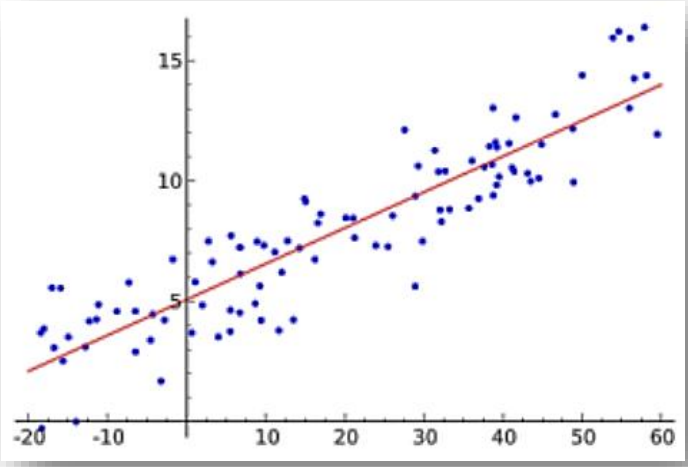
Министерство науки и высшего образования
Федеральное государственное бюджетное
образовательное учреждение высшего образования
Владимирский государственный университет имени А.Г и Н.Г. Столетовых
Институт «Архитектура, Строительство, Энергетика»
Кафедра «Теплогазоснабжение, вентиляция и гидравлика»

Планирование и методика проведения эксперимента в области систем обеспечения микроклимата

Практическая работа

Направление подготовки 08.04.01 – Строительство
Профиль подготовки «Микроклимат»
Квалификация (степень) выпускника: магистр

Стариков А.Н.



Владимир-2016

Оглавление

Введение 3
ЗАДАНИЕ 3
Часть 1. Вычислительная 3
Часть 2. Обработка экспериментальных данных 6
1.1. Ошибки измерений 7
1.2. Основы статистической обработки результатов измерений 11
1.3. Основы представления результатов измерений 14
1.4. Запись и округление результата измерения 20
1.5. Регрессионный анализ 20

Введение

Методические указания по выполнению контрольной работы по дисциплине «Планирование и методика проведения эксперимента в области систем обеспечения микроклимата» (ПМПЭ) содержат задания и методику выполнения основных элементов проведения научных исследований. Работа предназначение для закрепления знаний, полученных при изучении лекций. Студенты осваивают методы математических расчётов с применением компьютеров, моделирования процессов, обработки результатов исследований активного и пассивного эксперимента (экспериментальных данных). Курс рассчитан на студентов, обучающихся по направлению 08.04.01 «Строительство», профили «Теплогазоснабжение и вентиляция», «Водоснабжение и водоотведение», «Микроклимат». При выполнении работ предполагается наличие знаний у студентов по высшей математике, умение пользоваться для расчетов и построения графиков прикладными пакетами программ «Excel», «Word».

ЗАДАНИЕ

- часть 1, – произвести вычисления с применением пакета Excel;
- часть 2, – произвести обработку экспериментальных данных
- оформить отчёт в виде документа Word, (выложит на сайт для проверки)

Часть 1. Вычислительная.

Имеется движение жидкости в гидравлически гладких и шероховатых трубах. Требуется установить основные зависимости при турбулентном движении жидкости для гидравлически гладких и шероховатых труб; исследовать изменения текущей скорости при изменении диаметра трубопровода (больше или меньше заданного) и постоянных других параметрах, а также при изменении расхода воды (больше или меньше заданного) и постоянных других параметрах.

Порядок проведения работы

1. Рассчитать усредненную скорость потока, [м/с] и число Рейнольдса:

$$v = \frac{4Q}{\pi d^2}; \quad \mathrm{Re} = \frac{vd}{\upsilon}.$$

где Q – расход жидкости, м^3/с;

d – диаметр трубы, мм;

V – средняя скорость потока, м/с;

υ – кинематическая вязкость.

2. По полученному значению числа Re и с учётом табл. 1 определить величину гидравлического трения λ.

Таблица 1

Таблица для определения коэффициента гидравлического трения

Режим движения		Число Рейнольдса	Определение λ
Ламинарный		$Re < 2300$	$\lambda = \frac{64}{Re}$ или $\lambda = \frac{75}{Re}$
Переходный		$2300 < Re < 4000$	*Проектирование трубопроводов не рекомендуется*
Турбулентный	1-я область	$4000 < Re < 10\frac{d}{\Delta_э}$	$\lambda_T = \frac{0{,}3164}{Re^{0{,}25}}$ (ф-ла Блазиуса) $\lambda_T = \frac{1}{(1{,}8\lg Re - 1{,}5)^2}$ (ф-ла Конакова)
	2-я область	$10\frac{d}{\Delta_э} < Re < 560\frac{d}{\Delta_э}$	$\lambda_T = 0{,}11\left(\frac{\Delta_э}{d} + \frac{68}{Re}\right)^{0{,}25}$ (ф-ла Альтшуля)
	3-я область	$Re > 560\frac{d}{\Delta_э}$	$\lambda_T = 0{,}11\left(\frac{\Delta_э}{d}\right)^{0{,}25}$ (ф-ла Альтшуля) $\frac{1}{\sqrt{\lambda_T}} = -2\lg\left(\frac{\Delta_э}{3{,}71d}\right)$ (ф-ла Никурадзе)

где $\Delta_{экв}$ – абсолютная шероховатость, табл.2;

$\frac{\Delta_{экв}}{d}$ – относительная шероховатость.

Таблица 2

Эквивалентная абсолютная шероховатость труб из разных материалов

Номер варианта	*Материал трубы*	*Состояние трубы*	$\Delta_{экв}$, *мм*
1	Бесшовные стальные	Новые и чистые	0,014
2	Стальные сварные	После нескольких лет эксплуатации	0,02
3		Новые и чистые	0,05
4		С умеренной коррозией	0,5
5		Старые с сильной коррозией	1,0
6	Стальные оцинко-ванные	Новые и чистые	0,15
7		После нескольких лет эксплуатации	0,5
8	Чугунные	Новые без покрытия	0,3
9		Бывшие в употреблении	1,0
10	Асбоцементные	Новые	0,085
11	Бетонные	Новые из предварительно напряжен-ного бетона	0,03
12		Новые центробежные	0,2
13		Бывшие в употреблении	0,5
14		Из необработанного бетона	3

3. Определить показатель n,

$$n = 0.84\sqrt{\lambda}.$$

4. Средняя скорость потока V в трубе находиться между значениями V_{max} и 0,

$$V_{max} = V \cdot k,$$

где k – коэффициент, характеризующий вязкость жидкости, принять в соответствии с табл. 3.

5. С учётом зависимости определяющей уменьшение скорости потока от центра к стенкам трубы,

$$\frac{V_i}{V_{max}} = \left(1 - \frac{r_i}{r_{\text{тр}}}\right)^n,$$

где V_{max} – максимальная скорость в центре трубы;

V_i – скорость потока в точке, удалённой от центра на величину r_i;

r_i – варьируемый параметр: от 0 до $r_{\text{тр}}$;

$r_{\text{тр}}$ – радиус трубы.

Построить график зависимости скорости V_i от радиуса трубы.

Выполнение расчётов и построение графиков производить в Excel.

Исходные данные для разных вариантов заданий представлены в таблице 2, 3.

Таблица 3

Таблица исходных данных

№	Диаметр, мм	Расход, л/с	Кинематическая вязкость воды, см^2/с	k
1	8	0,1	0,013101	1,0
2	10	0,25	0,013479	1,2
3	15	0,5	0,01274	1,3
4	20	1	0,012067	1,4
5	25	1,6	0,011463	1,5
6	32	2,5	0,010888	1,6
7	40	5	0,010365	1,7
8	50	7	0,010105	1,8
9	75	10	0,009892	1,9
10	80	10	0,009186	2,0
11	100	15	0,008774	2,1
12	125	30	0,008032	2,2
13	150	50	0,013101	2,3
14	175	65	0,013479	2,4

Вопросы для самопроверки

1. Каково назначение числа Рейнольдса.
2. В чём измеряется расход жидкости?
3. Как определяется шероховатость трубы?
4. Каков физический смысл гидравлического сопротивления?
5. Как изменяется скорость жидкости от центра к стенкам трубы?

Часть 2. **Обработка экспериментальных данных**

В результате проведения измерений зафиксированы следующие значения скорости ветра, [м/с]: см. табл. 4

Таблица 4

Таблица исходных данных

№	День 1	День 2	День 3	День 4	День 5	День 6	День 7
1	5,45	5,07	4,81	5,96	6,07	5,08	8,78
2	6,54	6,08	5,77	7,15	7,28	6,10	10,54
3	2,73	2,54	2,41	2,98	3,04	2,54	4,39
4	3,27	3,04	2,89	3,58	3,64	3,05	5,27
5	2,85	2,66	2,53	3,10	3,16	2,66	4,51
6	3,41	3,19	3,03	3,72	3,79	3,19	5,41
7	8,66	2,78	2,65	3,22	3,28	2,78	4,63
8	10,39	6,92	3,17	3,86	3,93	3,34	5,56
9	12,46	8,31	3,81	4,64	4,72	4,00	6,67
10	14,96	9,97	4,57	5,56	5,66	4,80	8,00
11	12,58	8,43	3,93	4,76	4,84	4,12	6,79
12	15,10	10,11	4,71	5,71	5,80	4,95	8,14
13	12,70	8,55	4,05	4,88	4,96	4,24	6,91
14	15,24	10,26	4,86	5,85	5,95	5,09	8,29

Требуется рассчитать: ***среднее значение, абсолютные и относительные погрешности измерений, среднее квадратичное отклонение, среднее квадратичное значение, дисперсию, доверительный интервал. И записать результат в общем виде ($x \pm \Delta x$).***

Теоретическая часть

При проведении экспериментальных исследований одной из важных задач является краткое и грамотное описание полученных данных с оценкой

статистической значимости различий и проверкой выдвинутых гипотез. Далее будут рассмотрены основные типы ошибок и базовые принципы обработки и представления результатов измерений.

1.1. Ошибки измерений

В результате измерений экспериментатор получает числовые значения нужной физической величины. При *прямых* измерениях эти значения получаются непосредственно, а при *косвенных* измерениях вначале определяют одну или несколько исходных физических величин, а затем по их значениям вычисляют нужную величину.

При многократном повторении одного и того же измерения получают числовые значения, отличающиеся друг от друга в каком- то диапазоне. Поэтому возникает вопрос об истинном значении изучаемой физической величины, а также о точности, с которой его можно определить по имеющимся данным.

Отклонения результатов измерения $\boldsymbol{x}$ от «истинного» значения x_0 (определение «истинного» значения будет рассмотрено далее) называют ошибками измерения e:

$$e = x - x_0.$$

Ошибки измерений физических величин необходимо проанализировать, попытаться установить их причину и свести их к минимуму.

Ошибки измерений можно разделить на три основные группы:

- систематические;
- случайные (или статистические);
- грубые.

Перечисленные виды ошибок можно проиллюстрировать условной схемой, представленной на рис.3.1. Систематические ошибки приводят к смещению группы полученных значений относительно истинного. Случайные ошибки определяют разброс значений относительно «истинного» значения.

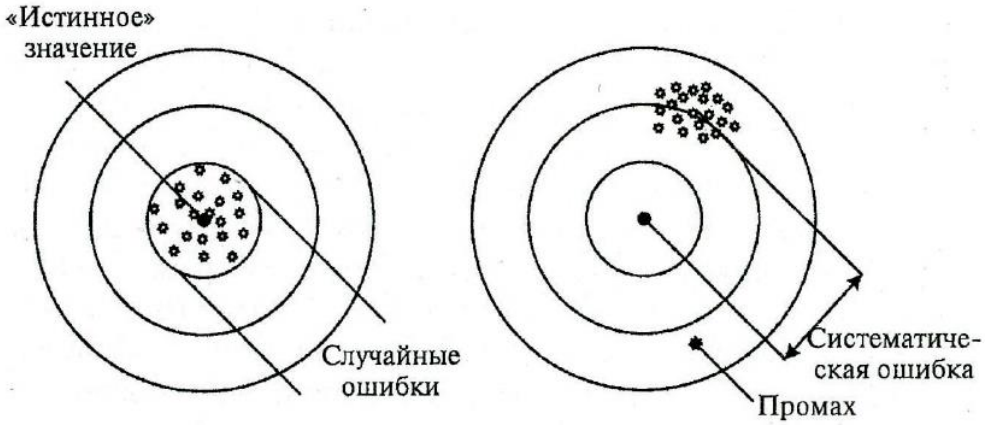


Рис. 3.1. Виды ошибок

Систематические ошибки – это ошибки, которые вызываются факторами, действующими одинаковым образом при многократном повторении одних и тех же измерений. Наглядным примером такой ошибки можно назвать измерение роста группы студентов в обуви – в таком случае полученный результат будет отличаться от истинного на толщину подошвы. Систематические ошибки имеют множество причин, и их обычно трудно обнаружить, поскольку при повторении измерений они, как правило, сохраняют свое значение. Прибор может давать очень малый разброс показаний, но результат будет неверным вследствие наличия систематической ошибки.

Типичными источниками систематических ошибок можно назвать:

- несовершенство используемой измерительной аппаратуры (ошибки линейности, градуировки, калибровки, дрейф нулевой точки и т. п.);
- несовершенство используемого метода измерений;
- плохая настройка измерительной аппаратуры;
- недостаточная стабильность условий опыта;
- влияние окружающей среды;
- постоянные ошибки экспериментатора;
- неучтенные влияния других параметров.

Наличие систематических погрешностей может быть обнаружено путем анализа условий измерения одного и того же значения измеряемой величины разными методами или приборами. Систематические погрешности нельзя уменьшить увеличением числа проводимых измерений. Должны устраняться вызывающие их причины. Общим методом выявления причин систематических погрешностей является калибровка (поверка), которая представляет собой поверку прибора во всем диапазоне измеряемой величины с помощью известного эталона. Следует отметить, что постоянное совершенствование экспериментальной техники во многих случаях позволяет избежать систематических ошибок. Например, в прошлом исследования атомных и молекулярных частиц были сильно затруднены взаимодействием этих частиц с молекулами остаточных газов, но после внедрения безмасляных мембранных и турбомолекулярных насосов проведение опытов в сверхвысоком вакууме позволило почти полностью исключить систематические ошибки такого рода.

Систематическая погрешность может оставаться постоянной или закономерно меняться при повторных измерениях одной и той же физической величины. Примером переменной систематической погрешности может быть погрешность измерения напряжения источника питания, если результат измерения зависит от напряжения. Отличительной особенностью систематических ошибок является то, что при их обнаружении они могут быть почти полностью устранены или учтены введением соответствующей поправки, однако их нахождение является сложной задачей. Источники подобных ошибок всегда стараются

устранить, однако в эксперименте всегда остается вероятность неучтенной систематической ошибки.

Случайные ошибки – это неустранимые флуктуации измеряемых величин на уровне их малых значений, они всегда присутствуют в эксперименте и являются причиной разброса результатов повторных измерений как между собой, так и относительно «истинного» значения измеряемой величины. Случайный характер таких ошибок является постулатом. Значение этой погрешности не может быть определено в каждом эксперименте, поэтому измерения повторяются определенное количество раз, а полученная совокупность данных обрабатывается с помощью методов теории вероятностей и математической статистики. Увеличивая число измерений, можно получить достаточно точную оценку случайной ошибки. В экспериментальной физике случайным ошибкам уделяют наибольшее внимание.

К ошибкам третьего типа относят *грубые ошибки*, или *промахи*, которые возникают вследствие непредвиденного изменения условий эксперимента, низкого качества измерений, поломок прибора, ошибок экспериментатора, механических ударов прибора, неправильной регистрации показаний прибора, отключения источника питания и т. п. Результат, содержащий грубую ошибку, резко отличается от остальных измерений. Такие результаты должны быть исключены из рассмотрения до обработки результатов эксперимента.

Авторами работы [18] предложена следующая трактовка влияния разных видов ошибок:

- систематические ошибки влияют на правильность результата;
- случайные ошибки влияют на точность измерений;
- грубые ошибки дают «выпадающие» из общего диапазона значения, которые следует удалять.

Точность эксперимента, отражающая близость полученных результатов к «истинному» значению искомой величины, тем выше, чем меньше его погрешность. Следует отметить, что истинных значений экспериментально измеряемых величин не бывает. Некоторые авторы говорят о возможности применения термина «истинное значение» только к таким фундаментальным физическим постоянным, как скорость света ($c = (2{,}99792458 \pm 0{,}00000001)\cdot 10^{8}$ м/с), заряд электрона ($e = -1{,}602176565 + 0{,}000000004)\text{-}10^{-19}$ Кл) и другим, которые, вероятно, имеют точные значения, а приводимый разброс связан с ограничением точности измерений [6].

Истинное значение всех остальных экспериментально измеряемых величин может быть определено только как некоторое *математическое ожидание* (среднее значение случайной величины в теории вероятностей).

Истинное значение величины, определяемой в результате эксперимента, всегда остается неизвестным, поэтому и погрешности эксперимента могут быть оценены лишь приближенно.

Отклонение измеренного значения x определяемой величины от истинного ее значения называется погрешностью /-го измерения $Ax_г$ Полная погрешность измерений является суммой указанных составляющих и может быть представлена в абсолютном, относительном или нормированном виде.

Абсолютная погрешность – это разность между результатом эксперимента x и «истинным» значением искомой величины x_0:

$$\Delta x = x - x_0. \tag{3.1}$$

Относительная погрешность выражается в безразмерных величинах и определяется отношением абсолютной погрешности к результату измерения:

$$\Delta x_{\text{отн}} = \frac{x - x_0}{x_0} 100\ \%. \tag{3.2}$$

Приведенной погрешностью называют отношение абсолютной погрешности *x* к нормирующему значению хнорм, выраженному в процентах:

$$\Delta x_{\text{прив}} = \frac{x - x_0}{x_{\text{норм}}} 100\,\%. \tag{3.3}$$

В качестве нормирующего значения используют некоторое постоянное условно принятое значение величины, имеющее размерность измеряемой величины. В качестве нормирующего множителя может выступать, например, верхний предел показаний прибора или абсолютное значение разности верхнего и нижнего пределов шкалы.

Понятие ошибки измерения имеет прямое отношение к таким вопросам, как цель эксперимента, его метод и значимость. Важно планировать и проводить эксперимент так, чтобы точность окончательного результата соответствовала его цели.

В качестве наглядного примера неудачной интерпретации экспериментальных данных по причине ошибочного представления опогрешности эксперимента можно привести «открытие» холодного ядерного синтеза в 1989 г. [10]. Исследователи из университета г. Юта (США) Стенли Понс и Мартин Флейшман объявили, что им удалось осуществить ядерный синтез на установке, состоящей из паладиевых цилиндров, погруженных в сосуд с дейтерием. Ученые установили, что их прибор испускает нейтроны и гамма-лучи, что является свидетельством ядерной, а не химической реакции. Это заявление вызвало огромный интерес в научном мире и прессе. Говорилось о начале новой эры дешевой

и неограниченной энергии для всего человечества. Однако эти утверждения оказались неверными. Наряду с другими экспериментальными погрешностями

Понс и Флейшман пренебрегли простой процедурой оценки ошибок экспериментальных данных. Зафиксированные ими результаты не превышали обычного фона излучения в университете.

1.2. Основы статистической обработки результатов измерений

После получения результатов измерений перед экспериментатором встает задача описания и представления данных эксперимента. При решении большинства задач, связанных с обработкой экспериментальных данных, исследователю приходится обрабатывать результаты, имеющие заведомо вероятностный характер.

Систематические ошибки и промахи должны быть обнаружены и ликвидированы (либо учтены внесением поправок в данные). Оставшиеся необнаруженными систематические ошибки вносят в результаты измерений неизвестный сдвиг относительно истинного значения (чаще всего именно из-за наличия систематических ошибок измерения разных исследователей могут не совпадать). После минимизации систематических ошибок и удаления промахов точность измерений определяется случайными погрешностями. В этом случае к полученным данным применяют методы статистического анализа. Статистическое описание результатов наблюдений, построение и проверка различных математических моделей, использующих понятие вероятности, составляют основное содержание математической статистики, для более глубокого изучения которой существует множество литературных источников [4, 7,13]. В данном разделе будут кратко рассмотрены лишь базовые принципы анализа наиболее распространенных видов экспериментальных данных.

Фундаментальными понятиями статистической теории являются понятия генеральной совокупности и выборки.

Генеральной совокупностью называют полный набор (совокупность) всех возможных значений, которые может принимать случайная величина при бесконечном числе испытаний. Смысл этого понятия заключается в том, что предполагается существование некоторых вполне определенных свойств, неслучайных закономерностей, присугцихданной совокупности. Генеральная совокупность состоит из всех объектов, которые имеют качества и свойства, интересующие исследователя.

Выборка – это конечный набор значений случайной величины, получаемый в ходе наблюдений. Число элементов выборки называется ее объемом.

Выборка называется репрезентативной (представительной), если она достаточно полно характеризует генеральную совокупность. Назначение

статистических методов заключается в том, чтобы по выборке ограниченного объема, т. е. по некоторой части генеральной совокупности, высказать обоснованное суждение о ее свойствах в целом. Подобное суждение может быть сформулировано путем построения эмпирических (выборочных) аналогов вероятностных характеристик исследуемой случайной величины. Целью статистической обработки набора полученных величин является как можно более точное описание характеристик генеральной совокупности по отдельной выборке.

Так, если бы перед исследователем стояла задача определить средний рост людей на Земле, то генеральной совокупностью являлся бы набор значений, соответствующих росту всех живущих на данный момент жителей планеты – от младенцев до стариков. Но так как существует возможность получить сведения только об ограниченном числе людей, то совокупность полученных данных и будет представлять собой выборку, по которой исследователь будет пытаться найти «истинное» значение – математическое ожидание (среднее значение). Для того чтобы выборка была представительной, люди должны быть случайно выбраны из всех человеческих групп, т. е. выборка должна включать в себя представителей всех наций, различных возрастов, представителей разных сословий и культурных слоев, обоих полов и т. п. (пропорционально их доле в составе человечества). Данный пример показывает, что в ряде исследований подбор репрезентативной выборки является отдельной задачей.

Кривая распределения результатов. На практике при наиболее распространенном подходе одна и та же величина измеряется n раз, полученный набор значений величины x является выборкой. Весь диапазон полученных значений можно разделить на несколько интервалов одинаковой ширины и посчитать, сколько раз измеренная величина попадет в каждый интервал. Ширину интервалов можно выбирать произвольно, исходя из удобства расчета. Такое частотное распределение можно представить с помощью гистограммы, пример которой приведен на рис. 3.2.

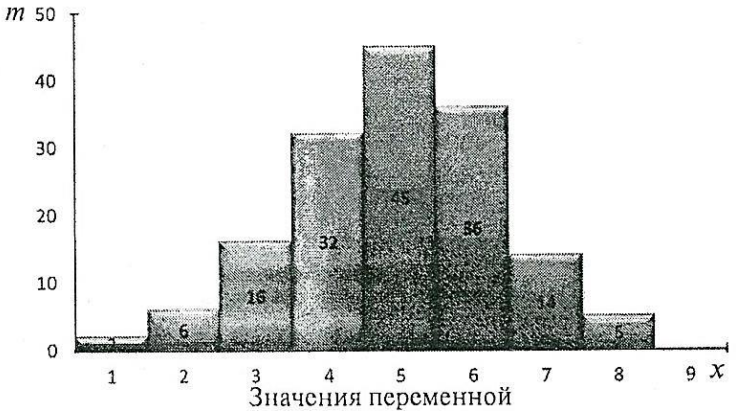


Рис. 3.2, Гистограмма, отражающая распределение переменной x по заданным диапазонам значений; т – количество измерений, попавших в каждый из интервалов

Представленное распределение встречается достаточно часто. Используя это распределение, можно построить функцию распределения непрерывных величин, если устремить количество значений переменной *x* к бесконечности. Ступеньки гистограммы сольются, получится гладкая кривая, которая называется *кривой распределения.*

Для удобства вводят функцию *f(x)*, называемую *плотностью распределения,* смысл которой состоит в том, что произведение *f(x)dx* дает долю полного числа отсчетов *N*, приходящуюся на интервал отх до X + *dx*. Иначе говоря, произведение *f(x)dx* есть вероятность того, что отдельное случайно выбранное значение измеренной величины окажется в интервале от *x* до *x*+ *dx*. Типичная кривая распределения выглядит примерно так, как на рис. 3.3.

По определению *f(x)*удовлетворяет условию:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = 1.$$

Бесконечные пределы интегрирования берут из соображений математического удобства, но сильного противоречия с экспериментальными данными не возникает, так как функция плотности распределения *f(x)* становится очень малой при увеличении разности между измеренным и средним значениями величины.

Если полученная кривая характеризуется тем, что значения измеряемой переменной у большинства объектов близки к их среднему и с равной вероятностью отклоняются от него в большую или меньшую сторону (см. рис. 3.3), то такое распределение называется *нормальным распределением* или распределением Гаусса и представляет собой распределение вероятностей, которое в одномерном случае задается функцией плотности распределения вероятности вида

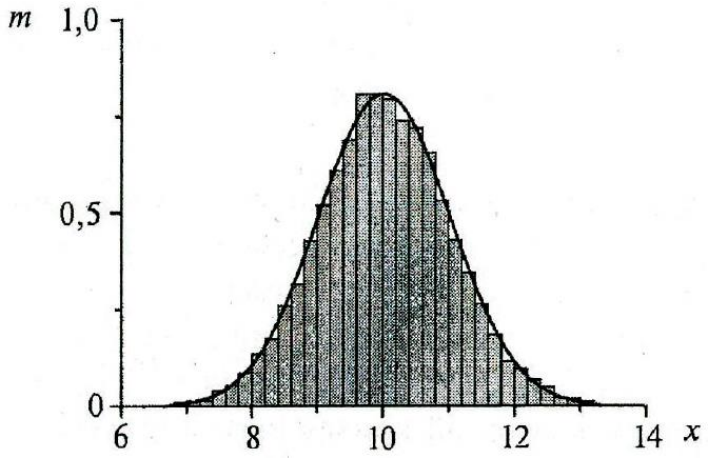


Рис. 3.3. Гистограмма распределения экспериментальных данных с наложением кривой нормального распределения (среднее значение 10, стандартное отклонение 1)

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2},$$

где x – случайное значение величины;

x_0 – математическое ожидание (среднее значение случайной величины, определяющее центр распределения) и медиана распределения; параметр;

σ – стандартное отклонение распределения.

Нормальное распределение часто встречается в практике измерений – ему подчиняются физические величины, случайность которых обусловлена действием множества независимых (или слабо зависимых) малых аддитивных факторов, результат воздействия каждого из которых мал по сравнению с их суммарным воздействием.

1.3. Основы представления результатов измерений

Рассмотрим методы обработки наиболее простых и распространенных в экспериментальной физике данных.

Здесь и далее примем, что распределение измеренных значений близко к нормальному, что бывает достаточно часто. В таком случае лучшими характеристиками совокупности для описания результатов эксперимента будут среднее значение и стандартное отклонение [4].

Средним значением по совокупности является величина

$$\mu=\frac{\Sigma X}{N},$$

где X– значение параметра; N– количество измерений.

Среднее значение, или математическое ожидание, принимается равным «истинному» значению измеряемой величины. Если сравнивать результаты нескольких серий измерений одной и той же физической величины, то наиболее точное значение будет получено в той серии, в которой кривая распределения будет самой узкой. В примере, представленном на рис. 3.4, кривые соответствуют среднему значению величины 10, полученному при различной точности измерений: кривая *1* соответствует более точным измерениям, кривая *3* – менее точным.

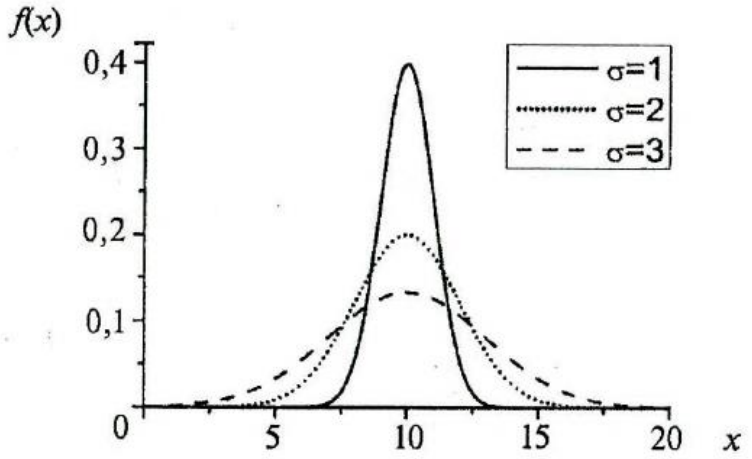


Рис. 3.4. Распределение плотности вероятности, соответствующее среднему значению 10 и стандартным отклонениям 1, 2 и 3

Чем уже кривая распределения, тем меньше ошибка отдельного измерения, поэтому распределение вероятностей характеризуют не только средним значением, но и шириной кривой распределения.

Для этого рассчитывают средний квадрат отклонения от среднего, представляющий собой математическое ожидание квадрата ошибки σ^2, которое называют *дисперсией* и рассчитывают следующим образом:

$$\sigma^2 = \frac{\Sigma(X-\mu)^2}{N}.$$

Как видно из формулы, дисперсия измеряется в единицах, равных квадрату единицы измерения соответствующей величины. Например, дисперсия измеряемого в сантиметрах роста сама измеряется в квадратных сантиметрах. Это довольно неудобно. Поэтому чаще используют квадратный корень из дисперсии – *стандартное отклонение,* или *среднее квадратичное отклонение:*

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma(X-\mu)^2}{N}}.$$

Стандартное отклонение измеряется в тех же единицах, что и исходные данные.

Нормальное распределение полностью определяется средним значением ц и стандартным отклонением а. Когда значение некой величины отклоняется от среднего под действием множества слабых независимых друг от друга факторов, то часто распределение характеризуется тем, что примерно 68 % экспериментальных значений отличается от среднего не более чем на одно стандартное отклонение и примерно 95 % – на два стандартных отклонения. Подобные показатели характеризуют нормальное распределение и встречаются очень часто.

Если же значения переменной распределены несимметрично относительно среднего, то использовать при описании данных значения среднего и стандартного отклонений неверно. Асимметрично распределенную совокупность описывают с помощью медианы и процентилей.

Медиана – это значение, которое делит распределение пополам: половина значений больше медианы, половина – меньше (точнее – не больше). Для характеристики разброса параметров в таком случае используют понятия процентилей. Обычно для: описания используют 25-ный и 75-ный процентили, соответствующие значениям переменной, не выше которых оказались 25 % и 75 % результатов измерений.

Следует отметить, что генеральная совокупность обычно бесконечно велика, поэтому теоретическое распределение вероятностей никогда не реализуется. На практике всегда есть конечное число измерений –- выборка объемом *n*.

Эти значения представляют собой случайную выборку величин из генеральной совокупности. По результатам выборки мы должны как можно точнее узнать характеристики генеральной совокупности. Поэтому нужно определить соответствующие величины выборки, причем следует постоянно помнить, что величины в выборке случайным образом «извлечены» из генеральной совокупности. Имея дело с выборкой, невозможно узнать точные значения среднего и стандартного отклонений, но можно их оценить.

Оценка среднего, вычисленная по выборке, называется *выборочным средним.* Выборочное среднее обозначают *x* и вычисляют по формуле

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

где *n* – объем выборки.

Оценка стандартного отклонения называется выборочным стандартным отклонением s и определяется следующим образом:

$$s=\sqrt{\frac{\sum(x-\overline{x})^2}{n-1}}. \tag{3.6}$$

Формула (3.6) отличается от формулы для стандартного отклонения по совокупности. Во-первых, среднее ц заменяется его выборочной оценкой – $\overline{x}$. Во-вторых, в знаменателе из числа членов выборки вычитается единица. Строгое обоснование последнего представлено в ряде работ, его суть состоит в том, что разброс значений в пределах выборки никогда не бывает столь большим, как во всей совокупности, и деление не на *n,* а на *n* – 1 компенсирует возникающее занижение оценки стандартного отклонения. Поэтому если известно, что выборка, скорее всего, принадлежит к совокупности с нормальным распределением, лучше всего использовать выборочное среднее и выборочное стандартное отклонения.

Если есть основания полагать, что распределение в совокупности отличается от нормального, следует использовать медиану, 25-й и 75-й процентили.

Задачей эксперимента является нахождение истинного значения *X* физической величины, которое может быть получено, только если мы располагаем генеральной совокупностью всех значений искомой величины x. Однако количество наблюдений в выборке конечно, и в опыте находят некоторое приближенное к *X* значение $\overline{x}$, которое называют оценкой истинного значения.

После проведенного анализа выборки результат измерения обычно записывается в виде выражения

$$\overline{x}\pm\Delta x,$$

где Δx – погрешность измерения.

Погрешность измерений принято указывать с определенной степенью достоверности, задаваемой *доверительным интервалом.* Доверительным называют интервал, в который истинное значение *X* попадает с заданной вероятностью α.

Поскольку гауссово распределение симметрично относительно центра распределения x_0, вероятность того, что случайное значение величины x, распределенной по нормальному закону, попадет в заданный интервал $(x_0-\Delta x<x<x_0+\Delta x)$:

$$\propto(x_0-\Delta x<x<x_0+\Delta x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{x_0-\Delta x}^{x_0+\Delta x}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-x_0}{\sigma}\right)^2\right)dx.$$

Вводя стандартизированную переменную

$$u = \frac{x - x_0}{\sigma},$$

можно записать:

$$\alpha(-t < u < t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-t}^{t} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du,$$

где t – коэффициенты, определяющие ширину интервала в единицах параметра нормального распределения σ: $\Delta x = t_\alpha \sigma.$

Вероятности а попадания u в интервал $(-t_\alpha, t_\alpha)$ можно найти, вычислив интеграл численно для различных значений ширины интервала t_α . И наоборот, каждой заранее заданной вероятности α будет соответствовать свое конкретное значение коэффициента t_α зависящее от выбора доверительной вероятности α. Если значения коэффициентов найдены, то от переменной u можно вернуться к переменной x. Тогда из неравенства $-t < u < t$ получим $x_0 - t_\alpha \sigma < x < x_0 - t_\alpha \sigma$ с вероятностью α.

Можно показать, что если значениях распределены по нормальному закону, то и рассчитываемые по ним средние значения x также распределены по нормальному закону с центром в точке x_0 и шириной распределения

$$\sigma = \frac{s}{\sqrt{n}}, \tag{3.7}$$

где n – объем выборки.

Данная величина называется стандартной ошибкой, а выражение для ее вычисления содержит только экспериментально измеряемые величины.

Если средние значения x распределены по нормальному закону, то задача нахождения доверительного интервала сводится к нахождению доверительного интервала $(-t_\alpha, t_\alpha)$ для стандартизованной переменной u и переходу к доверительному интервалу переменной x. В результате получим, что границы интервала, в который случайное значение x попадает с вероятностью α, определяется неравенством

$$x_0 - t_\alpha \sigma < x < x_0 + t_\alpha \sigma, \tag{3.8}$$

где t – коэффициенты Стьюдента, значения которых, соответствующие различным объемам выборок и доверительным вероятностям, приведены в табл. 3.1. 99,73

Таблица 3.1

Значения коэффициентов Стьюдента t
для различных значений доверительного уровня a

п – 1	α=68,3%	α = 95%	α = 99%	α = 99,73 %
2	1,32	4,70	9,9	19,2
3	1,20	3,18	5.8	9,2
4	1,15	2,78	4,6	6,6
5	1,11	2,57	4,0	5,5
6	1,09	2,45	3,7	4,9
7	1,08	2,37	3,5	4,5
8	1,07	2,31	3,4	4,3
9	1,06	2,26	3,2	4,1
10	1,05	2,23	3,2	4,0
15	1,03	2,13	3,0	3,6
20	1,03	2,09	2,8	3,4
30	1,02	2,04	2,8	3,3
50	1,01	2,01	2,7	3,2
100	1,00	1,98	2,6	3,1
200	1,00	1,97	2,6	3,0

Неравенство (3.8) принято записывать в виде символического равенства:

$$X = \bar{x} \pm \Delta x,$$

где $\Delta x = t_\alpha \sigma = t_\alpha \frac{s}{\sqrt{n}}$ – случайная доверительная погрешность результата измерения.

Таким образом, при проведении прямого измерения некоторой величины, подчиняющейся закону нормального распределения, процедуру обработки результатов измерений можно кратко записать следующим образом:

1. провести многократные измерения при стандартизированных условиях и записать данные;
2. рассчитать среднее значение величины по формуле (3.5);
3. вычислить выборочное стандартное отклонение по формуле (3.6);
4. вычислить среднеквадратичную ошибку среднего;
5. задав требуемый уровень доверительной вероятности, определить коэффициент Стьюдента (см. табл. 3.1) и границы доверительного интервала по формулам (3.7) и (3.8);
6. округлив соответствующие результаты, записать результат в виде $X = \bar{x} \pm \Delta x$ при доверительной вероятности α.

1.4. Запись и округление результата измерения

Погрешность результата рассчитывается по случайной выборке и сама содержит погрешность. Новая выборка даст новую погрешность, отличную от первой. Поэтому принято считать, что объективную информацию о величине погрешности несут лишь одна-две значащие цифры в ее численном выражении [10]. Остальные значащие цифры можно считать случайными. Результат измерения также содержит лишь ограниченное число значащих цифр, несущих информацию о величине этого результата. В связи с этим числовые значения результата и погрешности должны быть округлены. При округлении используют следующие правила.

1. Предварительно результат и погрешность записывают в нормальном виде: общий показатель степени выносят за скобку или заменяют соответствующей приставкой: микро, милли, кило, мега и др. Например,

$$x = 0{,}22 \pm 0{,}03 \text{ м} = (22 \pm 3)\ 10^{-2} \text{ м} = 22 \pm 3 \text{ см}.$$

2. Если результат измерения является окончательным и не будет использован в вычислениях других величин, то доверительную погрешность Ах округляют до первой значащей цифры, если она равна или больше 2, или до двух значащих цифр, если первая равна 1.

Если результат будет в дальнейшем использован в вычислениях, то во избежание накопления погрешностей за счет округлений погрешность округляют до двух значащих цифр при любой первой. При промежуточных вычислениях величин, из которых впоследствии будет извлекаться квадратный корень, следует сохранять не менее четырех значащих цифр.

3. Среднее значение x округляют до того разряда, которым оканчивается округленная погрешность Δx. Если погрешность округляется до двух зачахших цифр, но вторая из них равна нулю, то этот нуль сохраняется, а в соответствующем этому нулю разряде результата записывается получающаяся там значащая цифра:

$$x = 3{,}48 \pm 0{,}10.$$

1.5. Регрессионный анализ

Важной задачей является нахождение функциональных зависимостей между физическими величинами. Пусть, например, в эксперименте получают пары значений $((x_n, y_n), n = 1, 2, 3, \ldots)$, которые образуют выборку мощностью *n* из двумерной генеральной совокупности. Для построения графиков по этим зависимостям используется метод наименьших квадратов Гаусса, или *регрессионный анализ.* Например, в линейном случае необходимо правильно провести прямую

линию через набор точек (x_n, y_n). Наилучшей прямой $y = ax + b$ является такая, на которой достигается минимум суммы квадратов отклонений $F(a, b, n)$:

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2 = F(a,b,n) \to \min.$$

Условие минимума означает

$$\frac{\partial F}{\partial a} = 0, \quad \frac{\partial F}{\partial b} = 0,$$

откуда следует система уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(x_i y_i - a x^2{}_i - b x_i\right) = 0;$$

$$\sum_{i=1}^{n}(y_i - a x_i - b) = 0,$$

которая позволяет найти значения *a, b* и построить искомую прямую.

Вопросы для самопроверки

1. Перечислите основные виды ошибок измерений.
2. Чем обусловлены ошибки измерений?
3. Назовите основные параметры распределений.
4. В чем состоят основные отличия нормального распределения?
5. Что такое стандартное значение?
6. Что такое стандартное отклонение?
7. Что такое дисперсия?
8. Что такое корреляция?

……

1. Ахутин А. В. История принципов физического эксперимента от античности до XVII века / А. В. Ахутин. – М.: Наука, 1976. – 292 с.
2. Бекряев В. И. Основы теории эксперимента : учеб. пособие / В. И. Бекряев. - СПб.: Изд. РГТМУ, 2001. - 266 с.

3. Величко Е. II. Биомолекулярная электроника. Введение : учеб. пособие / Б. Н. Величко, О. К). Цыбин. – СПб. : Изд-во Политехи, ун-та, 2012.- 260 с.
4. Бланд С. Медико-биологическая статистика: [пер. с англ.] / С. Гланц. – М.: Практика, 1998. – 459 с.
5. ГОСТ 8.417–2002. Государственная система обеспечения единства измерений. Единицы величин. – 2002. URL: http://protect.gost.ru/ document. aspx?control=7&id= 129858).
6. Князев Б. А, Начала обработки экспериментальных данных / Б. А. Князев, В. С. Черкасский ; Новосибирск. - 1996. - 93 с.
7. Красовский Г. И. Планирование эксперимента / Г, И. Красовский, Г. Ф. Филаретов. – Минск : Изд-во БГУ, 1982. ■- 302 с.
8. Кунде Х. И. Методы физических измерений : [пер. с нем.] / Х. И. Купце. - М. : Мир, 1989. - 216 с.
9. Лиисон Г. BejmKHC эксперименты в физике: [пер. с англ.] / Г. Липсон; под ред. В. И. Рыдника. – М. : Вузовская книга, 2011, – 196 с.
10. Лямкин А. И. Экспериментальные методы исследований. Курс лекций / А. И. Лямкин. - Красноярск, 2007. – 434 с.
11. Международный словарь по метрологии: основные и общие понятия и соответствующие термины. International vocabulary of metrology – Basic and general concepts and associated terms (VIM): [пер. с англ. и фр.]. – 2-е изд., испр. / НПО «Профессионал». – СПб., 2010. – 82 с. URL: http://mathscinet. ru/slaev/records/images/SlaevChun02.pdf.
12. Постановление Правительства РФ «Об утверждении положения о единицах величин, допускаемых к применению в Российской Федерации» от 31 октября 2009 г. № 879. URL: http://www.fundmetrology.ru/ depository/01_пра/po879.pdf.
13. Рыков В. В. Математическая статистика и планирование эксперимента : конспект лекций / В. В. Рыков, В. Ю. Иткин; РГУ нефти и газа им. И. М. Губкина. - М., 2008. - 210 с.
14. Тригг Дж. Решающие эксперименты в современной физике / Дж. Тригг. – М.: Мир, 1974. – 160 с.
15. Т]ршТДж. Физика XX века: ключевые эксперименты: [пер. с англ.] / Дж. Тригг. – М.: Мир, 1978. – 376 с.
16. Шипунова О. Д. История и философия науки. Философские проблемы естествознания : учеб. пособие / О. Д. Шипунова. – СПб.: Изд-во Политехи, ун-та, 2010. – 206 с.
17. Gratzer G. Math Into LaTeX. 2000.

18. Hughes I.G., Hase T.P.A. Measurements and their uncertainties. A practical guide to modern error analysis. - New York: Oxford University press, 2010. – 136 p.
19. Knuth D. E. The TeXbook. - 1984. - 531 p.
20. Lamport L. LaTeX: A Document Preparation System. – 1994.
21. LATEX 2 for authors., LATEX3 Project Team. – 2001.
22. Resolution 1 of the 24th meeting of the CGPM. – 2011. URL: http://www.bipm.org/en/CGPM/db/24/1/,
23. Samuel A. L. First Grage TeX. A Beginner's TeX Manual. Stanford Department of Computer Science. – Report, 1983.
24. Tantau T., Wright J., Miletic V. The beamer class. User Guide for version 3.33.- 2013.
25. The International Technology Roadmap for Semiconductors: 2010 Update, URL: http://www.itrs.net/LINKS/2010ITRS/2010Update/ ToPost/2010_Update_Overview.pdf.
26. Willkins D. R. Getting Started with Plain TeX, – 1994. – 40 p. URL: http://www.ntg.nl/doc/wilkins/pllong.pdf.