  $M_0$  и поперечная сила  $Q_0$  (рис. 2.7).

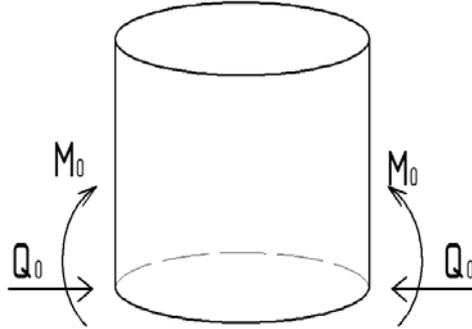


Рис. 2.7. Граничное воздействие на оболочку

$$M_0 = M_1(\varphi = 0) = \frac{2D}{s^2} C_2, \text{ откуда } C_2 = \frac{M_0}{2D} S^2;$$

$$Q_0 = -Q(\varphi = 0) = \frac{2D}{s^3} (C_1 + C_2), \text{ откуда } C_1 = \frac{1}{2D} (Q_0 S^3 - M_0 S^2). \quad (2.15)$$

## 2.7. Влияние граничных воздействий на усилия и перемещения в оболочке

Рассматриваются отдельно действия момента  $M_0$  и поперечной силы  $Q_0$ .

1. Действует только момент  $M_0$  ( $Q_0 = 0$ ).

$$C_1 = -\frac{M_0 S^2}{2D}; \quad C_2 = \frac{M_0 S^2}{2D}.$$

По выражениям (2.13) и (2.14) находим:

$$W = -\frac{M_0 S^2}{2D} (\eta_1 - \eta_2); \quad T_2 = -\frac{Eh}{R_0} W = \frac{2M_0 R_0}{S^2} (\eta_1 - \eta_2); \quad (2.16)$$

$$\nu = \frac{M_0 S}{D} \eta_1; \quad M_1 = M_0 (\eta_1 + \eta_2); \quad Q = -\frac{2M_0}{S} \eta_2.$$

Перемещения  $\nu$  и  $W$  от момента  $M_0 = 1$ , умноженные на жесткость  $D$ , представляют собой коэффициенты влияния упругой деформации для сечения  $\varphi = 0$ .

$$a_{11} = \nu D = S;$$

$$a_{12} = WD = -\frac{s^2}{2}. \quad (2.17)$$

2. Действует только сила  $Q_0$  ( $M_0 = 0$ ).

$$C_1 = \frac{Q_0 s^3}{2D}; C_2 = 0. \quad (2.18)$$

$$W = \frac{Q_0 s^3}{2D} \eta_1; T_2 = -\frac{Eh}{R_0} W = -\frac{2Q_0 R_0}{s} \eta_1; \quad (2.19)$$

$$v = -\frac{Q_0 s^2}{2D} (\eta_1 + \eta_2); M_1 = -Q_0 S \eta_2; Q = -Q_0 (\eta_1 - \eta_2).$$

Для сечения  $\varphi = 0$  перемещения  $W$  и  $v$  при  $Q = 1$

$$W = \frac{s^3}{2D}; v = -\frac{s^2}{2D}.$$

Умноженные на жесткость  $D$ , эти величины представляют собой коэффициенты влияния краевой упругой деформации:

$$a_{22} = WD = \frac{s^3}{2};$$

$$a_{21} = vD = -\frac{s^2}{2}. \quad (2.20)$$

Обратите внимание на взаимность перемещений  $a_{12} = a_{21}$ .

## 2.8. Стенка переменной толщины

Пусть толщина стенки изменяется по линейному закону:

$$h = \alpha x; D = E\alpha^3 \frac{x^3}{12}; \quad (2.21)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( D \frac{d^2 W}{dx^2} \right) = \frac{d^2}{dx^2} \left( E\alpha^3 \frac{x^3}{12} \frac{d^2 W}{dx^2} \right) = \frac{E\alpha^3}{12} \frac{d^2}{dx^2} \left( x^3 \frac{d^2 W}{dx^2} \right).$$

Уравнение (2.6) без правой части (при  $Z = 0$ ) будет

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( x^3 \frac{d^2 W}{dx^2} \right) + \frac{12}{\alpha^2 R_0^2} xW = 0. \quad (2.22)$$

Это уравнение можно преобразованием на основе функций комплексного переменного привести к уравнению Бесселя. Но решение может быть упрощено, если принять следующий закон изменения толщины:

$$h = h_b (1 + \beta x)^2. \quad (2.23)$$

Тогда

$$D = Eh_b^3 \frac{(1 + \beta x)^6}{12}; \quad (2.24)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( D \frac{d^2 W}{dx^2} \right) = \frac{Eh_b^3}{12} \frac{d^2}{dx^2} \left[ (1 + \beta x)^6 \frac{d^2 W}{dx^2} \right] = \frac{Eh_b^3}{12} \frac{d}{dx} \left[ 6(1 + \beta x)^5 \beta \frac{d^2 W}{dx^2} + \right.$$

$$+(1 + \beta x)^6 \frac{d^3 W}{dx^3}] = \frac{Eh_b^3}{12} [30\beta^2(1 + \beta x)^4 \frac{d^2 W}{dx^2} + 12\beta(1 + \beta x)^5 \frac{d^3 W}{dx^3} + (1 + \beta x)^6 \frac{d^4 W}{dx^4}] .$$

Подставляем в уравнение (2.6) без правой части (при  $Z = 0$ ) и сокращаем на  $(1 + \beta x)^2$ . Получаем уравнение Эйлера

$$(1 + \beta x)^4 \frac{d^4 W}{dx^4} + 12\beta(1 + \beta x)^3 \frac{d^3 W}{dx^3} + 30\beta^2(1 + \beta x)^2 \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{12}{h_b^2 R_0^2} W = 0 . \quad (2.25)$$

В решение вводится величина

$$t = \ln(1 + \beta x), \quad (2.26)$$

то есть используется равенство  $1 + \beta x = e^t$ . Получается

$$l^{4t} \frac{d^4 W}{dx^4} + 12\beta l^{3t} \frac{d^3 W}{dx^3} + 30\beta^2 l^{2t} \frac{d^2 W}{dx^2} + \frac{12}{h_b^2 R_0^2} W = 0.$$

Решение этого уравнения получается в виде

$$W = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t} + C_3 e^{r_3 t} + C_4 e^{r_4 t}, \quad (2.27)$$

где  $C_1, \dots, C_4$  – постоянные интегрирования;  $r_1, \dots, r_4$  – корни характеристического уравнения, которые получаются при подстановке в уравнение (2.25)  $W = (1 + \beta x)^r$ .

$$\text{Тогда } \frac{dW}{dx} = r(1 + \beta x)^{r-1} \beta;$$

$$\frac{d^2 W}{dx^2} = r(r-1)(1 + \beta x)^{r-2} \beta^2;$$

$$\frac{d^3 W}{dx^3} = r(r-1)(r-2)(1 + \beta x)^{r-3} \beta^3;$$

$$\frac{d^4 W}{dx^4} = r(r-1)(r-2)(r-3)(1 + \beta x)^{r-4} \beta^4.$$

Подставим в уравнение (2.25) и делим на  $\beta^4$ .

$$(1 + \beta x)^4 \frac{d^4 W}{dx^4} = r(r-1)(r-2)(r-3)(1 + \beta x)^r;$$

$$12\beta(1 + \beta x)^3 \frac{d^3 W}{dx^3} = r(r-1)(r-2)(1 + \beta x)^r 12;$$

$$30\beta^2(1 + \beta x)^2 \frac{d^2 W}{dx^2} = r(r-1)(1 + \beta x)^r 30;$$

$$\frac{12}{h_b^2 R_0^2} W = (1 + \beta x)^r \frac{12}{h_b^2 R_0^2 \beta^4}.$$

Получается характеристическое уравнение

$$r^4 + 6r^3 + 5r^2 - 12r + \frac{12}{h_b^2 R_0^2 \beta^4} = 0. \quad (2.28)$$

Далее следует замена переменной  $r$

$$r = z - \frac{6}{4}. \quad (2.29)$$

Получается

$$z^4 - 8,5z^2 + \frac{225}{16} + \delta = 0, \quad (2.30)$$

где

$$\delta = \frac{12}{h_b^2 R_0^2 \beta^4}. \quad (2.31)$$

Корни уравнения (2.30)

$$z_{1 \dots 4} = \pm \sqrt{4,25 \pm \sqrt{4,25^2 - \frac{225}{16} - \delta}} = \pm \sqrt{4,25 \pm \sqrt{4 - \delta}}. \quad (2.32)$$

Корни уравнения (2.28):

$$r_{1 \dots 4} = \pm \sqrt{4,25 \pm \sqrt{4 - \delta}} - \frac{6}{4}. \quad (2.33)$$

При  $\delta < 4$  все корни действительны. Учитывая подстановку (2.26), решение уравнений (2.27) представляется в виде

$$W = C_1(1 + \beta x)^{r_1} + C_2(1 + \beta x)^{r_2} + C_3(1 + \beta x)^{r_3} + C_4(1 + \beta x)^{r_4}, \quad (2.34)$$

где  $r_{1,2} = -\sqrt{4,25 \pm \sqrt{4 - \delta}} - \frac{6}{4}$ ;

$$r_{3,4} = +\sqrt{4,25 \pm \sqrt{4 - \delta}} - \frac{6}{4}. \quad (2.35)$$

Корням  $r_1, r_2$  соответствуют затухающие функции по мере удаления от верхнего края оболочки, а корням  $r_3, r_4$  – затухающие функции по мере удаления от нижнего края оболочки.

При  $\delta = 4$  все корни (2.33) действительны и двукратны. В этом случае

$$W = C_1(1 + \beta x)^{r_1} + C_2(1 + \beta x)^{r_1} \ln(1 + \beta x) + C_3(1 + \beta x)^{r_2} + C_4(1 + \beta x)^{r_2} \ln(1 + \beta x), \quad (2.36)$$

где  $r_1 = -\sqrt{4,25} - 1,5 = -2,062 - 1,5 = -3,562$ ;

$$r_3 = +\sqrt{4,25} - 1,5 = 0,562.$$

При  $\delta > 4$  корни (2.33) комплексные

$$r_{1 \dots 4} = \pm \sqrt{4,25 + i\sqrt{\delta} - 4} - \frac{6}{4} = \pm(p \pm iq), \quad (2.37)$$

где  $p = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{14,0625 + \delta} + 4,25)} - \frac{6}{4}$ ; (2.38)

$$q = \sqrt{\frac{1}{2}(\sqrt{14,0625 + \delta} - 4,25)}.$$

Решение (2.27) представляется в виде

$$W = C_1\eta_1(t) + C_2\eta_2(t) + C_3\eta_3(t) + C_4\eta_4(t), \quad (2.39)$$

где  $\eta_1(t) = e^{-pt} \cos qt$ ;  $\eta_2(t) = e^{-pt} \sin qt$ ;

$$\eta_3(t) = e^{-pt} \cos qt; \quad \eta_4(t) = e^{-pt} \sin qt. \quad (2.40)$$

Учитывая равенство (2.26), окончательно решение уравнения (2.25) можно записать в виде

$$W = (1 + \beta x)^{-P} \{C_1 \cos[q \ln(1 + \beta x)] + C_2 \sin[q \ln(1 + \beta x)]\} + (1 + \beta x)^P \{C_3 \cos[q \ln(1 + \beta x)] + C_4 \sin[q \ln(1 + \beta x)]\}. \quad (2.41)$$

Решение (2.41) составляют функции, затухающие по мере удаления от краев оболочки. Первый случай относится к стенке с плавным изменением толщины, близким к линейному, а второй и третий – к оболочкам с резким изменением толщины.

Для цилиндрических стенок с линейно изменяющейся толщиной внутренние усилия и перемещения, вызванные краевыми осесимметричными нагрузками, можно определить по формулам:

$$W = C_1(1 + \beta x)^{r_1} + C_2(1 + \beta x)^{r_2} + C_3(1 + \beta x)^{r_3} + C_4(1 + \beta x)^{r_4};$$

$$T_2 = -\frac{Eh_x}{R_0} w; \quad (2.42)$$

$$V = \frac{dw}{dx} = \beta [C_1 r_1 (1 + \beta x)^{r_1-1} + C_2 r_2 (1 + \beta x)^{r_2-1} + C_3 r_3 (1 + \beta x)^{r_3-1} + C_4 r_4 (1 + \beta x)^{r_4-1}];$$

$$M = -\frac{Eh_x^3}{12} \beta [C_1 r_1 (r_1 - 1) (1 - \beta x)^{r_1-2} + C_2 r_2 (r_2 - 1) (1 + \beta x)^{r_2-2} + C_3 r_3 (r_3 - 1) (1 - \beta x)^{r_3-2} + C_4 r_4 (r_4 - 1) (1 + \beta x)^{r_4-2}];$$

$$Q = \frac{Eh_x^3}{12} \beta^3 [C_1 r_1 (r_1 - 1) (r_1 - 2) (1 + \beta x)^{r_1-3} + C_2 r_2 (r_2 - 1) (r_2 - 2) (1 + \beta x)^{r_2-3} + C_3 r_3 (r_3 - 1) (r_3 - 2) (1 + \beta x)^{r_3-3} + C_4 r_4 (r_4 - 1) \times (r_4 - 2) (1 + \beta x)^{r_4-3}],$$

где  $C_1, \dots, C_4$  – постоянные интегрирования, определяемые из граничных условий.

## 2.9. Определение давления предварительно напряженной кольцевой арматуры на цилиндрическую оболочку

Предварительное напряжение арматуры стенок резервуаров осуществляется или механическим способом – непрерывной укладкой с натяжением навивочными машинами, или вручную, когда отдельные замкнутые кольца укладываются вручную и натягиваются с помощью домкратов, динамометрических ключей и прочего. Иногда применяют электротермический способ, нагревая кольца или звенья колец до 340 – 400 °С.

При машинном способе возникают потери предварительного напряжения вследствие упругого обжатия оболочки последующими витками арматуры. При ручном способе эти потери устраняются повторным напряжением витков.

## 2.10. Определение потерь предварительных напряжений в арматуре при навивке машинным методом

Принимается, что расстояние между кольцами арматуры достаточно мало, чтобы считать, что кольца создают равномерное сплошное давление на оболочку

$$P = \frac{T}{S}, \quad (2.43)$$

где  $T$  – давление кольца (линейное МН/м);  $S$  – шаг витков,

$$T = \frac{N}{R} \approx \frac{N}{R_0}, \quad (2.44)$$

где  $N$  – усилия предварительного напряжения в арматуре;  $R$ ,  $R_0$  – радиусы внешней и срединной поверхностей оболочки (рис. 2.8).

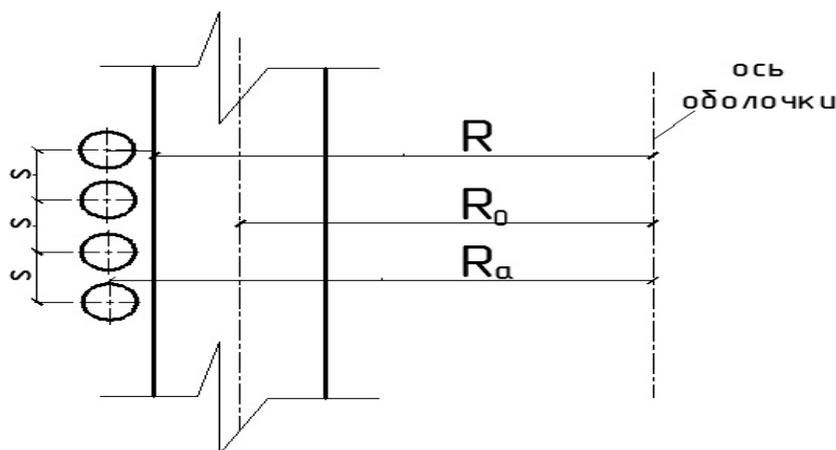


Рис. 2.8. К определению потерь предварительных напряжений арматуры

Предполагаем, что витки арматуры не проскальзывают по поверхности, и арматура не вызывает сдвигов в кольцевых сечениях оболочки

$$R = \frac{N}{R_0 S}. \quad (2.45)$$

Когда оболочка получает элементарное перемещение  $dW$  по радиусу к центру, в арматуре возникает деформация

$$\varepsilon_a = \frac{2\pi(R_a - dw) - 2\pi R_a}{2\pi R_a} = -\frac{dw}{R_a}. \quad (2.46)$$

Тогда 
$$dN = E_a F_a \varepsilon_a = -E_a F_a \frac{dw}{R_a}; \quad (2.47)$$

$$dP = \frac{dN}{R_0 S} = -\frac{E_a F_a}{R_a R_0 S} dw. \quad (2.48)$$

Пишут 
$$dP = -\alpha dw, \text{ где } \alpha = \frac{E_a F_a}{R_a R_0 S}. \quad (2.49)$$

Величина  $\alpha$  переменна, так как  $S = S(x)$  или  $F_a = F_a(x)$ , и меняется обычно по линейному закону

$$\alpha = \alpha_k + \frac{\varphi}{\lambda} (\alpha_n - \alpha_k), \quad (2.50)$$

где  $\lambda$  – число витков арматуры на участке навивки длиной  $l$ ;  $l$  – относительная длина участка (в витках);  $\varphi$  – относительная текущая координата;  $\alpha_k, \alpha_n$  – значения  $\alpha$ , соответствующие началу и концу навивки.

### 2.10.1. Давление навивки арматуры на бесконечно длинную оболочку

Полагаем, что начало и конец участка, где навивается арматура, находятся на достаточном удалении от торцов цилиндра. В этом случае прогиб в точке  $A$  – перемещение по радиусу к центру, вызванный элементарной кольцевой нагрузкой  $p dx$ , приложенной на расстоянии  $x$  от точки  $A$  (рис. 2.9), определяется по формуле (С. П. Тимошенко).

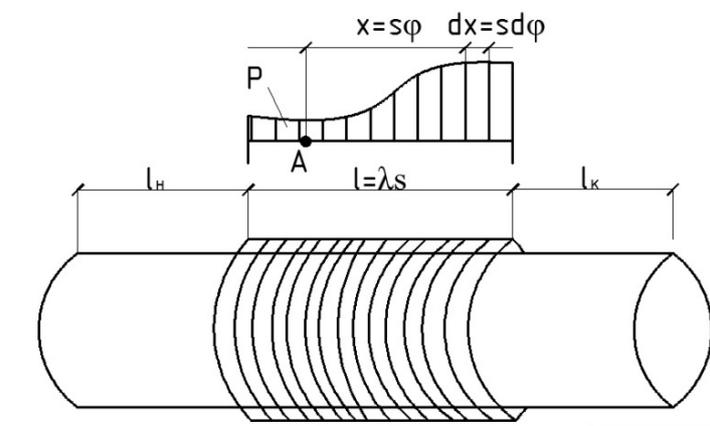


Рис. 2.9. Фрагмент бесконечно длинной оболочки

$$dw = p dx \frac{S^3}{8D} (\eta_1 + \eta_2), \quad (2.51)$$

где  $S = 0,76\sqrt{hR_0}$ ;  $D = EI$  – изгибная жесткость оболочки;

$$\varphi = \frac{x}{S}; \quad x = \varphi S; \quad dx = S d\varphi;$$

$$\eta_1 = e^{-\varphi} \cos\varphi; \quad \eta_2 = e^{-\varphi} \sin\varphi. \quad (2.52)$$

Тогда

$$dp = -\alpha dw = -\alpha p dx \frac{S^3}{8D} (\eta_1 + \eta_2) = -\alpha p \frac{S^4}{8D} (\eta_1 + \eta_2) d\varphi. \quad (2.53)$$

Подставим выражение (2.50) для  $\alpha$

$$\frac{dp}{p} = -\left\{ \alpha_k \frac{S^4}{8D} + \frac{\varphi}{\lambda} (\alpha_n - \alpha_k) \frac{S^4}{8D} \right\} (\eta_1 + \eta_2) d\varphi.$$

$$\text{Пишут} \quad \frac{dp}{p} = -(\beta_k + \beta\varphi)(\eta_1 + \eta_2) d\varphi, \quad (2.54)$$

где  $\beta_k = \alpha_k \frac{S^4}{8D}$ ;  $\beta = \frac{1}{\lambda} (\alpha_n - \alpha_k) \frac{S^4}{8D}$ .

Интегрированием найдем величину  $P = P(\varphi)$ .

$$\int \frac{1}{p} dp = -\int (\beta_k + \beta\varphi) (\eta_1 + \eta_2) d\varphi = -\left\{ \beta_k \left( \int \eta_1 d\varphi + \int \eta_2 d\varphi \right) + \beta \left( \int \varphi \eta_1 d\varphi + \int \varphi \eta_2 d\varphi \right) \right\};$$

$$\int \eta_1 \varphi = \int e^{-\varphi} \cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2} e^{-\varphi} (-\cos\varphi + \sin\varphi);$$

$$\int \eta_2 \varphi = \int e^{-\varphi} \sin\varphi d\varphi = \frac{1}{2} e^{-\varphi} (-\sin\varphi - \cos\varphi);$$

$$\int \varphi \eta_1 d\varphi = \int \varphi e^{-\varphi} \cos\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \varphi e^{-\varphi} (-\cos\varphi + \sin\varphi) + \frac{1}{2} e^{-\varphi} \sin\varphi;$$

$$\int \varphi \eta_2 d\varphi = \int \varphi e^{-\varphi} \sin\varphi d\varphi = \frac{1}{2} \varphi e^{-\varphi} (-\cos\varphi - \sin\varphi) - \frac{1}{2} e^{-\varphi} \cos\varphi.$$

Получается

$$\int \frac{1}{p} dp = -\beta_k (-\cos\varphi) e^{-\varphi} - \beta \left[ (-\cos\varphi) \varphi e^{-\varphi} + \frac{1}{2} e^{-\varphi} (\sin\varphi - \cos\varphi) \right] \text{ или } \int \frac{1}{p} dp = \beta_k \eta_1 - \beta \left( -\varphi \eta_1 + \frac{1}{2} (\eta_2 - \eta_1) \right) = \beta_k \eta_1 + \frac{1}{2} \beta [(2\varphi + 1)\eta_1 - \eta_2].$$

Можно написать

$$P = C e^{\beta_k \eta_1 + \frac{1}{2} \beta [(2\varphi + 1)\eta_1 - \eta_2]}. \quad (2.55)$$

(Можно убедиться, вычислив  $dp$  и разделив на  $P$ ).

За начало отсчета  $\varphi$  принимаем сечение, в котором уложен последний виток. Давление  $P$  в этом сечении известно  $P(\varphi = 0) = P_k$

$$P_k = C e^{\beta_k + \frac{1}{2} \beta}.$$

Отсюда

$$C = P_k e^{-\beta_k - \frac{1}{2}\beta}. \quad (2.56)$$

Тогда  $P = P_k e^{-\beta_k(1-\eta_1) + \frac{1}{2}\beta[-1+(2\varphi+1)\eta_1-\eta_2]}.$  (2.57)

При  $\beta = 0$  (при  $\alpha = \text{const}$ )

$$P = P_k e^{-\beta_k(1-\eta_1)}. \quad (2.58)$$

По мере удаления от конечного витка давление  $P$  падает и стремится к постоянному

$$P = P_k e^{-\beta_k - \frac{1}{2}\beta} \quad (2.59)$$

или

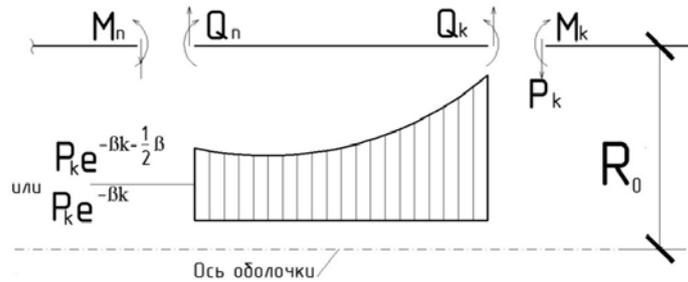
$$P = P_k e^{-\beta_k} \quad \text{при} \quad \beta = 0 \quad (2.59a)$$

Зная давление  $P$ , получаем значения внутренних усилий и деформаций в любой точке длинной оболочки.

### 2.10.2. Давление навивки арматуры на оболочку конечной длины

Оболочка конечной длины рассматривается как участок с навивтой арматурой, достаточно удалённый от торцов бесконечно длинной оболочки. Сначала определяются значения изгибающих моментов и поперечных сил в сечениях, соответствующих началу и концу навивки (рис. 2.10).

а)



б)

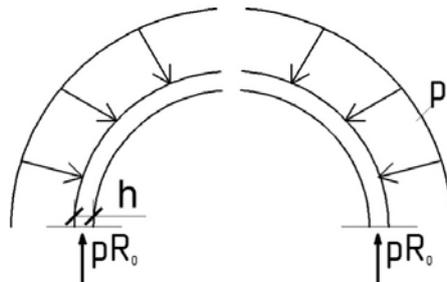


Рис. 2.10. К определению величин  $\Delta_{1p}$  (а),  $\Delta_{2p}$  (б)

Для каждого из сечений, соответствующих началу и концу навивки, можно написать:

$$a_{11}M + a_{12}Q + \Delta_{1p} = 0;$$

$$a_{21}M + a_{22}Q + \Delta_{2p} = 0.$$

$$a_{11} = 2S - \text{взаимный поворот (умноженный на } D);$$

$$a_{22} = S^3 - \text{взаимное перемещение};$$

$$a_{12} = a_{21} = 0 - \text{взаимных перемещений нет.}$$

При действии поперечной силы  $Q$  есть взаимные линейные перемещения, но нет взаимных поворотов. Тогда по теореме о взаимности перемещений не будет и линейных взаимных перемещений при действии моментов.

*Определение грузовых членов*

$$\sigma = -\frac{pR_0}{h}; \quad \varepsilon = -\frac{pR_0}{Eh} = -\frac{W}{R_0}; \quad W = \frac{pR_0^2}{Eh},$$

$$\Delta_{2p} = -WD = -p\frac{S^4}{4},$$

где  $W$  – перемещение по радиусу к центру;  $\varepsilon = -\frac{W}{R_0}$  – кольцевая де-

формация;  $S^4 = \frac{h^2 R_0^2}{3}$ ;  $\Delta_{2p}$  – умноженное на  $D$  значение  $\frac{d\omega}{dx} = \frac{1}{S} \frac{d\omega}{d\varphi}$ .

$$\frac{1}{S} \frac{d\omega}{d\varphi} = \frac{1}{S} \frac{R_0^2}{Eh} \frac{dp}{d\varphi}; \quad \Delta_{1p} = \frac{S^3}{4} \frac{dp}{d\varphi}. \quad (2.60)$$

В зоне, соответствующей началу навивки, давление постоянно.

$$P = P_k^{-\beta k - \frac{1}{2}\beta} \text{ или } P = P_k^{-\beta k} \text{ при } \beta = 0.$$

Тогда  $\Delta_{1PH} = 0$ ;

$$\Delta_{2PH} = -\frac{S^4}{4} P_k^{-\beta k - \frac{1}{2}\beta} \text{ или } \Delta_{2PH} = -\frac{S^4}{4} P_k^{-\beta k}. \quad (2.61)$$

Отсюда  $M_H = 0$ ;

$$Q_H = -\frac{\Delta_{2PH}}{a_{22}} = \frac{S}{4}; \quad P_k^{-\beta k - \frac{1}{2}\beta} \text{ или } Q_H = \frac{S}{4} P_k^{-\beta k}. \quad (2.62)$$

В зоне, соответствующей концу навивки, по формуле (2.57)

$$P = P_k e^{-\beta k(1-\eta_1) + \frac{1}{2}\beta[-1+(2\varphi+1)\eta_1-\eta_2]};$$

$$\frac{dp}{d\varphi} = P_k e^{-\beta k(1-\eta_1) + \frac{1}{2}\beta[-1+(2\varphi+1)\eta_1-\eta_2]} \left\{ -\beta k(\eta_1 + \eta_2) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2}\beta[2\eta_1 + (2\varphi + 1)(-\eta_1 - \eta_2) - \eta_1 + \eta_2] \right\}$$

или

$$\frac{dp}{d\varphi} = -P_k(\beta k + \beta\varphi)(\eta_1 + \eta_2) e^{-\beta k(1-\eta_1) + \frac{1}{2}\beta[-1+(2\varphi+1)\eta_1-\eta_2]}. \quad (2.63)$$

При  $\varphi = 0, \eta_1 = 1,0, \eta_2 = 0 : \frac{dp}{d\varphi} = -P_k \beta_k$ .

Тогда

$$\Delta_{1pk} = -\frac{S^3}{4} P_k \beta_k; \Delta_{2pk} = -\frac{S^4}{4} P_k. \quad (2.64)$$

$$M_k = -\frac{\Delta_{1pk}}{a_{11}} = \frac{S^2}{8} P_k \beta_k; \quad Q_k = -\frac{\Delta_{2pk}}{a_{22}} = \frac{S}{4} P_k. \quad (2.65)$$

### Темы для закрепления знаний

1. Классификация резервуаров.
2. Примеры надземных и подземных резервуаров.
3. Анкеровка напрягаемой кольцевой арматуры.
4. Защита резервуаров от проницаемости.
5. Расчет на прочность резервуаров со стенками постоянной толщины.
6. Расчет резервуаров со стенками переменной толщины.
7. Определение давления предварительно напряженной арматуры на цилиндрическую оболочку.
8. Определение потерь предварительно напряженной арматуры.
9. Давление кольцевой арматуры на бесконечно длинную оболочку.
10. Давление арматуры на оболочку конечной длины.

## 3. ПРИМЕРЫ ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЙ

### *Пример 1*

Толщина стенки оболочки  $h = 10$  см, высота  $l = 600$  см, радиус срединной поверхности  $R_0 = 500$  см;  $E_a = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $E_c = 2,8 \cdot 10^4$  МПа;  $\mu = 0,025$ ;  $S = 1,0$  см;  $F_a = \mu h s = 0,25$  см<sup>2</sup>;  $\frac{F_a}{S} = 0,25$  см.

Определить давление арматуры на оболочку.

*Решение:*

$$S = 0,76 \sqrt{h R_0} = 53,74 \text{ см};$$

$$\alpha_k = \alpha_H = \frac{E_a F_a}{R_0 R_a S} = \frac{E_a F_a}{R_0^2 S} = 21 \text{ Н/см}^3;$$

$$D = \frac{E_B h^3}{12} = 2,33 \cdot 10^8 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$\beta_k = \frac{\alpha_k S^4}{8D} = 0,0939; \beta = 0; \lambda = \frac{l}{S} = \frac{600}{53,74} = 11,17.$$

Давление арматуры на бесконечно длинную оболочку при постоянном шаге навивки  $P = P_k e^{-\beta_k(1-\eta_1)}$ .

Отсчёт текущей координаты ведётся от сечения, соответствующего концу навивки. Вычисления сведены в табл. 3.1.

Таблица 3.1

X, см	$\varphi$	$\eta_1$	$1-\eta_1$	$\beta_k(1-\eta_1)$	$P = P_k e^{-\beta_k(1-\eta_1)}$
0	0	1,0	0	0	$P_k$
42,5	0,791	0,319	0,681	0,064	$0,938P_k$
85	1,582	0,00228	0,9977	0,0937	$0,911P_k$
300	5,583	0,00288	0,997	0,0936	$0,911P_k$
515	9,585	-0,000068	1,00007	0,0939	$0,91P_k$
600	—	—	—	—	$0,91P_k$

Поперечные силы и моменты в сечениях, соответствующих началу и концу навивки (для бесконечно длинной оболочки):

$$Q_H = \frac{S}{4} P_k e^{-\beta_k} = \frac{53,74}{4} P_k 0,91 = 12,22 P_k; M_H = 0;$$

$$\varphi = 0,791; \eta_1 = e^{-\varphi} \cos \varphi; \cos \varphi = \cos 45^\circ 32' = 0,7;$$

$$\eta_1 = e^{-\varphi} \cos \varphi = 0,454 \cdot 0,7 = 0,318;$$

$$Q_k = \frac{S}{4} P_k = \frac{53,74}{4} P_k = 13,43 P_k;$$

$$M_k = \frac{S^2}{8} P_k \beta_k = \frac{53,74}{8} \cdot 0,0939 P_k = 33,89 P_k.$$

Падение давления в оболочке конечной длины в зоне начала навивки  $\Delta p = -\alpha \omega$ .

Перемещения от граничных воздействий:

$$\text{от } Q_0 \quad \omega = \frac{Q_0 S^3}{2D} \eta_1;$$

$$\text{от } M_0 \quad \omega = -\frac{M_0 S^2}{2D} (\eta_1 - \eta_2);$$

$$Q_0 = -Q_H = -\frac{S}{4} P_k e^{-\beta_k}; W = -\frac{S^4}{8D} P_k e^{-\beta_k \eta_1};$$

$$\Delta_{ph} = \alpha \frac{S^4}{8D} P_k e^{-\beta_k \eta_1} = \beta_k P_k e^{-\beta_k \eta_1} = 0,0939 \cdot 0,91 P_k \eta_1 = 0,0854 P_k \eta_1.$$

При этом отсчёт текущей относительной координаты  $\varphi$  ведётся от начала навивки.

Падение давления в зоне конца навивки:

$$\Delta P_{Q_k} = \alpha \frac{Q_k S^3}{2D} = \alpha \frac{S^4}{8D} P_k \eta_1 = \beta_k P_k \eta_1 = 0,0939 P_k \eta_1;$$

$$\Delta P_{M_k} = \alpha \frac{M_k S^2}{2D} (-\eta_1 + \eta_2) = \alpha \frac{S^4}{16D} P_k \beta_k (-\eta_1 + \eta_2) =$$

$$= \frac{1}{2} \beta_k P_k (-\eta_1 + \eta_2) = 0,04695 P_k (-\eta_1 + \eta_2).$$

При вычислении  $\Delta P_{Q_k}$ ,  $\Delta P_{M_k}$  отсчёт координаты ведётся от конца навивки. Для зоны, примыкающей к начальному витку, вычисления даны в табл. 3.2; для зоны, примыкающей к конечному витку, – в табл. 3.3.

Таблица 3.2

X, см	$\varphi$	$\eta_1$	$\Delta P_H$	$P - \Delta P_H$
0	0	1	$0,0854 P_k$	$0,8246 P_k$
28,13	0,5235	0,5127	$0,04378 P_k$	$0,8662 P_k$
56,26	1,047	0,1755	$0,01499 P_k$	$0,895 P_k$
84,36	1,57	0	0	$0,91 P_k$

Таблица 3.3

X, см	$\varphi$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\Delta P_{Q_k} = 0,0939 P_k \eta_1$	$\Delta P_{M_k} = 0,04695 \times (-\eta_1 + \eta_2)$	$\Delta P_{Q_k} - \Delta P_{M_k}$	$P - (\Delta P_{Q_k} - \Delta P_{M_k})$
–	0	1	0	–	–	–	$P_k$
2,2	0,7853	0,3227	0,3224	$0,03027 P_k$	$-0,0001 P_k$	$0,03037 P_k$	$0,908 P_k$
84,39	1,5706	0	0,208	–	$0,009766 P_k$	$0,009766 P_k$	$0,919 P_k$
126,6	2,356	-0,067	0,067	$-0,00629 P_k$	$0,00629 P_k$	$-0,01258 P_k$	$0,9336 P_k$

### Пример 2

Для оболочки, рассмотренной в примере 1, принимается линейно изменяющийся по высоте процент армирования от  $\mu_H = 1\%$  ( $\frac{F_a}{S_H} = 0,1$  см) в начале навивки до  $\mu_k = 5\%$  ( $\frac{F_a}{S_k} = 0,5$  см) в конце. Требуется определить давление предварительно напряжённой арматуры на оболочку.

Решение:

$$S = 0,76 \sqrt{hR_0} = 53,74 \text{ см};$$

$$D = 2,33 \cdot 10^8 \text{ Н} \cdot \text{см};$$

$$\lambda = \frac{l}{S} = \frac{600}{53,74} = 11,17;$$

$$\alpha_H = \frac{E_a F_a}{R_0^2 S_H} = \frac{2,1 \cdot 10^7}{2,5 \cdot 10^5} 0,1 = 8,4 \text{ Н/см}^3;$$

$$\alpha_k = \frac{2,1 \cdot 10^7}{2,5 \cdot 10^5} 0,5 = 42 \text{ Н/см}^3;$$

$$\beta = \frac{\alpha_H - \alpha_k}{\lambda} \frac{S^4}{8D} = -0,01346;$$

$$\beta_k = \alpha_k \frac{S^4}{8D} = 0,1879.$$

Рассматриваем бесконечно длинную оболочку с участком навивки длиной 600 см. Начало отсчёта  $\varphi$  – последний виток арматуры. Давление вычисляется по формуле (2.57)

$$P = P_k e^{-\beta_k(1-\eta_1) + \frac{1}{2}\beta[-1+(2\varphi+1)\eta_1-\eta_2]}.$$

Вычисления сведены в табл. 3.4.

Таблица 3.4

$X$ , см	$\varphi$	$\eta_1$	$\eta_2$	$\beta_k(1 - \eta_1)$	$1 + \eta_2$	$(2\varphi + 1)\eta_1$	$P$
0	0	1	0	0	1	1	$P_k$
42,8	0,7909	0,3189	0,322	0,128	1,322	0,8233	$0,877P_k$
85	1,582	0,00228	0,2056	0,1875	1,2056	0,009493	$0,822P_k$
300	5,583	0,002876	-0,002368	0,1874	0,9976	0,03499	$0,822P_k$
515	9,585	-0,000068	-0,00001	0,1879	0,99999	-0,001371	$0,8228P_k$
600	–	–	–	–	–	–	$0,8228P_k$

Поперечные силы и моменты в сечениях, соответствующие началу и концу навивки:

$$Q_H = \frac{S}{4} 0,8228P_k = 11,053P_k;$$

$$M_H = 0;$$

$$Q_k = \frac{S}{4} P_k = 13,43P_k;$$

$$M_k = \frac{S^2}{8} P_k \beta_k = 67,83P_k.$$

Падение давления в оболочке длиной 600 см в зоне начала навивки

$$\Delta P_H = -\alpha \frac{S^3}{2D} Q_H \eta_1 = - \left[ \alpha_H + \frac{\varphi}{\lambda} (\alpha_k - \alpha_H) \right] \frac{S^3}{2D} Q_H \eta_1 =$$

$$= - \left[ 8,4 + \frac{\varphi}{11,17} 33,6 \right] \frac{53,74^3}{2D} 11,05 P_k \eta_1 = - (8,4 + 3\varphi) 0,003678 P_k \eta_1.$$

Падение давления в зоне конца навивки от  $Q_k, M_k$ :

$$\Delta P_{Q_k} = \alpha \frac{Q_k S^3}{2D} \eta_1 = \left[ \alpha_k + \frac{\varphi}{\lambda} (\alpha_H - \alpha_k) \right] \frac{S^3}{2D} Q_k \eta_1 =$$

$$= (42 - 3\varphi) 0,00447 P_k \eta_1;$$

$$\Delta P_{M_k} = \alpha \frac{M_k S^2}{2D} (-\eta_1 + \eta_2) = \left[ \alpha_k + \frac{\varphi}{\lambda} (\alpha_H - \alpha_k) \right] \frac{M_k S^2}{2D} (-\eta_1 + \eta_2) =$$

$$= (42 - 3\varphi) 0,00042 P_k (-\eta_1 + \eta_2).$$

### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В полой оболочке положительной гауссовой кривизны на большей части ее поверхности бетон работает на сжатие в двух направлениях, благодаря чему его прочностные свойства используются наиболее эффективно. Достигается экономия бетона, и снижается вес покрытия. Оболочки могут быть монолитными или сборными. В первом случае трудность возникает при возведении опалубки и выполнении бетонирования на стройплощадке, во втором – при разделении оболочки на элементы и выполнении монтажа.

В практике строительства все шире практикуют предварительное напряжение контурных конструкций и угловых зон оболочки, а также применение легких бетонов. Исследования показывают, что в начальной стадии нагружения оболочки деформируются линейно, но после образования трещин в бетоне растянутой зоны в них нарастают нелинейные деформации.

Пространственные покрытия на основе оболочек обладают особой архитектурной выразительностью, что также способствует их применению при строительстве крупных общественных культурных, спортивных, социально значимых городских зданий.

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Железобетонные конструкции. Специальный курс / под ред. В. Н. Байкова. – М. : Стройиздат, 1981. – С. 4 – 83.
2. Безухов, Н. И. Теория упругости и пластичности / Н. И. Безухов. – М. : Гостехтеориздат, 1953. – 420 с.
3. Колкунов, Н. В. Основы расчета упругих оболочек / Н. В. Колкунов. – М. : Высш. шк., 1963. – 277с.
4. Огибалов, П. М. Вопросы динамики и устойчивости оболочек / П. М. Огибалов. – М. : Изд-во МГУ, 1963. – 416 с.
5. Сахновский, К. В. Сборные тонкостенные пространственные и большепролетные конструкции / К. В. Сахновский. – Л. : Стройиздат, 1969. – 517 с.
6. Байков, В. Н. Железобетонные конструкции. Общий курс / В. Н. Байков, Э. Е. Сигалов. – М. : Стройиздат, 1991. – 766 с.
7. СНиП 52-01-2003. Бетонные и железобетонные конструкции. Основные положения (утв. Постановлением Госстроя РФ от 30.06.2003 № 127). – М. : Изд-во стандартов, 2003. – 56 с.

*Учебное издание*

ШИШОВ Иван Иванович  
ЛУКИН Михаил Владимирович

РАСЧЕТ И КОНСТРУИРОВАНИЕ ДВОЯКОВЫПУКЛОЙ  
ОБОЛОЧКИ И ПОДЗЕМНОГО РЕЗЕРВУАРА

Учебное пособие

Редактор А. П. Володина  
Технический редактор С. Ш. Абдуллаева  
Корректор В. С. Теверовский  
Компьютерная верстка Е. А. Кузьминой

Подписано в печать 15.06.16.  
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 4,88. Тираж 100 экз.

Заказ

Издательство

Владимирского государственного университета  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.  
600000, Владимир, ул. Горького, 87.