Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Л. Е. КОНДРАТЬЕВА

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Учебное пособие

ВлГУ
ИЗДАТЕЛЬСТВО

УДК 519.61:624.04
ББК 22.193+38.112
К64

Рецензенты:
Кандидат технических наук
доцент кафедры строительных конструкций
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
В. А. Репин

Зав. отделом технического сопровождения пользователей САПР
ООО «ЕВРОСОФТ»
Ю. В. Панасенко

Издается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Кондратьева, Л. Е.

К64 Численные методы решения инженерно-технических задач в строительстве : учеб. пособие / Л. Е. Кондратьева ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2018. – 159 с. – ISBN 978-5-9984-1012-3.

Рассмотрены основы метода конечных элементов, его реализация в компьютерной программе расчетов конструкций STARK ES (расчеты статически определимых стержневых систем).

Предназначено для магистрантов направления подготовки 08.04.01 «Строительство» очной и заочной форм обучения.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС ВО.

Ил. 254. Табл. 3. Библиогр.: 20 назв.

УДК 519.61:624.04
ББК 22.193+38.112

ISBN 978-5-9984-1012-3 © ВлГУ, 2018

ВВЕДЕНИЕ

Метод конечных элементов (МКЭ) – численный метод решения дифференциальных уравнений, широко использующийся в различных областях техники (ракето-, самолето- и кораблестроение), строительстве и др.

Наиболее распространенные программы расчета конструкций на основе МКЭ в настоящее время – COSMOS, ЛИРА, STARK ES (для расчета строительных конструкций).

В предлагаемом учебном пособии рассматриваются основы метода конечных элементов и его реализация в компьютерной программе расчетов конструкций STARK ES (возможности программы, интерфейс программы, статические расчеты статически определимых плоских и пространственных стержневых систем). Пособие предназначено для использования при освоении курса «Численные методы решения инженерно-технических задач в строительстве».

ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Основная идея метода конечных элементов

Основная идея МКЭ состоит в том, что любую *непрерывную* в некоторой области величину (например, внутреннее усилие в фундаментной балке, перемещение в плите перекрытия и т. п.) можно аппроксимировать *дискретной* моделью, которая создается из множества *кусочно-непрерывных* функций, определенных в конечном числе подобластей (элементов). Обычно такими функциями являются полиномы – линейные, квадратичные, кубические и др. Кусочно-непрерывные функции строятся по значениям непрерывной величины в точках соединения элементов (в узлах). Таким образом, чтобы определить неизвестную непрерывную величину, нужно найти ее значения в узлах.

Основные этапы создания дискретной модели неизвестной величины следующие.

1. В исследуемой области задается конечное число точек (узлов).

2. Значения непрерывной величины в каждом узле считаются неизвестными.

3. Исследуемая область разбивается на конечное число подобластей (элементов), имеющих общие точки (узлы).

4. Непрерывная величина в каждом элементе аппроксимируется полиномом, который определяется по узловым значениям этой величины: для каждого элемента формируется свой полином, но его коэффициенты подбираются так, чтобы сохранялась непрерывность величины на каждой границе элемента.

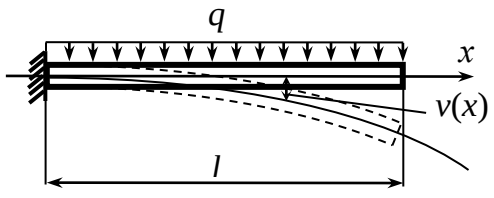


Рис. 1

Основную идею МКЭ иллюстрирует следующий пример.

Рассмотрим прогибы v в стержне от действия участка равномерно распределенной нагрузки интенсивностью q (рис. 1).

Непрерывная величина – функция прогиба $v(x)$. Ее область определения (исследуемая область) – стержень длиной l.

Зададим пять точек (узлов). Фиксируем прогибы в каждом узле: v_1, v_2, …, v_5 (рис. 2).

Аппроксимирующая функция – линейная, так как на каждый элемент приходится по два узла. Результат аппроксимации для всего стержня – четыре линейные функции, каждая из которых определена на отдельном элементе (рис. 3).

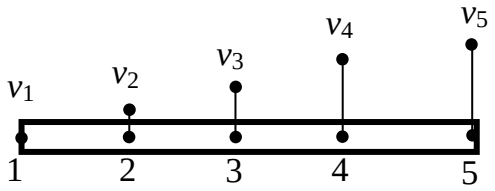


Рис. 2

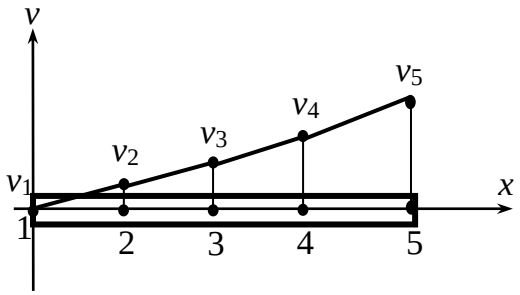
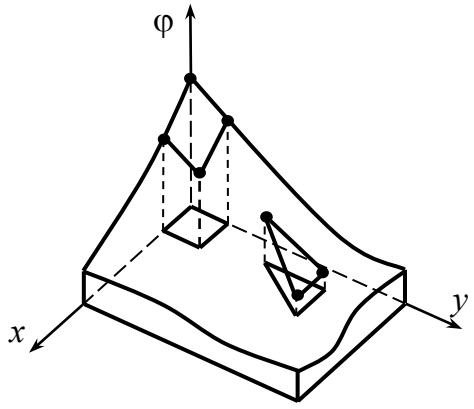


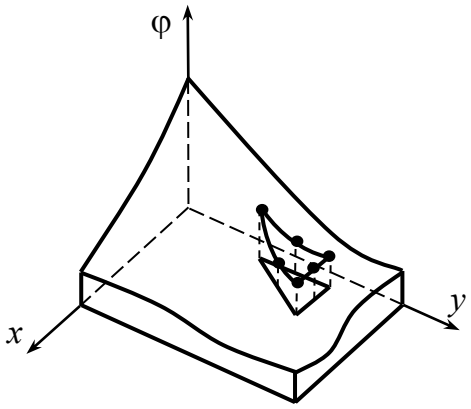
Рис. 3

Неизвестные узловые значения $v(x)$ должны быть отрегулированы таким образом, чтобы приближение к истинной функции $v(x)$ было наилучшим. Это достигается минимизацией некоторой величины, связанной с физической сущностью задачи. Процесс минимизации сводится к решению систем линейных алгебраических уравнений относительно узловых значений $v(x)$.

Если неизвестная непрерывная величина φ определена в двумерной или трехмерной области, аппроксимирующими являются функции от x и y или от x, y и z соответственно. Двумерная область разбивается обычно на элементы в форме треугольника или четырехугольника, трехмерная область – на элементы в форме тетраэдра или параллелепипеда. Аппроксимирующие функции изображаются в таком случае плоскими (рис. 4, *а*) или криволинейными (рис. 4, *б*) поверхностями (двумерная область).



а)



б)

Рис. 4

Таким образом, основные преимущества МКЭ следующие:

1) возможность исследовать тела (конструкции), составленные из нескольких материалов (так как свойства материалов соседних элементов могут быть разными);

2) возможность исследовать области (конструкции) любой формы (так как криволинейная область аппроксимируется прямолинейными элементами или точно описывается криволинейными элементами);

3) возможность учитывать различные граничные условия: с разрывной нагрузкой, смешанные;

4) возможность составлять общие методики и программы для решения различных по физике задач одного определенного вида (например, программа осесимметричной задачи о распространении тепла может быть использована для решения любой задачи данного вида: о распределении напряжений в осесимметричной конструкции и т. п.).

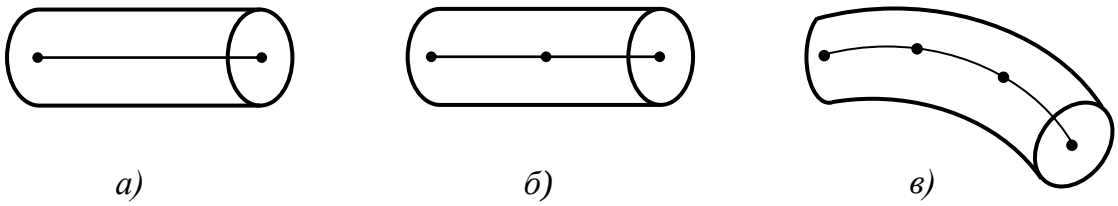
Дискретизация области

Разбиение области на подобласти – первый этап в решении задачи методом конечных элементов, требует инженерных навыков и опыта. Неудачное разбиение приведет к ошибочным результатам решения задачи.

При разбиении области необходимо уже иметь некоторые общие представления о результатах решения задачи, чтобы уменьшить размер элементов в тех частях области, где ожидаемый результат может резко меняться, и увеличить размеры элементов в тех частях, где ожидаемый результат близок к постоянному. Вообще, при разбиении области всегда идет поиск «золотой середины»: с одной стороны, элементы должны быть достаточно малыми, чтобы получить результаты необходимой точности; с другой стороны, чем крупнее элементы, тем меньше вычислительной работы.

Одномерные элементы

Одномерный элемент – это стержневой элемент. Он используется при расчете стержневых конструкций (фермы, балки, рамы и т. д.). Одномерные элементы могут быть с двумя (рис. 5, *а*), тремя (квадратичные) (рис. 5, *б*), четырьмя (кубические) (рис. 5, *в*) узлами.



а) *б)* *в)*

Рис. 5

Двумерные элементы

Основные виды двумерных элементов – треугольные и четырехугольные (рис. 6).

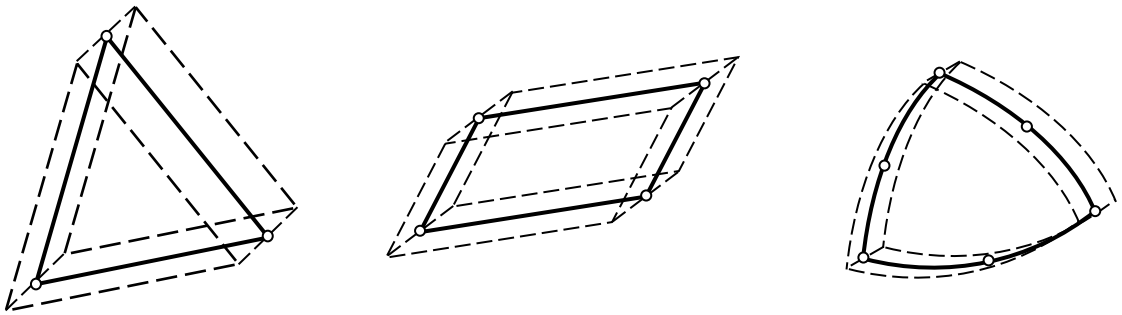
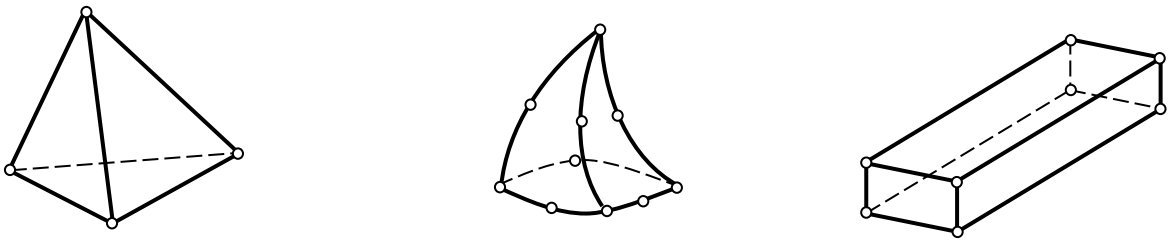


Рис. 6

Толщина элементов может быть постоянной или является функцией координат. Такие элементы используются при расчете различных пластин (плиты перекрытий, стеновые панели и т. п.).

Трехмерные элементы

Наиболее часто используются трехмерные элементы в виде тетраэдра или параллелепипеда (рис. 7).



а) *б)* *в)*

Рис. 7

При рассмотрении конструкций специфической формы (например, осесимметричных) используются специальные элементы (рис. 8).

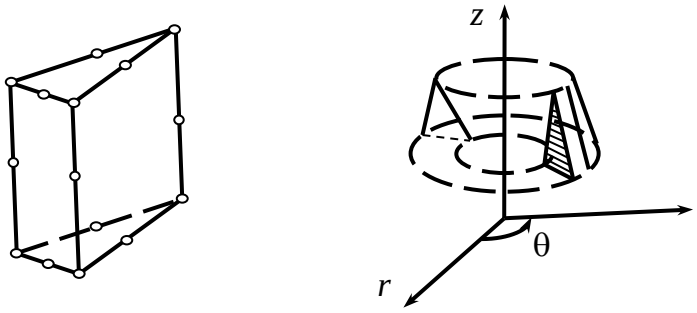
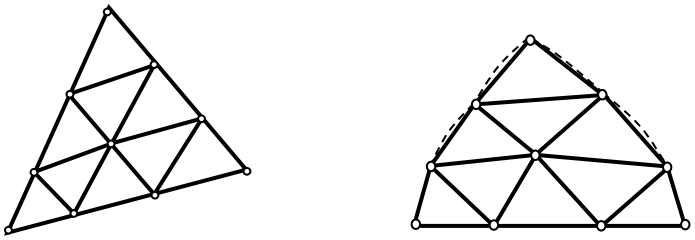


Рис. 8

Разбиение области на элементы

Разбиение одномерной конструкции на элементы не представляет трудности. При разбиении двумерной области чаще используются треугольные элементы. Сначала область делится на треугольные и четырехугольные подобласти (зоны): границы между зонами определяются изменением геометрии области, нагрузки, свойств материалов. Затем зоны разбиваются на элементы. Легче разбить треугольную зону, выбрав определенное количество узлов вдоль каждой стороны зоны и соединив соответствующие узлы линиями (рис. 9). Если на каждой стороне такой зоны выбрано по n узлов, число полученных треугольных элементов составляет $(n-1)^2$. Четырехугольные зоны обычно разбиваются путем соединения узлов на противоположных сторонах (рис. 10, *а*). Если число узлов на двух противоположных сторонах такой зоны одинаково и равно n и m для двух пар противоположных сторон, число прямоугольных элементов этой зоны составляет $2(n-1)(m-1)$.



а) *б)*

Рис. 9

Четырехугольные элементы в дальнейшем можно разбивать на треугольные путем проведения более короткой диагонали в четырехугольнике (рис. 10, *б*). Разбиение такой диагональю дает элементы, наиболее близкие к равностороннему треугольнику, что ведет к более точным результатам.

а) *б)*

Рис. 10

Равномерное разбиение, когда все элементы имеют одинаковые размеры, используется редко. Обычно из-за ожидаемой концентрации напряжений размеры элементов варьируются, и эта возможность – важное достоинство метода конечных элементов. Наиболее простой способ изменения размеров элементов – применение четырехугольных зон с различным числом узлов на противоположных сторонах (рис. 11).

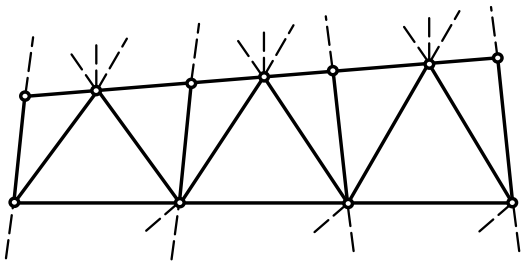


Рис. 11

Нумерация узлов

Порядок нумерации узлов влияет на эффективность вычислений методом конечных элементов. Реализация МКЭ приводит к решению системы алгебраических уравнений, большое число коэффициентов которой нулевые. В матрице коэффициентов этой системы все ненулевые коэффициенты заключены между линиями, параллельными главной диагонали матрицы (рис. 12).

Расстояние между главной диагональю и одной из этих линий называется шириной полосы матрицы (см. рис. 12) и является показателем эффективности вычислений: чем ширина полосы у́же, тем меньше размер требуемой машинной памяти и время вычислений. Ширина полосы определяется согласно порядку нумерации узлов:

$$B = (R + 1)Q,$$

где B – ширина полосы; R – наибольшая для исследуемой области разница между номерами узлов в элементе; Q – число неизвестных в каждом узле. Таким образом, при нумерации узлов необходимо стремиться к тому, чтобы разница между номерами узлов в элементах об-

ласти была как можно меньше. На примере простой прямоугольной области это проиллюстрировано рис. 13.

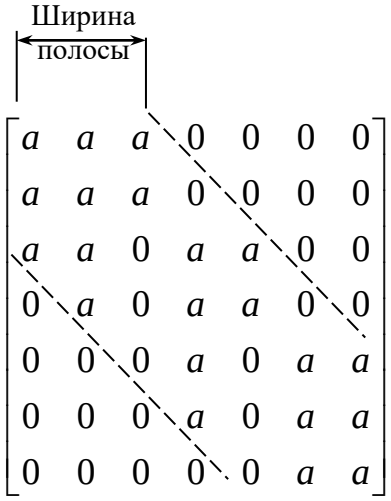
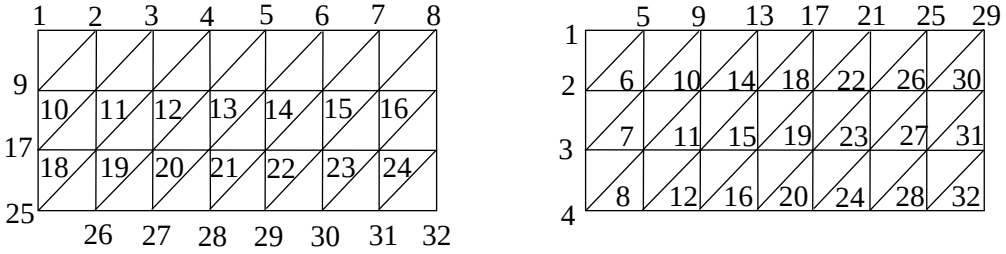


Рис. 12



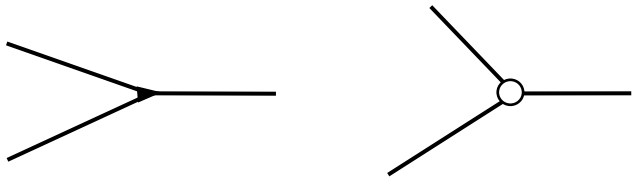
а) *б)*

Рис. 13

Вариант на рис. 13, *а* менее эффективен: наибольшая разница между номерами узлов в элементе равна 8. Вариант на рис. 13, *б* более эффективен: соответствующая разница равна 4.

Расчет стержневых систем. Постановка задачи

Рассмотрим пространственную стержневую систему. Материал стержней идеально упругий. Система линейно-деформируемая. Стержневая система разбивается на конечное число элементов, соединенных с соседними элементами в узлах. Соединение в узле может быть жестким (рис. 14, *а* – для плоской стержневой системы) или шарнирным (рис. 14, *б* – для плоской стержневой системы).



а) *б)*

Рис. 14

Жесткий узел обеспечивает равенство всех перемещений (и линейных перемещений, и углов поворота) концевых сечений элементов, примыкающих к узлу. Шарнирный узел – равенство только линейных перемещений концов элементов.

За неизвестные принимаются перемещения узлов стержневой системы.

Матрица жесткости ферменного элемента

Рассмотрим отдельный конечный элемент с шарнирными узлами *i*, *j* (рис. 15). Такой элемент называется ферменным. Свяжем с ним систему координат *xy* (см. рис. 15). Такая система координат, привязанная к конкретному конечному элементу, называется *местной*.

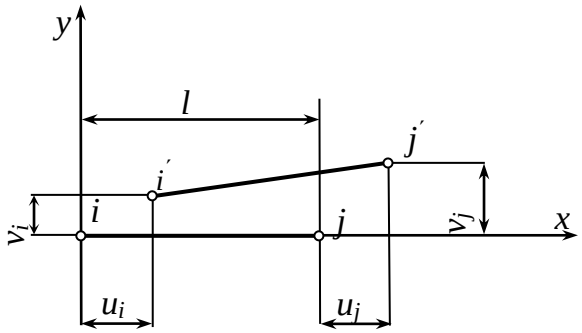


Рис. 15

Под действием внешних нагрузок стержневая система деформируется, в том числе деформируется рассматриваемый элемент. Его узлы перемещаются в новые положения i', j' (см. рис. 15). Матрицы-векторы перемещений узлов i и j соответственно следующие:

$$q_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \end{bmatrix},\ q_j = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Матрица-вектор перемещений узлов элемента

$$q = \begin{bmatrix} q_i \\ q_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Рассмотрим усилия, действующие на элемент. Это внутренние усилия, заменяющие действие остальной части стержневой системы на элемент (рис. 16).

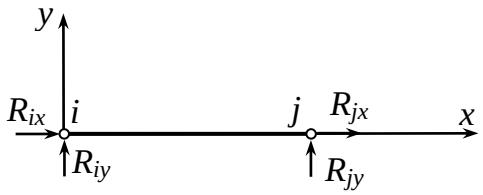


Рис. 16

Они образуют матрицы-векторы внутренних усилий для узлов i и j

$$R_i = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \end{bmatrix},\ R_j = \begin{bmatrix} R_{jx} \\ R_{jy} \end{bmatrix}.$$

Матрица-вектор внутренних усилий для элемента

$$R = \begin{bmatrix} R_i \\ R_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \end{bmatrix}.$$

Если нагрузка на такой прямолинейный элемент приложена только в узлах, $R_{iy} = R_{jy} = 0$. Действительно, из условий равновесия элемента

$$\sum M_i = 0 \rightarrow R_{jy} l = 0 \rightarrow R_{jy} = 0,$$

$$\sum y = 0 \rightarrow R_{iy} + R_{jy} = 0 \rightarrow R_{iy} = 0,$$

$$\sum x = 0 \rightarrow R_{ix} + R_{jx} = 0 \rightarrow R_{jx} = -R_{ix} = R_x.$$

Это означает, что продольные усилия одинаковы по значению и противонаправлены. На рис. 17 представлена соответствующая картина с растягивающими усилиями.

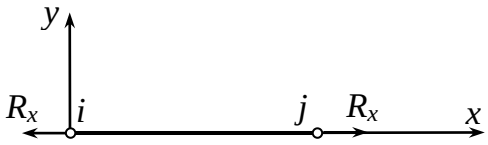


Рис. 17

Удлинение элемента $\Delta l = u_j - u_i$. Тогда

$$R_x = EA\frac{\Delta l}{l} = \frac{EA}{l}\left(u_j - u_i\right), \tag{1}$$

где E – модуль Юнга материала; A – площадь поперечного сечения элемента.

В матричной форме выражение (1) записывается следующим образом:

$$R = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} q,$$

$$\begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Обозначим

$$\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = K_M. \tag{2}$$

Такая матрица называется матрицей жесткости стержневого элемента в местной системе координат.

Окончательно

$$R = K_M q. \tag{3}$$

Матрица жесткости балочного элемента

Рассмотрим отдельный конечный элемент с жесткими узлами *i, j* (рис. 18). Такой элемент называется балочным. В результате деформации стержневой системы под действием внешних нагрузок узлы рассматриваемого элемента переместятся в новые положения *i′*, *j′*. Кроме того, концевые сечения повернутся (см. рис. 18). Векторы перемещений узлов следующие:

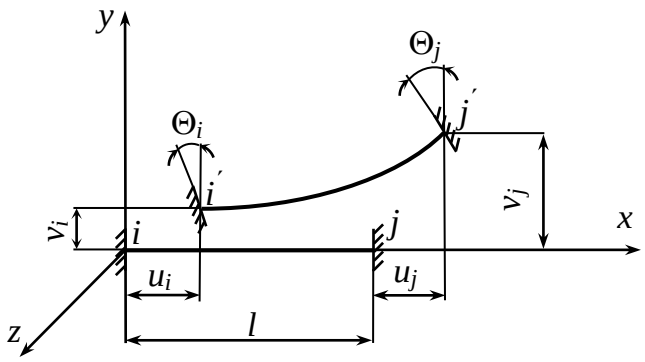


Рис. 18

$$q_i = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \Theta_i \end{bmatrix},\ q_j = \begin{bmatrix} u_j \\ v_j \\ \Theta_j \end{bmatrix},$$

вектор узловых перемещений элемента

$$q = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \Theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \Theta_j \end{bmatrix}.$$

Усилия, действующие на элемент, показаны на рис. 19.

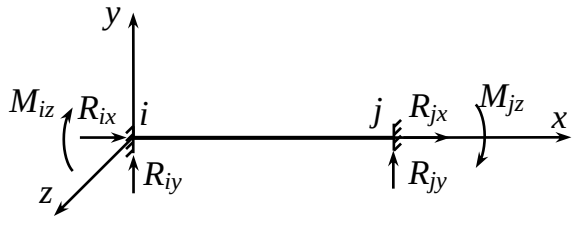


Рис. 19

Векторы внутренних усилий для узлов i, j следующие:

$$R_i = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ M_{iz} \end{bmatrix}, \; R_j = \begin{bmatrix} R_{jx} \\ R_{jy} \\ M_{jz} \end{bmatrix},$$

для элемента

$$R = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ M_{iz} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \\ M_{jz} \end{bmatrix}.$$

Матрицу жесткости K_M балочного элемента получим следующим образом. Отдельно рассмотрим перемещения узлов по осям x, y, повороты узловых сечений относительно оси z для каждого узла (рис. 20).

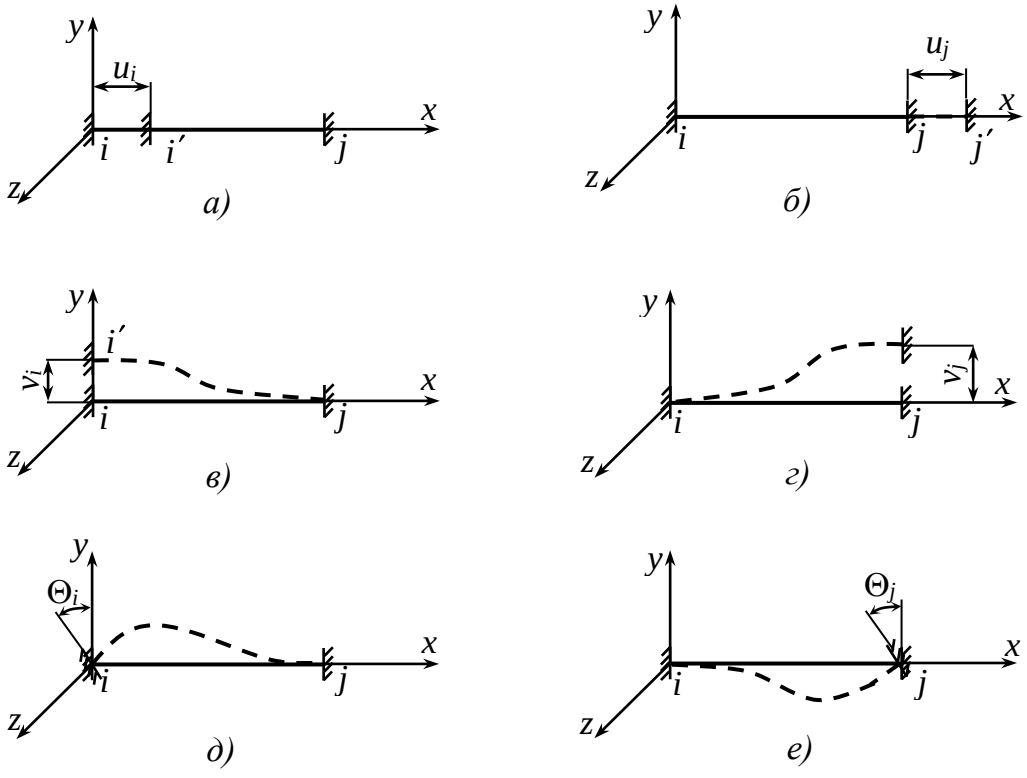
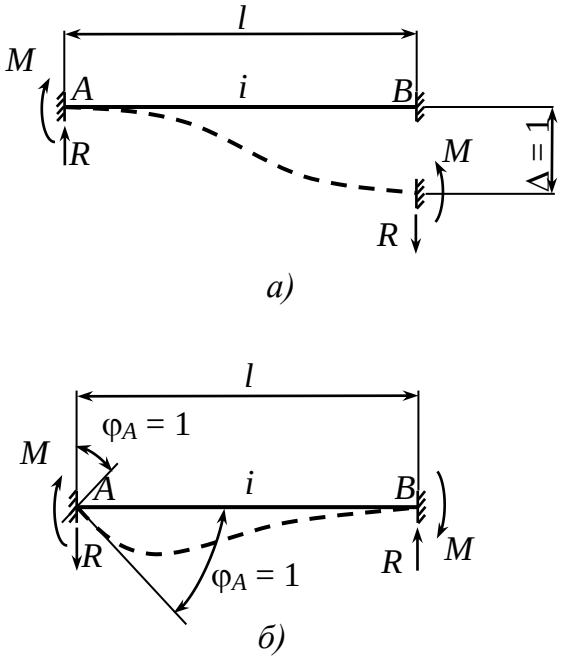


Рис. 20

Узловые усилия можно определить, воспользовавшись табличными результатами для расчета рам методом перемещений [1] (рис. 21). Учитывая направления перемещений узлов, а также то, что смещения узлов балочного элемента не единичные, а $v_i, v_j, \Theta_i, \Theta_j$, получим усилия, соответствующие отдельным смещениям узлов, показанные на рис. 22.



$$M_A = -\frac{6i}{l};$$

$$i = \frac{EJ}{l};$$

$$M_B = \frac{6i}{l};$$

$$R_A = R_B = \frac{12i}{l^2};$$

$$M_A = 4i;$$

$$M_B = 2i;$$

$$R_A = R_B = \frac{6i}{l}.$$

Рис. 21

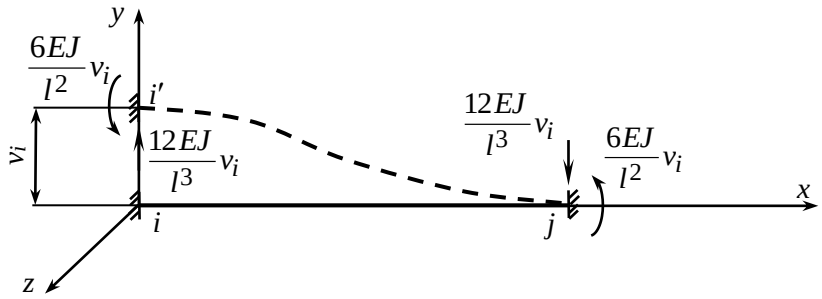
Тогда узловые усилия

$$R_{iy} = 0 \cdot u_i + \frac{12EJ}{l^3} v_i + \frac{6EJ}{l^2} \Theta_i + 0 \cdot u_j - \frac{12EJ}{l^3} v_j + \frac{6EJ}{l^2} \Theta_j,$$

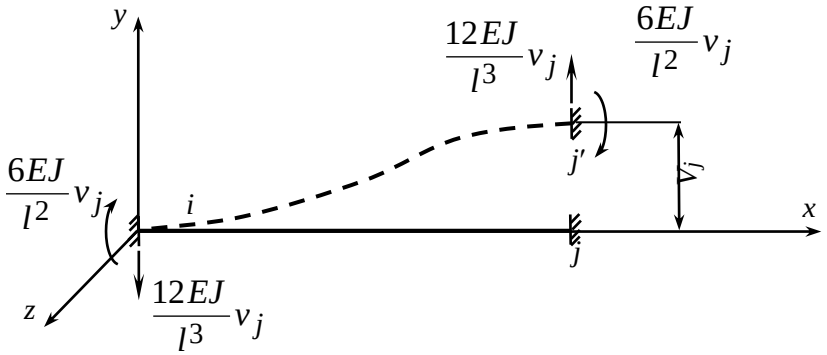
$$R_{jy} = 0 \cdot u_i - \frac{12EJ}{l^3} v_i - \frac{6EJ}{l^2} \Theta_i + 0 \cdot u_j + \frac{12EJ}{l^3} v_j - \frac{6EJ}{l^2} \Theta_j,$$

$$M_{iz} = 0 \cdot u_i + \frac{6EJ}{l^2} v_i + \frac{4EJ}{l} \Theta_i + 0 \cdot u_j - \frac{6EJ}{l^2} v_j + \frac{2EJ}{l} \Theta_j,$$

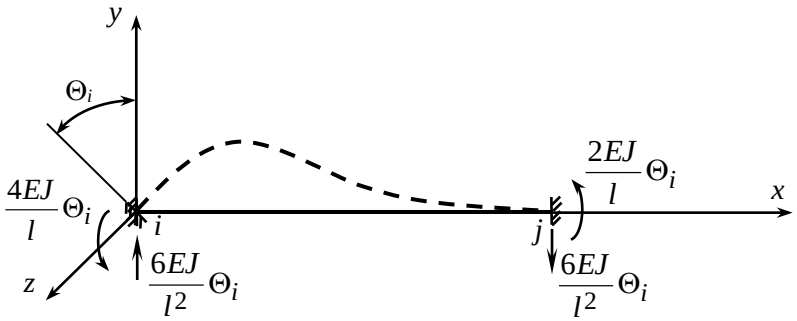
$$M_{jz} = 0 \cdot u_i + \frac{6EJ}{l^2} v_i + \frac{2EJ}{l} \Theta_i + 0 \cdot u_j - \frac{6EJ}{l^2} v_j + \frac{4EJ}{l} \Theta_j.$$


y
$\frac{6EJ}{l^2}v_i$
i'
v_i
$\frac{12EJ}{l^3}v_i$
$\frac{12EJ}{l^3}v_i$
$\frac{6EJ}{l^2}v_i$
x
i
j
z

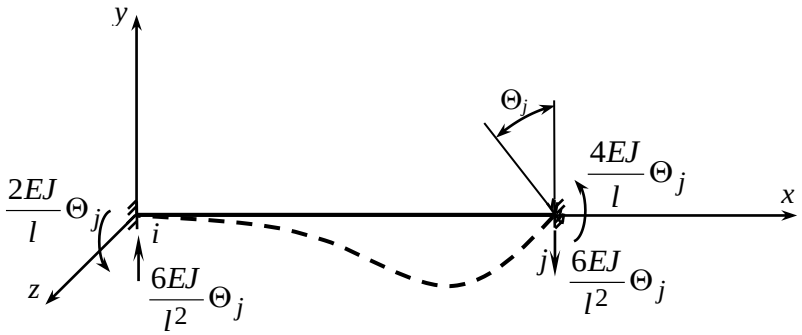
а)


y
$\frac{12EJ}{l^3}v_j$
$\frac{6EJ}{l^2}v_j$
j'
v_j
$\frac{6EJ}{l^2}v_j$
i
x
j
z
$\frac{12EJ}{l^3}v_j$

б)


y
Θ_i
$\frac{2EJ}{l}\Theta_i$
$\frac{4EJ}{l}\Theta_i$
x
i
j
z
$\frac{6EJ}{l^2}\Theta_i$
$\frac{6EJ}{l^2}\Theta_i$

в)


y
Θ_j
$\frac{4EJ}{l}\Theta_j$
$\frac{2EJ}{l}\Theta_j$
x
i
j
z
$\frac{6EJ}{l^2}\Theta_j$
$\frac{6EJ}{l^2}\Theta_j$

г)

Рис. 22

Выражения для узловых усилий R_{ix} и R_{jx} получаем с использованием формулы (1):

$$R_{ix} = \frac{EA}{l}u_i + 0 \cdot v_i + 0 \cdot \Theta_i - \frac{EA}{l}u_j + 0 \cdot v_j + 0 \cdot \Theta_j,$$

$$R_{jx} = -\frac{EA}{l}u_i + 0 \cdot v_i + 0 \cdot \Theta_i + \frac{EA}{l}u_j + 0 \cdot v_j + 0 \cdot \Theta_j.$$

В матричной форме

$$\begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ M_{iz} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \\ M_{jz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & \frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} \\ -\frac{EA}{l} & 0 & 0 & \frac{EA}{l} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} & 0 & \frac{12EJ}{l^3} & -\frac{6EJ}{l^2} \\ 0 & \frac{6EJ}{l^2} & \frac{2EJ}{l} & 0 & -\frac{6EJ}{l^2} & \frac{4EJ}{l} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \Theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \Theta_j \end{bmatrix}$$

или

$$\begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ M_{iz} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \\ M_{jz} \end{bmatrix} = \frac{E}{l} \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12J}{l^2} & \frac{6J}{l} & 0 & -\frac{12J}{l^2} & \frac{6J}{l} \\ 0 & \frac{6J}{l} & 4J & 0 & -\frac{6J}{l} & 2J \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12J}{l^2} & -\frac{6J}{l} & 0 & \frac{12J}{l^2} & -\frac{6J}{l} \\ 0 & \frac{6J}{l} & 2J & 0 & -\frac{6J}{l} & 4J \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \Theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \Theta_j \end{bmatrix}.$$

В общем виде это уравнение выглядит так же, как для ферменного элемента [см. формулу (3)]:

$$R = K_M q,$$

где

$$K_M = \frac{E}{l}\begin{bmatrix} A & 0 & 0 & -A & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12J}{l^2} & \frac{6J}{l} & 0 & -\frac{12J}{l^2} & \frac{6J}{l} \\ 0 & \frac{6J}{l} & 4J & 0 & -\frac{6J}{l} & 2J \\ -A & 0 & 0 & A & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12J}{l^2} & -\frac{6J}{l} & 0 & \frac{12J}{l^2} & -\frac{6J}{l} \\ 0 & \frac{6J}{l} & 2J & 0 & -\frac{6J}{l} & 4J \end{bmatrix} - \qquad (4)$$

матрица жесткости балочного элемента.

Приведение внешней нагрузки к узловым усилиям

Ранее рассматривались стержневые элементы, на которые действует только узловая нагрузка (см. рис. 16, 19). В действительности внешняя нагрузка на стержневые конструкции может быть и распределенной (рис. 23, *а*).

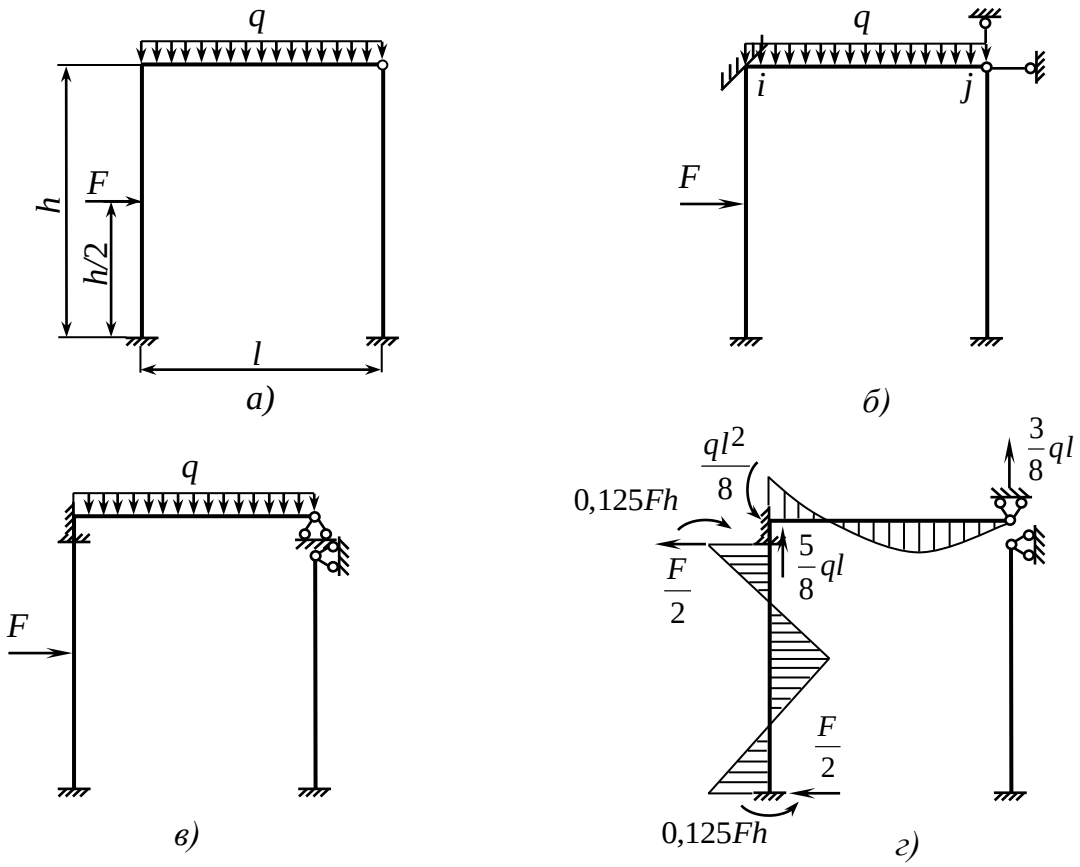


Рис. 23

В таких случаях перед решением задачи МКЭ внешние нагрузки приводятся к узловым усилиям. Так как рассматриваются линейно-деформируемые упругие стержневые системы, можно использовать принцип независимости действия сил. В соответствии с ним результат действия группы сил равен сумме результатов, полученных от действия каждой силы в отдельности.

Представим решение задачи в виде суммы решений для той же стержневой системы от нескольких внешних воздействий, равных в сумме исходному воздействию.

Закрепим все узлы системы от всех возможных смещений (рис. 23, *б*). В данном случае это означает введение жесткой заделки в узел i и шарнирно-неподвижной опоры в узел j. В результате $q_i = 0$, $q_j = 0$. Получившаяся при этом система представляет собой не связанные друг с другом стержневые элементы (рис. 23, *в*).

Определить усилия в такой системе относительно просто: каждый отдельный стержень – это дважды или трижды статически неопределимая система, которая может быть рассчитана методом сил. В случае простейших внешних нагрузок можно воспользоваться готовыми решениями [1] (рис. 23, *г* – эпюра изгибающих моментов $M_{\text{изг}}$ в отдельных стержнях).

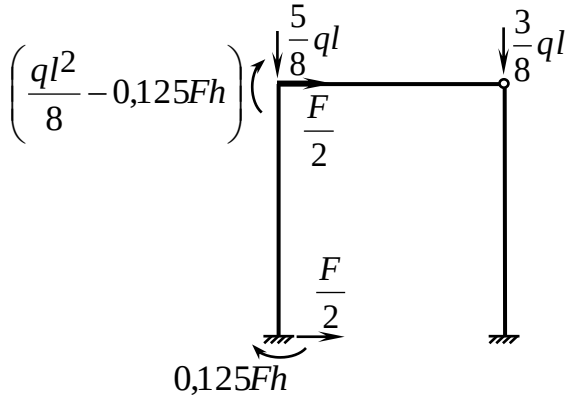


Рис. 24

Рассмотрим заданную систему (см. рис. 23, *а*) под действием узловых усилий, равных тем, что приходились в отдельных стержнях на их опоры (рис. 24).

По принципу суперпозиции решение исходной задачи (см. рис. 23, *а*) можно представить в виде суммы решений задачи, представленной на рис. 23, *б*, и задачи, представленной на рис. 24.

Таким образом, расчет стержневой системы на действие произвольной внешней нагрузки состоит из расчета отдельных ее элементов на действие внешней нагрузки, относящейся к ним, и расчета всей стержневой системы на действие только узловых усилий. Первый расчет, как было сказано выше, относительно прост, поэтому задача сводится в основном к расчету стержневой системы на узловые

нагрузки. Описанная операция и называется приведением внешних нагрузок к узловым усилиям.

Преобразование матрицы жесткости ферменного элемента при переходе от местной системы координат к глобальной

Рассмотрим ферменный элемент в некоторой системе координат *xy*, единой для всей стержневой системы, состоящей из ферменных элементов (рис. 25). Такая система координат называется *глобальной*. $x_r y_r$ – местная система координат данного элемента.

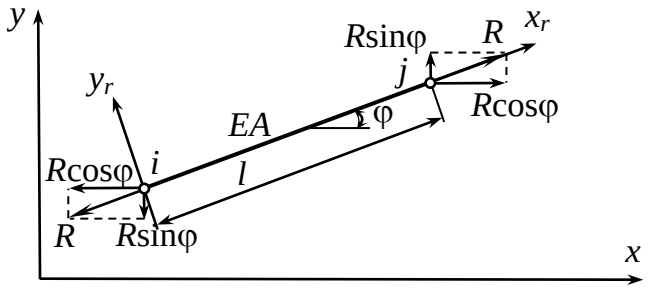


Рис. 25

В результате деформации узлы элемента переместятся (рис. 26).

Вектор узловых перемещений элемента в глобальной системе координат

$$q = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}.$$

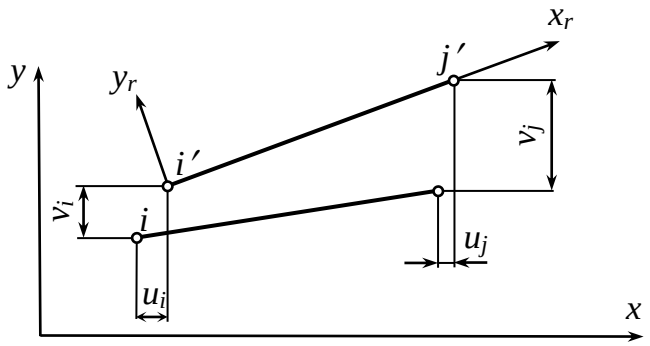


Рис. 26

Вектор узловых усилий

$$R = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -R\cos\varphi \\ -R\sin\varphi \\ R\cos\varphi \\ R\sin\varphi \end{bmatrix}.$$

Удлинение элемента

$$\Delta l = (u_j - u_i)\cos\varphi + (v_j - v_i)\sin\varphi.$$

Тогда

$$R = \frac{EA}{l}\Delta l = \frac{EA}{l}\left[(u_j - u_i)\cos\varphi + (v_j - v_i)\sin\varphi\right].$$

Вектор узловых усилий

$$R = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \end{bmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} -(u_j - u_i)\cos^2\varphi - (v_j - v_i)\sin\varphi\cos\varphi \\ -(u_j - u_i)\cos\varphi\sin\varphi - (v_j - v_i)\sin^2\varphi \\ (u_j - u_i)\cos^2\varphi + (v_j - v_i)\sin\varphi\cos\varphi \\ (u_j - u_i)\cos\varphi\sin\varphi + (v_j - v_i)\sin^2\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} u_i\cos^2\varphi + v_i\sin\varphi\cos\varphi - u_j\cos^2\varphi - v_j\sin\varphi\cos\varphi \\ u_i\sin\varphi\cos\varphi + v_i\sin^2\varphi - u_j\sin\varphi\cos\varphi - v_j\sin^2\varphi \\ -u_i\cos^2\varphi - v_i\sin\varphi\cos\varphi + u_j\cos^2\varphi + v_j\sin\varphi\cos\varphi \\ -u_i\sin\varphi\cos\varphi - v_i\sin^2\varphi + u_j\sin\varphi\cos\varphi + v_j\sin^2\varphi \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & -\cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & -\sin^2\varphi \\ -\cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi & -\sin^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix}.$$

Матрицу

$$K = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} \cos^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & -\cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi \\ \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & -\sin^2\varphi \\ -\cos^2\varphi & -\sin\varphi\cos\varphi & \cos^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi & -\sin^2\varphi & \sin\varphi\cos\varphi & \sin^2\varphi \end{bmatrix}$$

называют матрицей жесткости ферменного элемента в глобальной системе координат. Коротко $R = Kq$.

Нетрудно проверить, что эта матрица жесткости связана с матрицей жесткости ферменного элемента в местной системе координат K_M [см. формулу (2)] соотношением

$$K = C^{\mathrm{T}} K_M C, \qquad (5)$$

где C – так называемая матрица направляющих косинусов осей x_r, y_r местной системы координат относительно осей x, y глобальной системы координат,

$$C = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi \\ 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}.$$

Преобразование матрицы жесткости балочного элемента при переходе от местной системы координат к глобальной

Рассмотрим балочный элемент в глобальной системе координат (рис. 27).

Вектор узловых перемещений элемента в глобальной системе координат

$$q = \begin{bmatrix} u_i \\ v_i \\ \Theta_i \\ u_j \\ v_j \\ \Theta_j \end{bmatrix}.$$

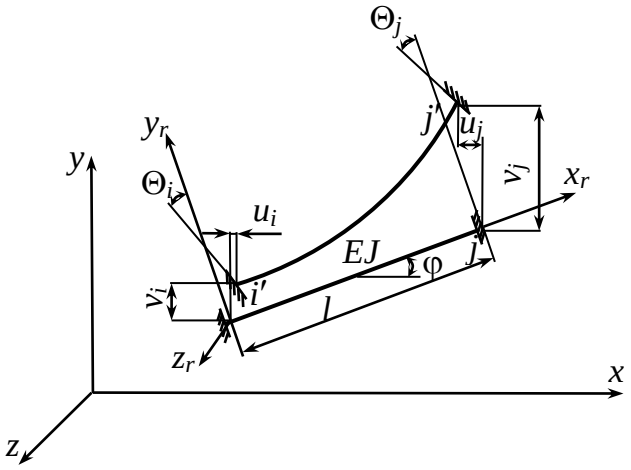


Рис. 27

Вектор узловых усилий

$$R = \begin{bmatrix} R_{ix} \\ R_{iy} \\ M_{iz} \\ R_{jx} \\ R_{jy} \\ M_{jz} \end{bmatrix}.$$

Подобно тому как выше была получена матрица жесткости ферменного элемента в глобальной системе координат, может быть определена матрица жесткости балочного элемента в глобальной системе координат

$$K=\frac{E}{l}\begin{bmatrix}
\left(A\cos^2\varphi+\frac{12J}{l^2}\sin^2\varphi\right) & -\left(-A+\frac{12J}{l^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi & -\frac{6J}{l}\sin\varphi & -\left(A\cos^2\varphi+\frac{12J}{l^2}\sin^2\varphi\right) & \left(-A+\frac{12J}{l^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi & -\frac{6J}{l}\sin\varphi \\
-\left(-A+\frac{12J}{l^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi & \left(A\sin^2\varphi+\frac{12J}{l^2}\cos^2\varphi\right) & \frac{6J}{l}\cos\varphi & \left(-A+\frac{12J}{l^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi & -\left(A\sin^2\varphi+\frac{12J}{l^2}\cos^2\varphi\right) & \frac{6J}{l}\cos\varphi \\
-\frac{6J}{l}\sin\varphi & \frac{6J}{l}\sin\varphi & 4J & \frac{6J}{l}\sin\varphi & -\frac{6J}{l}\cos\varphi & 2J \\
-\left(A\cos^2\varphi+\frac{12J}{l^2}\sin^2\varphi\right) & \left(-A+\frac{12J}{l^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi & \frac{6J}{l}\sin\varphi & \left(A\cos^2\varphi+\frac{12J}{l^2}\sin^2\varphi\right) & -\left(-A+\frac{12J}{l^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi & \frac{6J}{l}\sin\varphi \\
\left(-A+\frac{12J}{l^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi & -\left(A\sin^2\varphi+\frac{12J}{l^2}\cos^2\varphi\right) & -\frac{6J}{l}\cos\varphi & -\left(-A+\frac{12J}{l^2}\right)\sin\varphi\cos\varphi & \left(A\sin^2\varphi+\frac{12J}{l^2}\cos^2\varphi\right) & -\frac{6J}{l}\cos\varphi \\
-\frac{6J}{l}\sin\varphi & \frac{6J}{l}\cos\varphi & 2J & \frac{6J}{l}\sin\varphi & -\frac{6J}{l}\cos\varphi & 4J
\end{bmatrix}$$

Эта матрица также связана с матрицей жесткости балочного элемента в местной системе координат [см. формулу (4)] соотношением (5), при этом

$$C = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Характеристики совокупности элементов

Выше были введены матрицы, характеризующие отдельный стержневой элемент, и получены соотношения между ними. Теперь рассмотрим характеристики совокупности стержневых элементов, образующих стержневую систему.

Первоначально считаем элементы *не связанными* друг с другом. Общее число элементов системы m.

Вектор узловых перемещений системы

$$q = \begin{bmatrix} q^1 \\ \vdots \\ q^r \\ \vdots \\ q^m \end{bmatrix}. \qquad (6)$$

Вектор узловых усилий системы $R = \begin{bmatrix} R^1 \\ \vdots \\ R^r \\ \vdots \\ R^m \end{bmatrix}$.

Матрица жесткости системы $K = \begin{bmatrix} K^1 & н & у & л & и \\ & \ddots & & & \\ & & K^r & & \\ & & & \ddots & \\ н & у & л & и & K^m \end{bmatrix}$.

Далее рассмотрим элементы, *связанные* в единую систему (например, раму, см. рис. 23, *а*).

Чтобы m несвязанных элементов работали так же, как работает подобная система связанных элементов, нужно приравнять перемещения соответствующих узлов этих двух систем.

В матричной форме эти соотношения выглядят так:

$$q = H\,\bar{q},$$

где q – вектор узловых перемещений системы несвязанных элементов [см. формулу (6)]; H – так называемая матрица соединения (или логическая матрица); $\bar{q}$ – вектор узловых перемещений системы связанных элементов.

Матрица соединения состоит из единичных матриц *E.* Для системы ферменных элементов

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Для системы балочных элементов

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Матрица жесткости системы связанных элементов

$$\bar{K} = H^{\mathrm{T}} K H\,. \qquad (7)$$

Пример решения задачи методом конечных элементов

Для иллюстрации изложенных выше основных принципов МКЭ рассчитаем ферму (рис. 28).

Пронумеруем элементы (см. рис. 28). Запишем матрицы жесткости отдельных элементов фермы в местных системах координат (рис. 29).

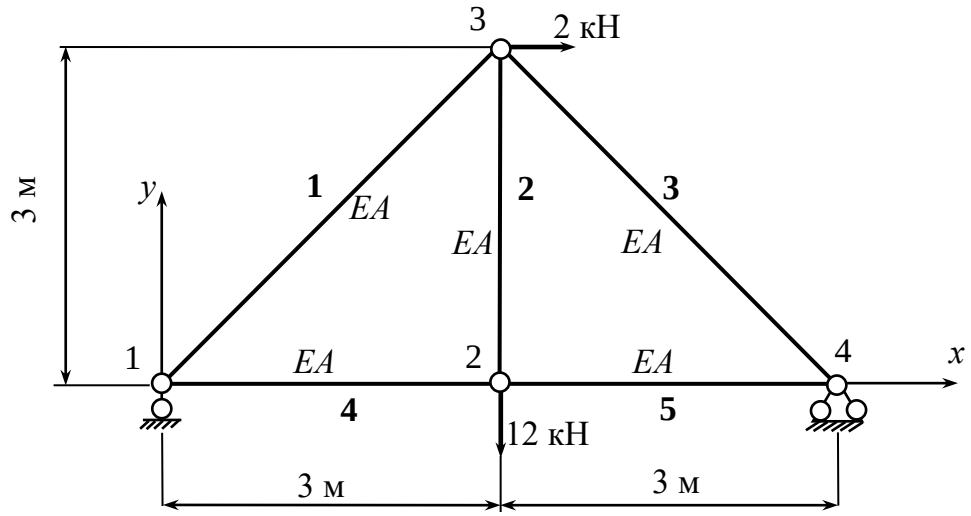


Рис. 28

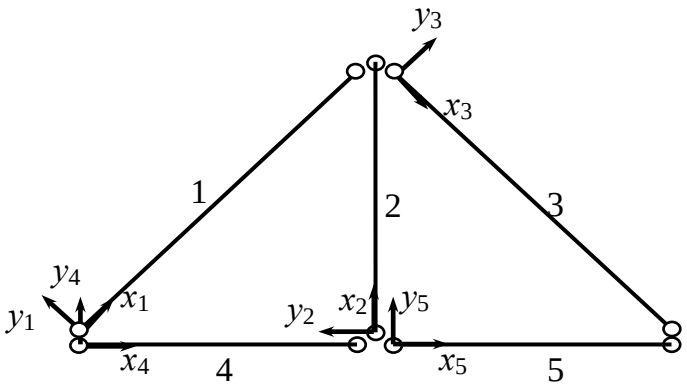


Рис. 29

$$K_M^{1,3} = \frac{EA}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K_M^{2,4,5} = \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Вычислим матрицы жесткости отдельных элементов фермы в глобальной системе координат *xy* (см. рис. 28). Для этого составим матрицы направляющих косинусов *C* элементов:

$$C^1 = \begin{bmatrix} \cos(x,x_1) & \cos(y,x_1) & 0 & 0 \\ \cos(x,y_1) & \cos(y,y_1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(x,x_1) & \cos(y,x_1) \\ 0 & 0 & \cos(x,y_1) & \cos(y,y_1) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos 45° & \cos 315° & 0 & 0 \\ \cos 135° & \cos 45° & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos 45° & \cos 315° \\ 0 & 0 & \cos 135° & \cos 45° \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$C^3 = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix};$$

$$C^4 = C^5 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда в соответствии с формулой (5)

$$K^1 = \left(C^1\right)^{\mathrm{T}} K_M^1 C^1 =$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{EA}{3\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{EA}{6\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Аналогично получим

$$K^2 = \frac{EA}{3}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; K^3 = \frac{EA}{6\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$K^4 = K_M^4 = \frac{EA}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; K^5 = K_M^5 = \frac{EA}{3}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Составим матрицу жесткости системы несвязанных элементов

$$K = \begin{bmatrix} K^1 & н & у & л & и \\ & K^2 & & & \\ & & K^3 & & \\ & & & K^4 & \\ н & у & л & и & K^5 \end{bmatrix}.$$

Далее получим матрицу жесткости системы связанных элементов $\bar{K}$.

Сначала составим матрицу соединения H. Чтобы система несвязанных элементов (см. рис. 29) работала так же, как заданная система (см. рис. 28), приравняем перемещения соответствующих узлов этих двух систем:

$$q_1^1 = \bar{q}_1,$$
$$q_2^1 = \bar{q}_3,$$
$$q_1^2 = \bar{q}_2,$$
$$q_2^2 = \bar{q}_3,$$
$$q_1^3 = \bar{q}_3,$$
$$q_2^3 = \bar{q}_4,$$
$$q_1^4 = \bar{q}_1,$$
$$q_2^4 = \bar{q}_2,$$
$$q_1^5 = \bar{q}_2,$$
$$q_2^5 = \bar{q}_4.$$

В этих выражениях $\bar{q}_i (i = 1 \div 4)$ – элементы вектора узловых перемещений $\bar{q}$ системы связанных конечных элементов. Нумерация узлов заданной системы дана на рис. 28.

В матричном виде эти соотношения выглядят следующим образом:

$$\begin{bmatrix} q_1^1 \\ q_2^1 \\ q_1^2 \\ q_2^2 \\ q_1^3 \\ q_2^3 \\ q_1^4 \\ q_2^4 \\ q_1^5 \\ q_2^5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & E & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \\ E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & E & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \end{bmatrix},$$

где $E = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Итак, матрица соединения имеет следующий вид:

$$H = \left[\begin{array}{cc:cc:cc:cc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
\hdashline
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hdashline
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right].$$

Теперь в соответствии с формулой (7) вычислим матрицу жесткости заданной системы $\bar{K}$. В результате перемножения матриц получим

$$\bar{K} = \frac{EA}{3}\begin{bmatrix}
\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+1\right) & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\
\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 \\
-1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
-\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} \\
-\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right) & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\
0 & 0 & -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}} & \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+1\right) & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\
0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & \frac{1}{2\sqrt{2}}
\end{bmatrix}.$$

В заданной ферме перемещения узлов *1, 4* ограничены опорами: в узле *1* невозможно вертикальное смещение, в узле *4* – и горизонтальное, и вертикальное (см. рис. 28), поэтому в матрице $\bar{K}$ необходимо вычеркнуть строки и столбцы 2, 7, 8. Тогда матрица примет вид

$$\bar{K} = \frac{EA}{3}\begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2\sqrt{2}}+1\right) & -1 & 0 & -\frac{1}{2\sqrt{2}} & -\frac{1}{2\sqrt{2}} \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{1}{2\sqrt{2}} & 0 & -1 & 0 & \left(\frac{1}{\sqrt{2}}+1\right) \end{bmatrix}$$

или

$$\bar{K} = \frac{EA}{3}\begin{bmatrix} 1,35 & -1 & 0 & -0,35 & -0,35 \\ -1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ -0,35 & 0 & 0 & 0,7 & 0 \\ -0,35 & 0 & -1 & 0 & 1,7 \end{bmatrix}.$$

Теперь рассчитаем перемещения узлов заданной фермы.

Вектор внешних узловых нагрузок и вектор узловых перемещений заданной системы связаны соотношением $\bar{R} = \bar{K}\bar{q}$, откуда $\bar{q} = \left(\bar{K}\right)^{-1}\bar{R}$.

Матрица $\left(\bar{K}\right)^{-1}$, обратная матрице $\bar{K}$, выглядит так:

$$(\bar{K})^{-1} = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} 0,98 & 0,49 & 0,49 & 0,49 & 0,49 \\ 0,49 & 0,49 & 0,245 & 0,245 & 0,245 \\ 0,49 & 0,245 & 1,435 & 0,245 & 0,945 \\ 0,49 & 0,245 & 0,245 & 0,945 & 0,245 \\ 0,49 & 0,245 & 0,945 & 0,245 & 0,945 \end{bmatrix}\frac{1}{0,49} =$$

$$= \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 2,93 & 0,5 & 1,93 \\ 1 & 0,5 & 0,5 & 1,93 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 1,93 & 0,5 & 1,93 \end{bmatrix}.$$

Вектор внешних узловых нагрузок $\bar{R} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Тогда

$$\bar{q} = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0,5 & 0,5 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 2,93 & 0,5 & 1,93 \\ 1 & 0,5 & 0,5 & 1,93 & 0,5 \\ 1 & 0,5 & 1,93 & 0,5 & 1,93 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -12 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} -10 \\ -5 \\ -34,2 \\ -2,14 \\ -22,2 \end{bmatrix}.$$

Далее определим внутренние усилия в заданной ферме. Для этого сначала запишем векторы узловых перемещений конечных элементов (в глобальной системе координат):

$$q^1 = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -2,14 \\ -22,2 \end{bmatrix}, \quad q^2 = \begin{bmatrix} \bar{q}_2 \\ \bar{q}_3 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} -5 \\ -34,2 \\ -2,14 \\ -22,2 \end{bmatrix},$$

$$q^3 = \begin{bmatrix} \bar{q}_3 \\ \bar{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} -2,14 \\ -22,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad q^4 = \begin{bmatrix} \bar{q}_1 \\ \bar{q}_2 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -5 \\ -34,2 \end{bmatrix},$$

$$q^5 = \begin{bmatrix} \bar{q}_2 \\ \bar{q}_4 \end{bmatrix} = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} -5 \\ -34,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Затем получим векторы узловых перемещений стержней в их местных системах координат (подробно представлено вычисление для первого элемента):

$$q_M^1 = C^1 q^1 = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -2,14 \\ -22,2 \end{bmatrix} = \frac{3}{\sqrt{2}EA}\begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ -24,3 \\ -20,0 \end{bmatrix},$$

$$q_M^2 = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} -34,2 \\ 5 \\ -22,2 \\ 2,14 \end{bmatrix}, \quad q_M^3 = \frac{3}{\sqrt{2}EA}\begin{bmatrix} 20,0 \\ -24,3 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$q_M^4 = q^4 = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} -10 \\ 0 \\ -5 \\ -34,2 \end{bmatrix}, \quad q_M^5 = q^5 = \frac{3}{EA}\begin{bmatrix} -5 \\ -34,2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Наконец, вычислим векторы узловых усилий элементов (подробно представлено вычисление для первого элемента):

$$R_M^1 = K_M^1 q_M^1 = \frac{EA}{3\sqrt{2}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}EA}\begin{bmatrix} -10 \\ 10 \\ -24,3 \\ -20,0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 14,3 \\ 0 \\ -14,3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7,15 \\ 0 \\ -7,15 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ кН},$$

$$R_M^2 = \begin{bmatrix} -12 \\ 0 \\ 12 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ кН}, \; R_M^3 = \begin{bmatrix} 10,0 \\ 0 \\ -10,0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ кН},$$

$$R_M^4 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ кН}, \; R_M^5 = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ кН}.$$

Результаты расчета этих усилий для некоторых элементов показаны на рис. 30.

Проверить результаты расчета можно, например, проконтролировав равновесие узлов фермы. Вырежем узел *3* и рассмотрим его равновесие под действием приложенных внешних нагрузок и внутренних усилий (рис. 31).

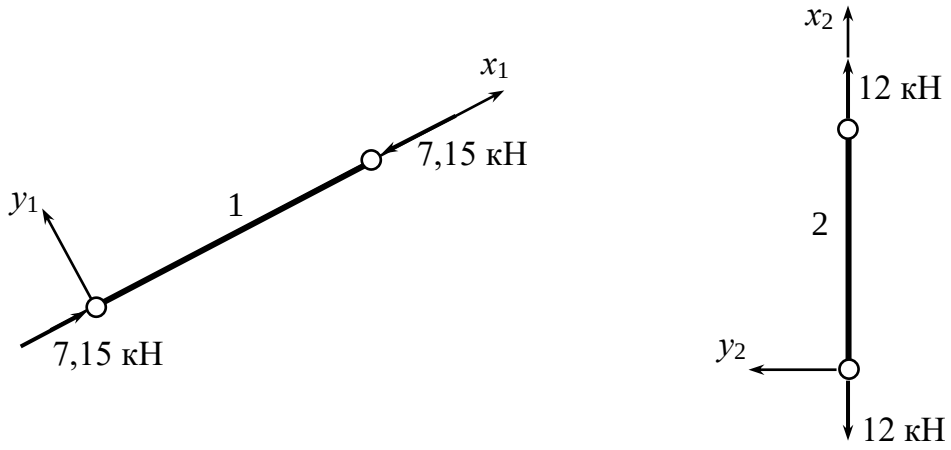


Рис. 30

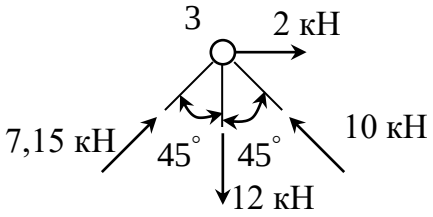


Рис. 31

Составим уравнения равновесия

$$\sum x = 0: \; 7{,}15\cos 45^\circ + 2 - 10\cos 45^\circ \approx 0,$$

$$\sum y = 0: \; 7{,}15\cos 45^\circ - 12 + 10\cos 45^\circ \approx 0.$$

Из уравнений видно, что узел находится в равновесии.

РАБОТА В ПРОГРАММЕ STARK ES

Основные возможности программы STARK ES

Одна из компьютерных программ расчетов конструкций, реализующих МКЭ, – отечественный программный комплекс (ПК) STARK ES. Разработчик – ООО «ЕВРОСОФТ». Это российское научно-производственное предприятие, поставляющее на внутренний и внешний рынки программное обеспечение для автоматизированного проектирования зданий и сооружений.

Программный комплекс *предназначен для* статического и динамического *расчетов* произвольных плоских и пространственных конструкций, а также для *конструирования* элементов строительных конструкций (сечений, балок, колонн, плит, фундаментов) и их узлов.

STARK ES позволяет выполнять расчет отдельных несущих конструкций сооружения и расчет несущих конструкций зданий и сооружений в пространственной постановке с учетом:

- совместной работы конструкций, фундамента и основания;
- геометрически нелинейной работы конструкций и физически нелинейной работы материалов;
- истории возведения и нагружения конструкций (учет монтажа);
- различных расчетных случаев и возможной изменчивости расчетной схемы (вариации модели);
- реальной работы конструкций в узлах сопряжения;
- возникновения опасных природных процессов и явлений (пульсация ветра, сейсмика).

В результате статического расчета пользователь может оценить усилия и напряжения в элементах расчетной схемы, максимальные и минимальные перемещения, опорные реакции. Кроме того, на основе метода конечных элементов в ПК STARK ES также выполняются расчет на устойчивость, расчет на собственные и вынужденные колебания.

STARK ES может взаимодействовать с другими расчетными и графическими ПК (ПРУСК, Металл, ЛИРА, БЕТА, ArCon, AutoCAD, ArchiCAD, speedikon A, Glaser isb-cad и др.), что делает работу с ним более эффективной.

STARK ES зарекомендовал себя при проектировании различных объектов, в том числе стадиона «Краснодар» (представляет собой

в плане овал с габаритами примерно 190 × 230 м, высота трибун – до 25 м, высота покрытия над полем – до 38 м, вмещает до 33 тыс. зрителей, расчетная схема дана на рис. 32); морской ледостойкой стационарной нефтедобывающей платформы «Приразломная» (рис. 33); высотных зданий (рис. 34); футбольного стадиона «Зенит Арена» (на 68 тыс. мест, рис. 35).

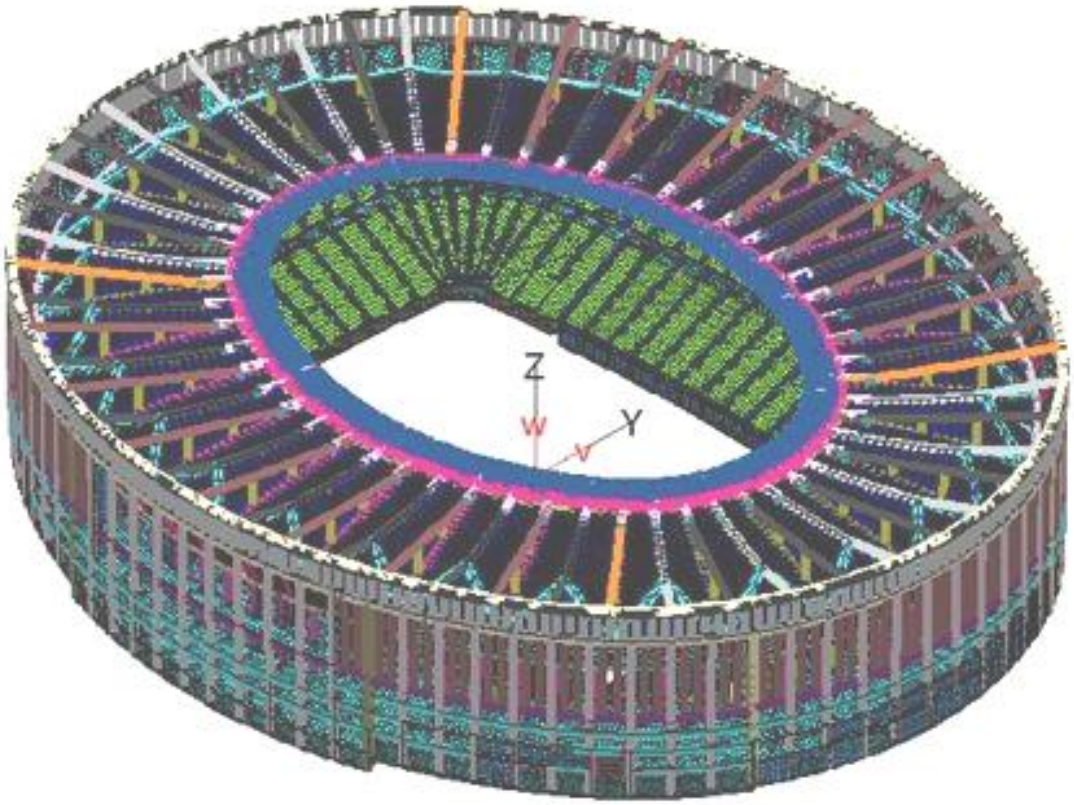


Рис. 32

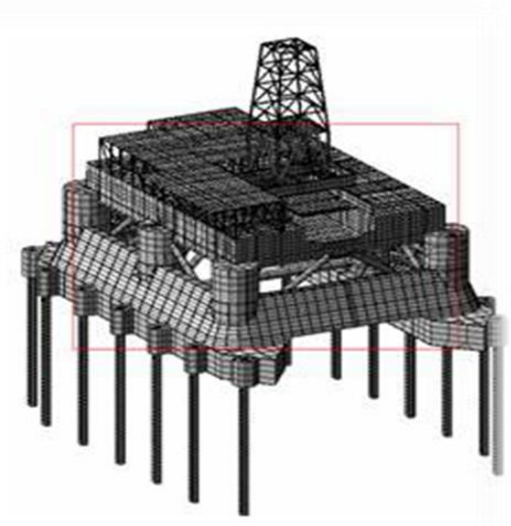
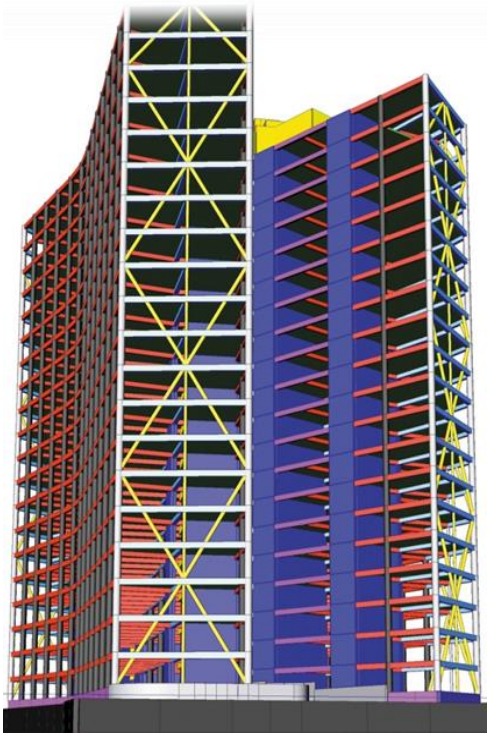
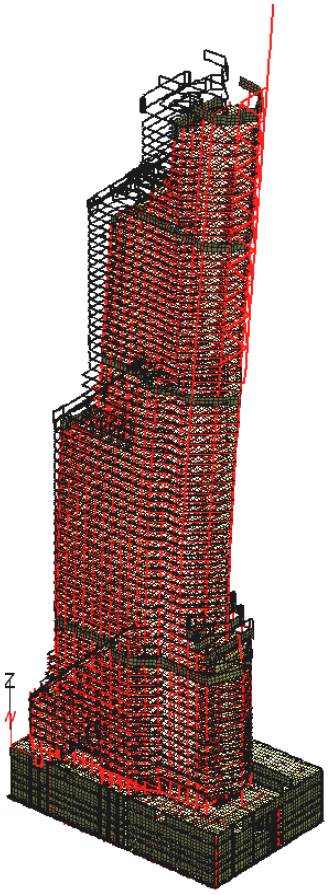


Рис. 33

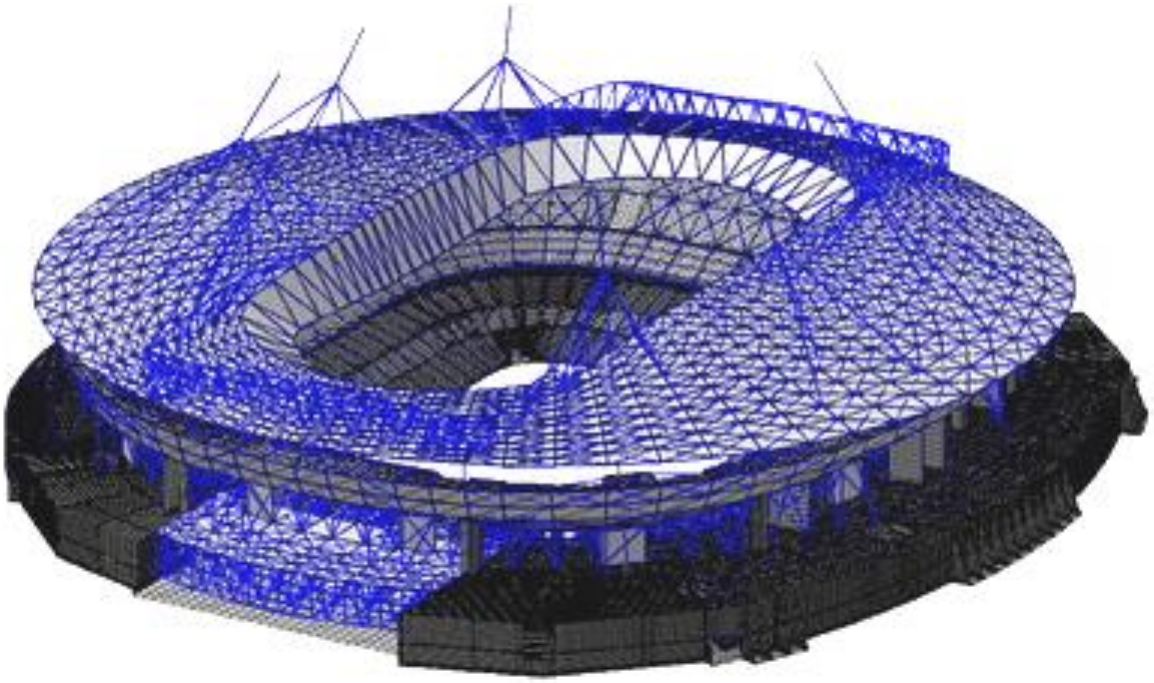


а)

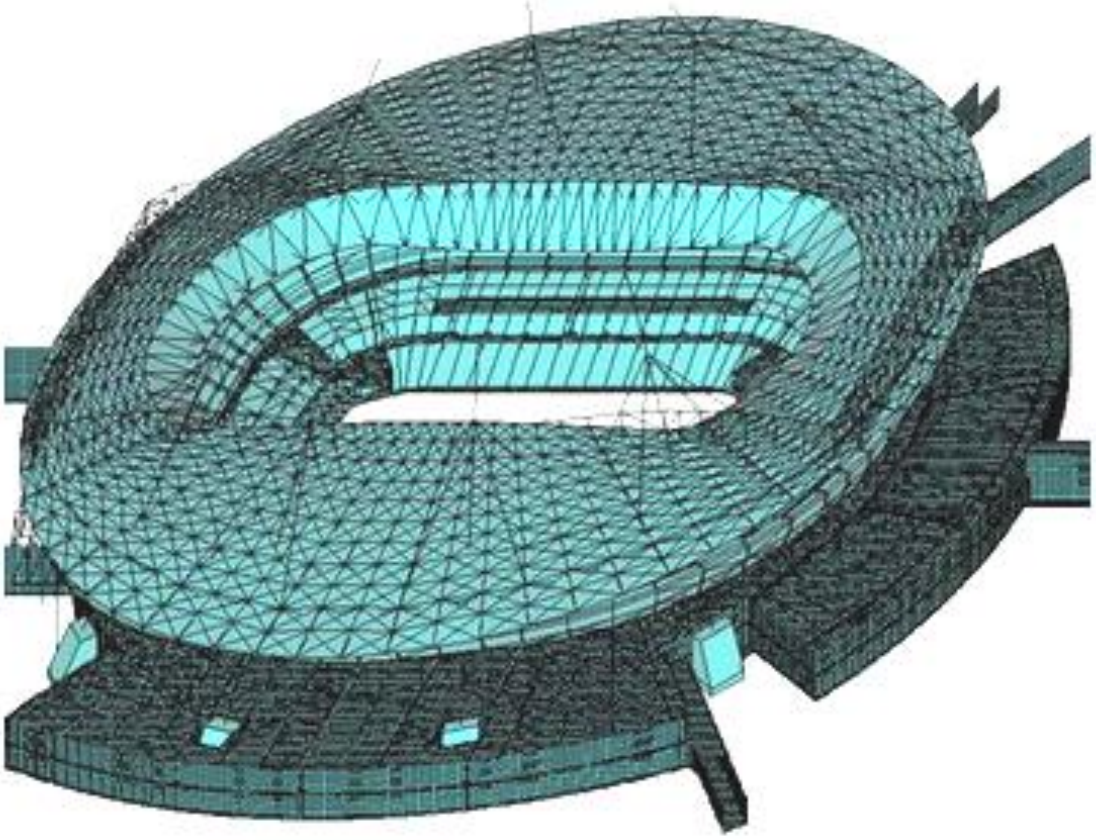


б)

Рис. 34



а)



б)

Рис. 35

Рабочий стол ПК STARK ES

Основные элементы рабочего стола ПК STARK ES – строка заголовка *1*, верхнее меню *2*, пиктографическое меню *3*, боковые меню *4*, окно редактора *5*, окно выбора *6*, окно информации *7*, рабочая зона *8*, окно просмотра *9*, каталог проектов *10*, окно координат *11* (рис. 36).

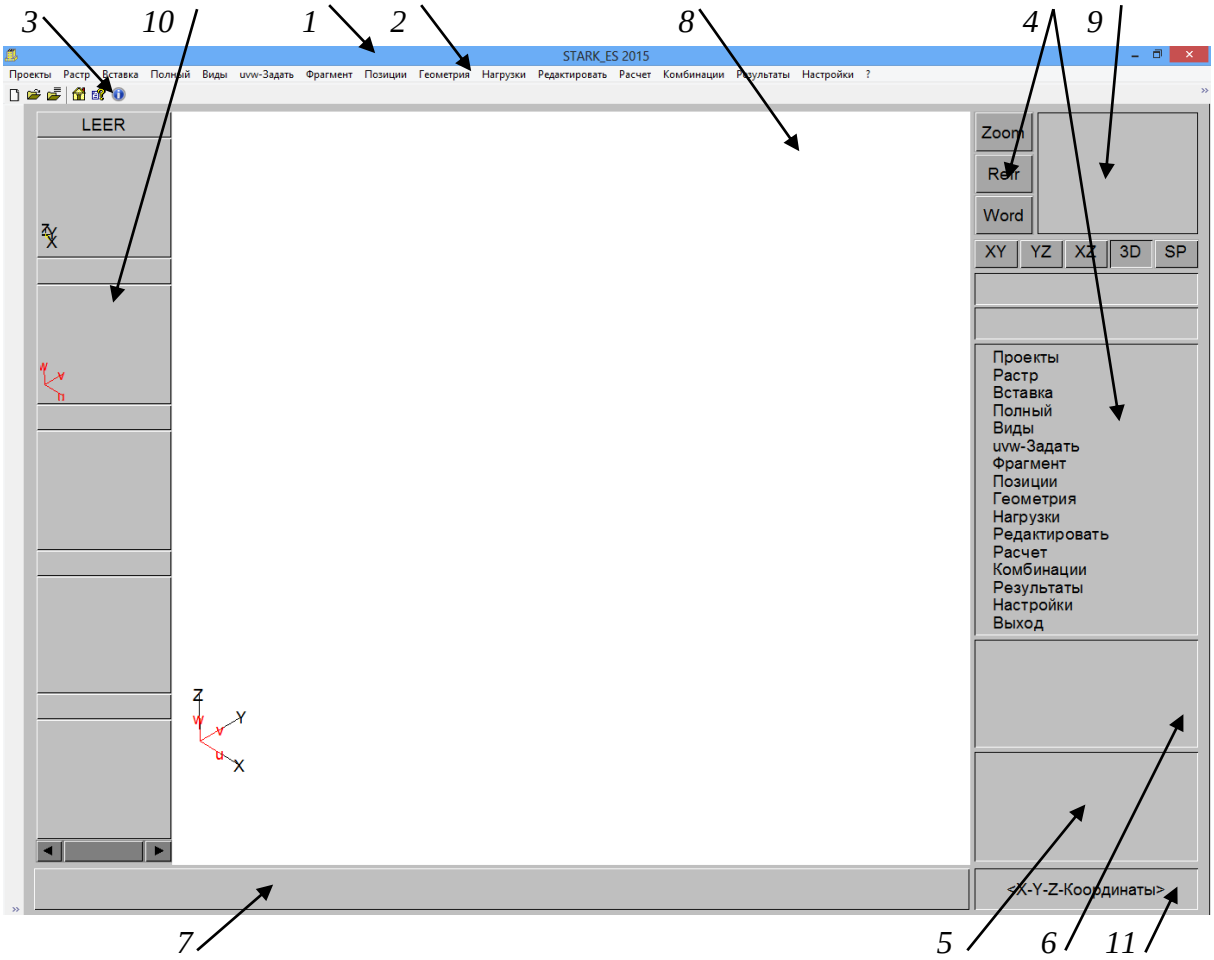


Рис. 36

В строке заголовка отражаются название и версия программы, а после создания нового проекта – имя и адрес текущего файла.

Верхнее меню дает доступ ко всем командам программы. Команды в меню сгруппированы по назначению: например, пункт **Проекты** включает в себя команды по работе с файлами (рис. 37); пункт

Виды позволяет представить в пределах рабочей зоны четыре разных вида расчетной схемы конструкции одновременно (рис. 38); пункт **Геометрия** (рис. 39) включает в себя команды по формированию расчетной схемы (ее геометрии); пункт **Нагрузки** – команды по заданию различных нагрузок (рис. 40); пункт **Редактировать** (рис. 41) содержит команды по заданию внешних (опорных) и внутренних связей, жесткостей элементов конструкции (материалов и сечений) и другое; пункт **Расчет** (рис. 42) включает в себя команды по разным видам расчетов конструкций; пункт **Результаты** (рис. 43) позволяет выбрать различные варианты представления результатов расчета; пункт **Настройки** (рис. 44) содержит команды по детальным настройкам видов расчетов конструкций, представления результатов расчетов, рабочего стола; пункт **?** (рис. 45) предлагает помощь по работе с программой.

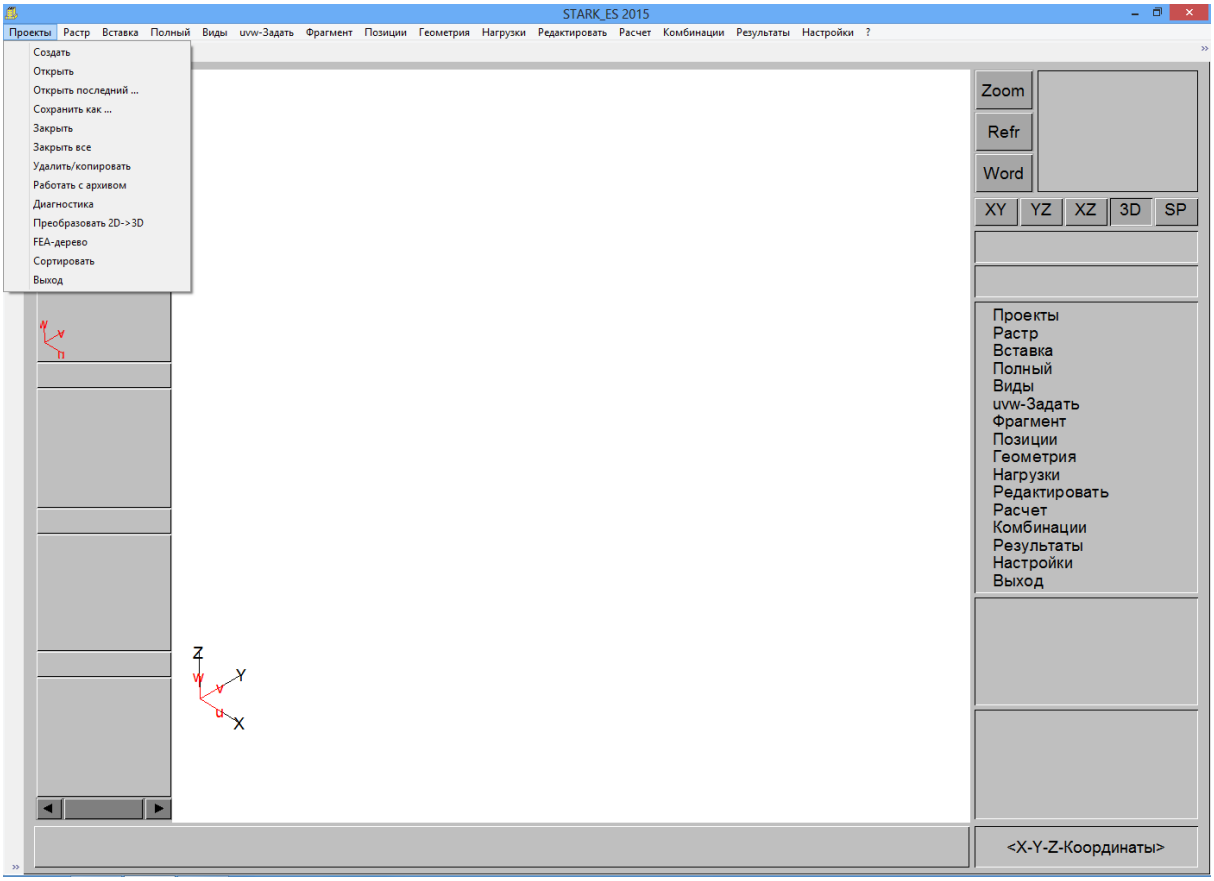


Рис. 37

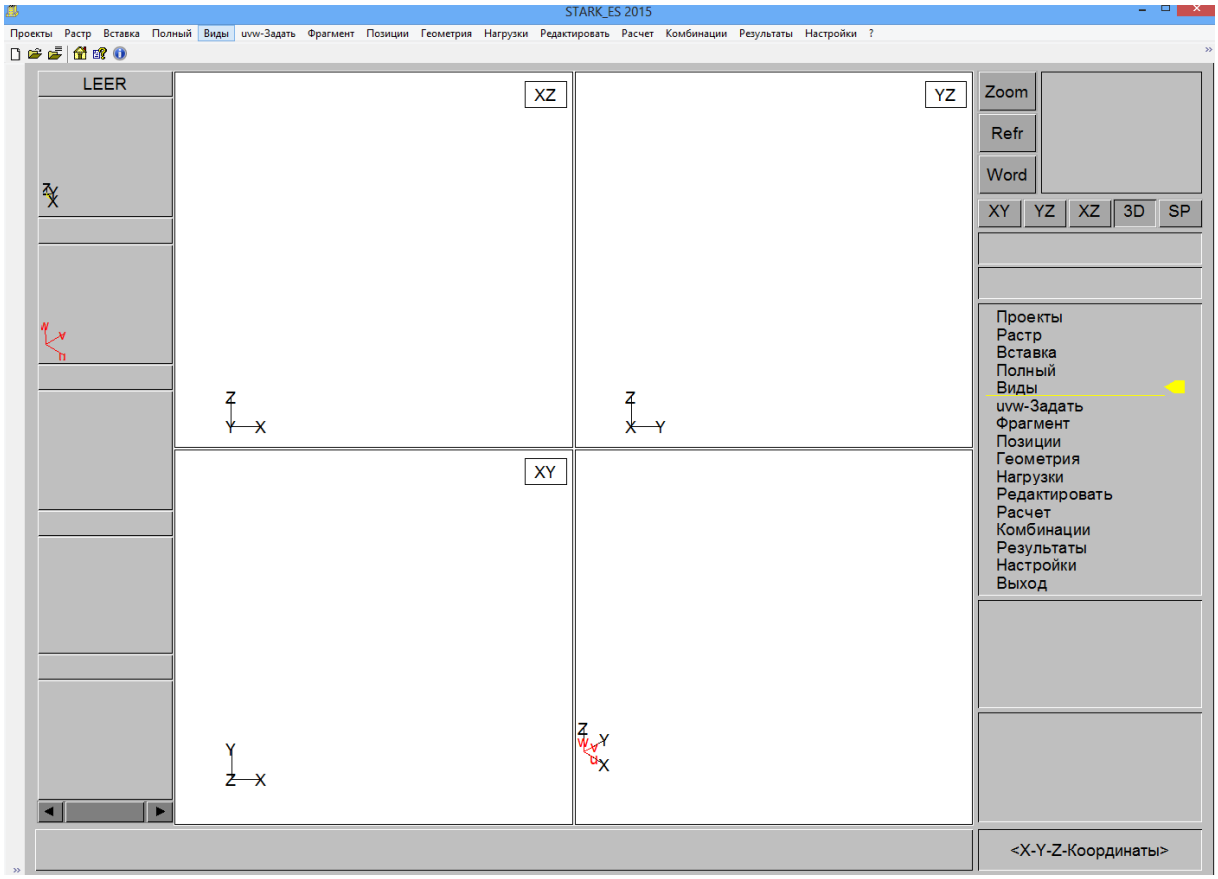


Рис. 38

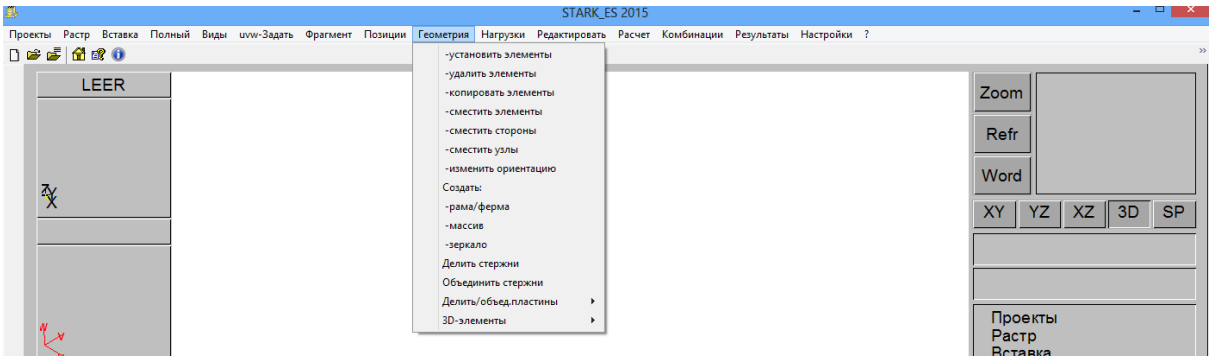


Рис. 39

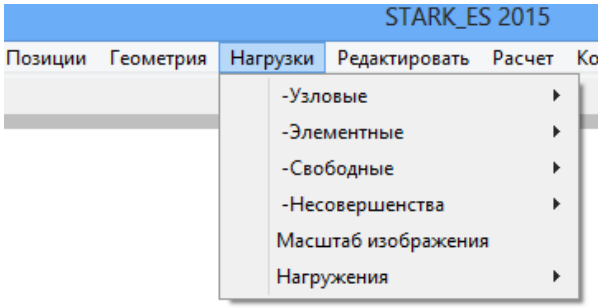


Рис. 40

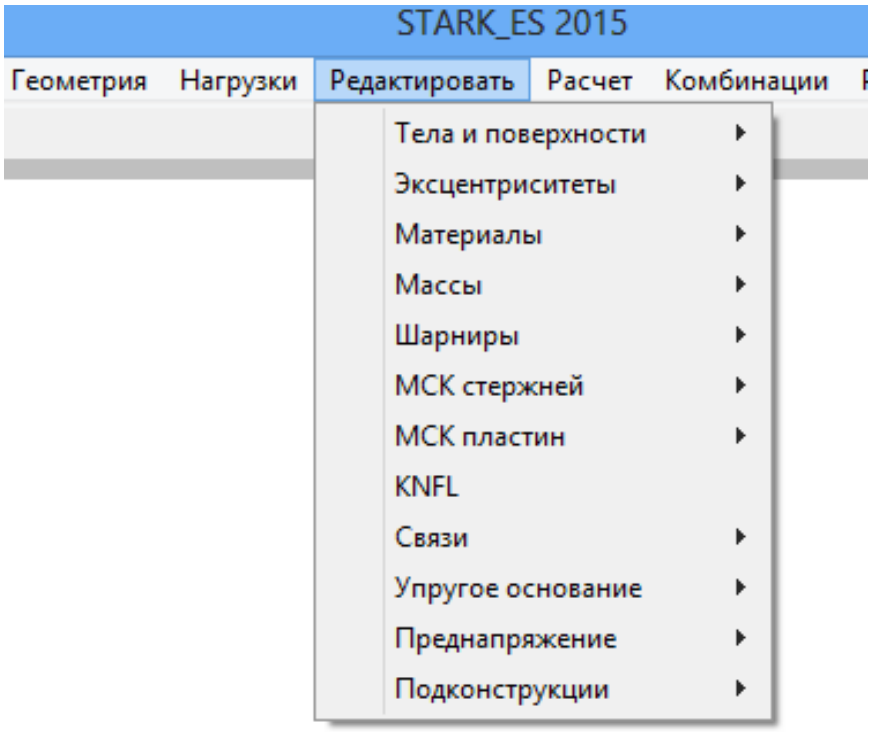


Рис. 41

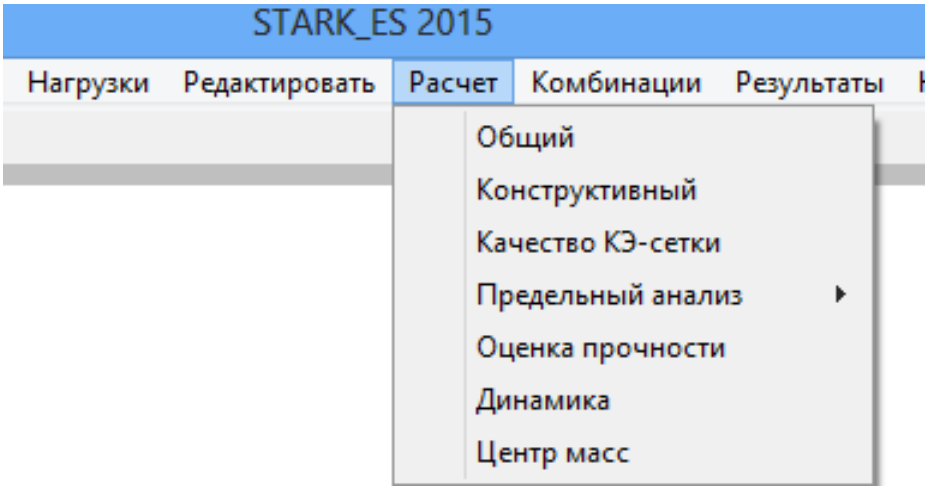


Рис. 42

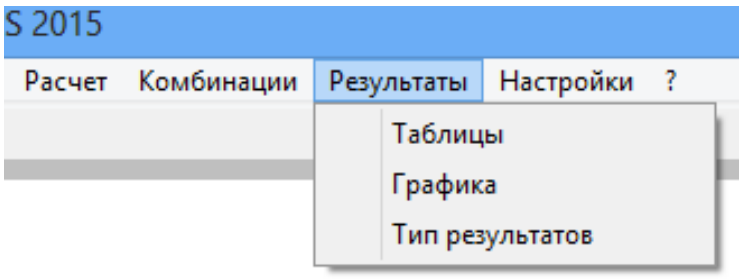


Рис. 43

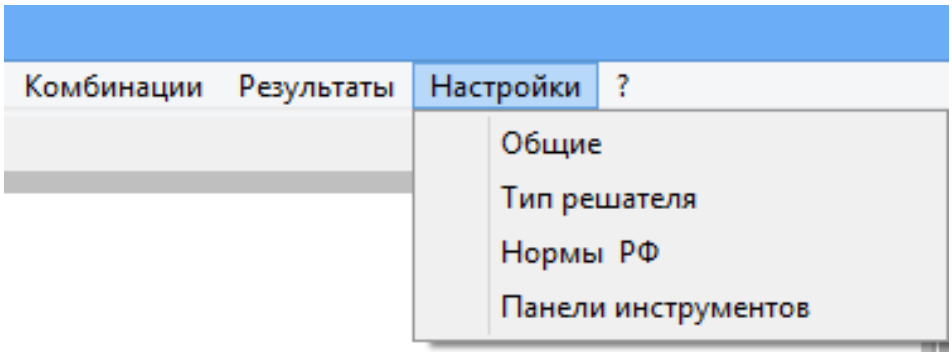


Рис. 44

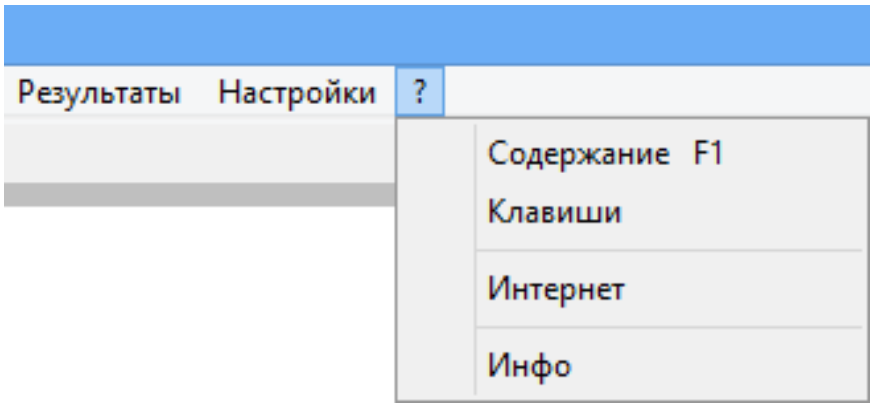


Рис. 45

Пиктографическое меню – это набор кнопок (с рисунками) наиболее часто используемых команд. Оно позволяет загружать команды быстрее, чем через верхнее меню. Количество и расположение (горизонтальной строкой под верхним меню, вертикальным столбцом по левому краю рабочего стола) этих кнопок меняется по ходу работы с программой. Кнопку нужной команды можно найти не только по рисунку: если курсор мыши удерживается на кнопке некоторое время, появляется так называемая всплывающая подсказка (окно с названием этой команды) (рис. 46).

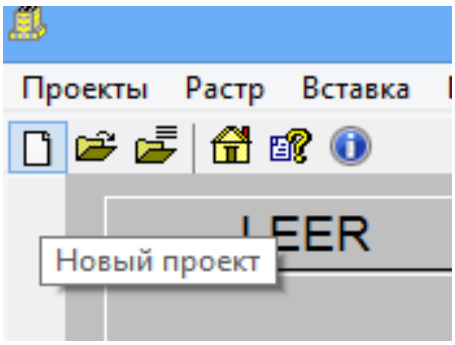


Рис. 46

Справа вверху рабочего стола расположено боковое меню по работе с видами, ниже – боковое меню, в котором в зависимости от

этапа работы программы отражается либо список пунктов верхнего меню, либо список команд текущего пункта верхнего меню.

Окно редактора используется для вызова числового табло (для задания координат точек, величин углов и др.); в окне редактора отражаются текущие значения некоторых параметров.

Окно выбора используется для выбора вариантов конечных элементов, видов систем и др.

В окне информации появляются сообщения программы пользователю о необходимых действиях.

В рабочей зоне отражается (в зависимости от этапа работы с программой) расчетная схема конструкции либо результаты расчета.

В окне координат можно просмотреть координаты.

В окне просмотра доступен общий вид текущего проекта.

Каталог проектов – это набор окон, содержащих изображения всех открытых в данное время проектов; окно актуального проекта подсвечивается красным.

При работе в ПК STARK ES помимо элементов графического интерфейса используются функциональные клавиши:

«0» – показ всего проекта в реальных размерах (автомасштабирование);

«1» … «4», «6» … «9» – перемещение области масштабирования в соответствии с направлениями, указанными на дополнительной цифровой клавиатуре;

«5» – перерисовка (регенерация) изображения в рабочей зоне;

«+», «*» – автоматическое увеличение масштаба отображения расчетной схемы в два раза;

«-», «/» – автоматическое уменьшение масштаба отображения расчетной схемы в два раза;

«.», «,» – увеличение расчетной схемы с помощью задания коэффициента;

«?» – получение информации о текущей версии программы и используемой памяти;

«!» – получение информации о текущем проекте;

«←», «↑», «→», «↓» – вращение камеры (точки зрения) вокруг проекта;

«F5» – показ каталога проектов в левой части экрана (отмена показа);

«Ctrl+Ins» – копирование изображения из рабочей зоны в буфер обмена;

«Ctrl+z» – отмена последнего изменения проекта;

«Ctrl+y» – повтор последнего изменения проекта.

Для изменения масштаба отображения расчетной схемы также можно использовать колесико мыши.

Расчет простой фермы в ПК STARK ES

Рассмотрим определение усилий и деформаций в стропильной ферме при помощи ПК STARK ES на примере плоской статически определимой балочной фермы (грузовой пояс – верхний), показанной на рис. 47.

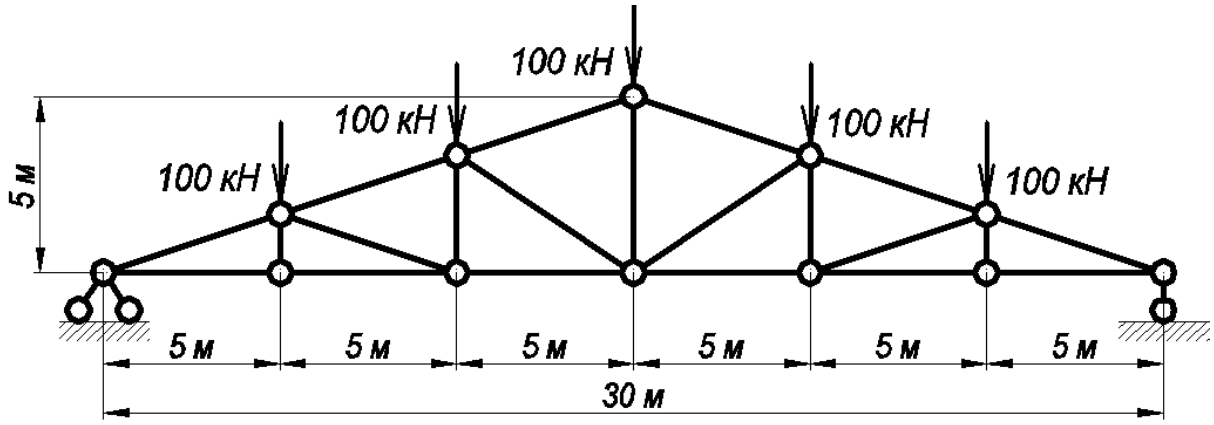


Рис. 47

Сначала с помощью команды **Проекты – Создать** создаем новый проект (новый файл). В диалоговом окне команды (рис. 48) выбираем вариант проекта *FEA-Проект*, вариант пути для хранения файлов *Создать в корневой директории \StarkPrj*. Необходимо также ввести имя файла (не более восьми символов, без использования символов «пробел», «двоеточие», «звездочка» и некоторых других), название проекта (станет именем папки для хранения файлов), примечания, фамилию исполнителя. Введение данных подтверждается клавишей *OK*. После этого на рабочем столе слева появляется окно этого файла (имя файла – *ПРОСТАЯ.fea*) (рис. 49).

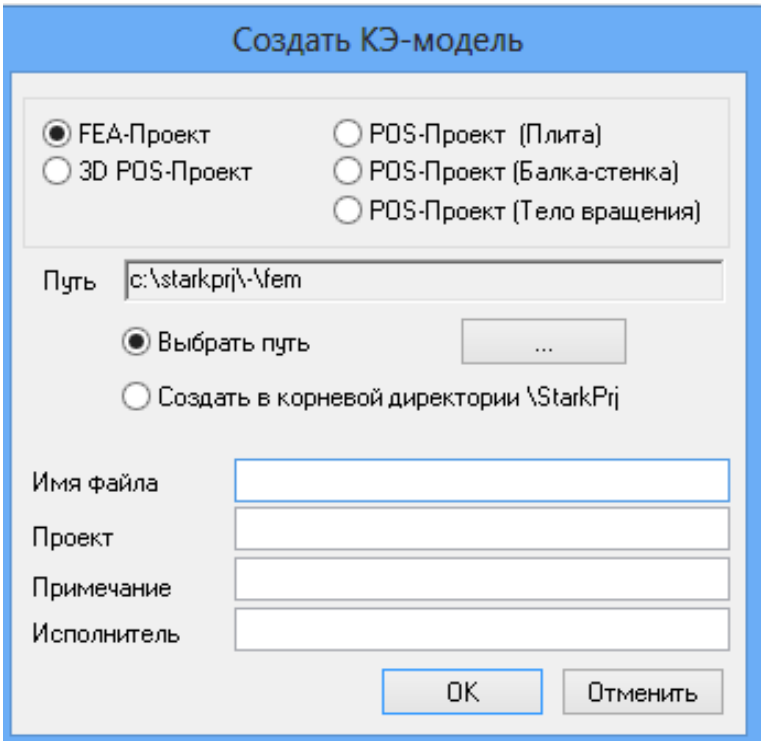

Создать КЭ-модель
FEA-Проект
3D POS-Проект
POS-Проект (Плита)
POS-Проект (Балка-стенка)
POS-Проект (Тело вращения)
Путь
c:\starkprj\-\fem
Выбрать путь
...
Создать в корневой директории \StarkPrj
Имя файла
Проект
Примечание
Исполнитель
OK
Отменить

Рис. 48

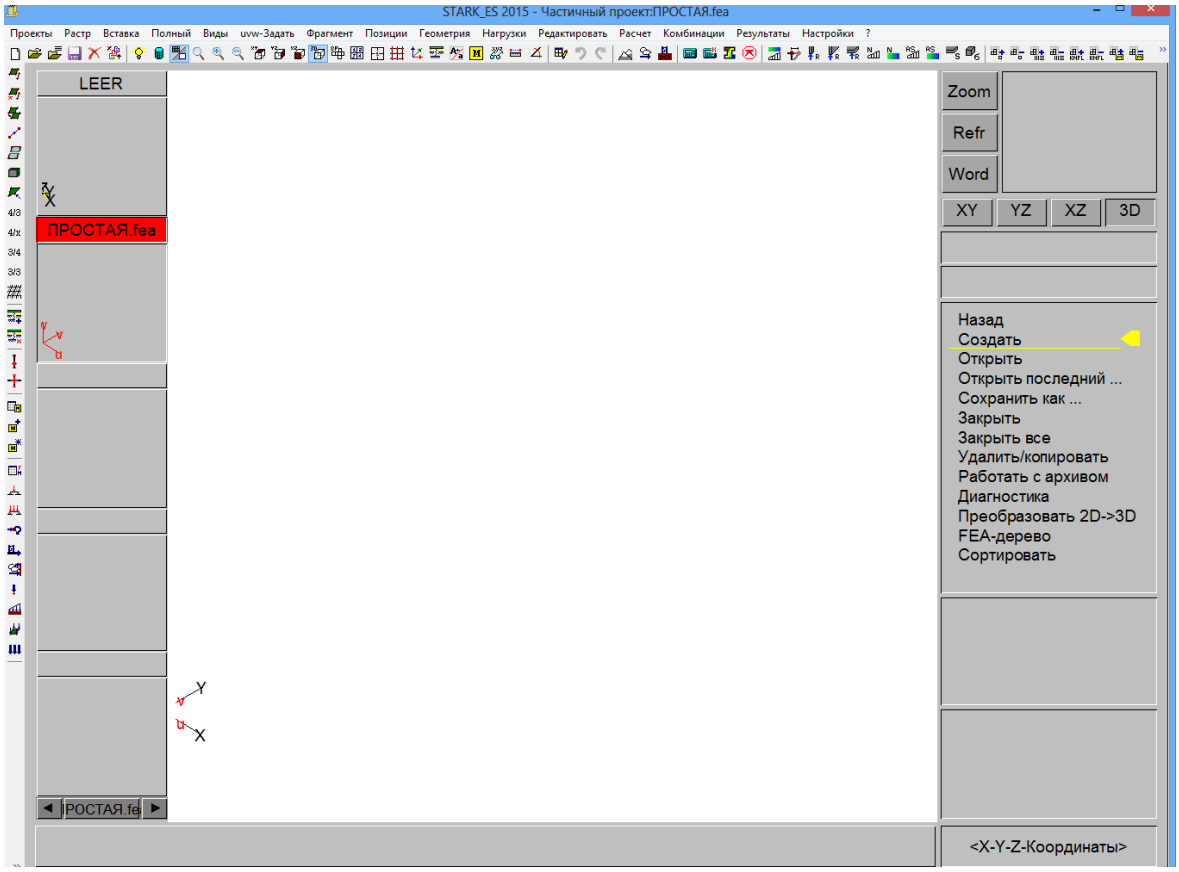

STARK_ES 2015 - Частичный проект:ПРОСТАЯ.fea
Проекты Растр Вставка Полный Виды uvw-Задать Фрагмент Позиции Геометрия Нагрузки Редактировать Расчет Комбинации Результаты Настройки ?
LEER
ПРОСТАЯ.fea
Zoom
Refr
Word
XY YZ XZ 3D
Назад
Создать
Открыть
Открыть последний ...
Сохранить как ...
Закрыть
Закрыть все
Удалить/копировать
Работать с архивом
Диагностика
Преобразовать 2D->3D
FEA-дерево
Сортировать
<X-Y-Z-Координаты>

Рис. 49

Затем формируем геометрическую модель фермы. Это можно сделать, используя шаблоны либо задавая каждый элемент по отдельности координатами его узлов. Для ферм эффективно применять шаблоны, которых в ПК STARK ES достаточно много.

Воспользуемся командой **Геометрия – Создать: Рама/Ферма** (рис. 50). После ее загружения в окне выбора нажимаем клавиши *3D-стержни, Фермы, Установить* (рис. 51). Затем в окне информации появляется сообщение *«Установите точку P1, начальную точку системы»* (таким образом указывается расположение геометрической модели фермы по отношению к системе координат) (см. рис. 51).

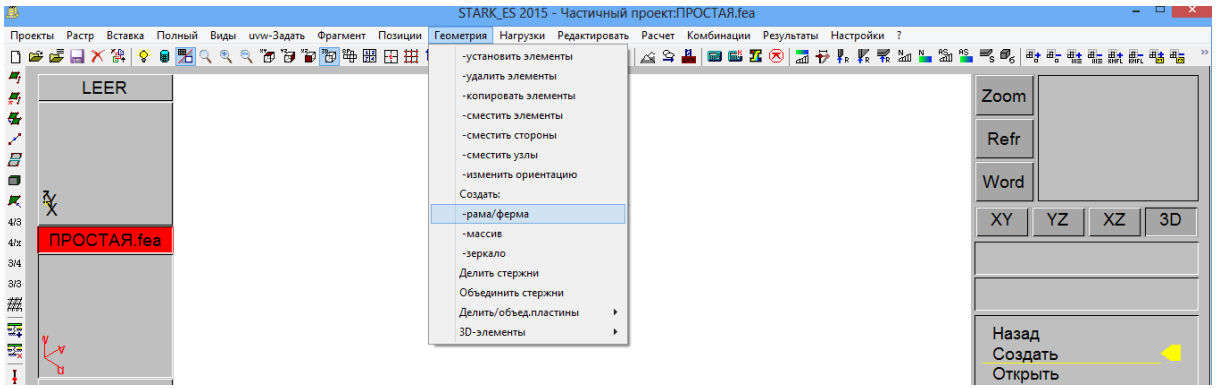


Рис. 50

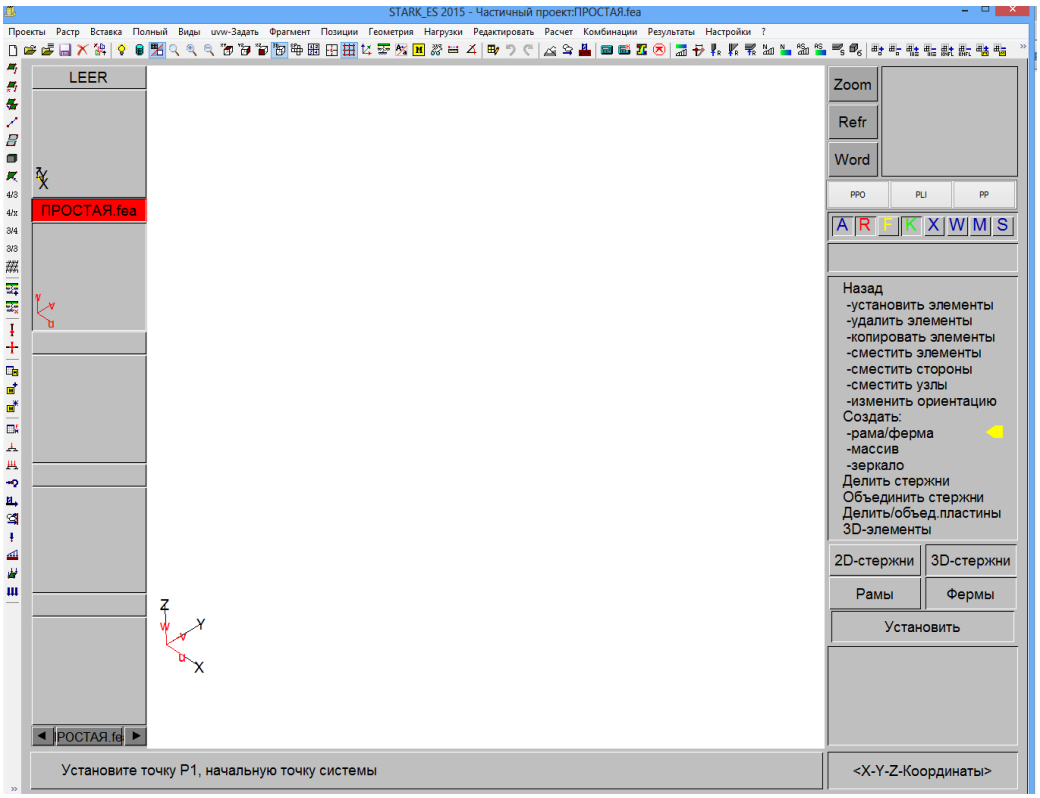


Рис. 51

Для задания этой точки делаем щелчок в окне редактора; после этого появляется табло для задания координат этой точки (рис. 52); установим эту точку в начало координат (рис. 53).

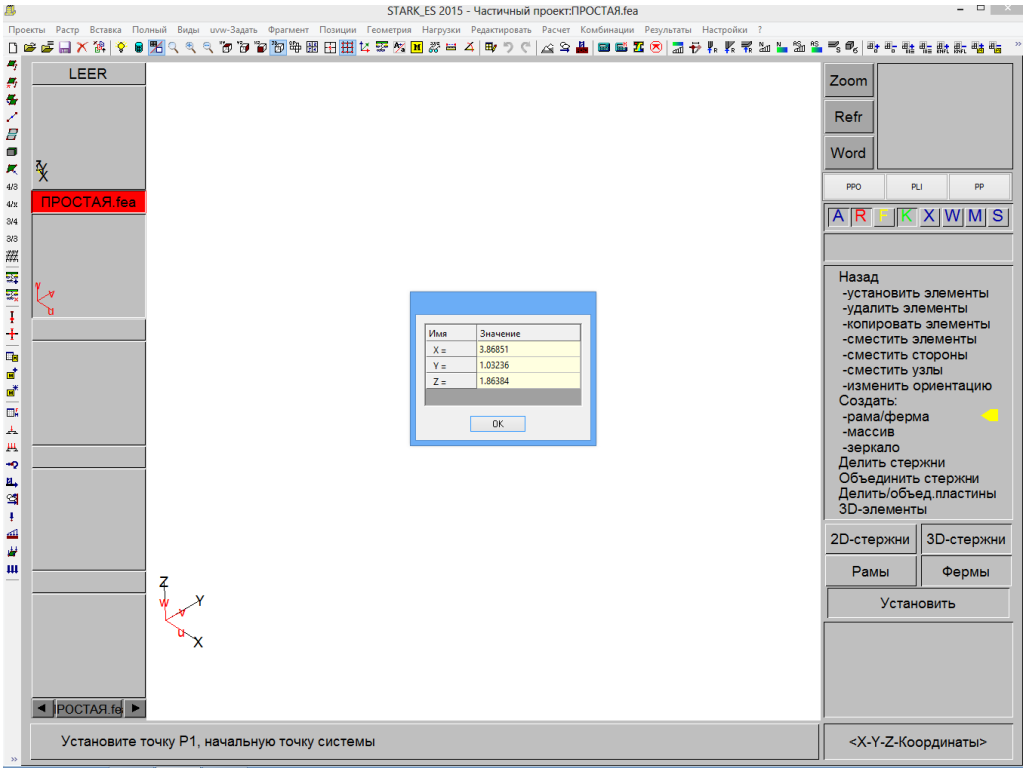


Рис. 52

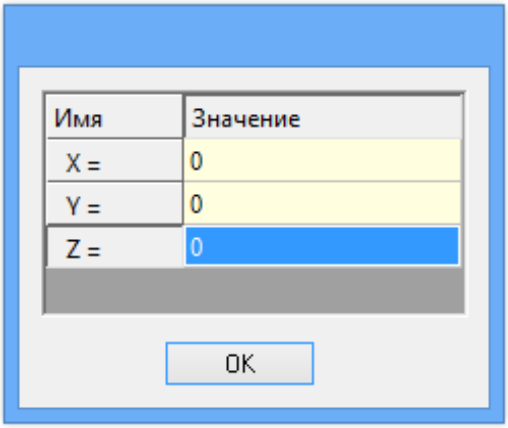


Рис. 53

Затем в окне информации появляется сообщение *«Установите точку P2, точку на положительной R-оси»* (таким образом указывается первая ось координатной плоскости, в которой будет расположена плоскость фермы) (рис. 54); если это будет ось *x*, то координаты этой точки могут быть заданы так, как это показано на рис. 55.

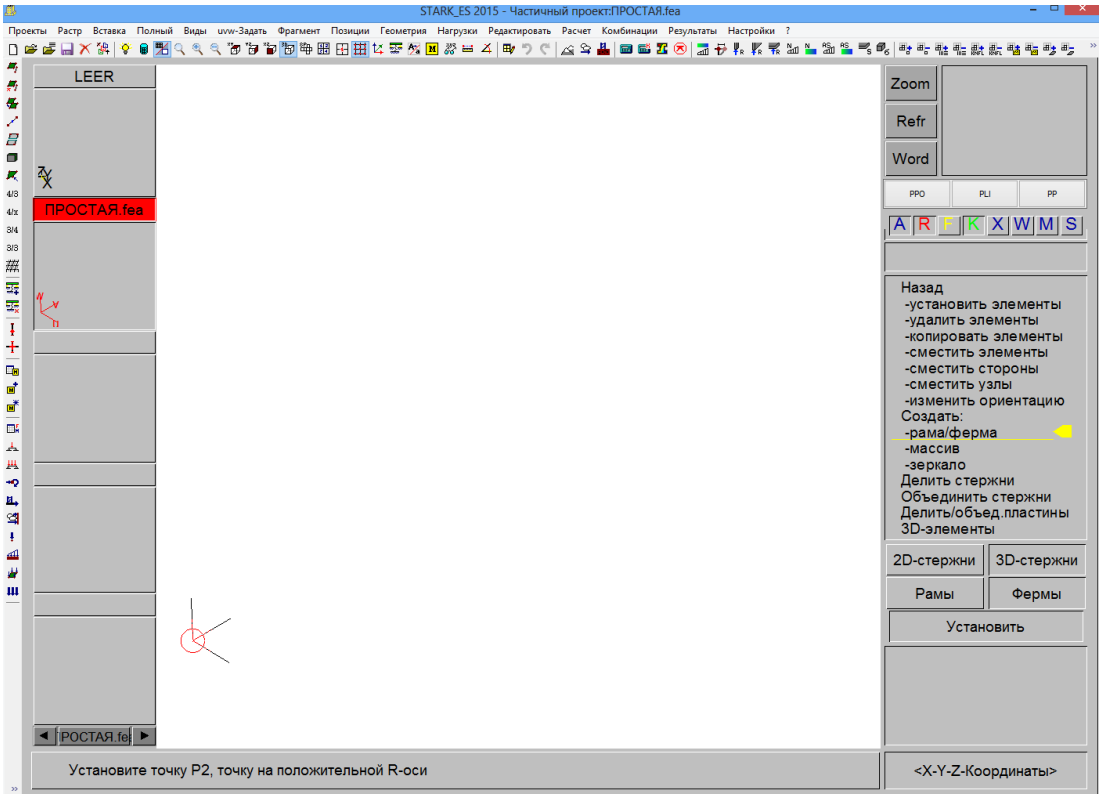


Рис. 54

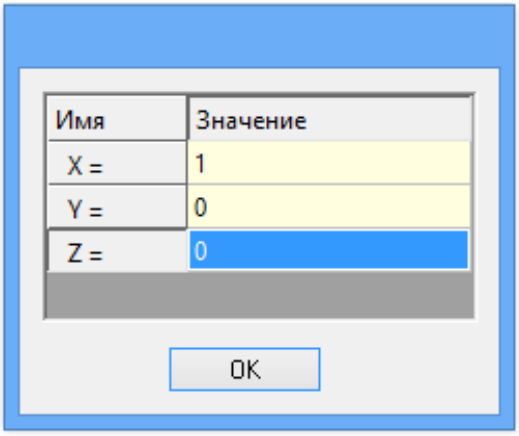


Рис. 55

После этого в окне информации появляется сообщение *«Установите точку P3, точку в RS-плоскости»* (таким образом указывается вторая ось координатной плоскости, в которой будет расположена плоскость фермы) (рис. 56); если это будет ось *y*, то координаты этой точки могут быть заданы так, как это показано на рис. 57. Затем появляется табло, в котором необходимо задать угол, который будет составлять пояс фермы с осью *x* (рис. 58); в нашем случае этот угол равен нулю.

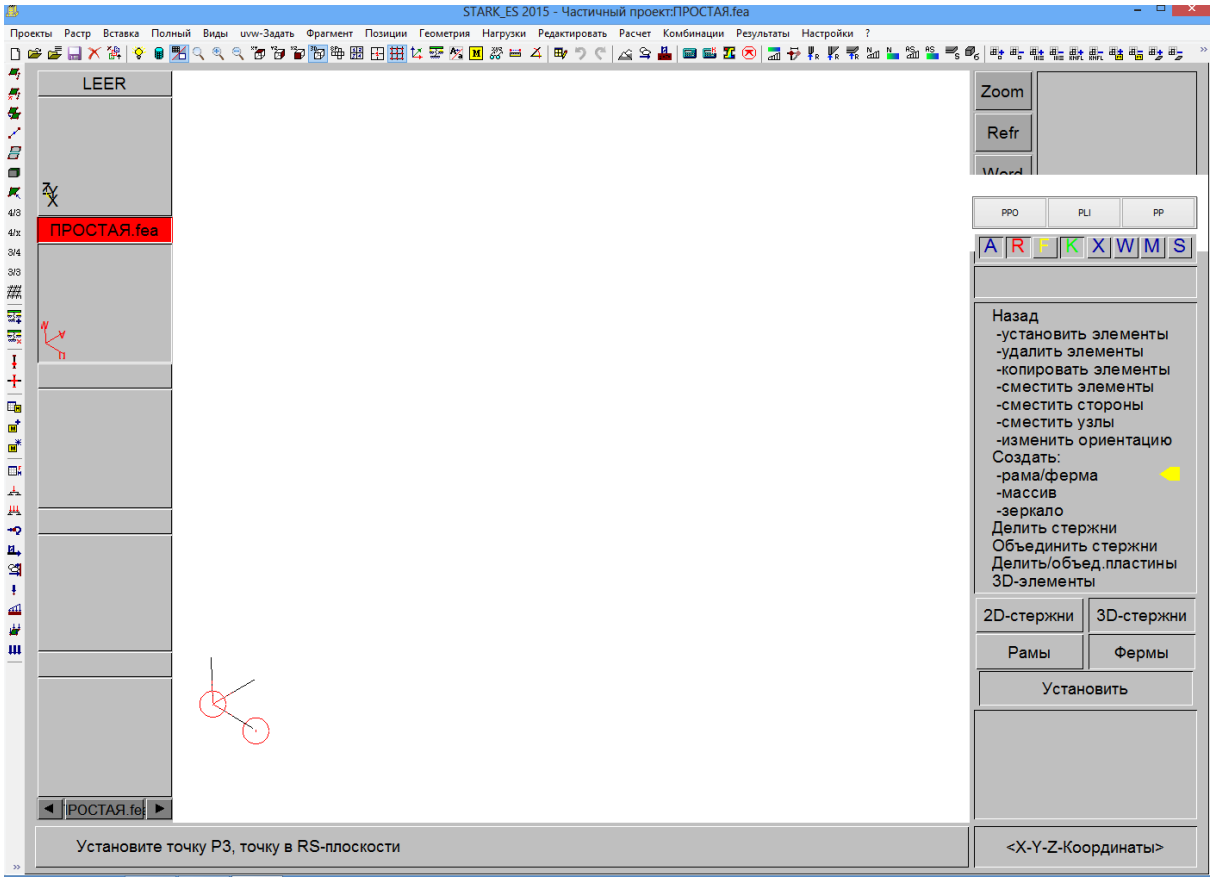


Рис. 56

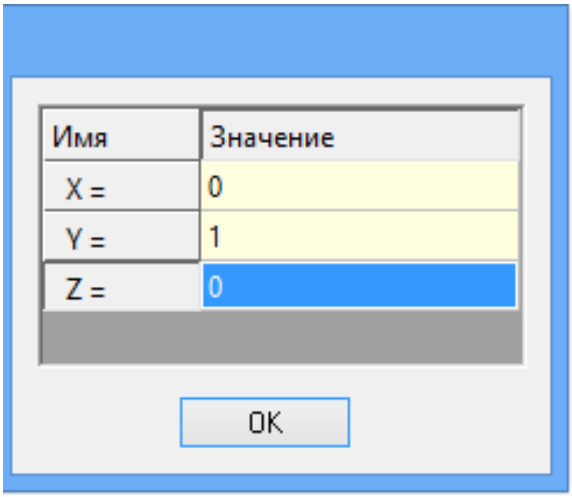


Рис. 57

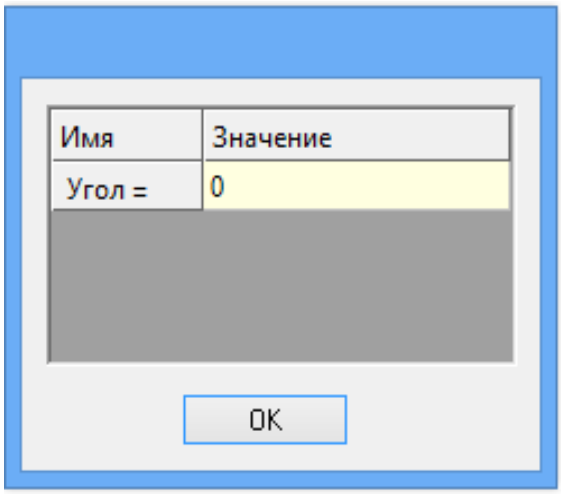


Рис. 58

Только после всех этих настроек появляется диалоговое окно команды **Геометрия – Создать: Рама/Ферма** (рис. 59).

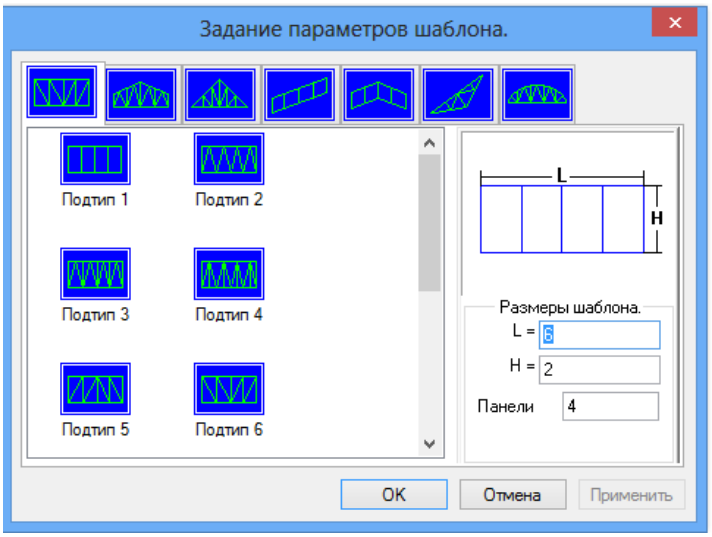


Рис. 59

В диалоговом окне сначала в верхнем графическом меню, состоящем из семи пунктов, выбираем вариант фермы по общему очертанию – треугольную ферму (рис. 60). Затем в развернувшемся ниже графическом меню выбираем вариант фермы по виду решетки (см. рис. 60) – ферму с раскосной решеткой, *Подтип 1* (рис. 61). В правой части диалогового окна задаем необходимые геометрические параметры выбранного варианта: длину фермы (*L*), ее высоту (*H*) и число ее панелей (рис. 62). После нажатия клавиши *OK* геометрическая модель появляется в рабочей зоне (рис. 63).

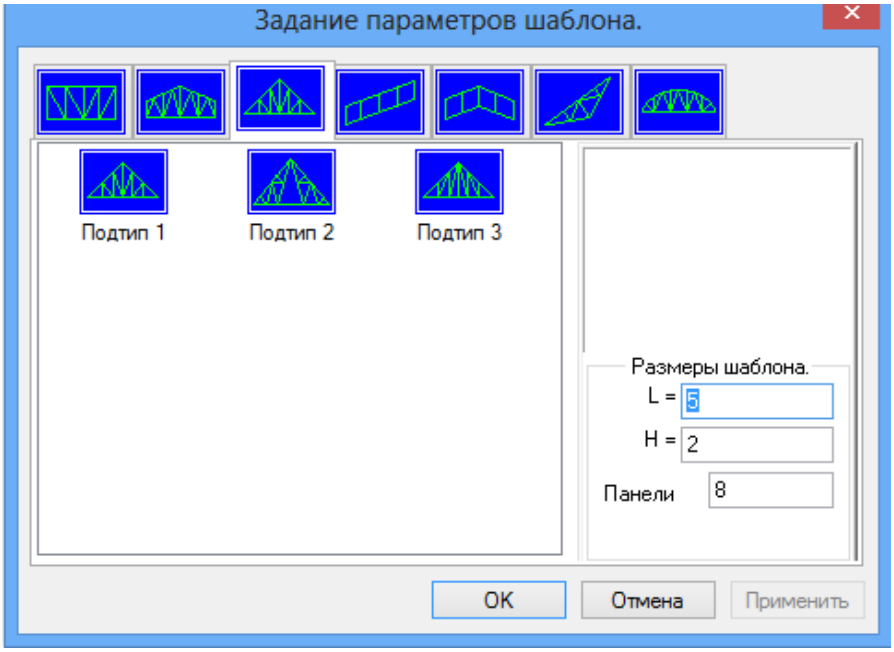


Рис. 60

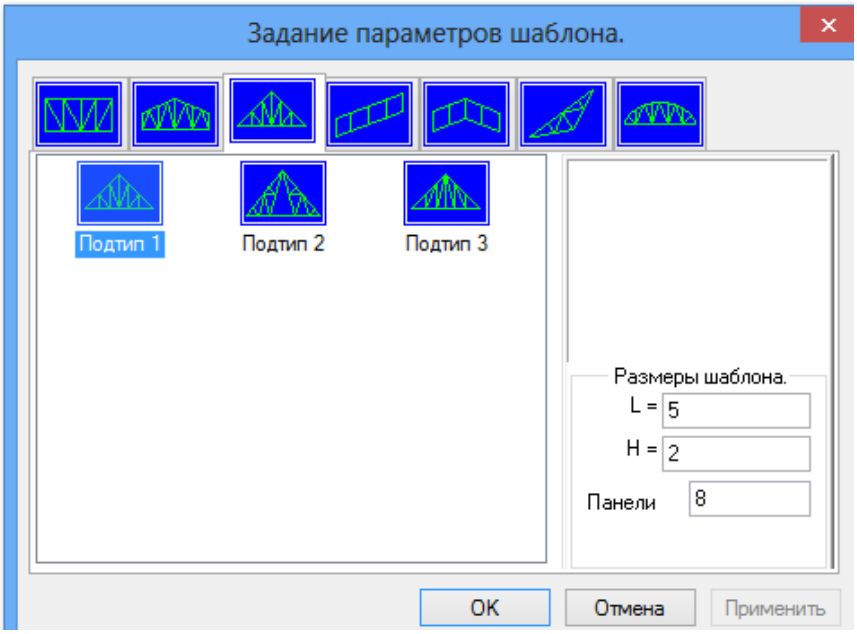


Рис. 61

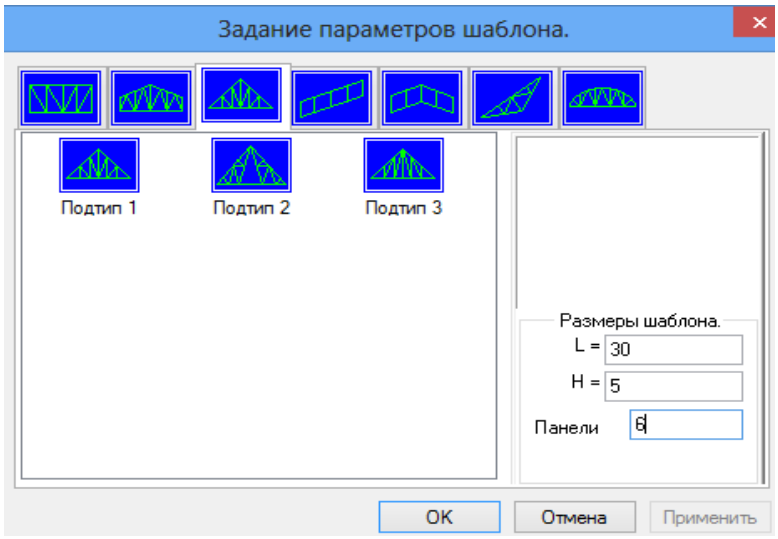


Рис. 62

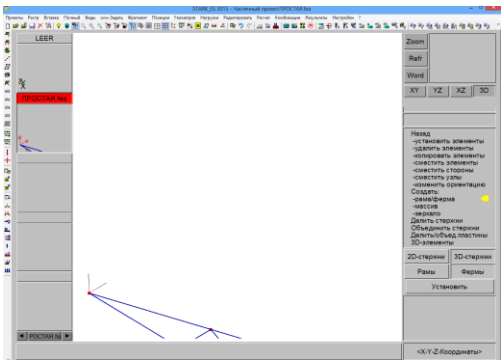


Рис. 63

Если плоскость фермы не совпадает с плоскостью экрана, необходимо использовать видовую команду **XY** из бокового меню видовых команд (рис. 64). Чтобы поместить ферму в центр экрана, нажимаем клавишу **0** на клавиатуре (рис. 65).

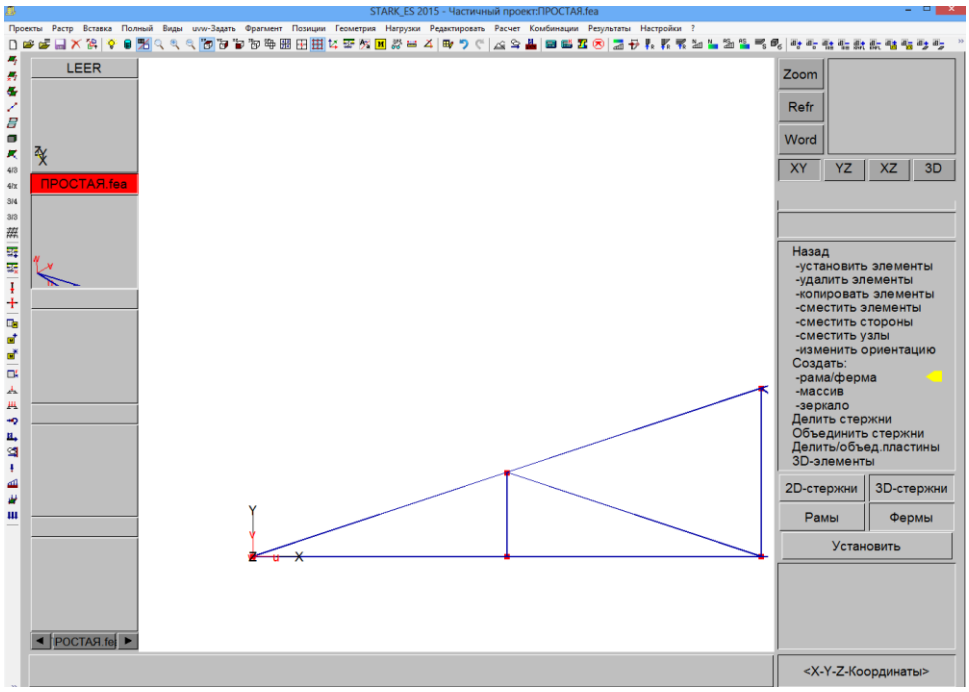


Рис. 64

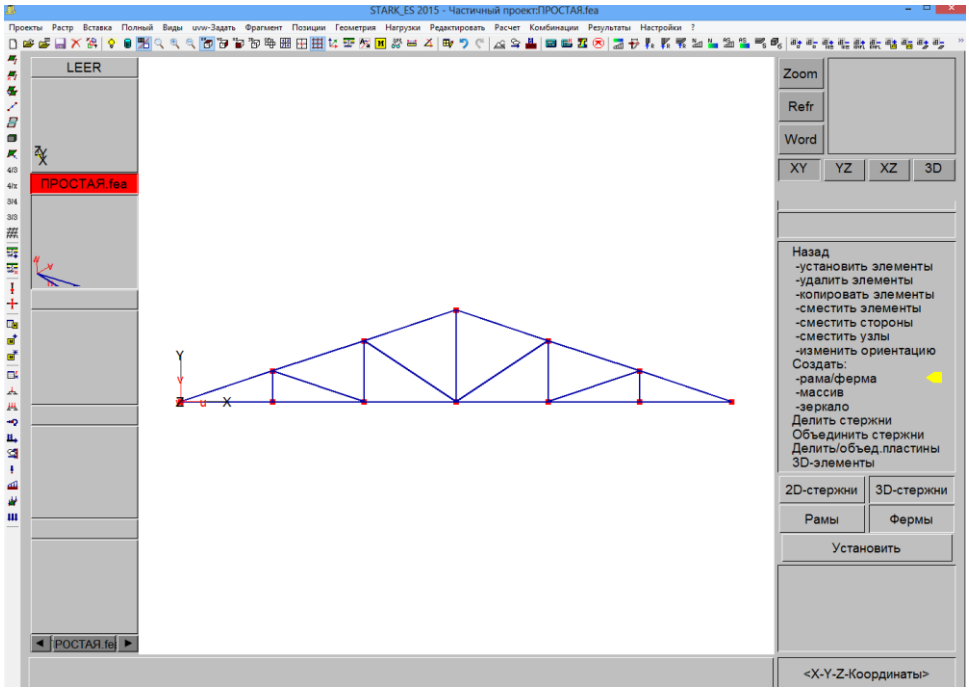


Рис. 65

Далее в любом порядке задаем остальные параметры расчетной схемы. Зададим жесткости элементов. Для этого загружаем команду **Редактировать – Материалы: *Установить*** (рис. 66). В окне выбора нажимаем клавишу *3D-стержни* (рис. 67). В боковом меню нажимаем клавишу *Новый материал* (см. рис. 67), после чего появляется диалоговое окно команды (рис. 68). В нем видим характеристики материала и сечения по умолчанию. Зададим плотность материала *Rho* равной нулю, так как собственный вес фермы не учитываем; используя клавишу «...» диалогового окна, выберем в качестве материала сталь (рис. 69). После нажатия клавиши *OK* в окне информации появляется сообщение *«Выберите стержневые элементы для установки материала»* (рис. 70). Указываем курсором на все элементы фермы; они будут отмечены цифрой *1* (рис. 71).

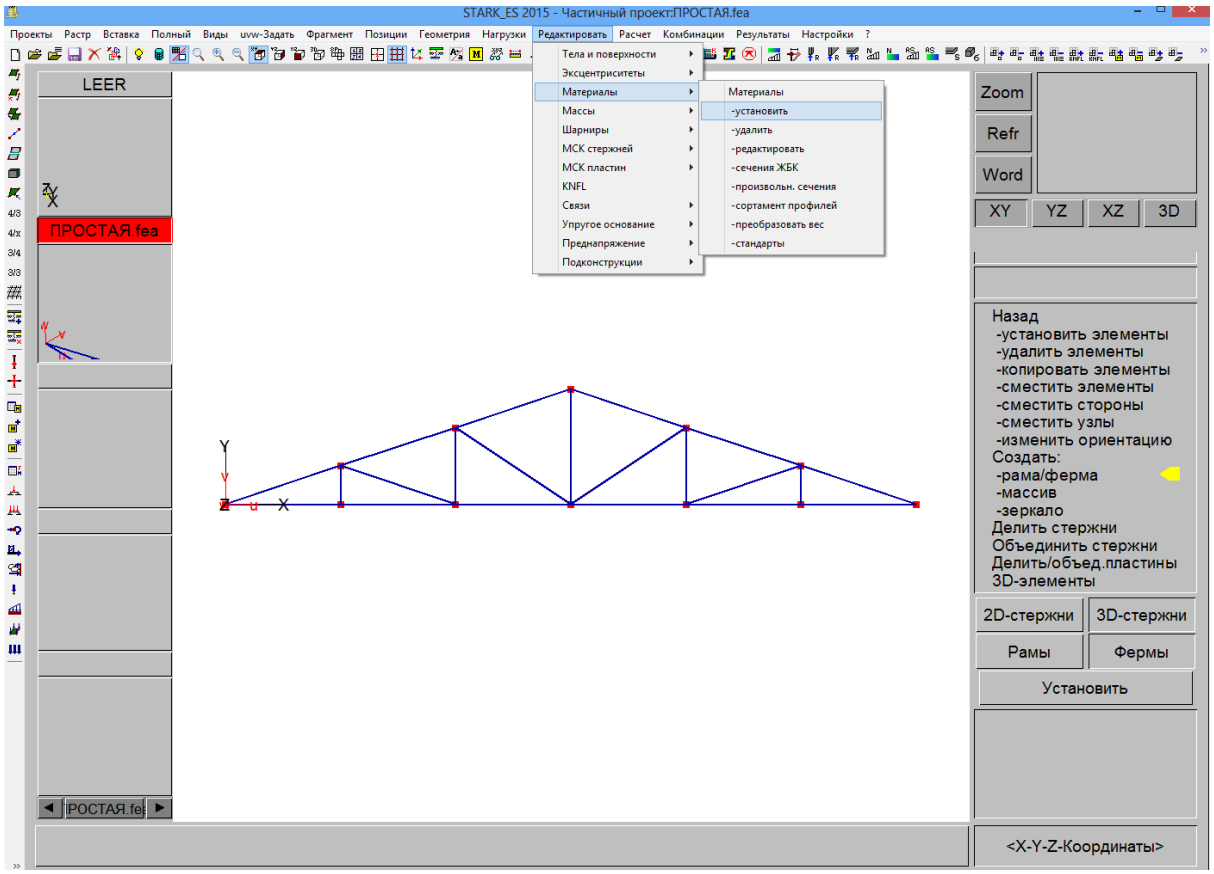


Рис. 66

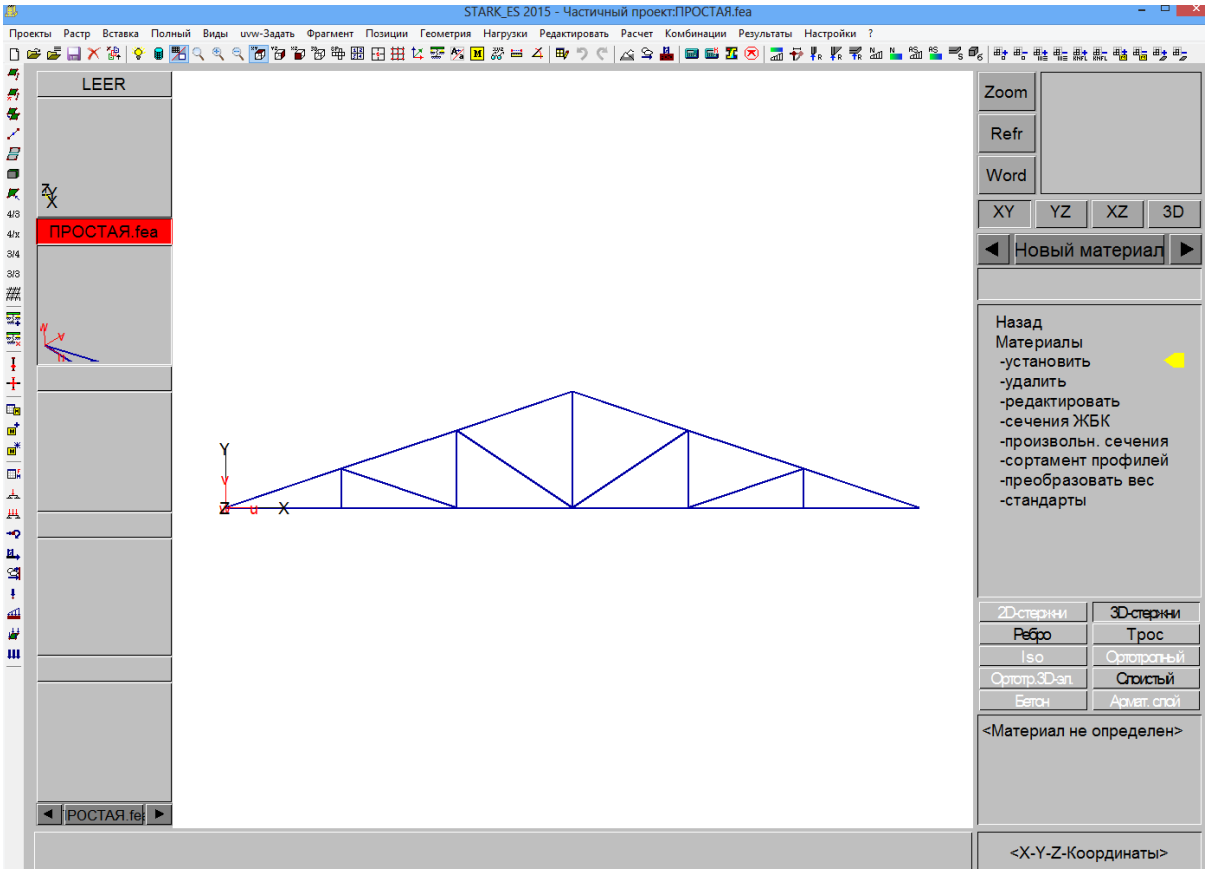

STARK_ES 2015 - Частичный проект:ПРОСТАЯ.fea
Проекты Растр Вставка Полный Виды uvw-Задать Фрагмент Позиции Геометрия Нагрузки Редактировать Расчет Комбинации Результаты Настройки ?
LEER
ПРОСТАЯ.fea
Zoom
Refr
Word
XY YZ XZ 3D
Новый материал
Назад
Материалы
-установить
-удалить
-редактировать
-сечения ЖБК
-произвольн. сечения
-сортамент профилей
-преобразовать вес
-стандарты
2D-стержни
3D-стержни
Ребро
Трос
Iso
Ортотроп.3D-эл.
Сплошной
Бетон
Армат. слой
<Материал не определен>
<X-Y-Z-Координаты>

Рис. 67

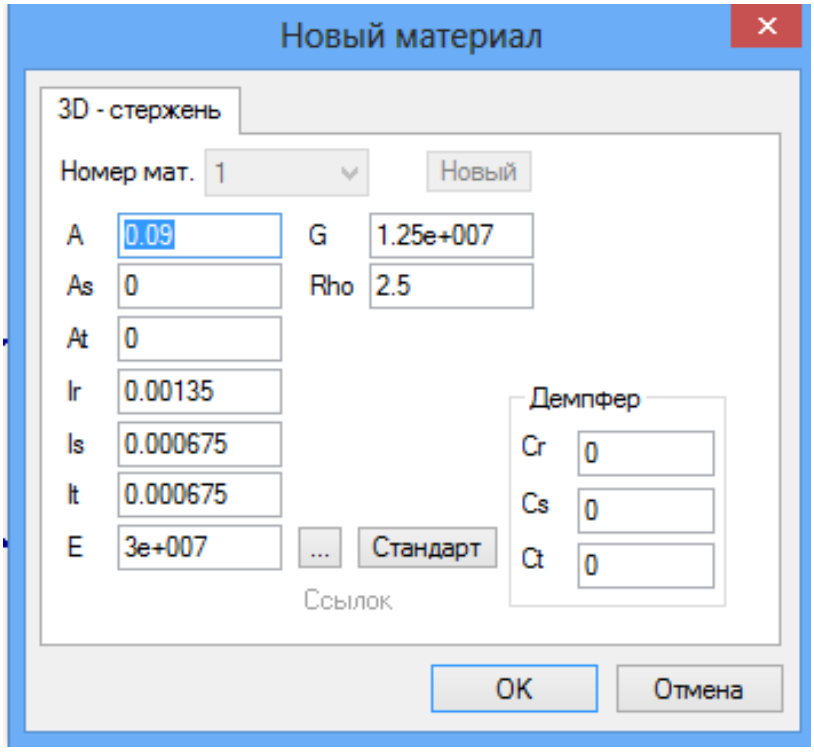

Новый материал
3D - стержень
Номер мат. 1
Новый
A 0.09
G 1.25e+007
As 0
Rho 2.5
At 0
Ir 0.00135
Is 0.000675
It 0.000675
E 3e+007
...
Стандарт
Ссылок
Демпфер
Cr 0
Cs 0
Ct 0
OK
Отмена

Рис. 68

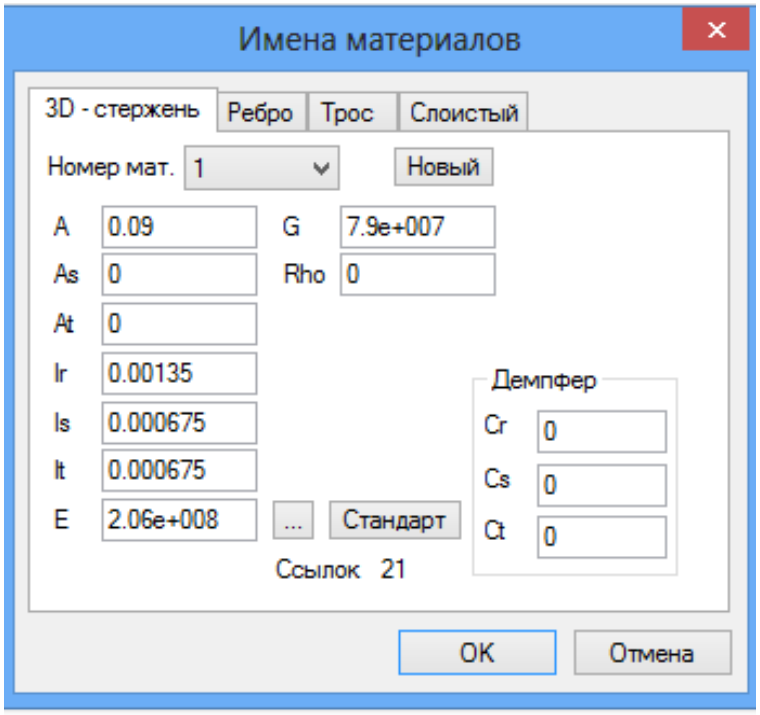

Имена материалов
3D - стержень
Ребро
Трос
Слоистый
Номер мат.
1
Новый
A
0.09
G
7.9e+007
As
0
Rho
0
At
0
Ir
0.00135
Демпфер
Is
0.000675
Cr
0
It
0.000675
Cs
0
E
2.06e+008
...
Стандарт
Ct
0
Ссылок 21
OK
Отмена

Рис. 69

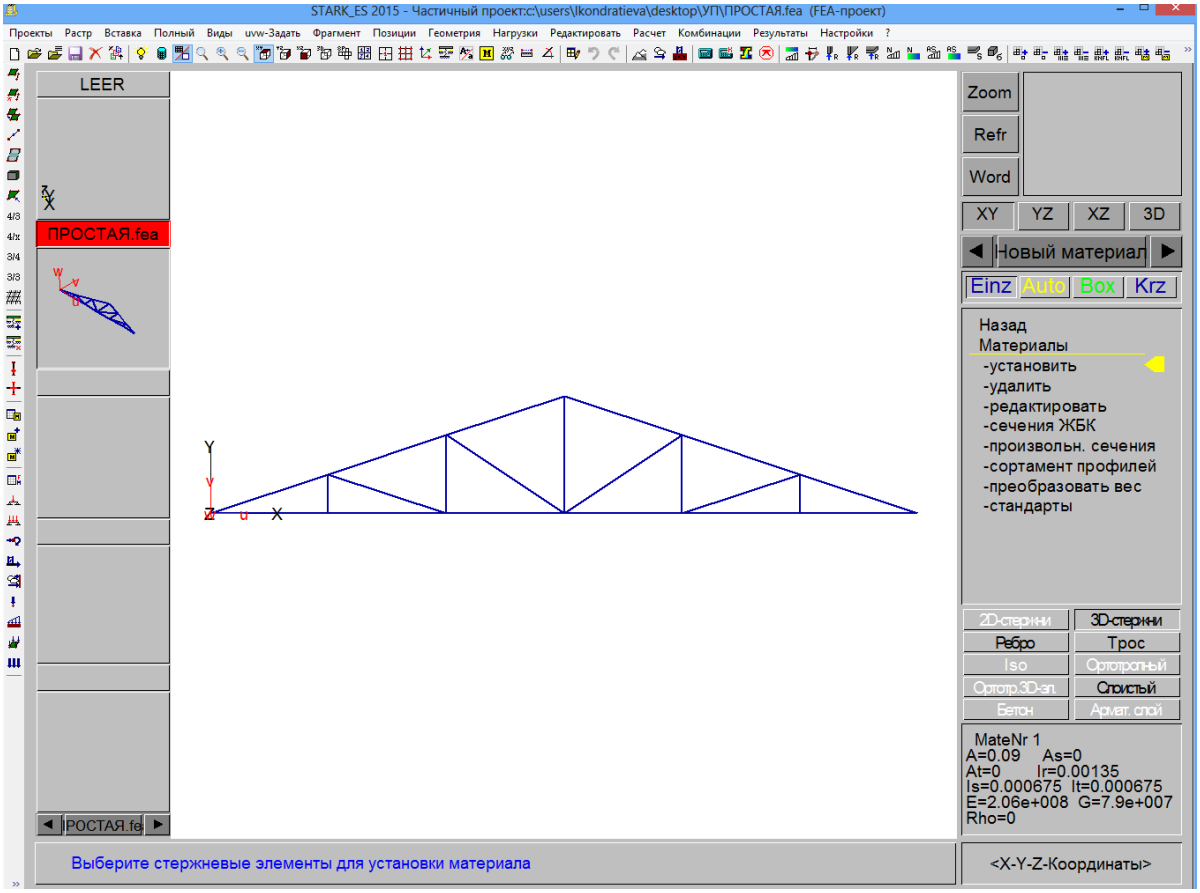

STARK_ES 2015 - Частичный проект:c:\users\lkondratieva\desktop\УП\ПРОСТАЯ.fea (FEA-проект)
LEER
ПРОСТАЯ.fea
Zoom
Refr
Word
XY
YZ
XZ
3D
Новый материал
Einz
Auto
Box
Krz
Назад
Материалы
-установить
-удалить
-редактировать
-сечения ЖБК
-произвольн. сечения
-сортамент профилей
-преобразовать вес
-стандарты
2D-стержни
3D-стержни
Ребро
Трос
Iso
Ортотропный
Ортотр.3D-эл.
Слоистый
Бетон
Армат. слой
MateNr 1
A=0.09 As=0
At=0 Ir=0.00135
Is=0.000675 It=0.000675
E=2.06e+008 G=7.9e+007
Rho=0
Выберите стержневые элементы для установки материала
<X-Y-Z-Координаты>

Рис. 70

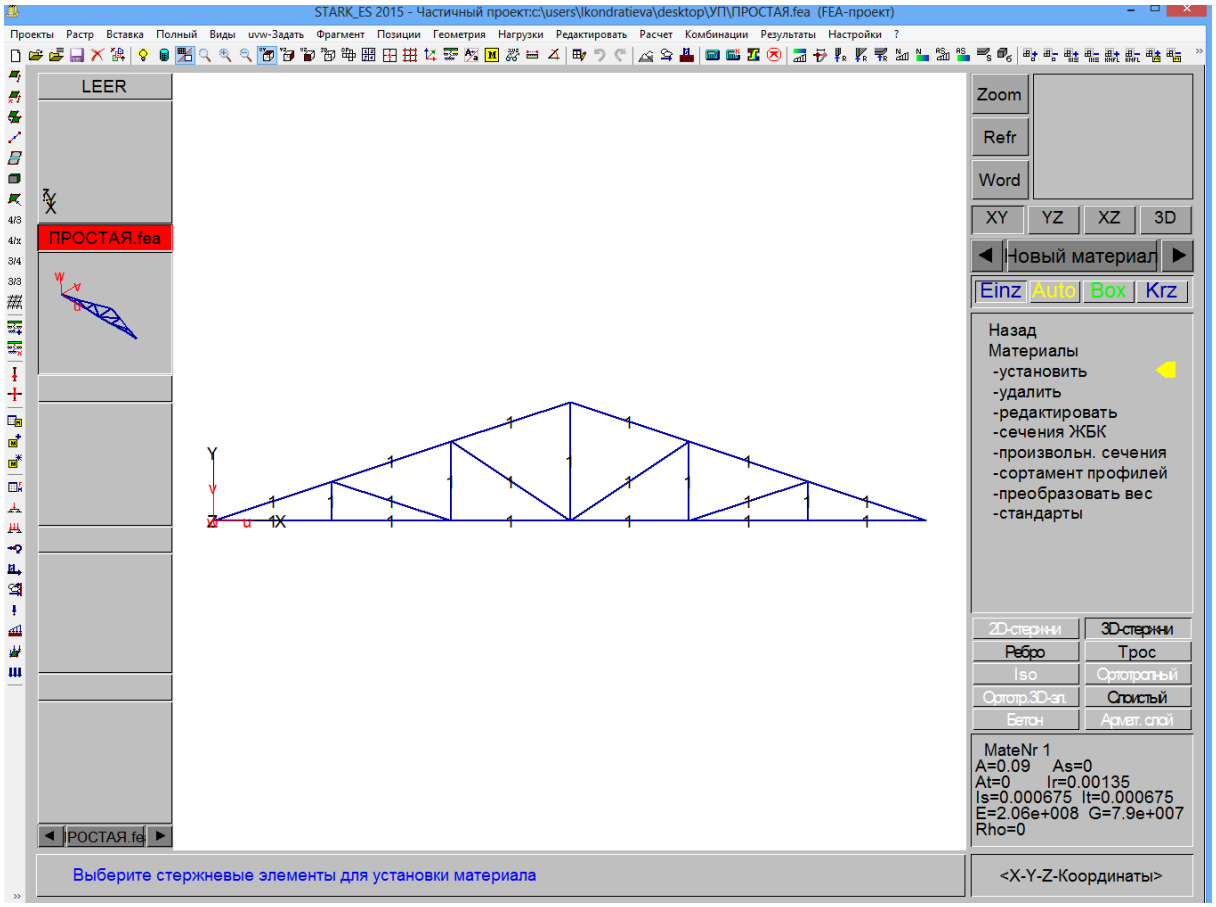


Рис. 71

Зададим опорные связи. Для этого загружаем команду **Редактировать – Связи – Опорные закрепления:** ***Установить*** (рис. 72). Для задания шарнирно-неподвижной опоры в окне выбора нажимаем клавиши *X*, *Y*, *Z* (указываем направления, перемещения по которым опора запрещает) и *Сж.+P.* (рис. 73). Далее, следуя указанию в окне информации *«Выберите узлы для установки опорных закреплений»*, указываем курсором на крайний левый узел фермы, после чего там появляется схематическое обозначение опоры (см. рис. 73). Для задания шарнирно-подвижной опоры (и обеспечения геометрической неизменяемости системы) в окне выбора нажимаем клавиши *Y*, *Z*, R_x (рис. 74) и указываем курсором на крайний правый узел фермы (рис. 75). В процессе установки опорных связей обозначения некоторых связей исчезают (только обозначения, а не сами связи); чтобы увидеть все установленные опорные связи, используем кнопку **Опоры** пиктографического меню.

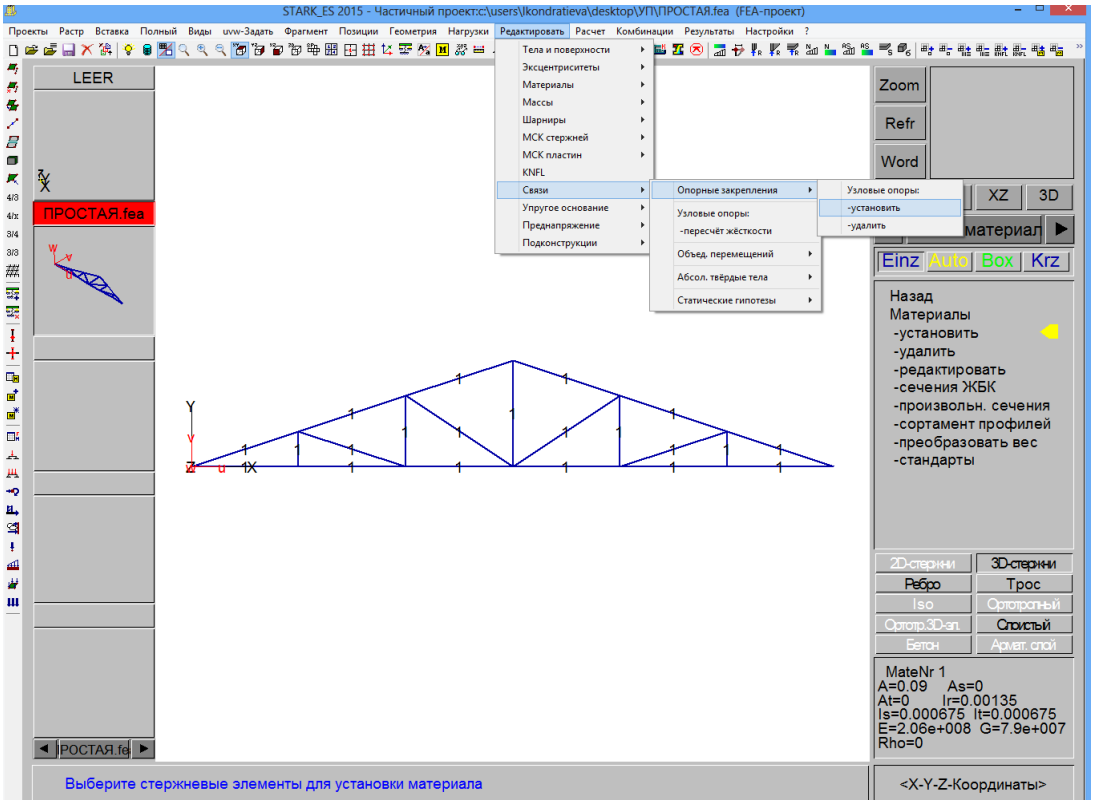

STARK_ES 2015 - Частичный проект:c:\users\kondratieva\desktop\УГЛ\ПРОСТАЯ.fea (FEA-проект)
Редактировать
Тела и поверхности
Эксцентриситеты
Материалы
Массы
Шарниры
МСК стержней
МСК пластин
KNFL
Связи
Упругое основание
Преднапряжение
Подконструкции
Опорные закрепления
Узловые опоры:
-пересчёт жёсткости
Объед. перемещений
Абсол. твёрдые тела
Статические гипотезы
Узловые опоры:
-установить
-удалить
LEER
ПРОСТАЯ.fea
Zoom
Refr
Word
XZ
3D
Einz
Auto
Box
Krz
Назад
Материалы
-установить
-удалить
-редактировать
-сечения ЖБК
-произвольн. сечения
-сортамент профилей
-преобразовать вес
-стандарты
2D-стержни
3D-стержни
Ребро
Трос
Iso
Ортотропный
Ортотр.3D-эл.
Слоистый
Бетон
Армат. слой
MateNr 1
A=0.09 As=0
At=0 Ir=0.00135
Is=0.000675 It=0.000675
E=2.06e+008 G=7.9e+007
Rho=0
Выберите стержневые элементы для установки материала
<X-Y-Z-Координаты>

Рис. 72

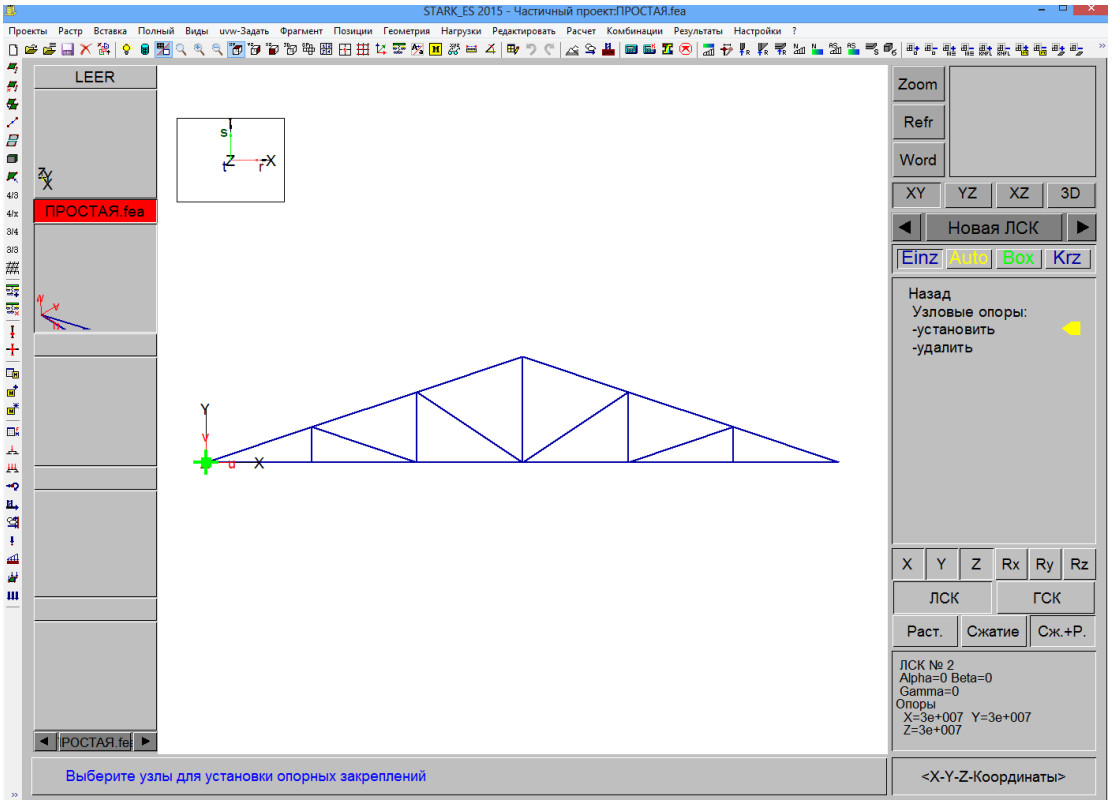

STARK_ES 2015 - Частичный проект:ПРОСТАЯ.fea
LEER
ПРОСТАЯ.fea
Zoom
Refr
Word
XY
YZ
XZ
3D
Новая ЛСК
Einz
Auto
Box
Krz
Назад
Узловые опоры:
-установить
-удалить
X
Y
Z
Rx
Ry
Rz
ЛСК
ГСК
Раст.
Сжатие
Сж.+Р.
ЛСК № 2
Alpha=0 Beta=0
Gamma=0
Опоры
X=3e+007 Y=3e+007
Z=3e+007
Выберите узлы для установки опорных закреплений
<X-Y-Z-Координаты>

Рис. 73

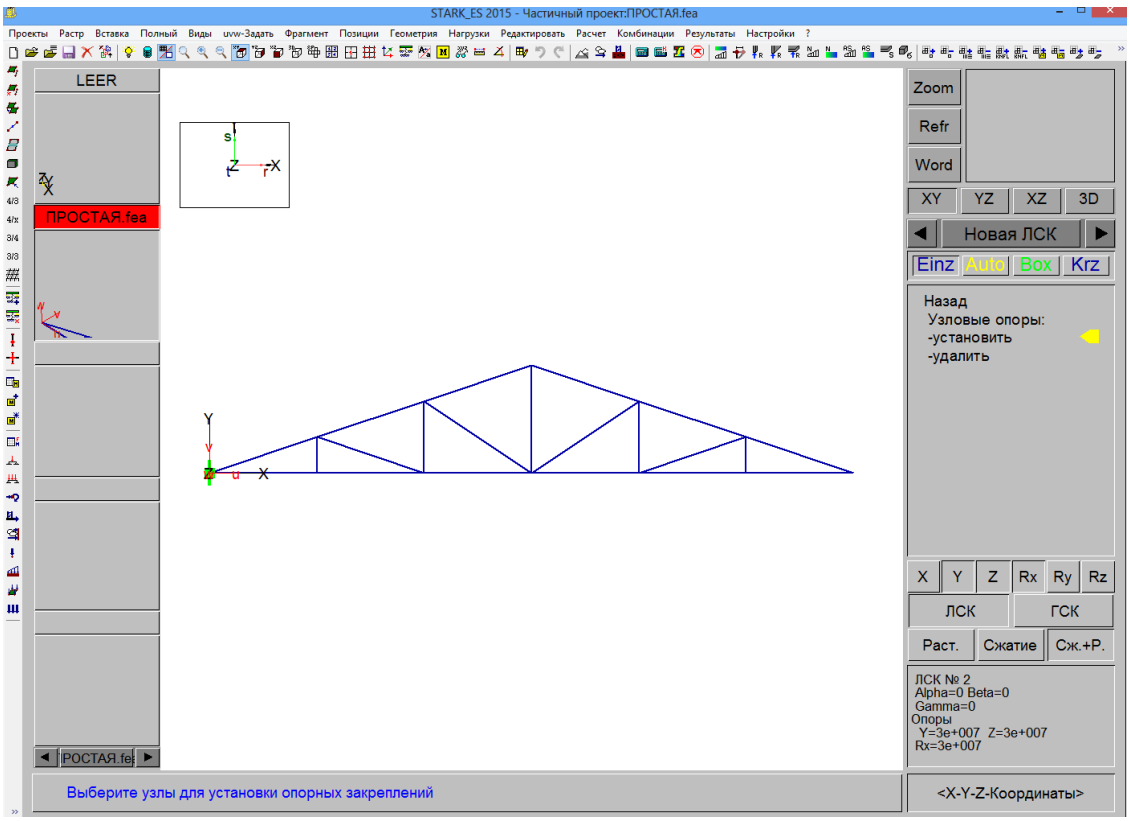

STARK_ES 2015 - Частичный проект:ПРОСТАЯ.fea
LEER
ПРОСТАЯ.fea
Zoom
Refr
Word
XY
YZ
XZ
3D
Новая ЛСК
Einz
Auto
Box
Krz
Назад
Узловые опоры:
-установить
-удалить
X
Y
Z
Rx
Ry
Rz
ЛСК
ГСК
Раст.
Сжатие
Сж.+Р.
ЛСК № 2
Alpha=0 Beta=0
Gamma=0
Опоры
Y=3e+007 Z=3e+007
Rx=3e+007
Выберите узлы для установки опорных закреплений
<X-Y-Z-Координаты>

Рис. 74

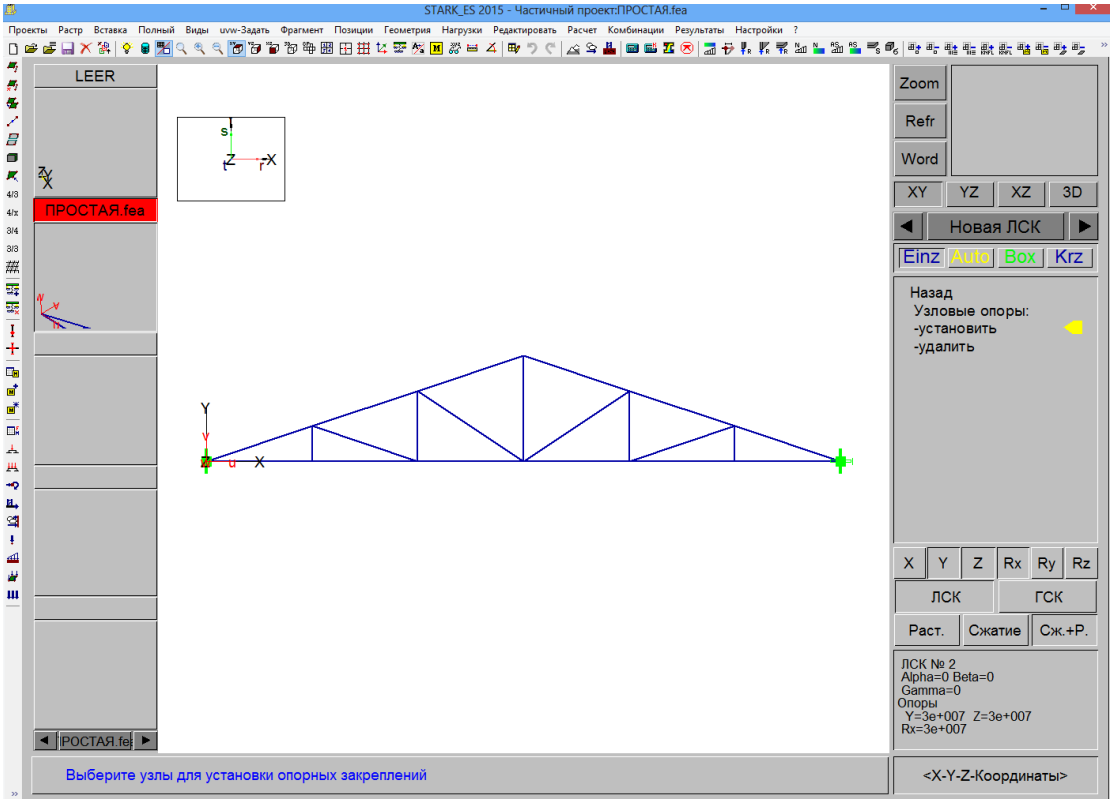

STARK_ES 2015 - Частичный проект:ПРОСТАЯ.fea
LEER
ПРОСТАЯ.fea
Zoom
Refr
Word
XY
YZ
XZ
3D
Новая ЛСК
Einz
Auto
Box
Krz
Назад
Узловые опоры:
-установить
-удалить
X
Y
Z
Rx
Ry
Rz
ЛСК
ГСК
Раст.
Сжатие
Сж.+Р.
ЛСК № 2
Alpha=0 Beta=0
Gamma=0
Опоры
Y=3e+007 Z=3e+007
Rx=3e+007
Выберите узлы для установки опорных закреплений
<X-Y-Z-Координаты>

Рис. 75

Зададим связи между элементами. Для этого загружаем команду **Редактировать – Шарниры – Элементные:** ***Установить*** (рис. 76). В окне выбора нажимаем клавишу $R_{z/t}$ (указываем направление взаимного смещения соединяемых связью элементов, которое эта связь разрешает, в нашем случае это взаимный поворот относительно оси *z*) (рис. 77). Результат установки шарниров показан на рис. 78.

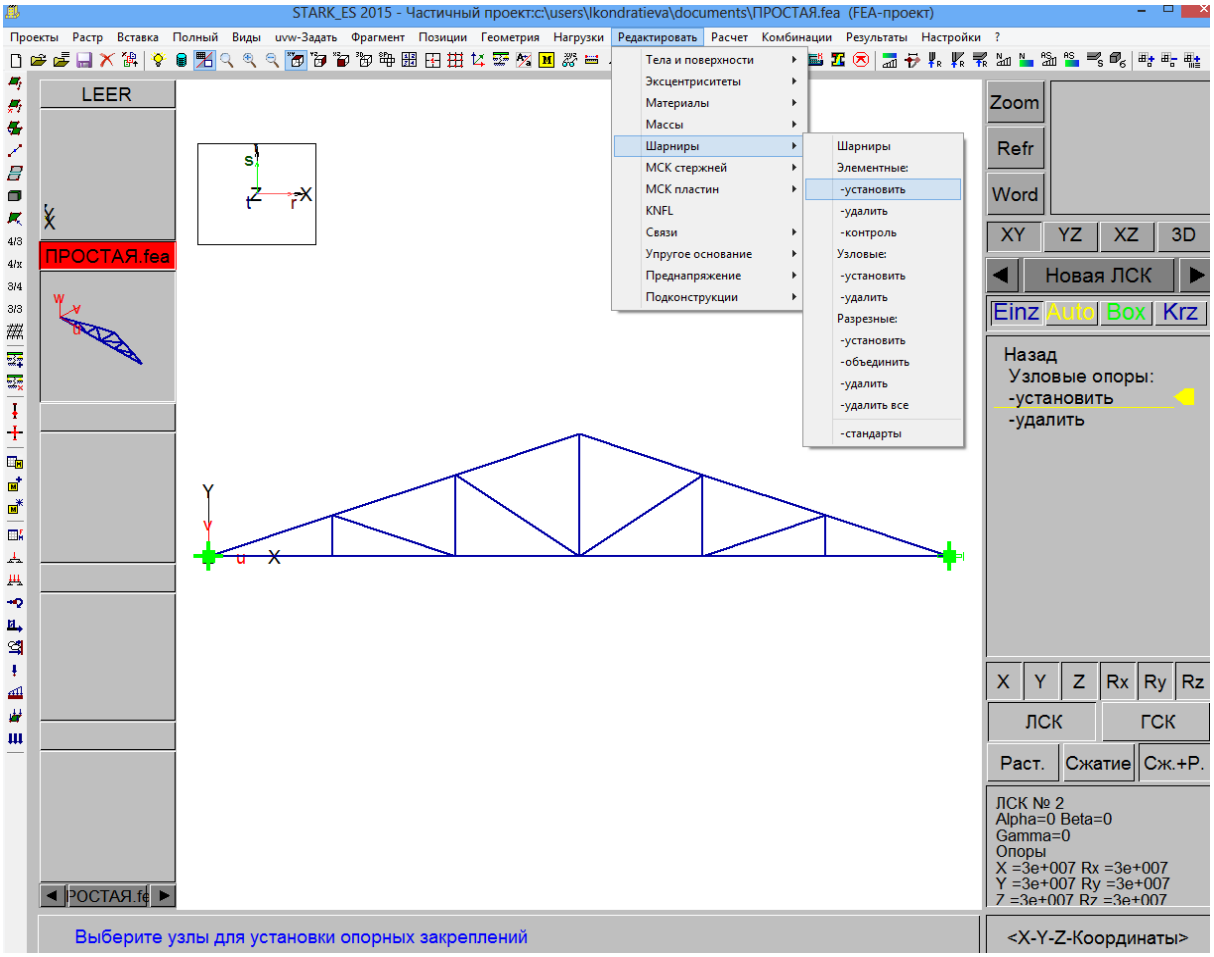


Рис. 76

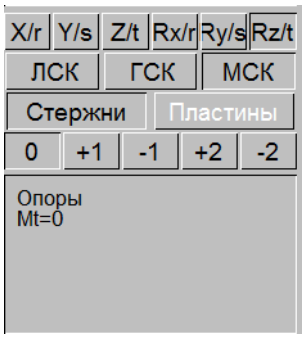


Рис. 77

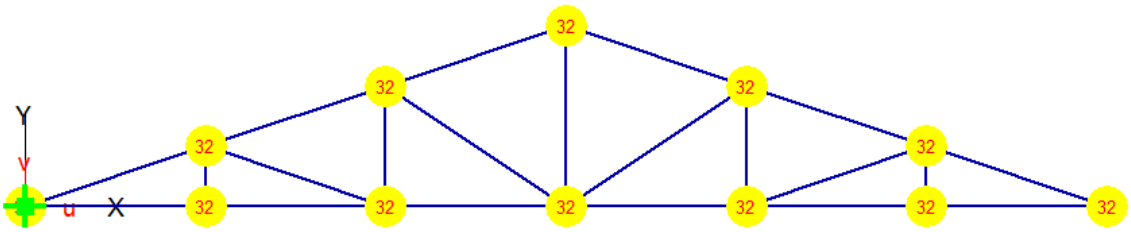


Рис. 78

Зададим нагрузки. Для этого загружаем команду **Нагрузки – Узловые – Силы и моменты: *Установить*** (рис. 79). В окне выбора нажимаем клавишу P_y (указываем направление нагрузки) и выбираем *Нагружение 1* (рис. 80). Щелчком в окне редактора вызываем табло для задания значения сосредоточенных сил (рис. 81); задаем значение силы (знак минус перед значением силы указывает на то, что направление силы противоположно направлению соответствующей координатной оси) (рис. 82). После этого указываем курсором на узлы фермы, к которым приложены силы (рис. 83).

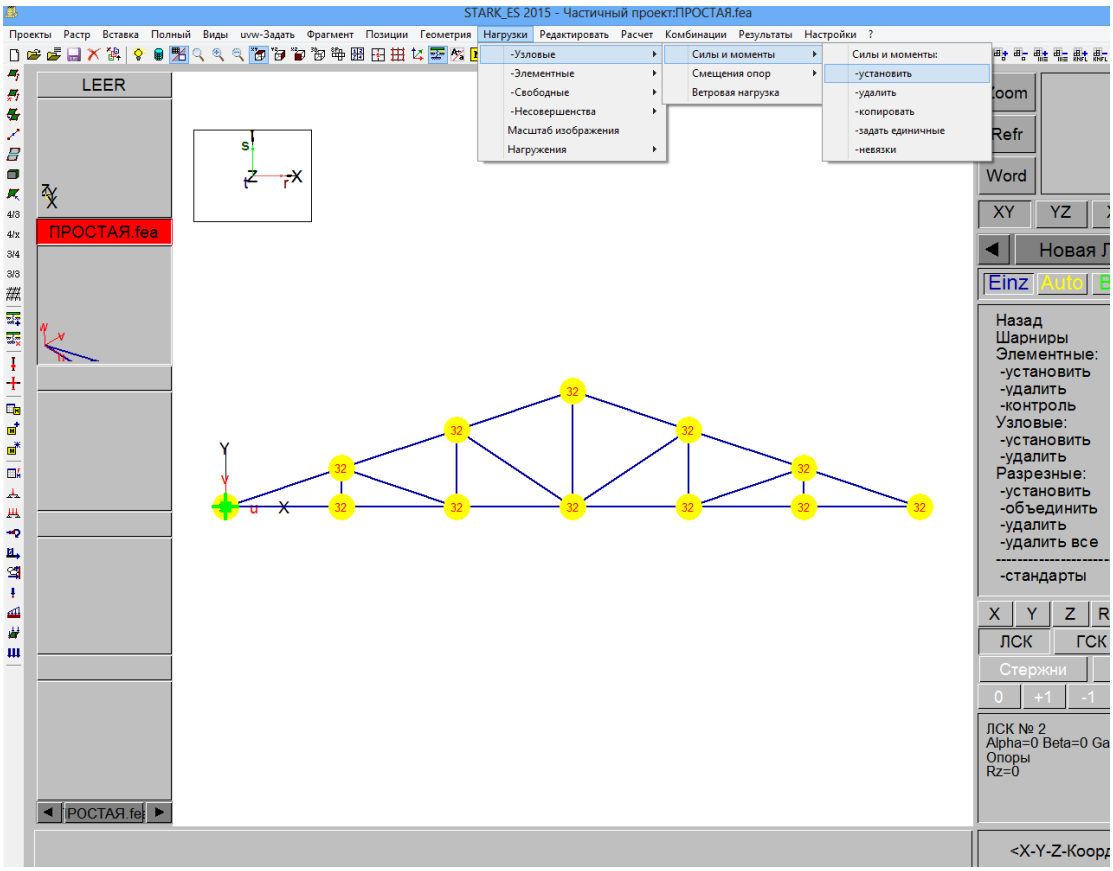


Рис. 79

Рис. 80

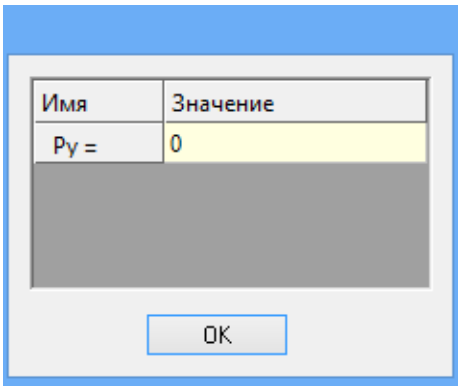


Рис. 81

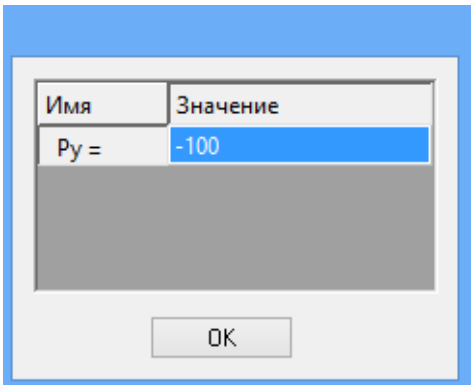


Рис. 82

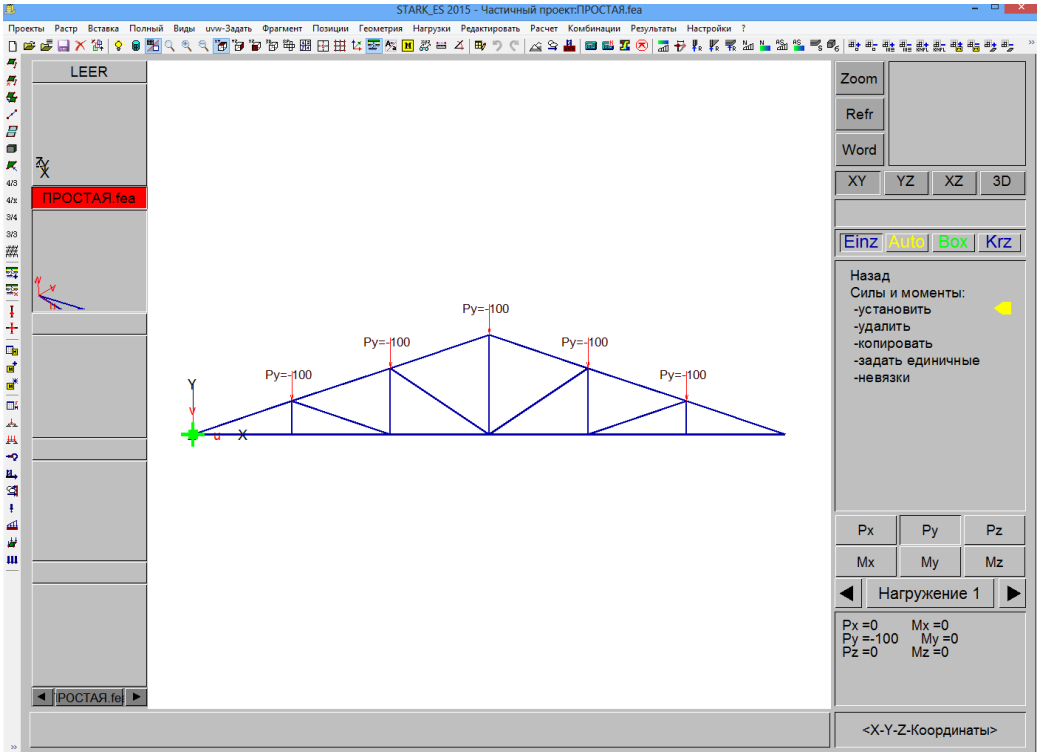


Рис. 83

Формирование расчетной схемы закончено.

Выполним расчет. Для этого загружаем команду **Расчет – Общий** (рис. 84). Появляется диалоговое окно с напоминанием о сохранении файла (рис. 85), после подтверждения сохранения на экран выводится диалоговое окно команды (рис. 86). После подтверждения параметров расчета появляется окно протокола о ходе выполнения расчета (рис. 87); фраза *«Расчет завершен»* в одной из последних строк протокола говорит о том, что расчет выполнен. Возвращаемся в окно ПК STARK ES (рис. 88).

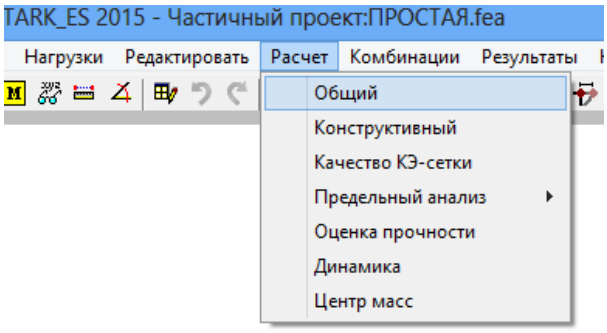


Рис. 84

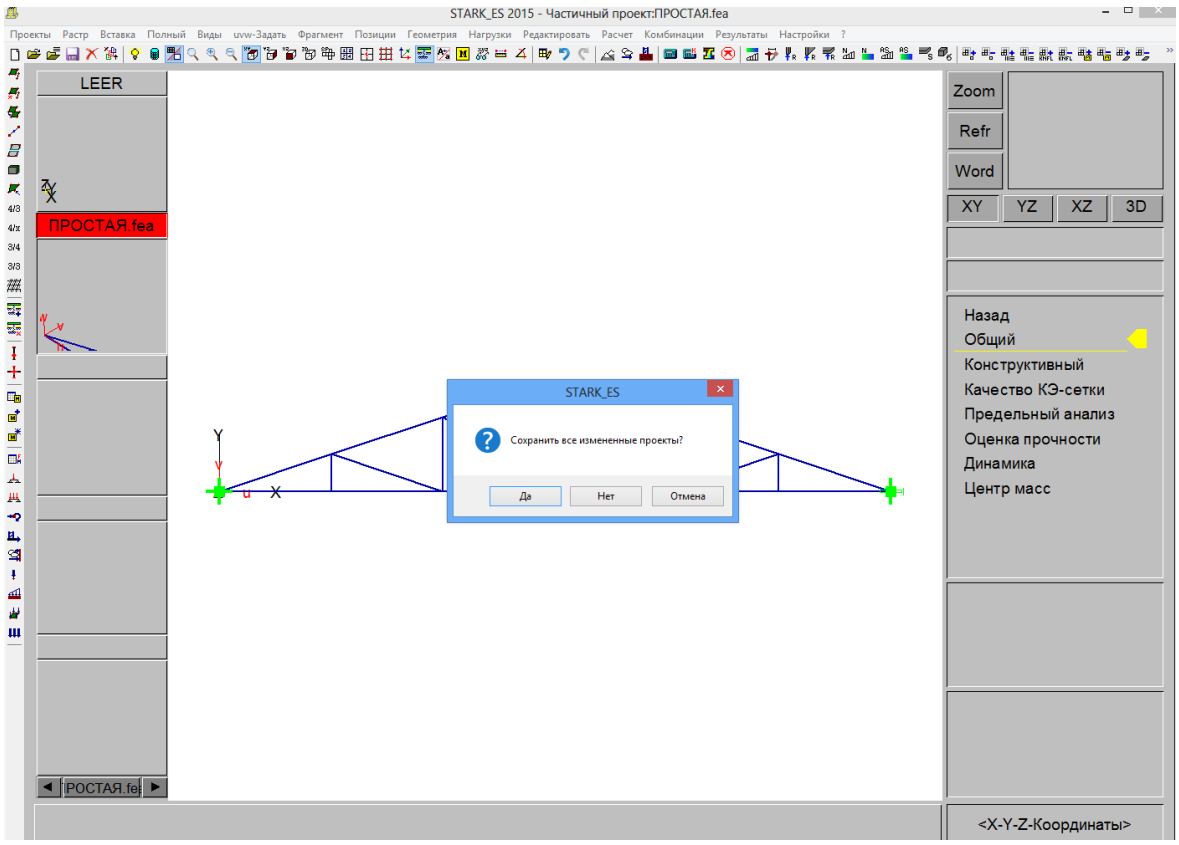


Рис. 85

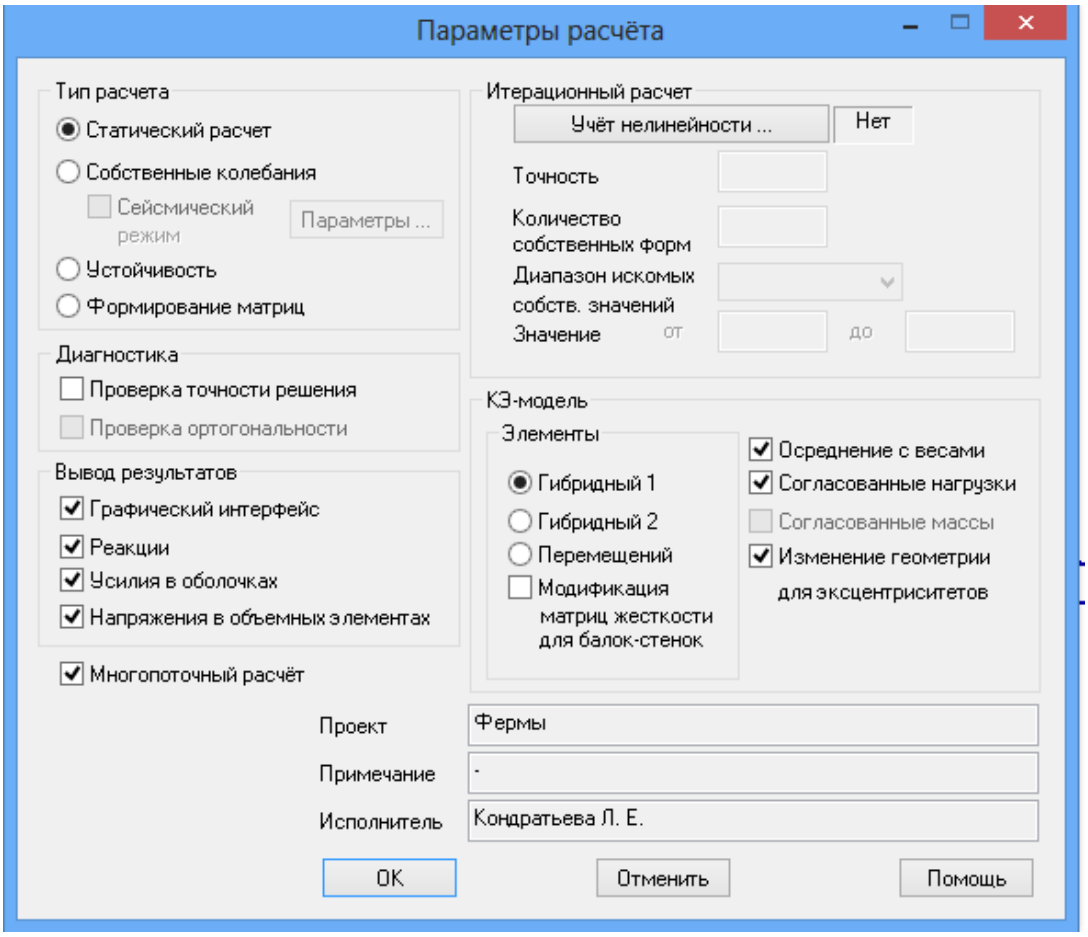

Параметры расчёта
Тип расчета
Статический расчет
Собственные колебания
Сейсмический режим
Параметры ...
Устойчивость
Формирование матриц
Диагностика
Проверка точности решения
Проверка ортогональности
Вывод результатов
Графический интерфейс
Реакции
Усилия в оболочках
Напряжения в объемных элементах
Многопоточный расчёт
Итерационный расчет
Учёт нелинейности ...
Нет
Точность
Количество собственных форм
Диапазон искомых собств. значений
Значение
от
до
КЭ-модель
Элементы
Гибридный 1
Гибридный 2
Перемещений
Модификация матриц жесткости для балок-стенок
Осреднение с весами
Согласованные нагрузки
Согласованные массы
Изменение геометрии для эксцентриситетов
Проект
Фермы
Примечание
-
Исполнитель
Кондратьева Л. Е.
OK
Отменить
Помощь

Рис. 86

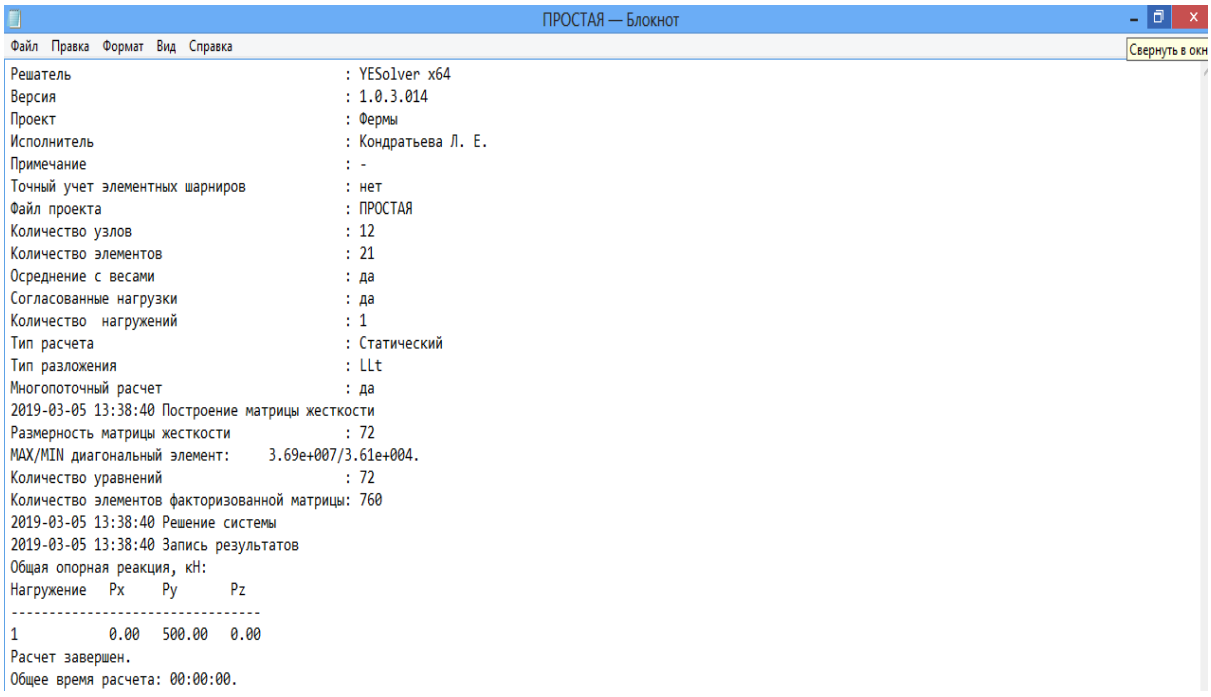

ПРОСТАЯ — Блокнот
Файл Правка Формат Вид Справка
Свернуть в окн
Решатель : YESolver x64
Версия : 1.0.3.014
Проект : Фермы
Исполнитель : Кондратьева Л. Е.
Примечание : -
Точный учет элементных шарниров : нет
Файл проекта : ПРОСТАЯ
Количество узлов : 12
Количество элементов : 21
Осреднение с весами : да
Согласованные нагрузки : да
Количество нагружений : 1
Тип расчета : Статический
Тип разложения : LLt
Многопоточный расчет : да
2019-03-05 13:38:40 Построение матрицы жесткости
Размерность матрицы жесткости : 72
MAX/MIN диагональный элемент: 3.69e+007/3.61e+004.
Количество уравнений : 72
Количество элементов факторизованной матрицы: 760
2019-03-05 13:38:40 Решение системы
2019-03-05 13:38:40 Запись результатов
Общая опорная реакция, кН:
Нагружение Px Py Pz
1 0.00 500.00 0.00
Расчет завершен.
Общее время расчета: 00:00:00.

Рис. 87

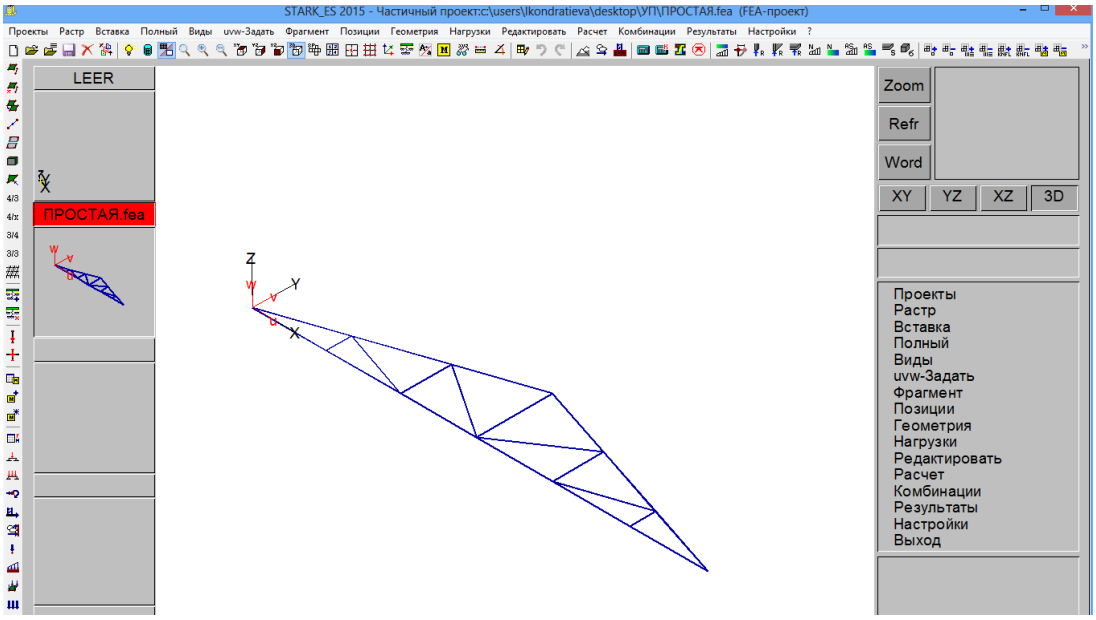


Рис. 88

Отобразим результаты расчета.

Для отображения схемы деформации фермы загружаем команду **Результаты – Графика** (рис. 89). Появляется диалоговое окно команды, в котором необходимо нажать кнопку *Перемещения* (рис. 90). После нажатия клавиши *OK* схема деформации отображается в рабочей зоне, в окне информации видим значение максимального прогиба (рис. 91).

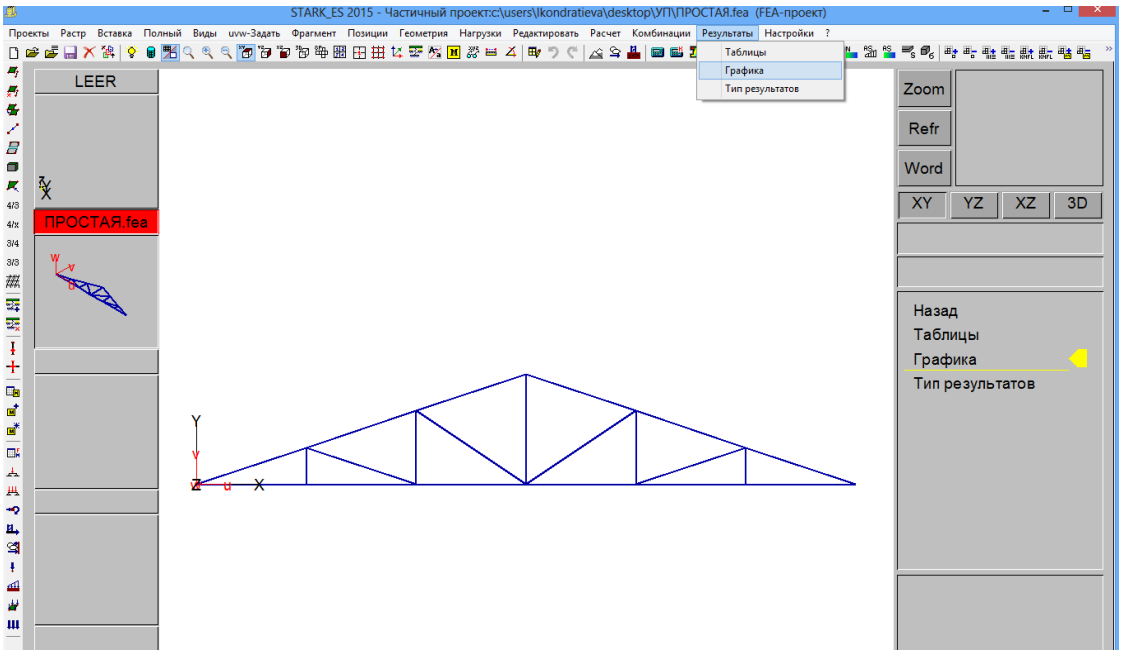


Рис. 89

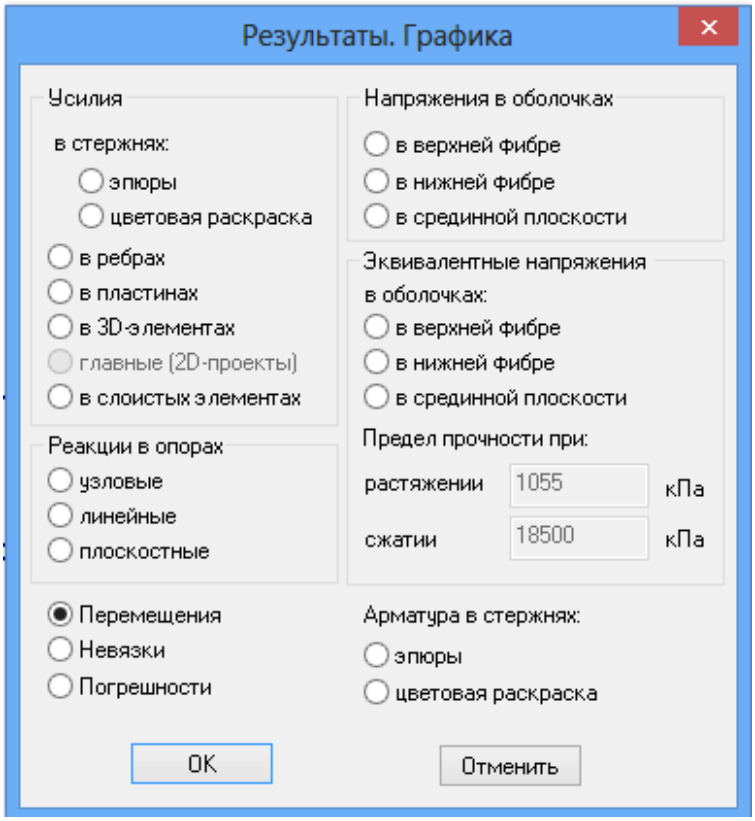

Результаты. График
Усилия
в стержнях:
эпюры
цветовая раскраска
в ребрах
в пластинах
в 3D-элементах
главные (2D-проекты)
в слоистых элементах
Реакции в опорах
узловые
линейные
плоскостные
Перемещения
Невязки
Погрешности
Напряжения в оболочках
в верхней фибре
в нижней фибре
в срединной плоскости
Эквивалентные напряжения
в оболочках:
в верхней фибре
в нижней фибре
в срединной плоскости
Предел прочности при:
растяжении
1055
кПа
сжатии
18500
кПа
Арматура в стержнях:
эпюры
цветовая раскраска
OK
Отменить

Рис. 90

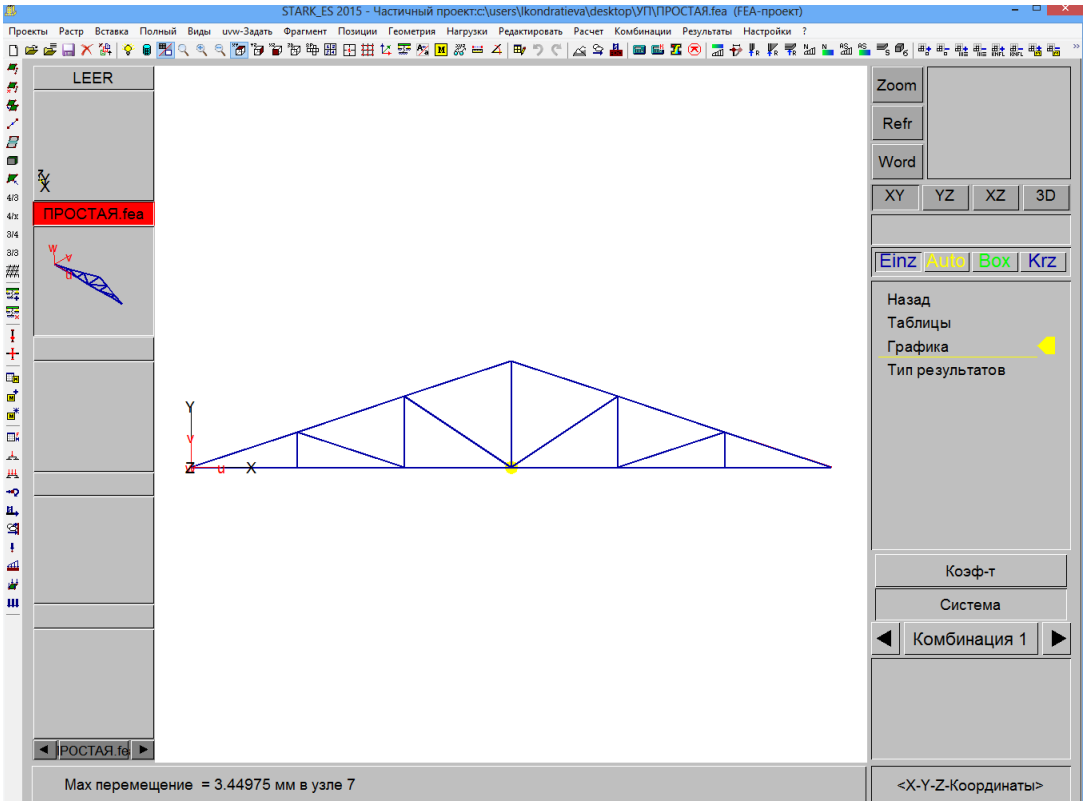

LEER
ПРОСТАЯ.fea
Zoom
Refr
Word
XY
YZ
XZ
3D
Einz
Auto
Box
Krz
Назад
Таблицы
Графика
Тип результатов
Коэф-т
Система
Комбинация 1
Max перемещение = 3.44975 мм в узле 7
<X-Y-Z-Координаты>

Рис. 91

Схема не наглядна, так как деформации малы; для увеличения масштаба деформаций используется клавиша *Коэф-т* окна выбора (рис. 92, 93), после чего схема деформации принимает вид, представленный на рис. 94.

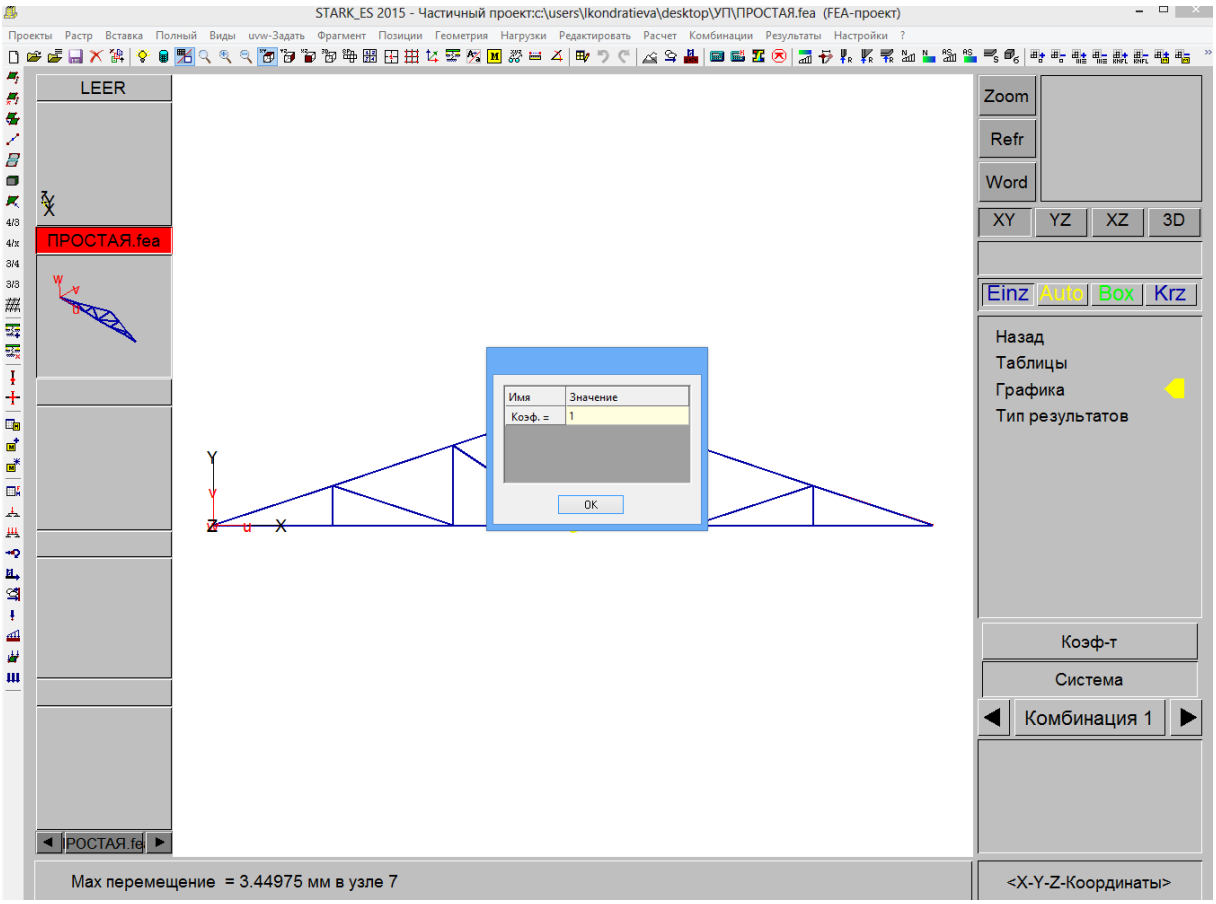


Рис. 92

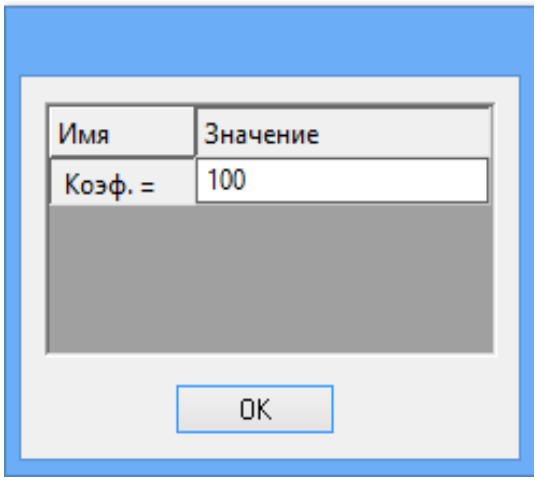


Рис. 93

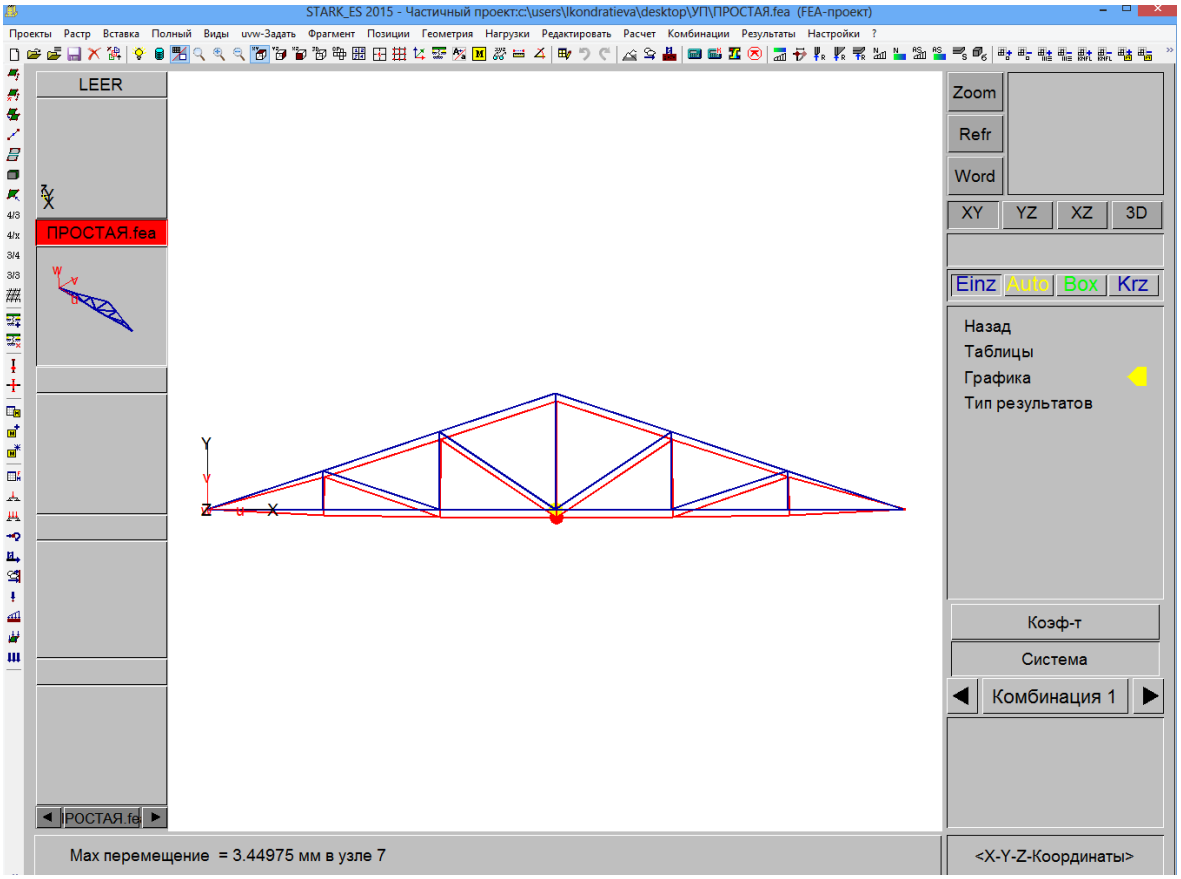


Рис. 94

Для отображения эпюры внутренних усилий загружаем ту же команду **Результаты – Графика**, в диалоговом окне команды в зоне *Усилия в стержнях* необходимо нажать кнопку *Эпюры* (рис. 95).

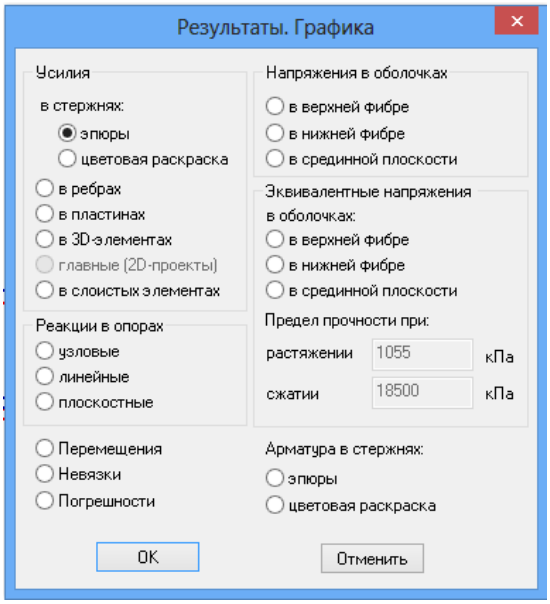


Рис. 95

После нажатия клавиши *OK* появляется эпюра продольной силы, в окне информации видим значения экстремальных продольных сил (рис. 96). Если необходимо подписать значения продольных сил во всех стержнях на эпюре, используем команду **Настройки – Общие** (рис. 97), в диалоговом окне которой в закладке *Эпюры в стержнях* ставим флажок *Оцифровка эпюр* (рис. 98).

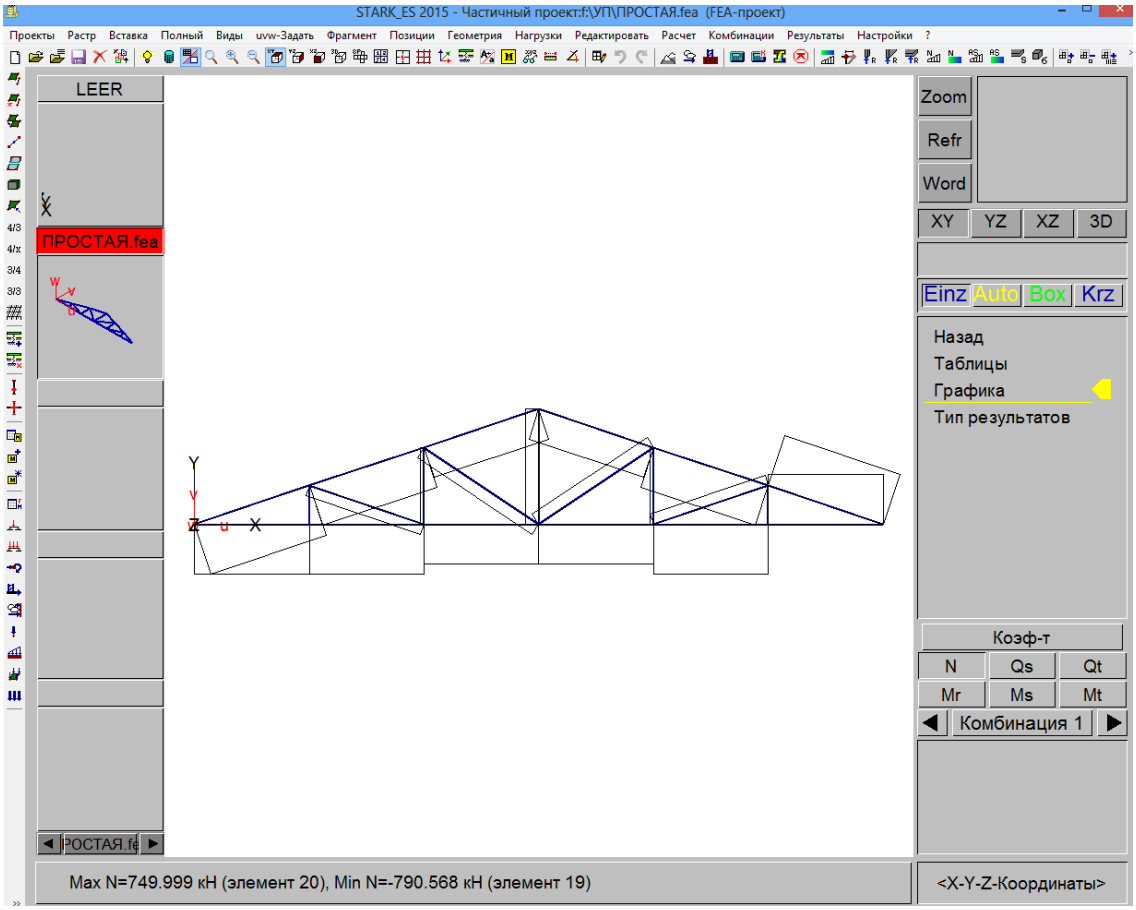


Рис. 96

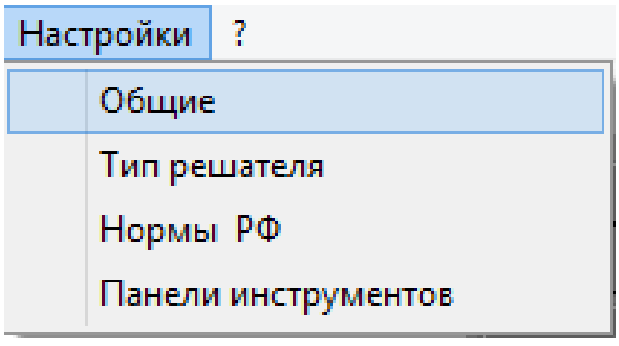


Рис. 97

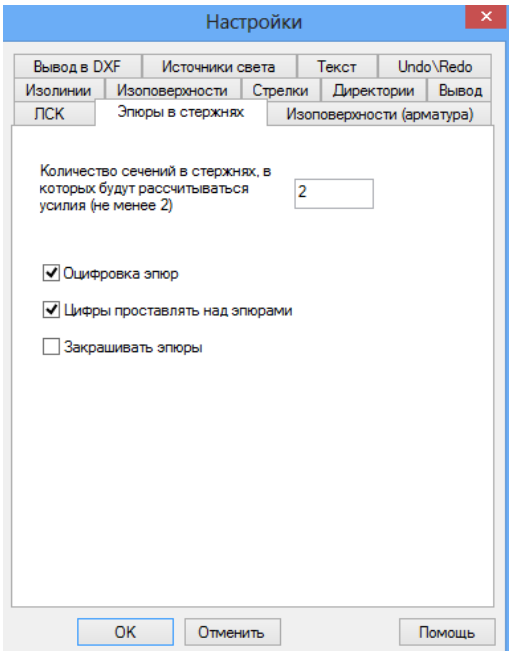


Рис. 98

Флажок *Закрашивать эпюры* дает возможность закрашивать эпюры (растяжение – розовый цвет, сжатие – синий) (рис. 99).

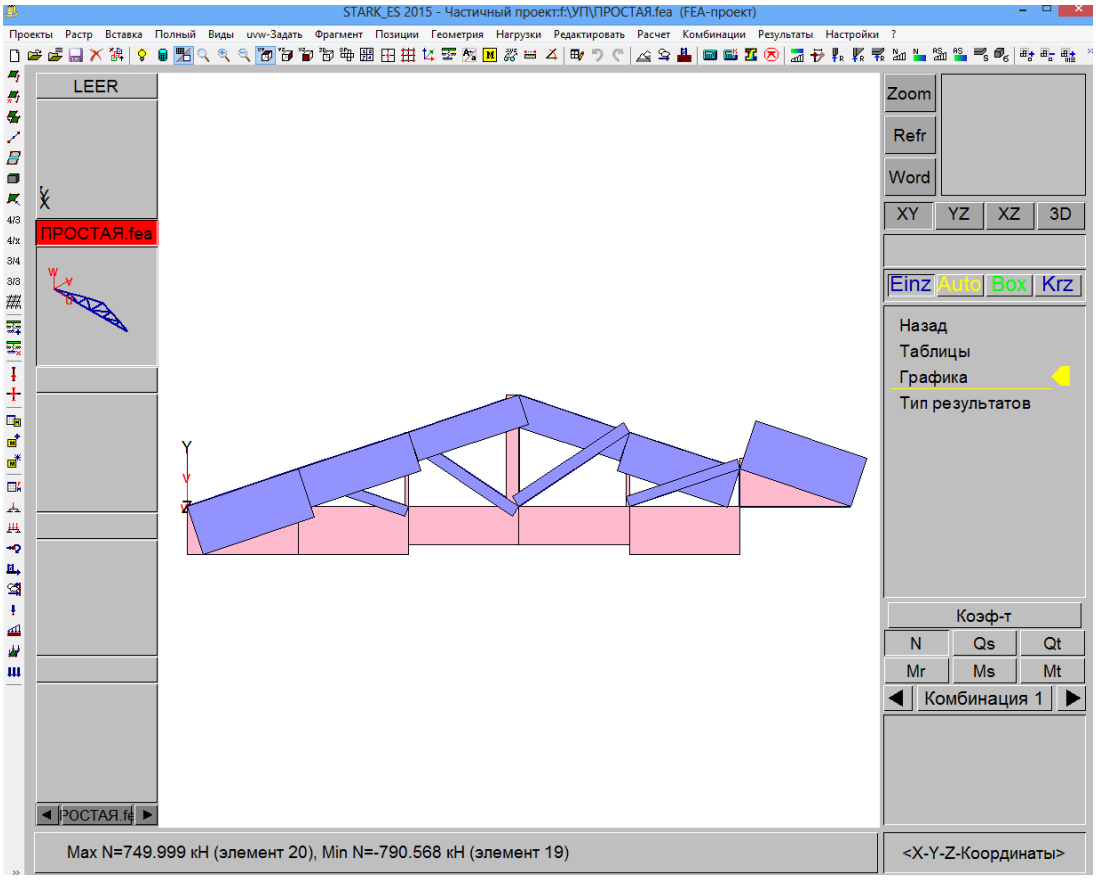


Рис. 99

Кнопка *Цветовая раскраска* диалогового окна команды **Результаты – Графика** (см. рис. 95) дает возможность передать результаты с помощью интенсивности цветов (рис. 100); для этого внизу рабочей зоны приводится шкала интенсивностей.

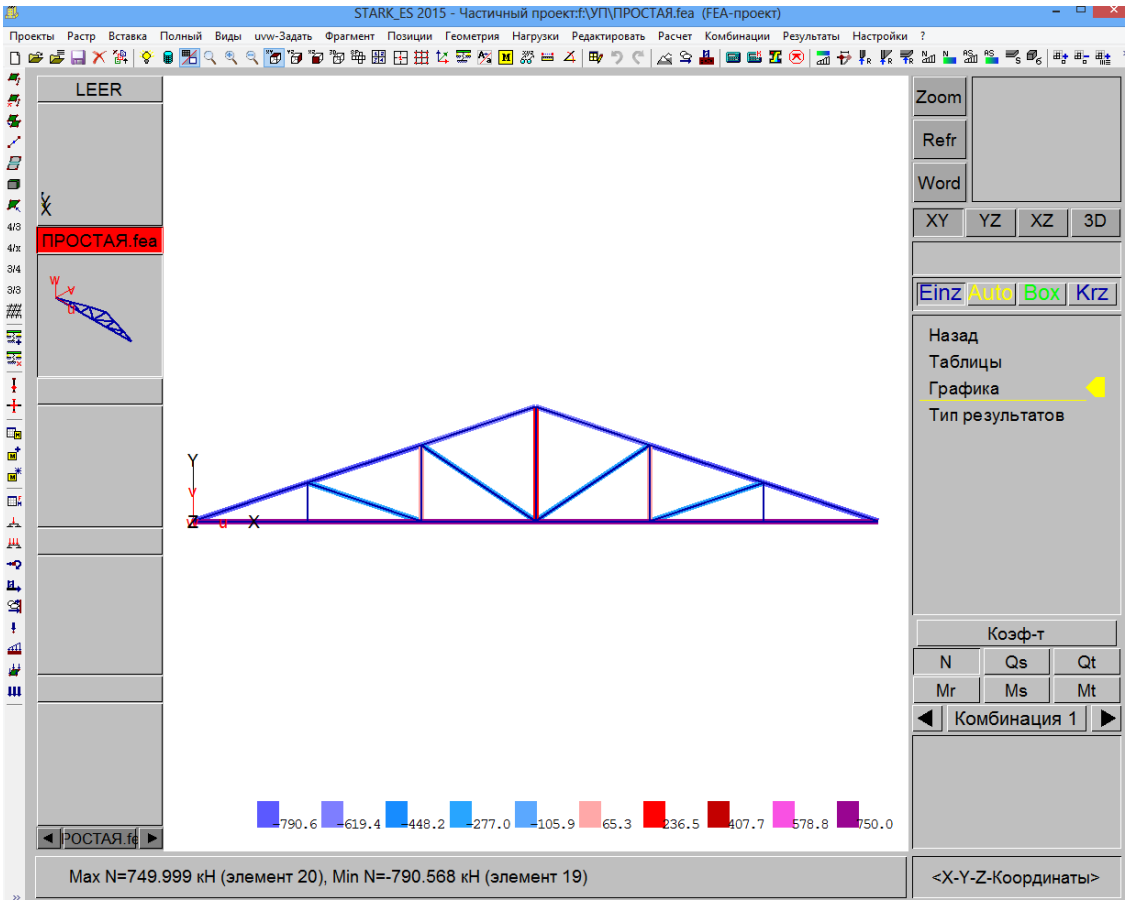


Рис. 100

Используя команду **Результаты – Таблицы**, можно отображать результаты в табличной форме (рис. 101), при этом можно выбирать, для каких именно элементов (узлов) должны быть представлены результаты.

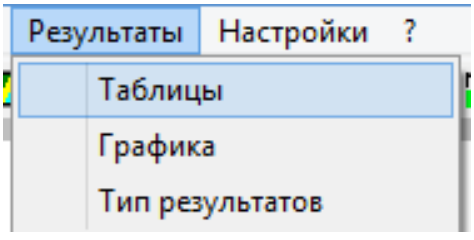


Рис. 101

После нажатия клавиши *OK* диалогового окна команды (рис. 102) в окне информации появляется сообщение *«Отметьте элементы, которые нужно включить в группу»* (рис. 103).

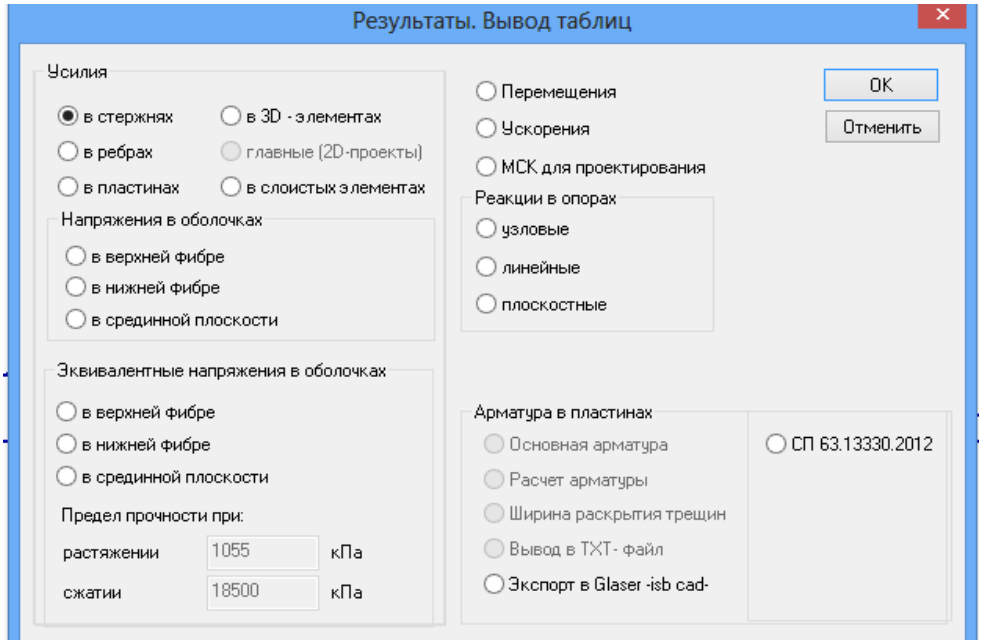


Рис. 102

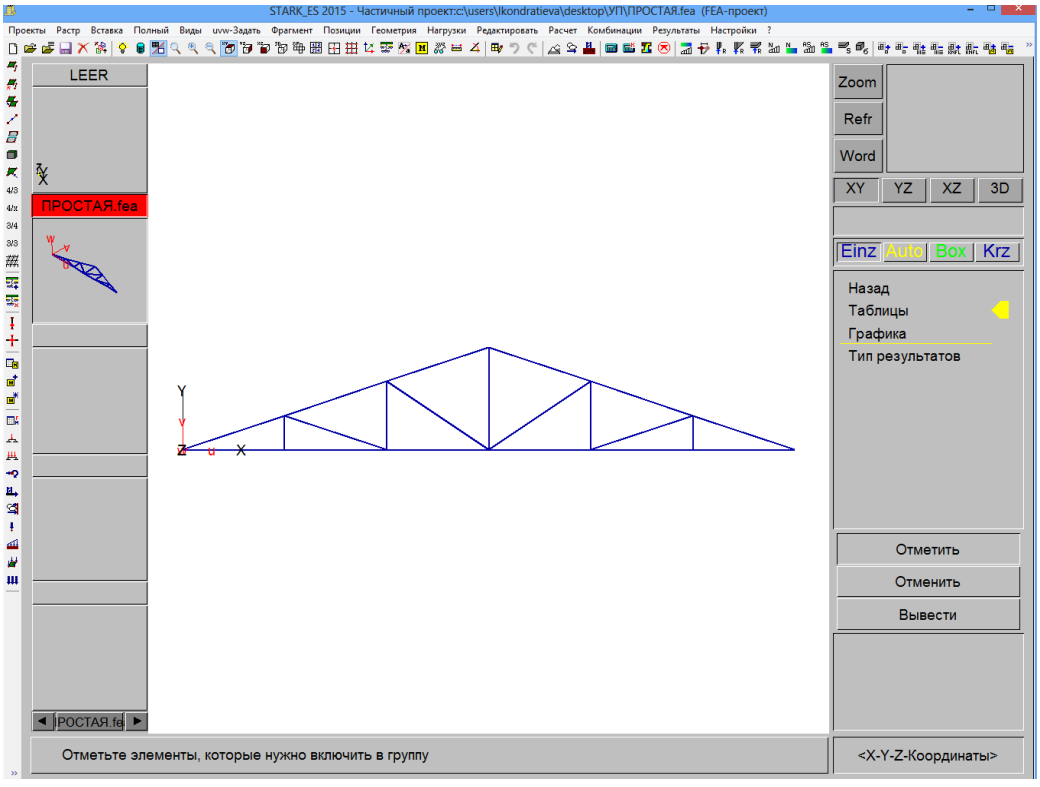


Рис. 103

На рис. 104 курсором отмечены все элементы. Затем появляется диалоговое окно, в котором выбираем информацию для вывода и вид файла вывода (рис. 105), после чего отображается таблица результатов (в нашем случае – продольных сил в элементах) (на рис. 106 представлен фрагмент таблицы).

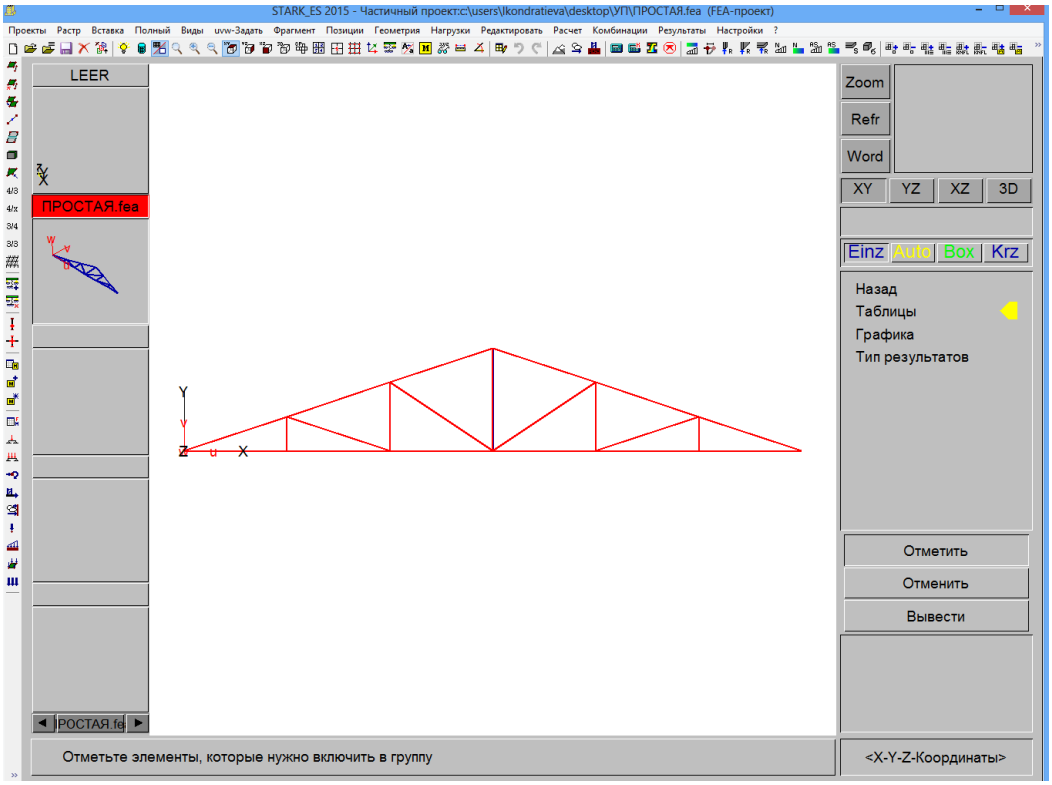


Рис. 104

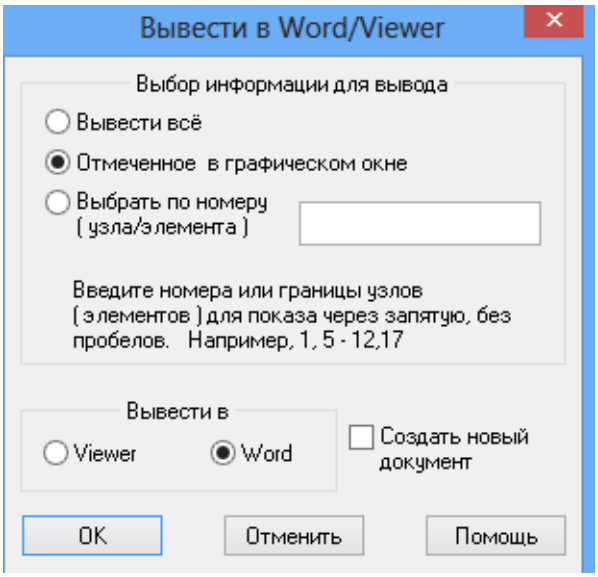


Рис. 105

Элем	Комб	Сеч.	Nr	Qs	Qt	Mr	Ms	Mt
		[м]	[кН]	[кН]	[кН]	[кНм]	[кНм]	[кНм]
1	1	0.00	–790.57	–0.00	0.00	0.00	0.00	–0.00
		5.27	–790.57	–0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	1	0.00	750.00	–0.00	0.00	0.00	0.00	–0.00
		5.00	750.00	–0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	1	0.00	0	–0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		1.67	0	–0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Рис. 106

Так же можно отобразить и таблицу перемещений узлов (рис. 107 – 109); на рис. 110 представлен фрагмент таблицы перемещений.

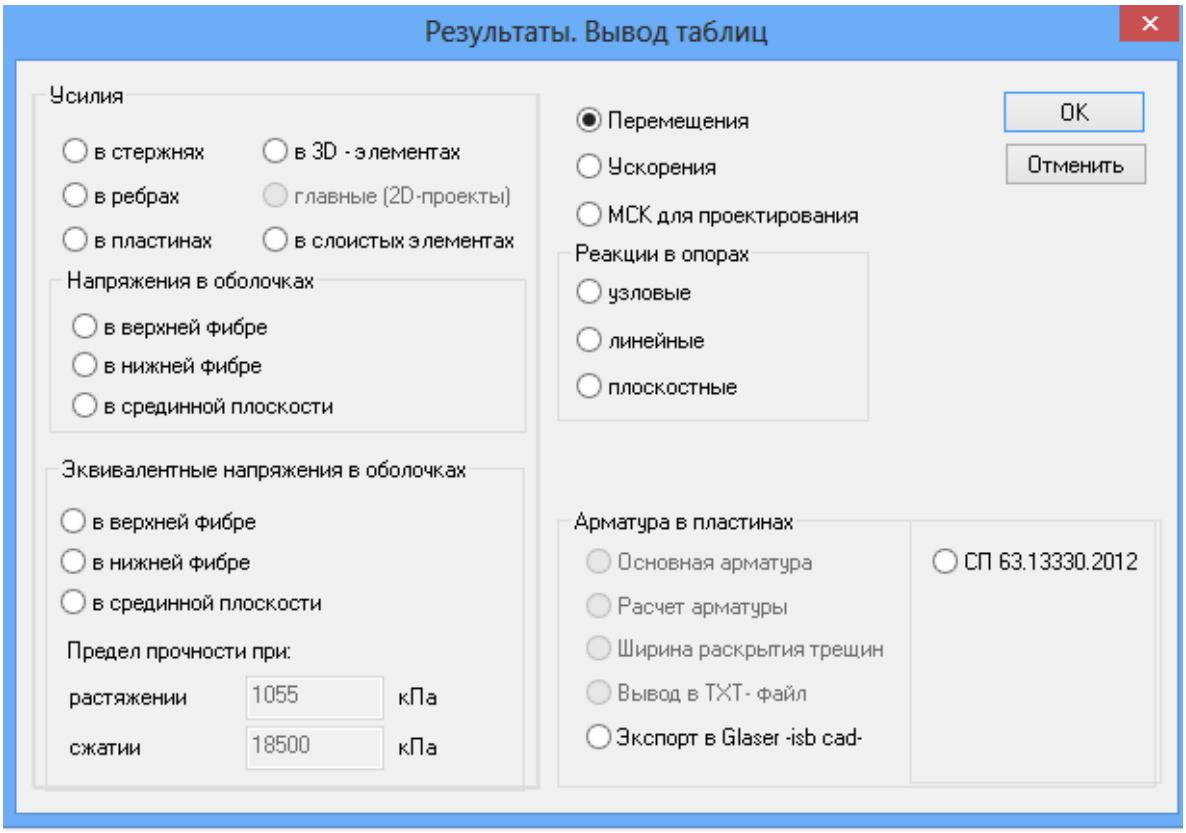


Рис. 107

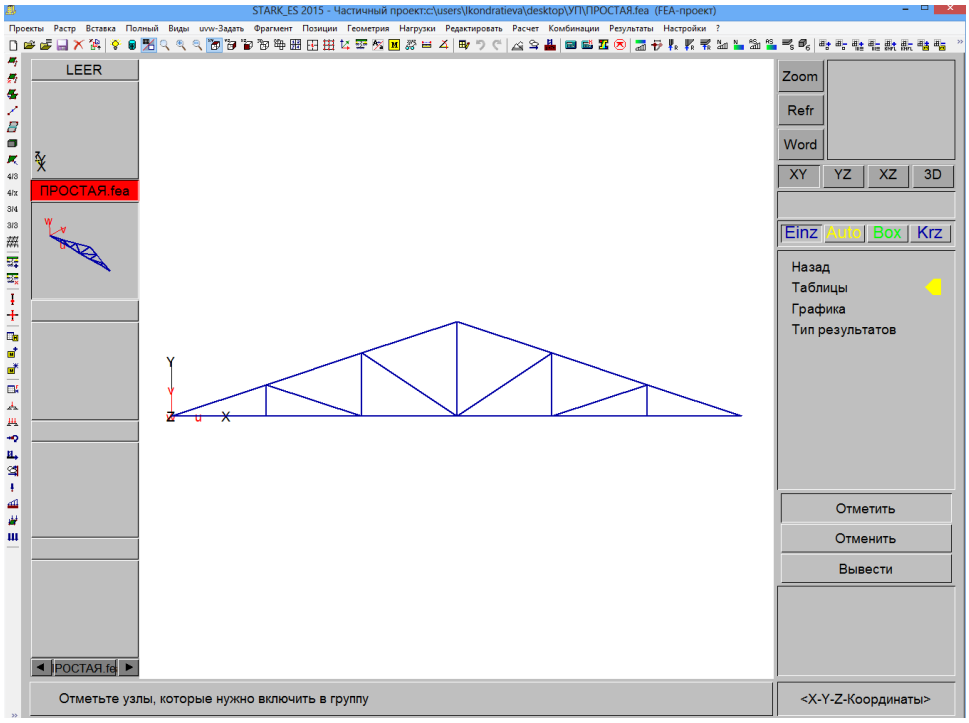


Рис. 108

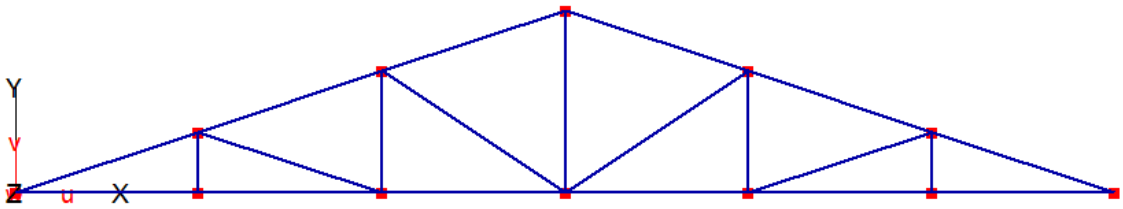


Рис. 109

<u>Перемещения узлов (статический расчет)</u>

Узел	Комб	Ux	Uy	Uz	Rx	Ry
		[мм]	[мм]	[мм]	[рад*1.E3]	[рад*1.E3]
1	1	0.654	–2.659	0.000	0.000	0.000
2	*1*	*–0.000*	*–0.008*	*0.000*	*0.000*	*0.000*
3	*1*	*0.196*	*–2.659*	*0.000*	*0.000*	*0.000*
4	*1*	*0.683*	*–3.314*	*0.000*	*0.000*	*0.000*
5	*1*	*0.392*	*–3.322*	*0.000*	*0.000*	*0.000*

Рис. 110

Номера узлов и элементов можно отобразить, используя команду **Настройки – Общие** (рис. 111, 112).

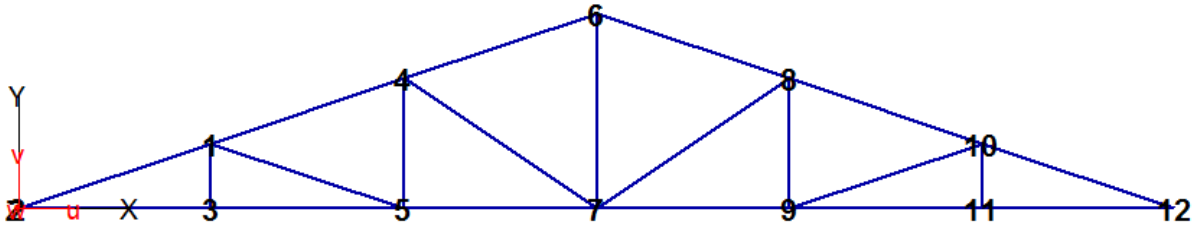


Рис. 111

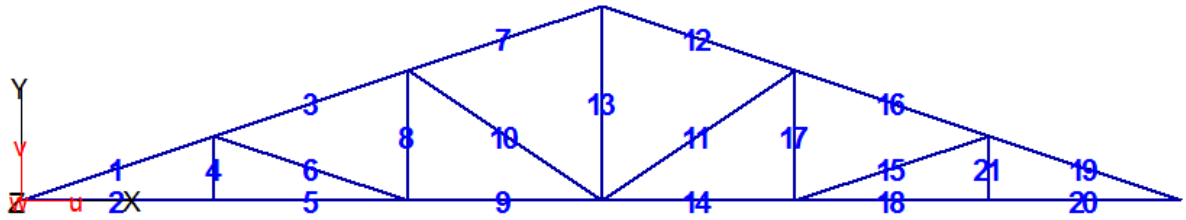


Рис. 112

Расчет многопролетной шарнирной балки в ПК STARK ES

Рассмотрим определение усилий и деформаций в многопролетной шарнирной балке (МШБ) при помощи ПК STARK ES на примере системы, показанной на рис. 113. Многопролетная шарнирная балка может быть моделью элемента покрытия либо участка трубопровода.

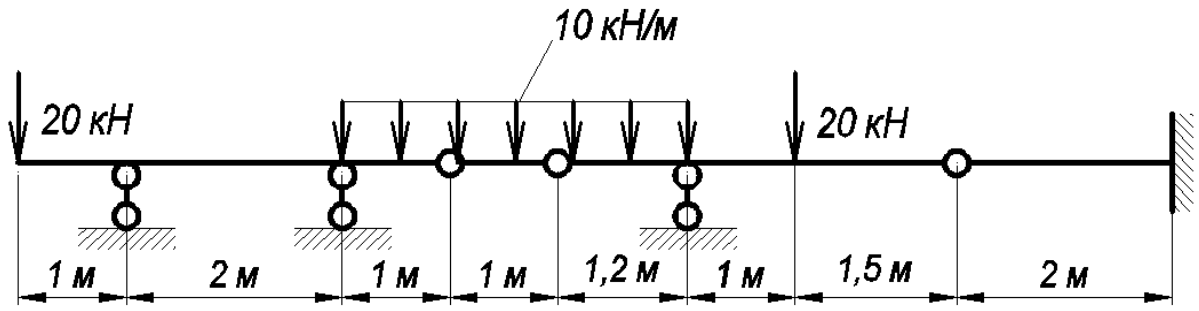


Рис. 113

Диалоговое окно команды **Проект – Создать** показано на рис. 114.

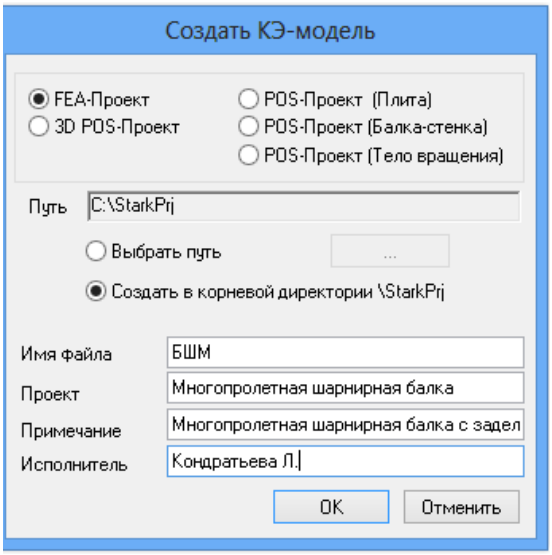


Рис. 114

Геометрическую модель МШБ сформируем, задавая каждый элемент по отдельности координатами его узлов. Для этого используем команду **Геометрия – Установить элементы** (рис. 115).

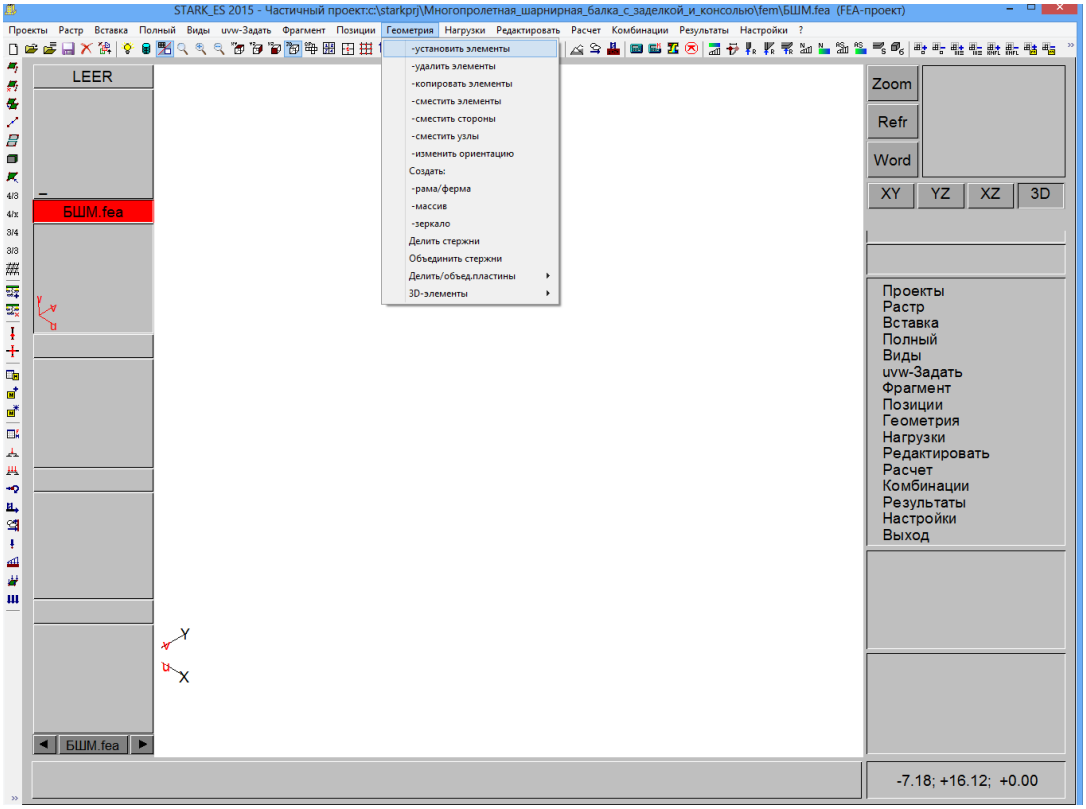


Рис. 115

После ее загружения в окне информации появляется сообщение *«Определите начальную точку для стержня»* (рис. 116). Щелчком курсора в окне редактора вызываем табло задания координат начальной точки; располагаем ее в начале координат (рис. 117). После этого в окне информации появляется сообщение *«Определите конечную точку для стержня»*. Снова щелчком курсора в окне редактора вызываем табло задания координат конечной точки, задаем координаты (рис. 118). Подобным образом задаем остальные элементы балки. В итоге получаем геометрическую модель МШБ из восьми элементов (рис. 119).

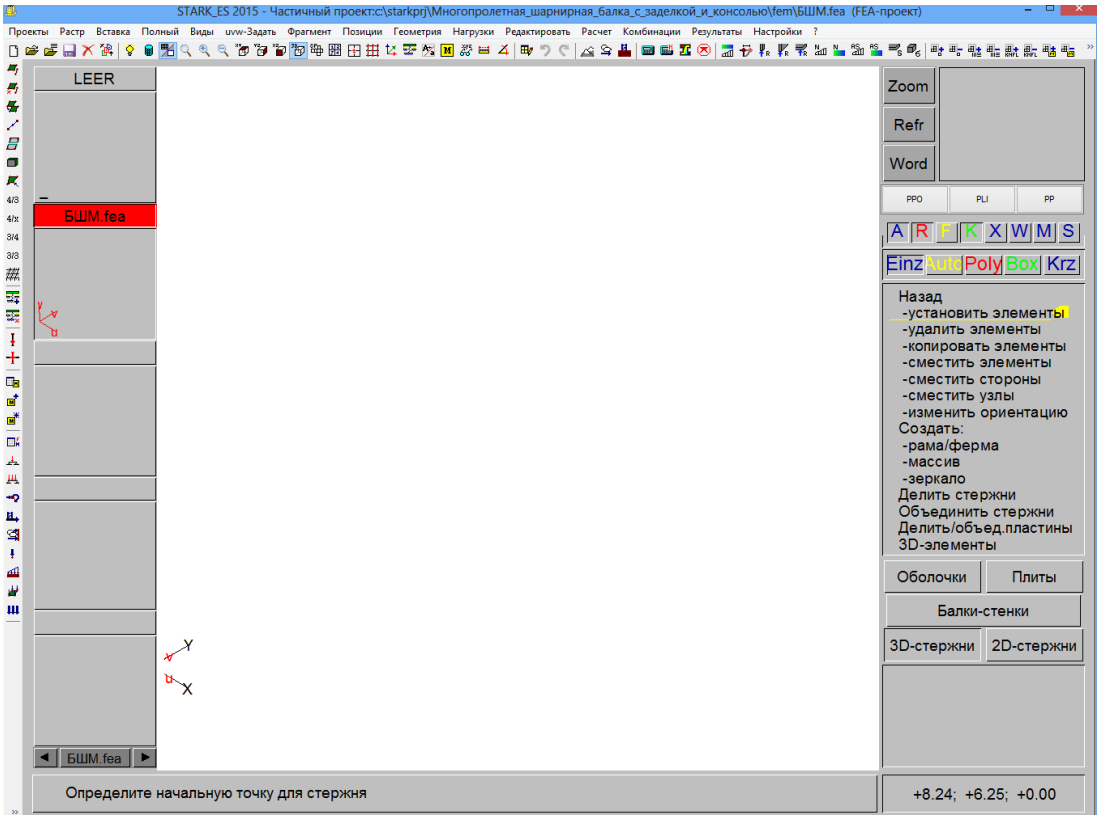


Рис. 116

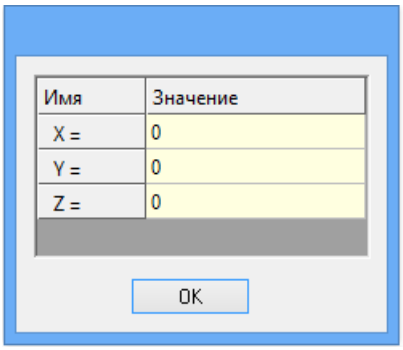


Рис. 117

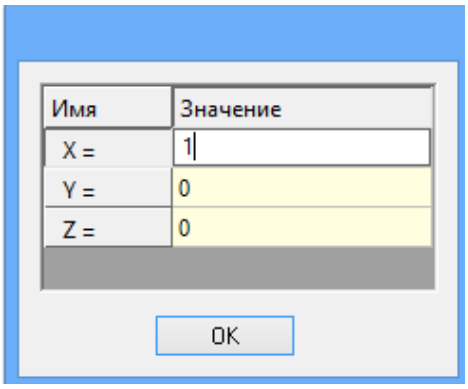


Рис. 118

Рис. 119

Зададим опорные связи. После загружения команды **Редактировать – Связи – Опорные закрепления:** ***Установить*** задаем жесткую заделку, нажимая в окне выбора клавиши *X*, *Y*, *Z*, R_x, R_y, R_z (рис. 120), и шарнирно-подвижную опору, нажимая в окне выбора клавишу *Y* (рис. 121 – 123).

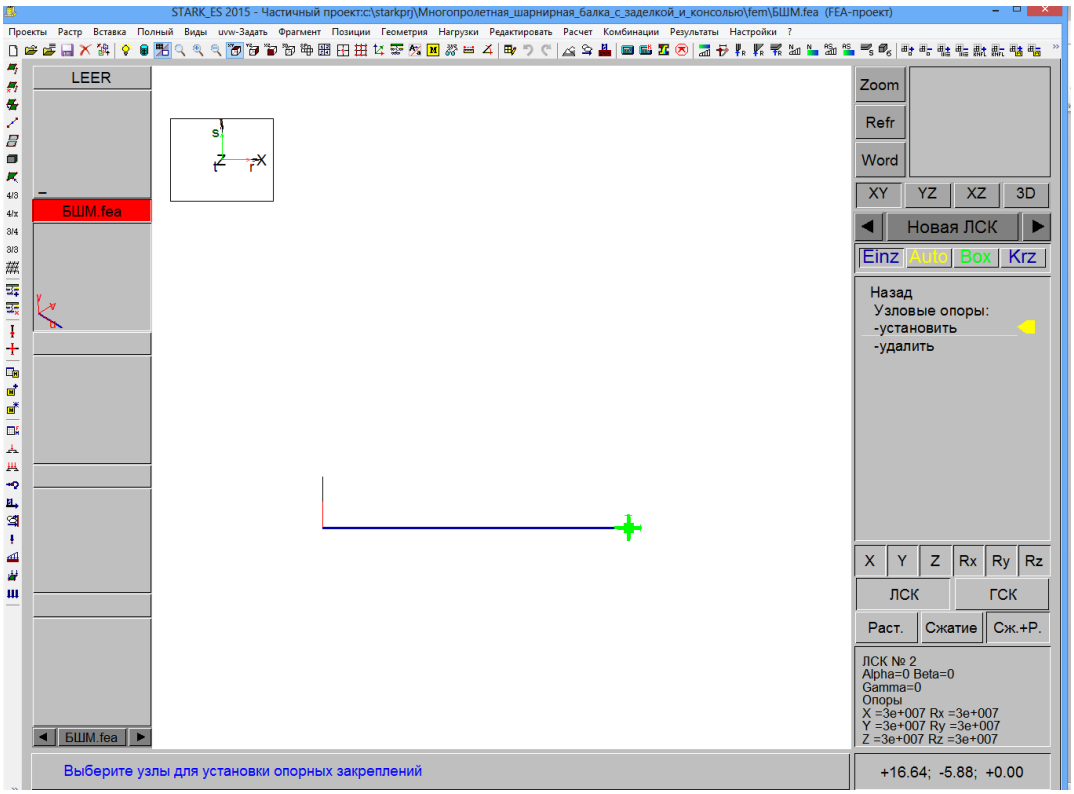


Рис. 120

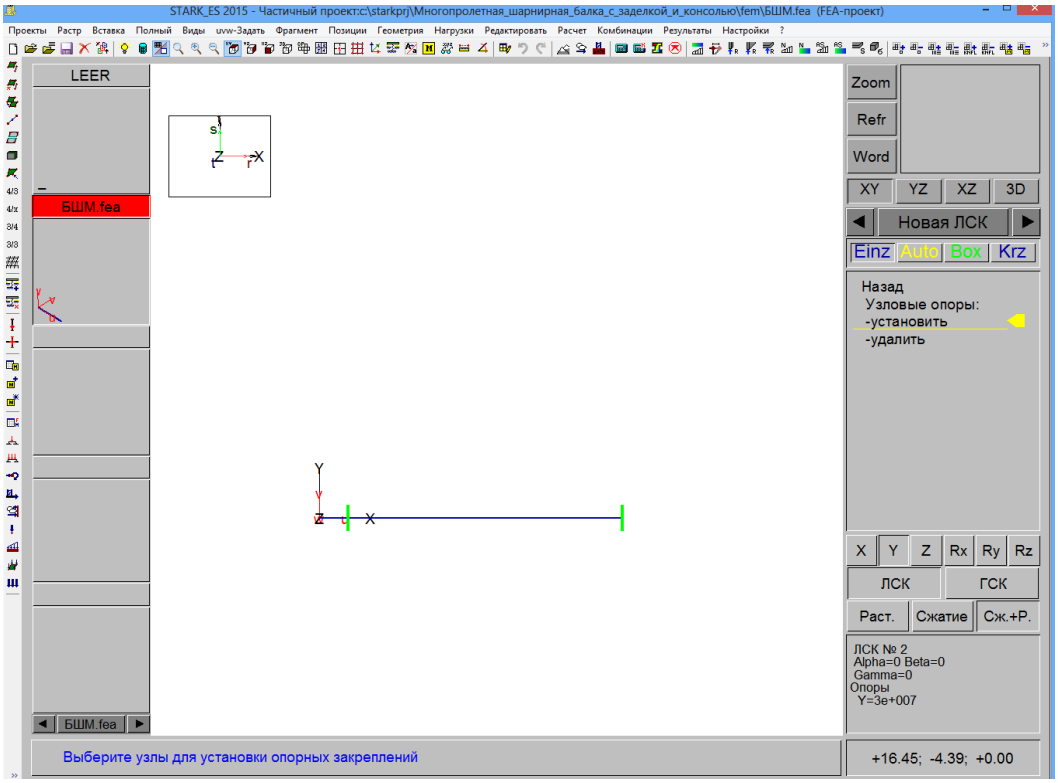


Рис. 121

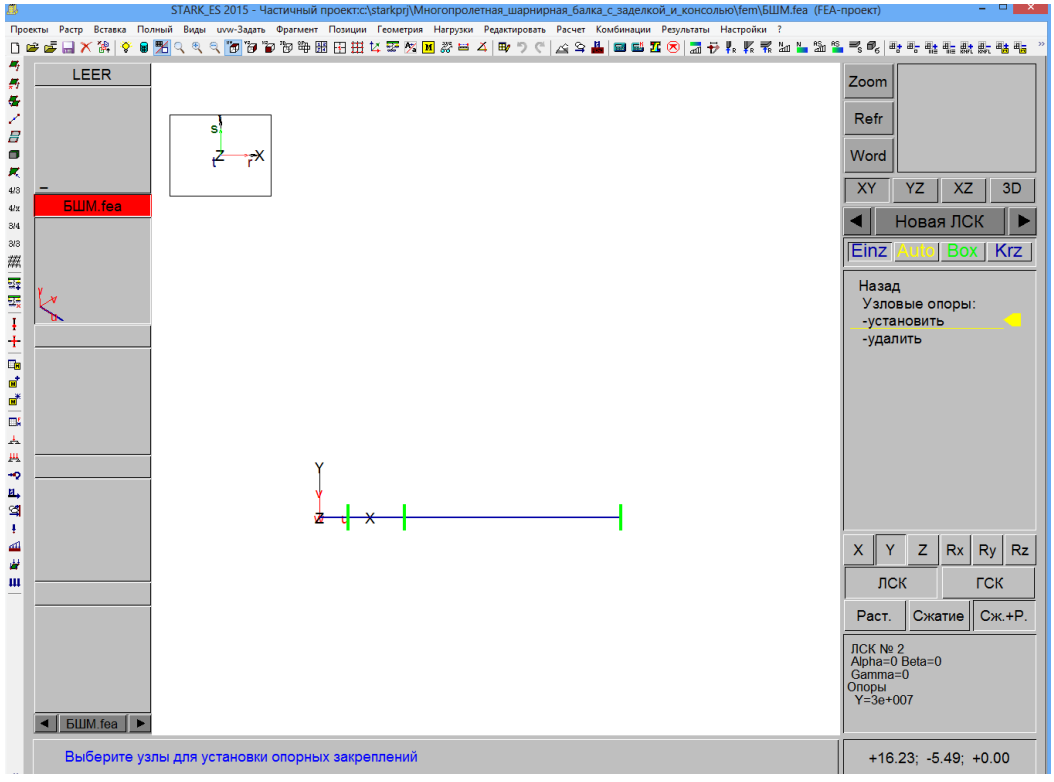


Рис. 122

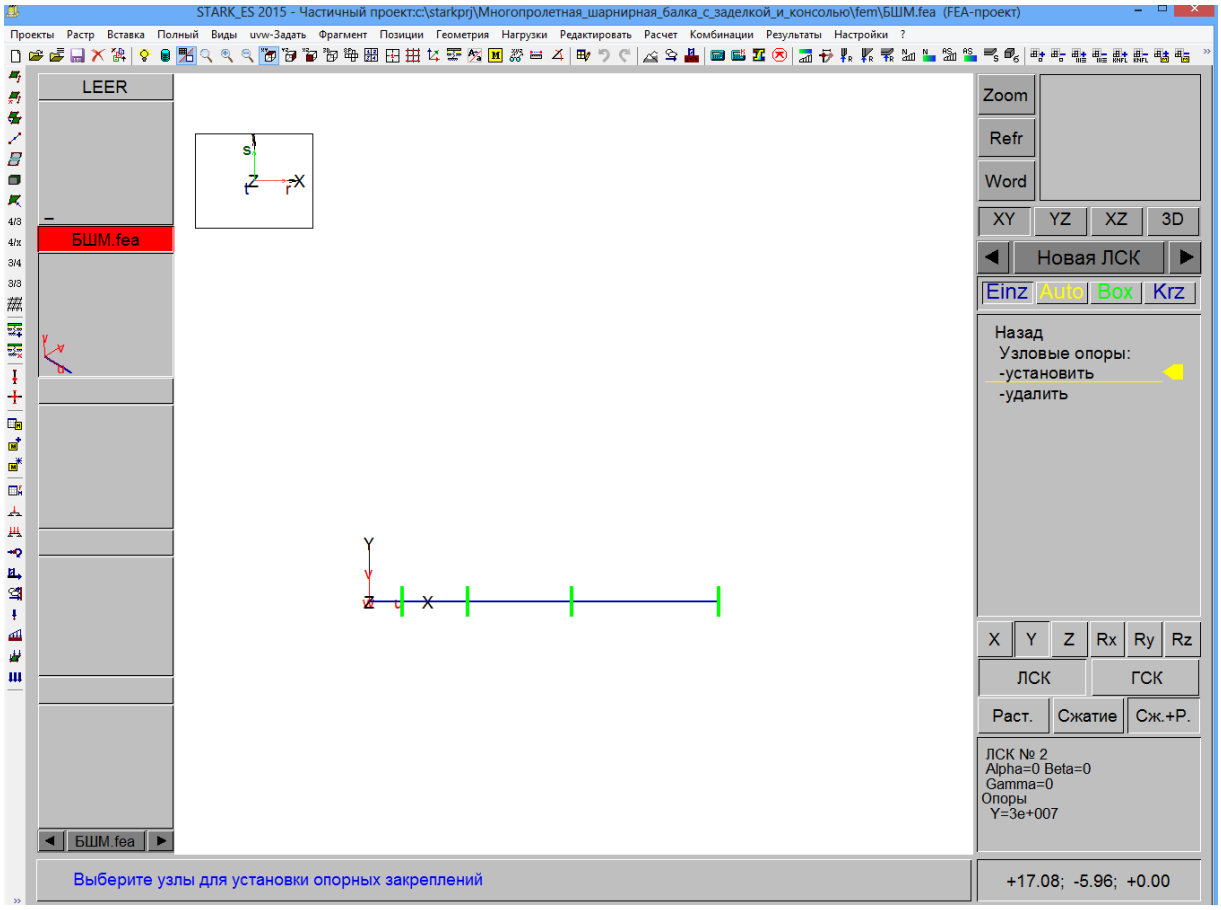


Рис. 123

Приложим нагрузки. Сосредоточенные силы задаем подобно тому, как это делалось для фермы (рис. 124). Для задания равномерно распределенной нагрузки загружаем команду **Нагрузки – Элементные – Равномерно распределенная: *Установить*** (рис. 125). В окне выбора нажимаем клавишу $Q_{y/s}$ (указываем направление нагрузки) и выбираем *Нагружение 2* (рис. 126). Затем задаем значение интенсивности равномерно распределенной нагрузки (рис. 127). После этого указываем курсором на элемент МШБ, к которому приложена равномерно распределенная нагрузка (рис. 128).

Рис. 124

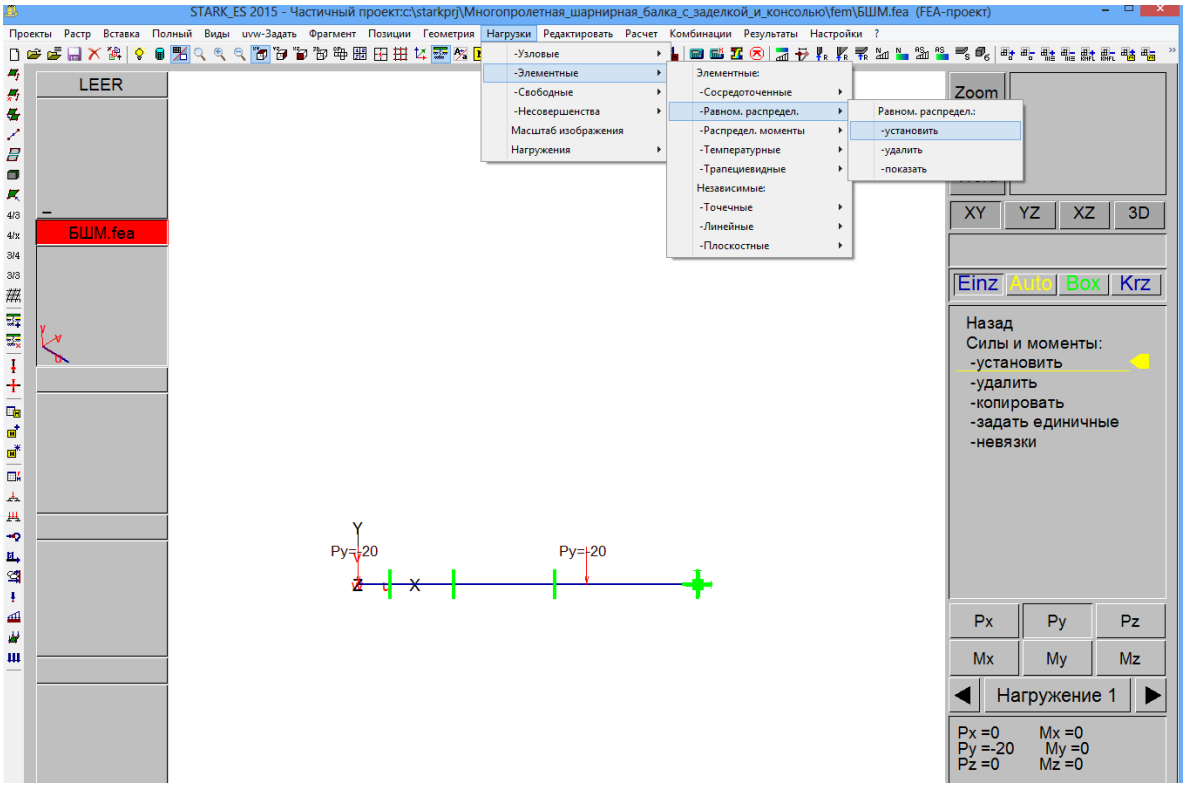


Рис. 125

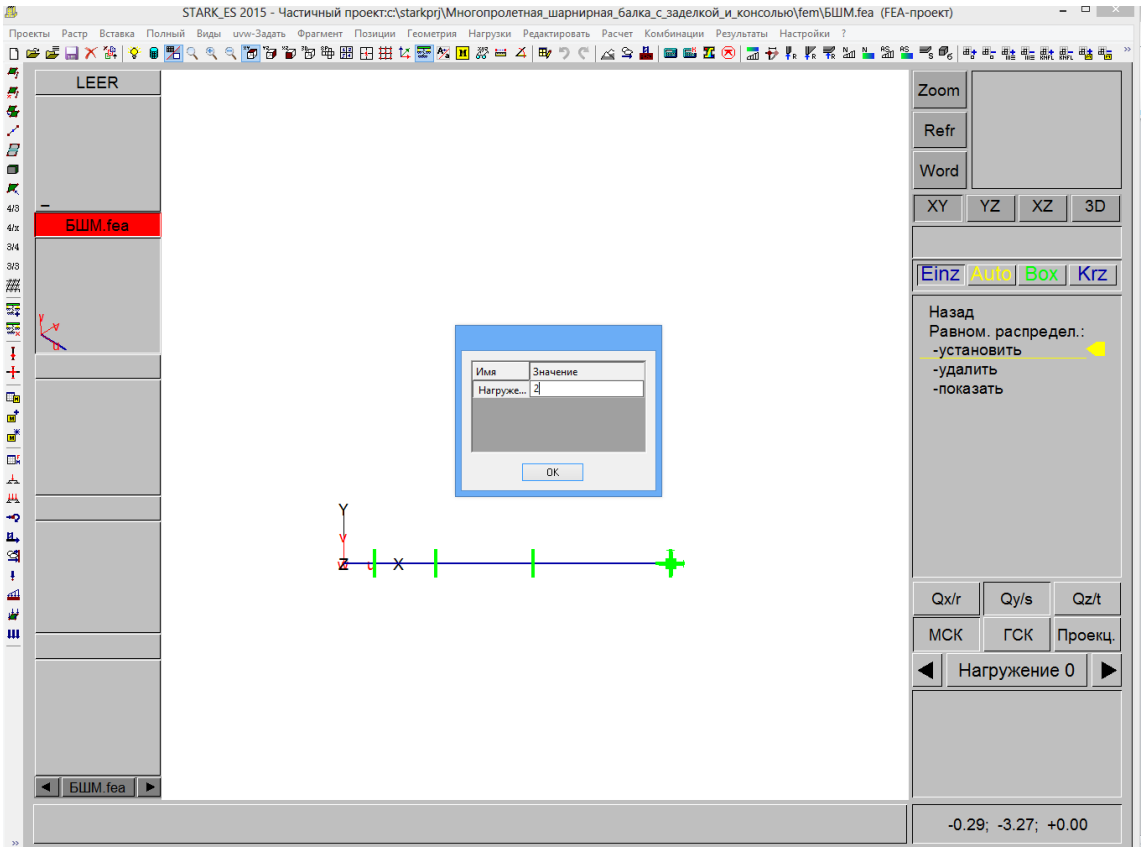


Рис. 126

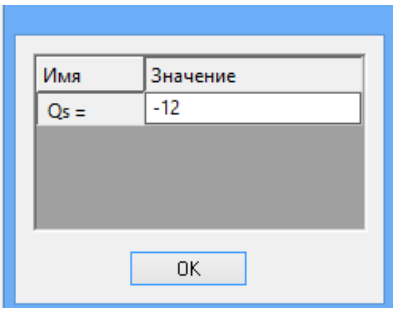


Рис. 127

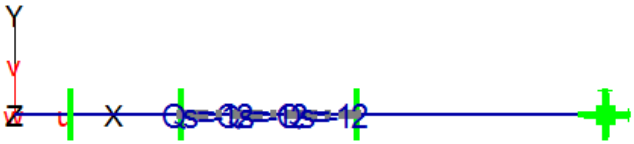


Рис. 128

Зададим связи между элементами МШБ. Установим элементные шарниры, для этого загружаем команду **Редактировать – Шарниры – Элементные**: ***Установить*** (рис. 129).

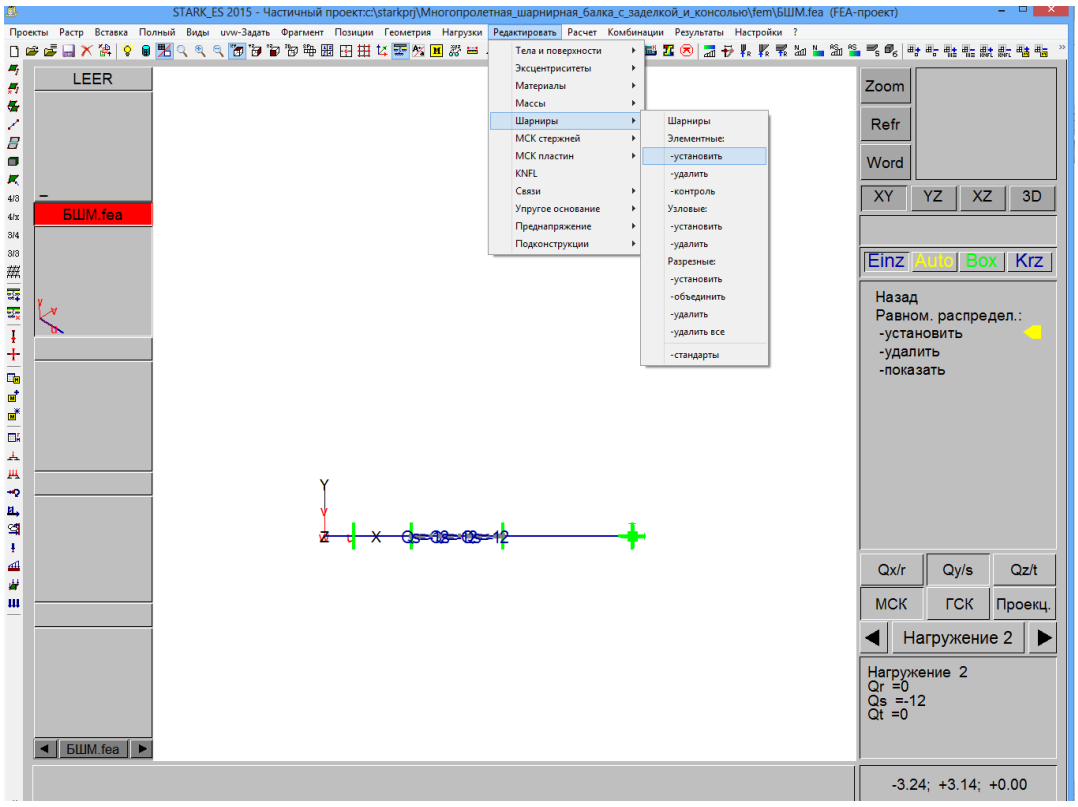


Рис. 129

В окне выбора нажимаем клавишу $R_{z/t}$ (указываем направление взаимного смещения соединяемых связью элементов, которое эта связь разрешает; в нашем случае это взаимный поворот относительно оси *z*) (рис. 130). После этого указываем на элементы МШБ, на концах которых должны быть установлены шарниры (рис. 131).

Рис. 130

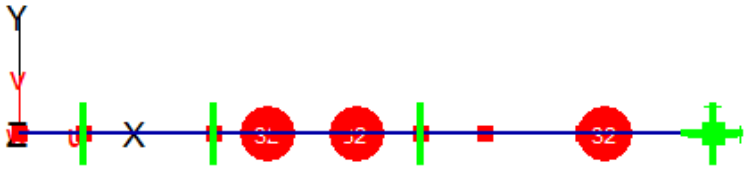


Рис. 131

Жесткости элементов задаем подобно тому, как это делалось для фермы (рис. 132, 133).

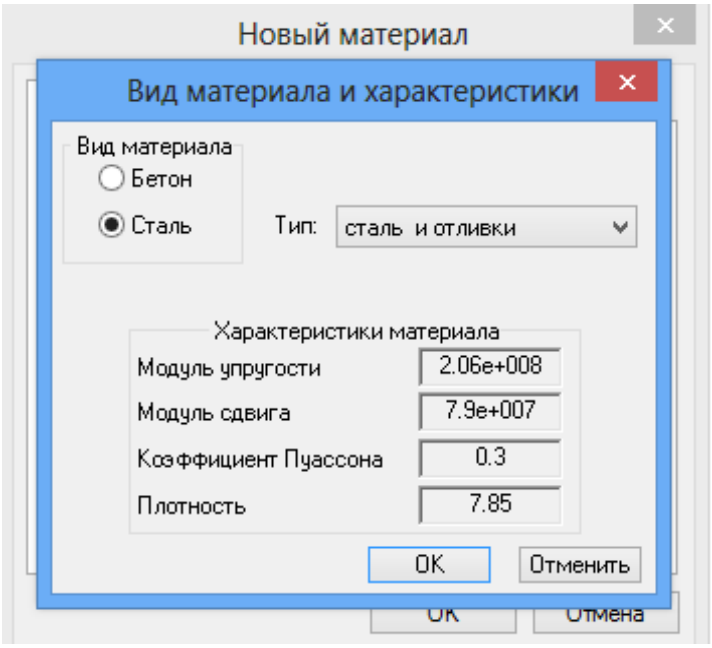


Рис. 132

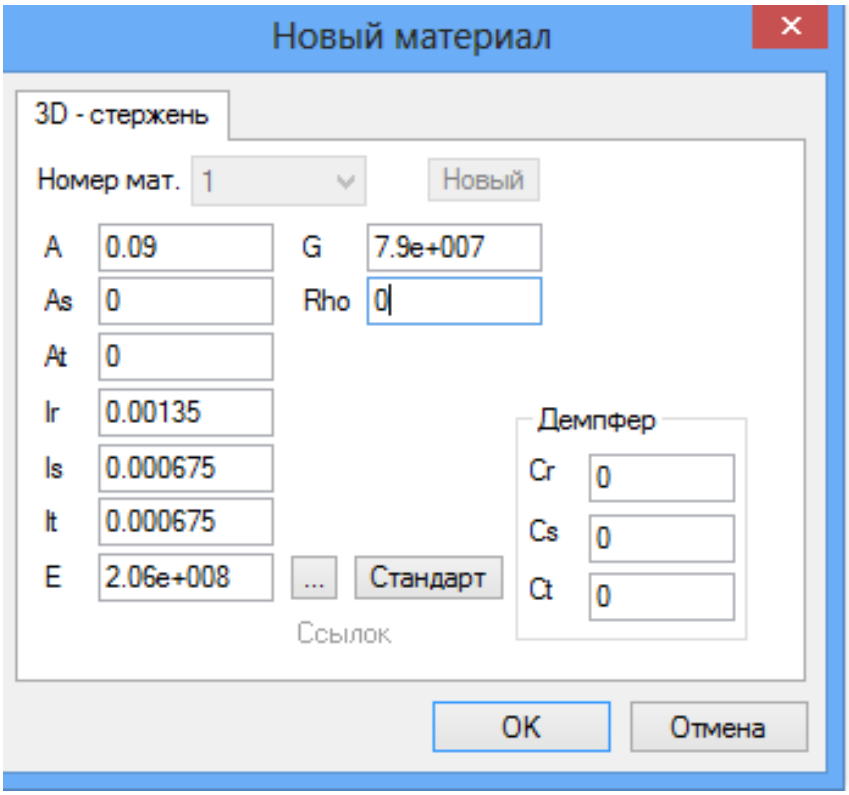


Рис. 133

Для задания комбинации нагружений используем пункт **Комбинации** (рис. 134).

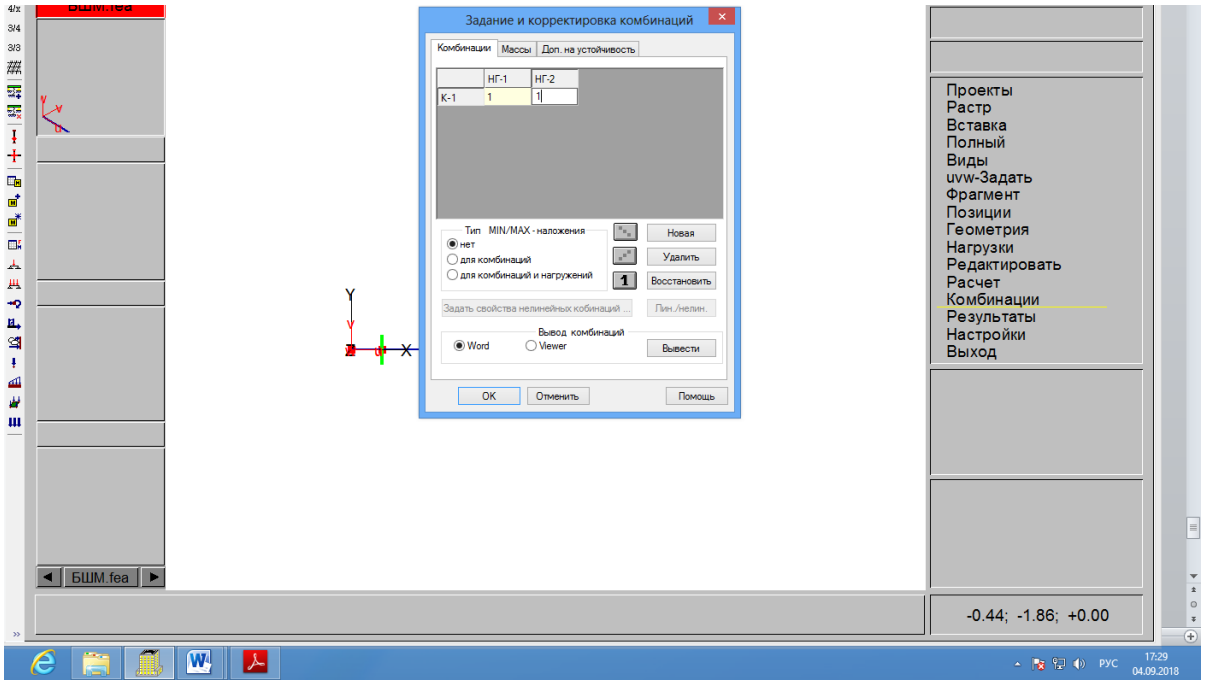


Рис. 134

Расчет выполняется подобно тому, как это делалось для фермы (рис. 135, 136).

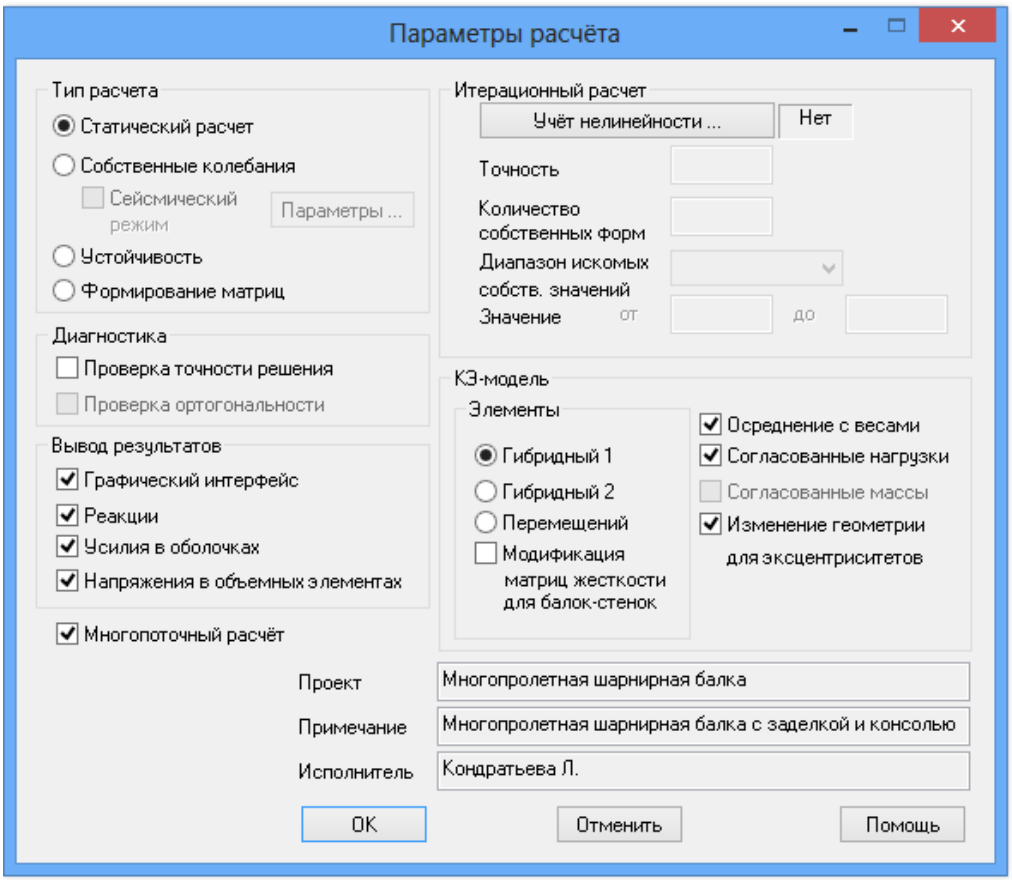


Рис. 135

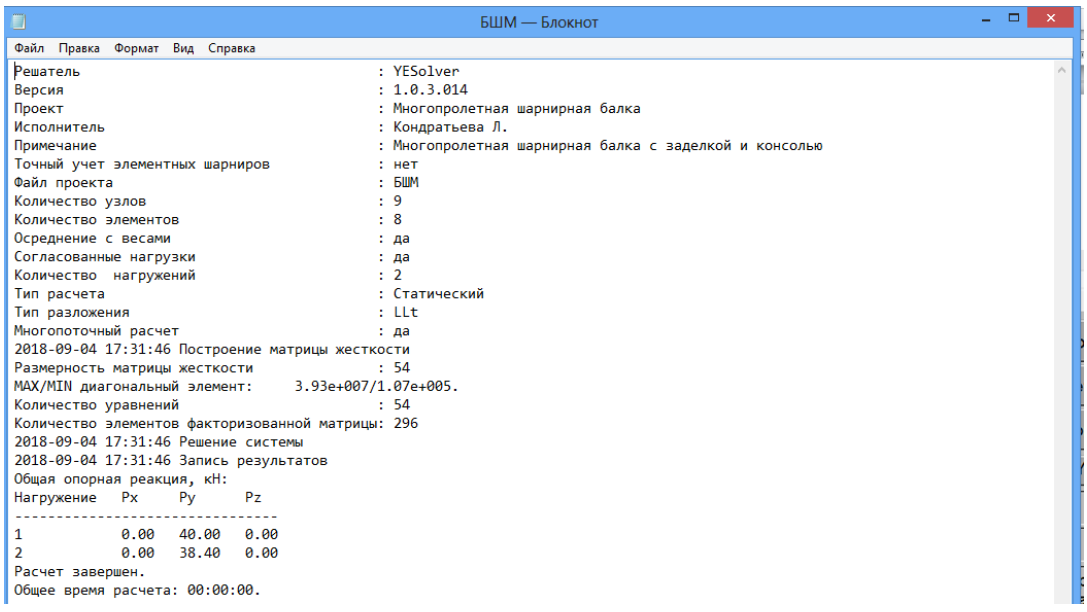


Рис. 136

Результаты расчета отображаются так же, как это делалось для фермы (на рис. 137 представлена схема деформации МШБ).

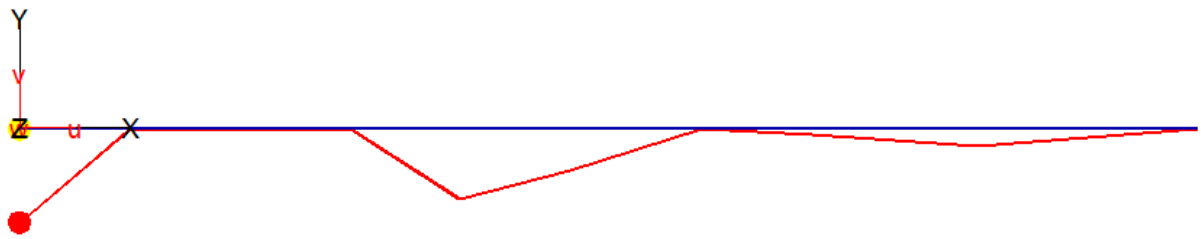


Рис. 137

Для большей наглядности результатов увеличим количество элементов МШБ; для этого поделим элементы МШБ, загрузив команду **Геометрия – Делить стержни** (рис. 138). В окне информации появляется сообщение *«Выберите множество стержней для деления»* (команда делит элементы пополам) (рис. 139). Указываем на все элементы МШБ, выбор завершаем щелчком правой клавиши мыши. Появляется диалоговое окно с предложением подтвердить деление элементов (рис. 140). После подтверждения элементы будут разделены. Такое деление пополам можно повторить. Схема деформации при большем количестве элементов выглядит нагляднее (рис. 141). Более подробными получаются при этом и эпюры внутренних усилий – поперечной силы и изгибающего момента (рис. 142, 143). Необходимо заметить, что на эпюре поперечной силы положительные ординаты отложены вниз, отрицательные – вверх.

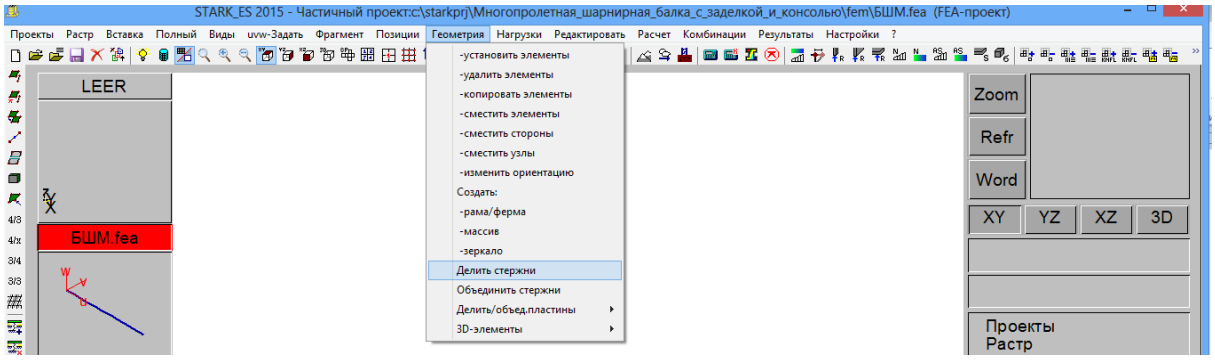


Рис. 138

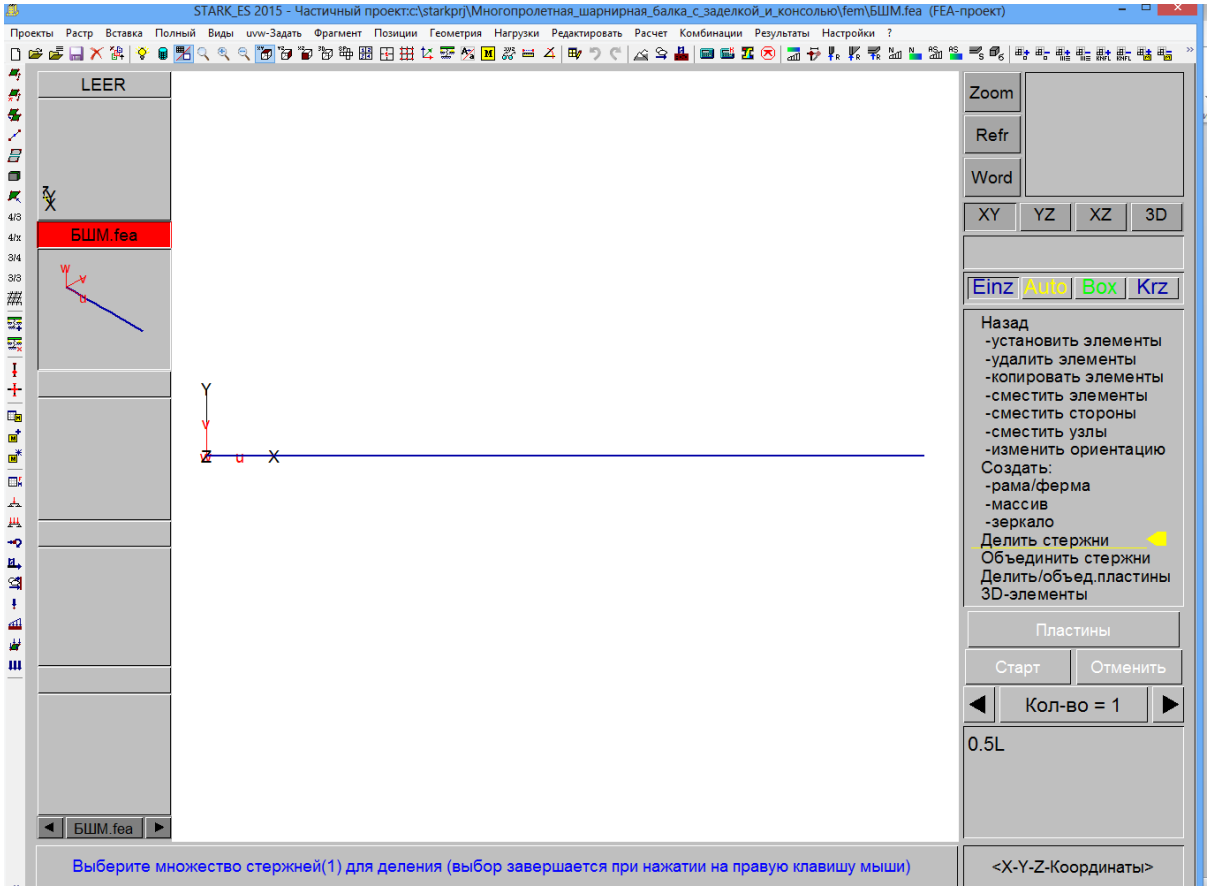


Рис. 139

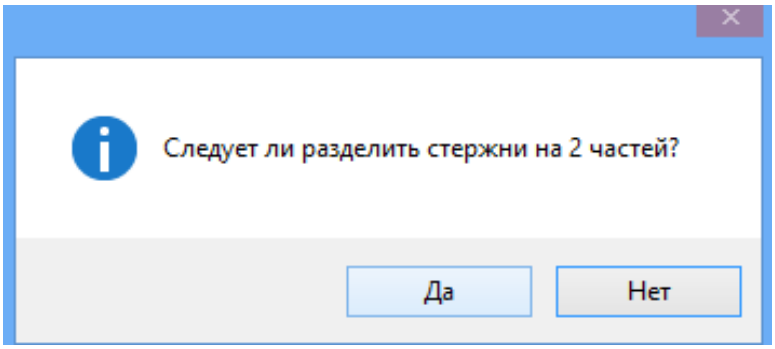


Рис. 140

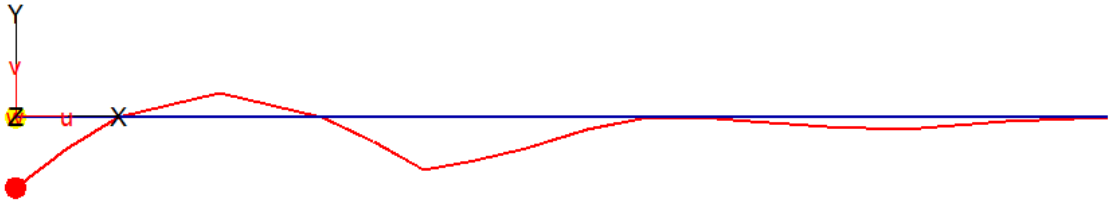


Рис. 141

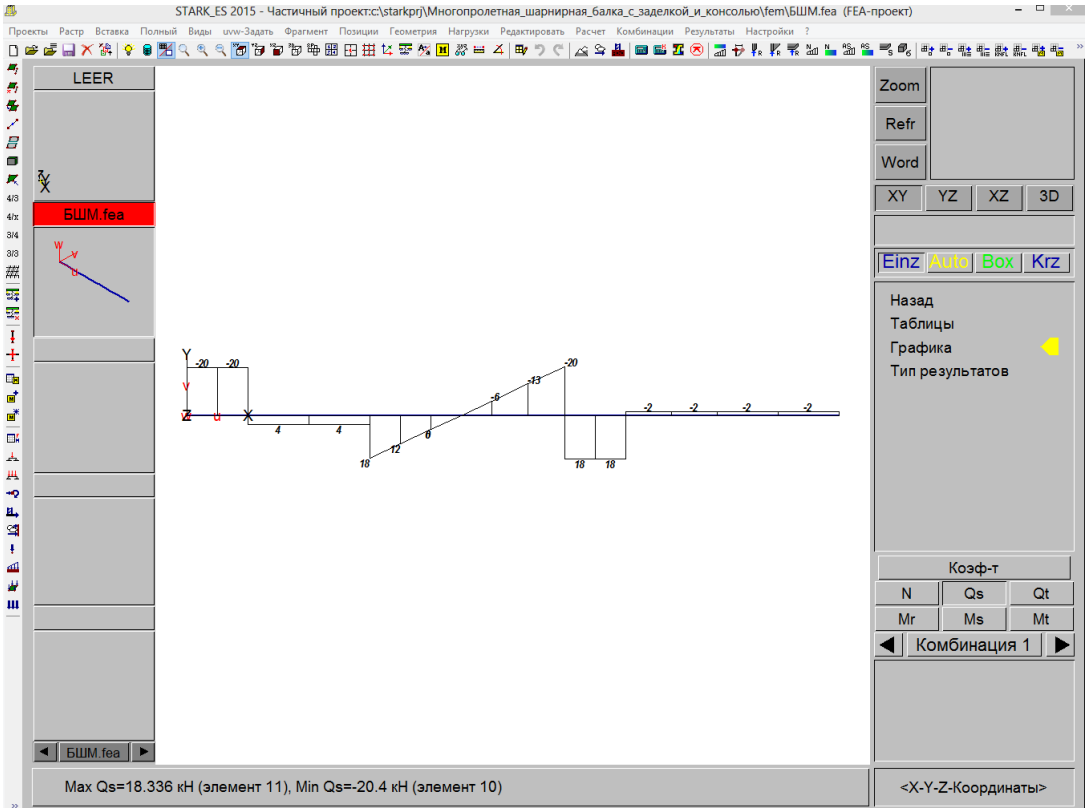


Рис. 142

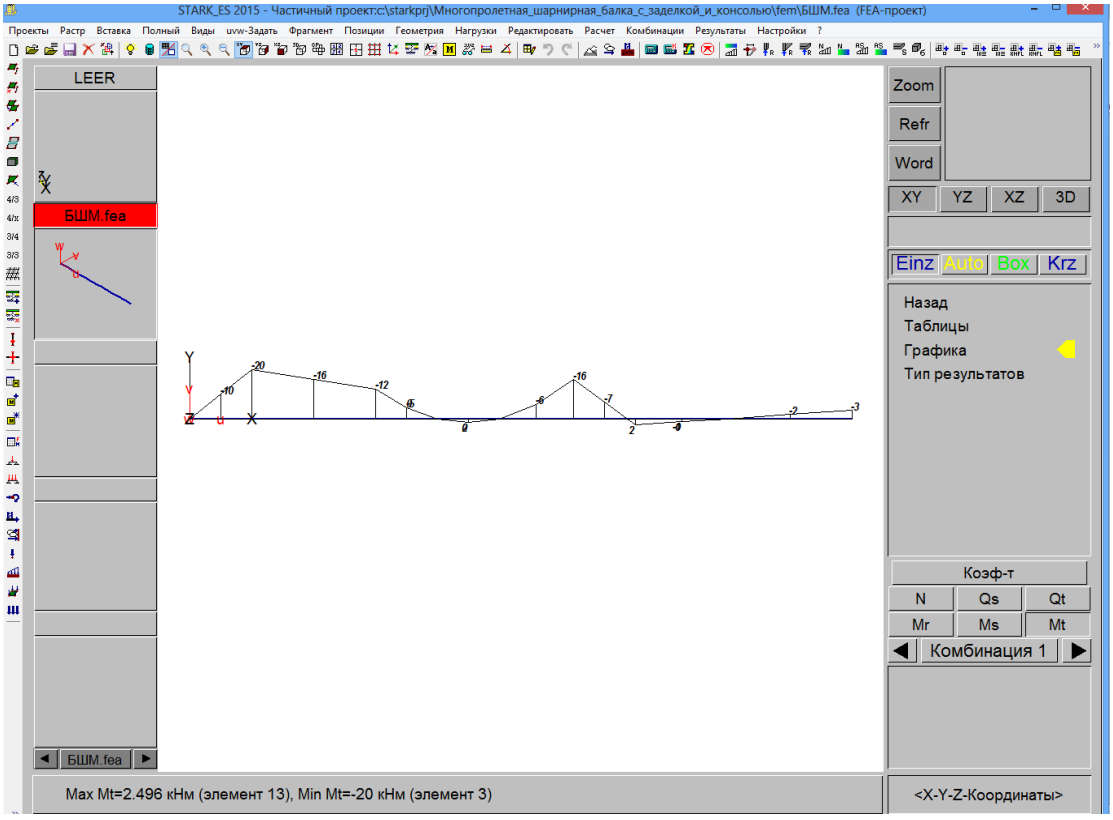


Рис. 143

Расчет двухопорной рамы в ПК STARK ES

Рассмотрим определение усилий и деформаций в плоской статически определимой раме при помощи ПК STARK ES на примере системы, показанной на рис. 144. Рамы – это модели зданий и сооружений в целом; распространены рамные опоры трубопроводов различного назначения.

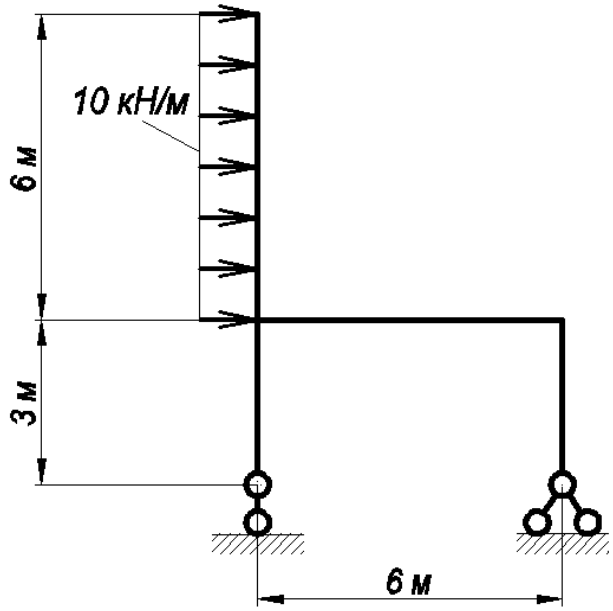


Рис. 144

Диалоговое окно команды **Проект – Создать** показано на рис. 145.

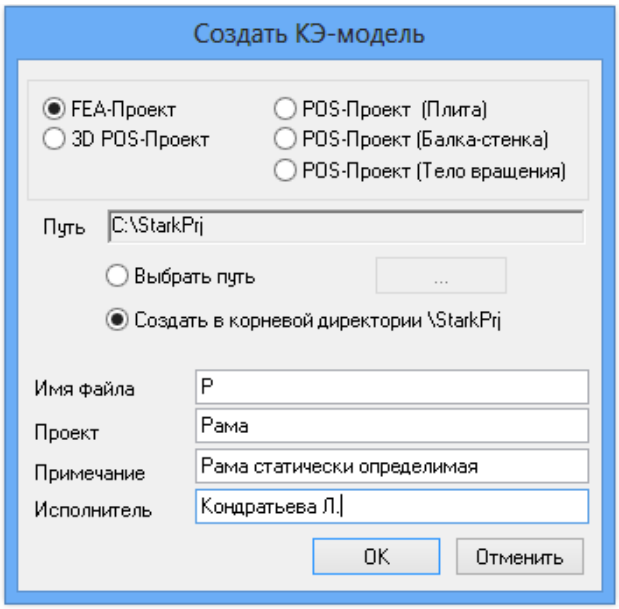


Рис. 145

Геометрическую модель рамы можно сформировать, задавая каждый элемент по отдельности координатами его узлов (как это делалось выше для балки) либо используя команду **Геометрия – Создать: Рама/Ферма.**

Загрузим команду **Геометрия – Создать: Рама/Ферма**. В окне выбора нажимаем клавиши *2D-стержни, Рамы, Установить*. В окне информации появляется сообщение *«Установите точку P_1, начальную точку системы»* (рис. 146); зададим ее в начале координат (рис. 147). Затем на экран выходит табло, в котором задаем угол, который будет составлять ригель рамы с осью *x* (рис. 148); в нашем случае этот угол равен нулю. После этих настроек появляется диалоговое окно команды **Геометрия – Создать: Рама/Ферма** (рис. 149). Заполним таблицу (рис. 150). Получим раму, показанную на рис. 151. Удалим лишние элементы (рис. 152), воспользовавшись командой **Геометрия – Удалить элементы**.

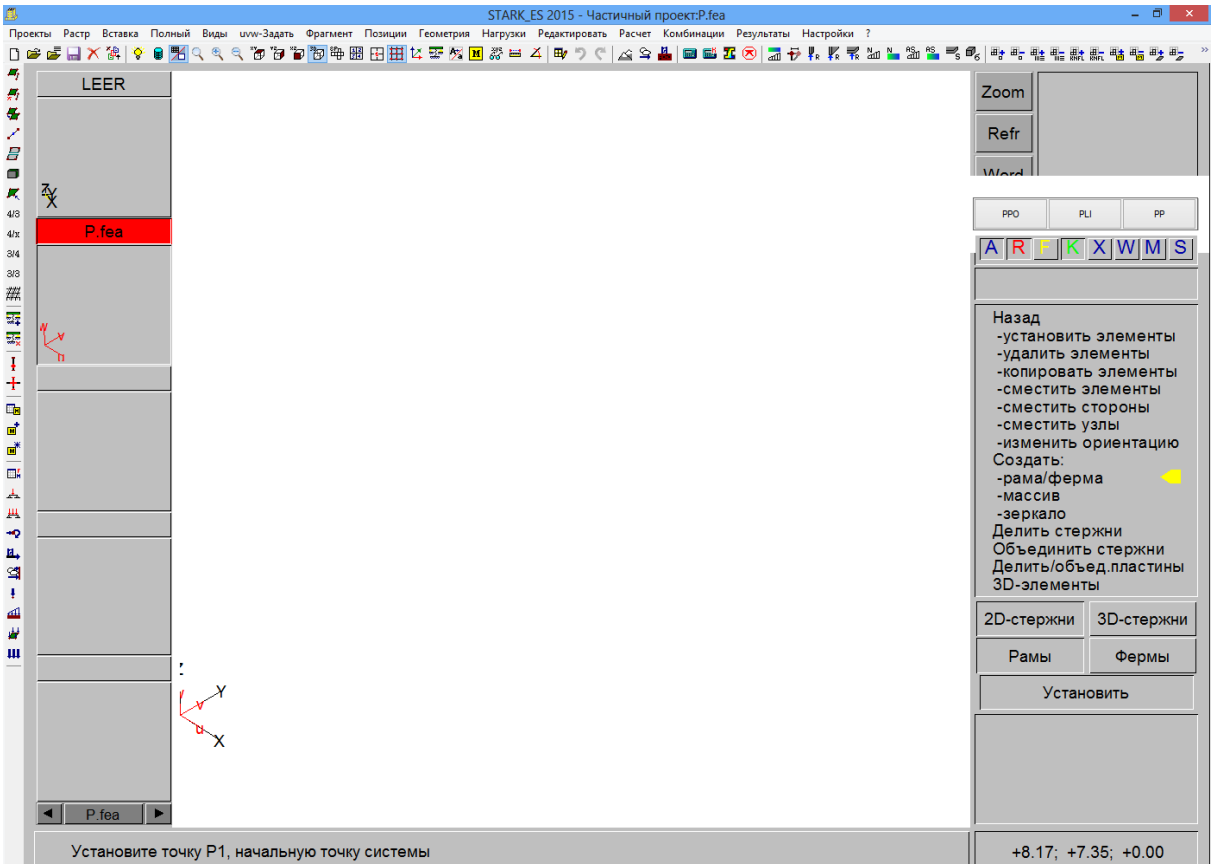


Рис. 146

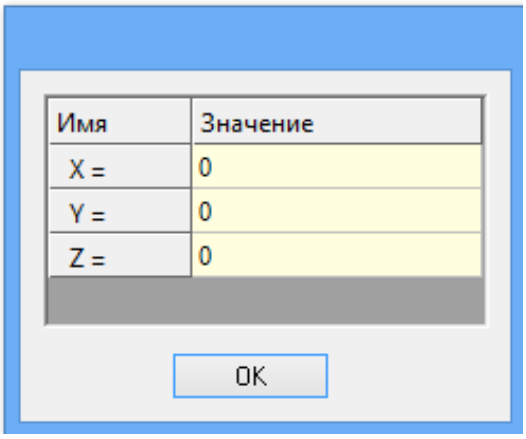


Рис. 147

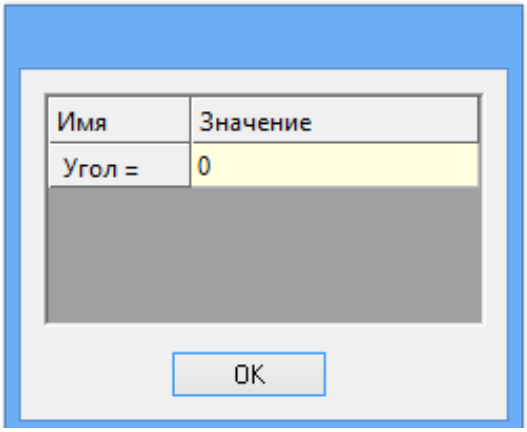


Рис. 148

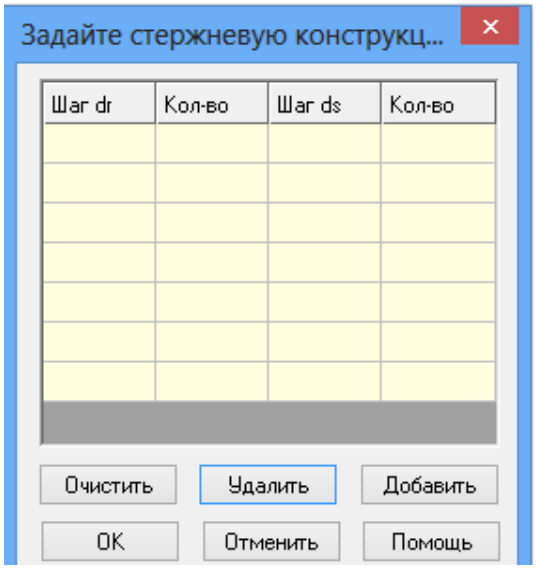


Рис. 149

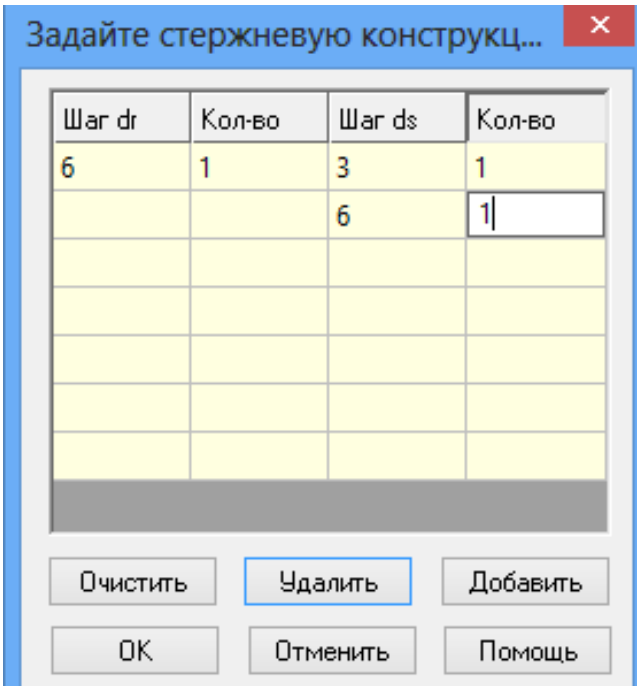


Рис. 150

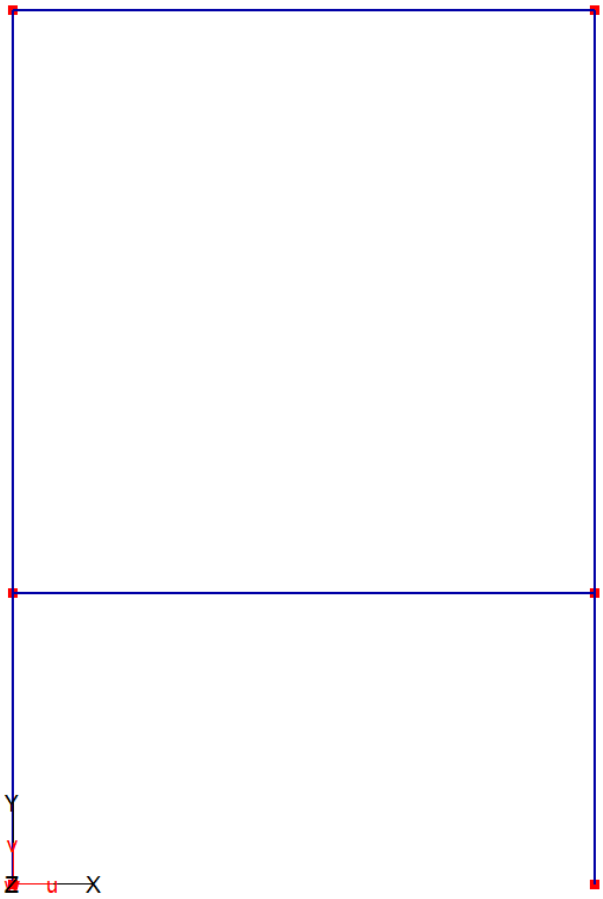


Рис. 151

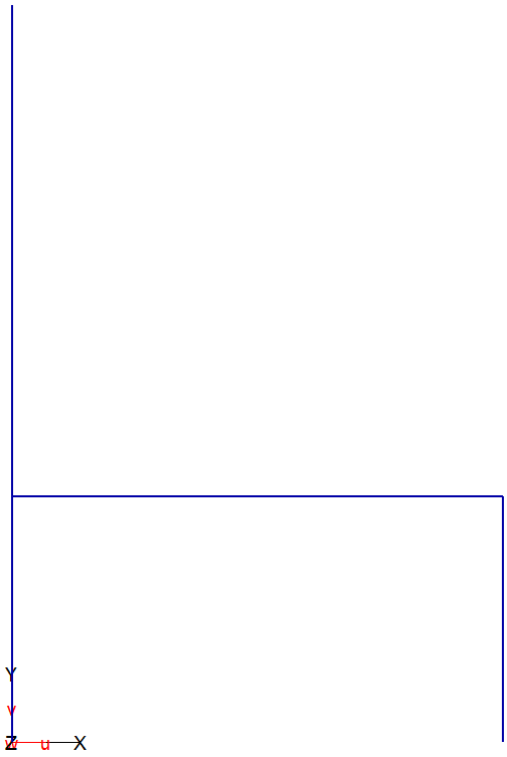


Рис. 152

Команда **Геометрия – Создать: Рама/Ферма** эффективна при формировании геометрических моделей сложных рам с большим количеством пролетов, этажей. Геометрическая модель относительно простой рамы легко может быть сформирована заданием каждого элемента по отдельности командой **Геометрия – Установить элементы** (рис. 153).

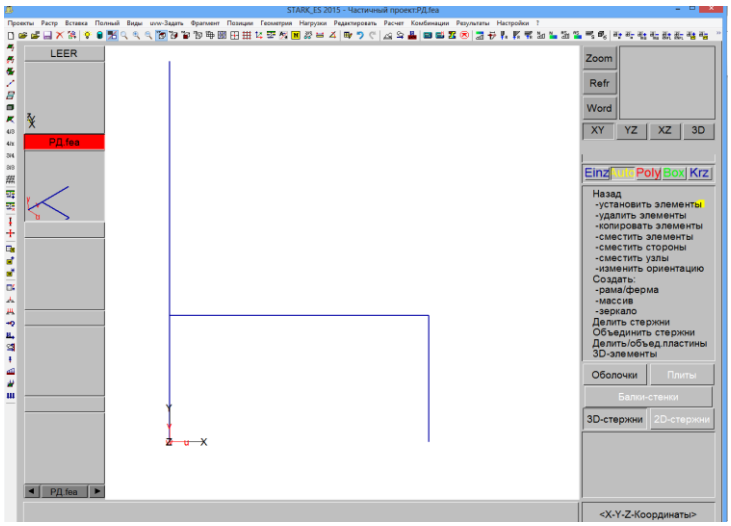


Рис. 153

Жесткости элементов задаются так же, как это делалось выше для фермы и балки.

Равномерно распределенная нагрузка задается подобно тому, как это делалось для балки (рис. 154, 155).

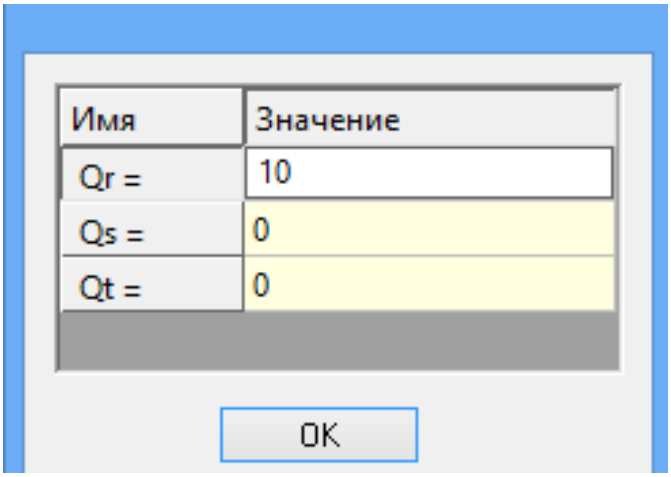


Рис. 154

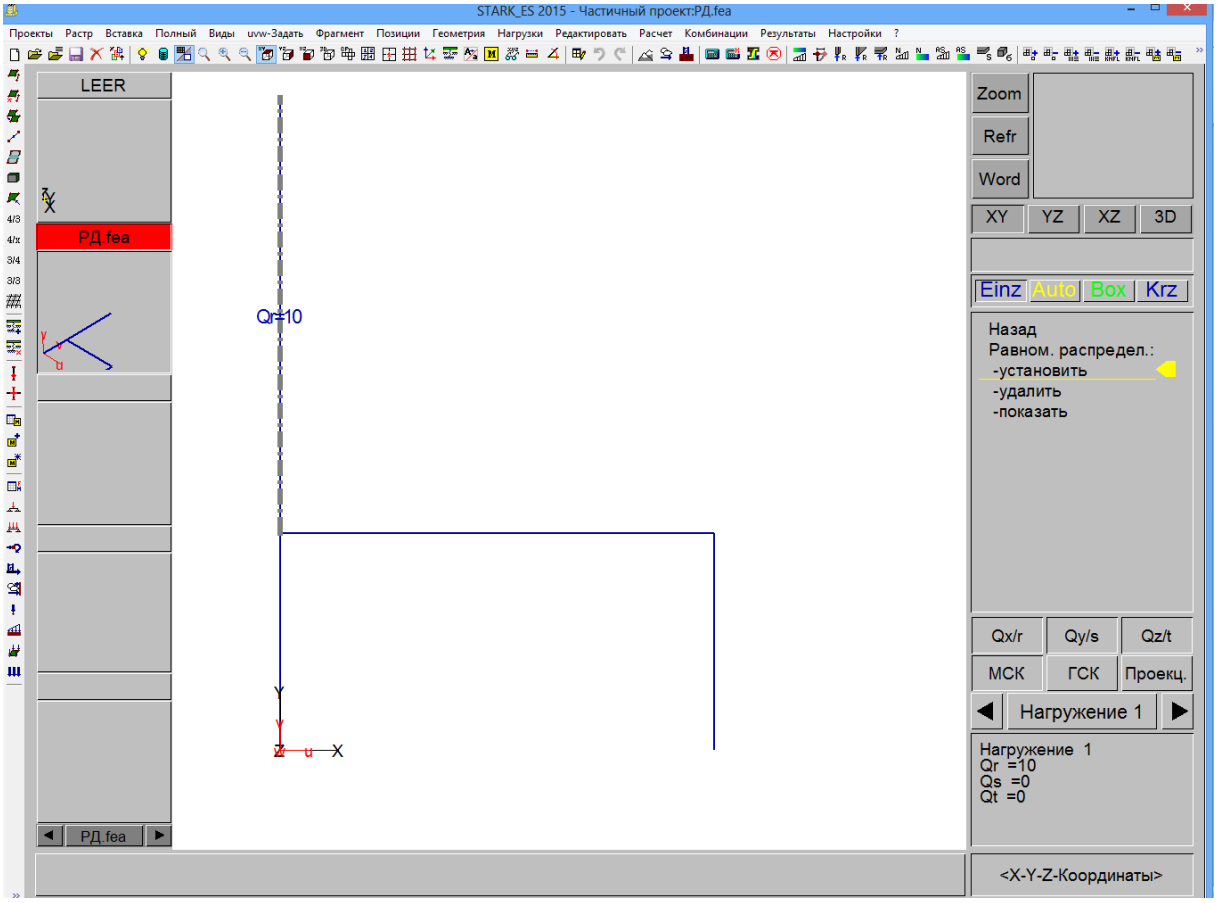


Рис. 155

Зададим опорные связи. Используем команду **Редактировать – Связи – Опорные закрепления:** ***Установить***. Задаем шарнирно-неподвижную опору, нажимая в окне выбора клавиши *X*, *Y*, *Z* (рис. 156), и шарнирно-подвижную опору, нажимая в окне выбора клавиши *Y*, *Z*, R_x (рис. 157).

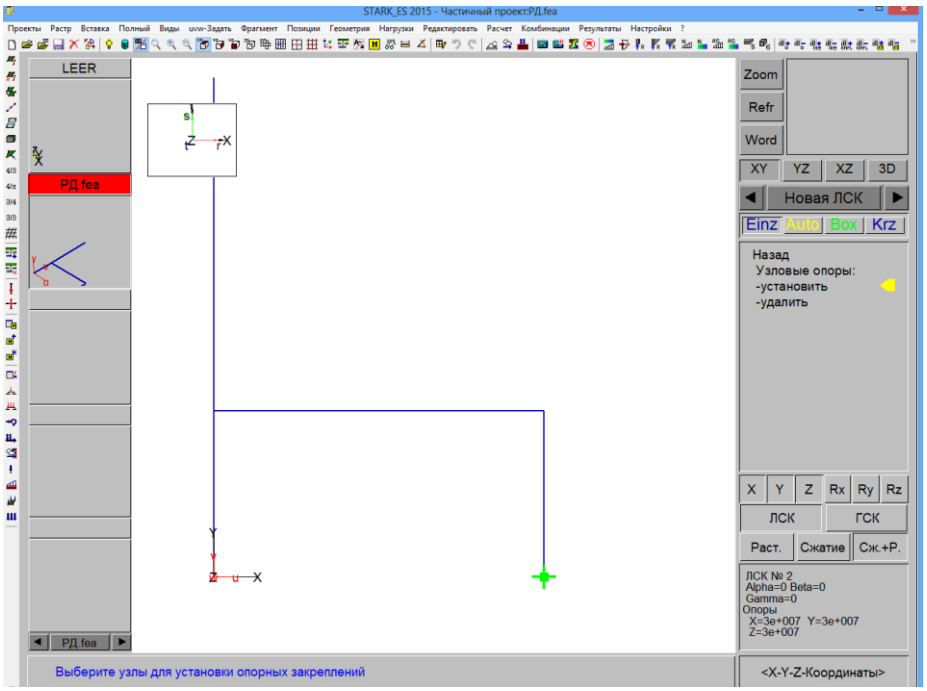


Рис. 156

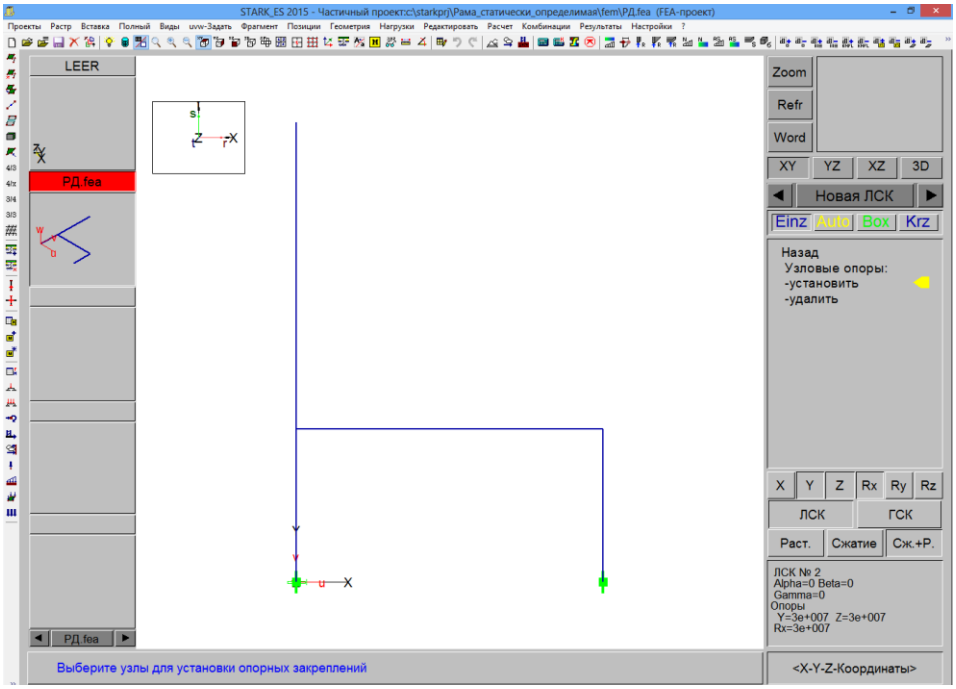


Рис. 157

Расчет выполняется так же, как это делалось для фермы и балки (рис. 158).

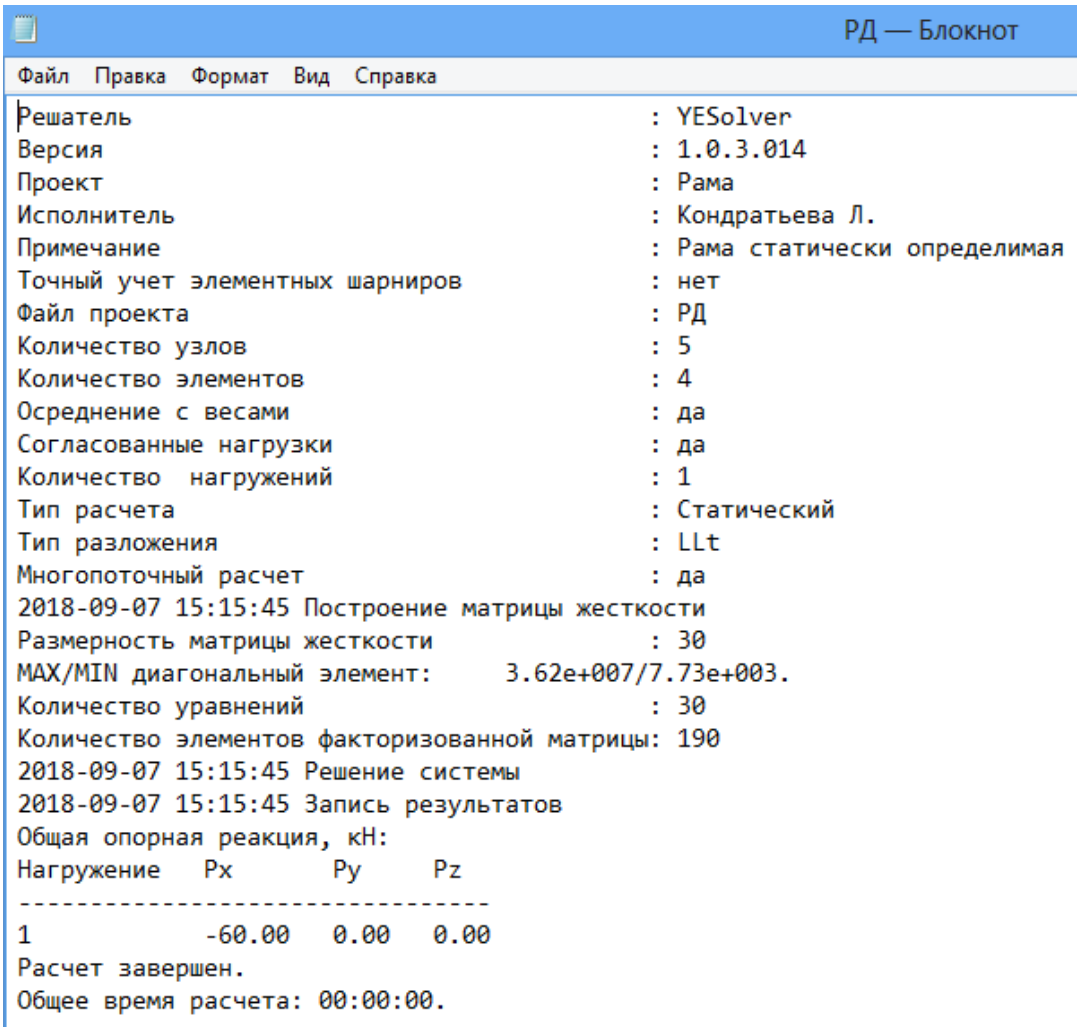


Рис. 158

Результаты расчета отображаются так же, как и для фермы и балки. Для большей наглядности схемы деформации рамы количество элементов рамы увеличено командой **Геометрия – Делить стержни** (рис. 159), как это делалось для балки. Для более подробного отображения эпюр внутренних усилий (в первую очередь это важно для эпюры изгибающего момента) используем настройку *Количество сечений в стержнях, в которых будут рассчитываться усилия* диалогового окна команды **Настройки – Общие** (закладка *Эпюры в стержнях*): количество сечений задано равным пяти (рис. 160). На рис. 161 – 163 представлены эпюры продольной, поперечной сил и изгибающего момента для рамы.

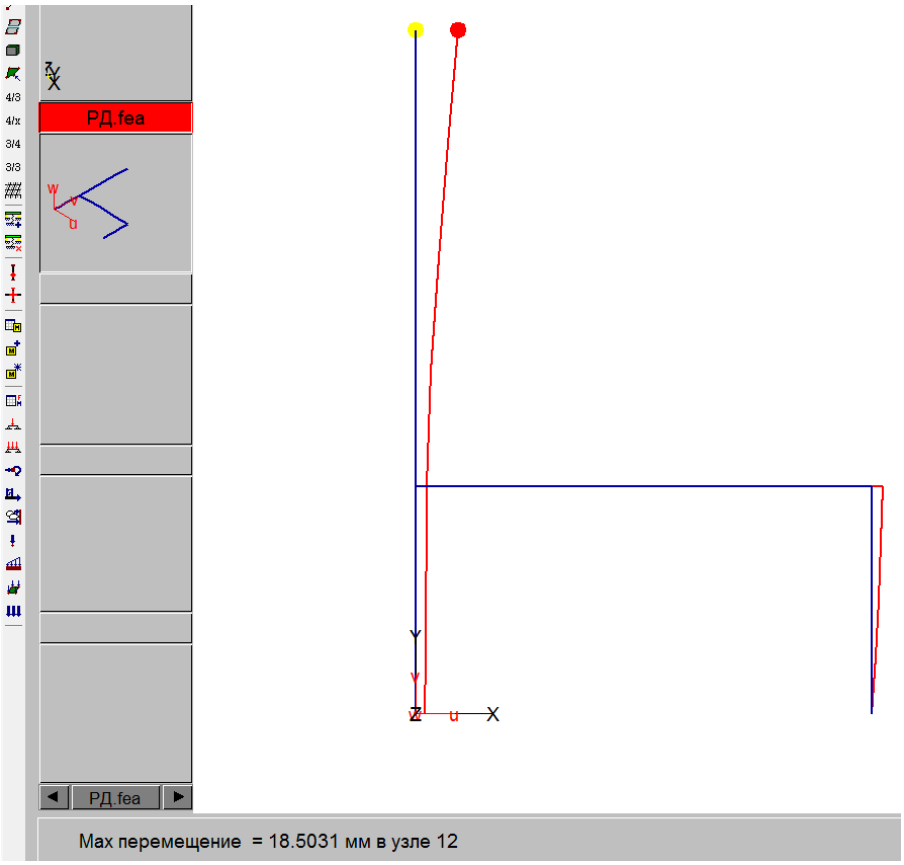


Рис. 159

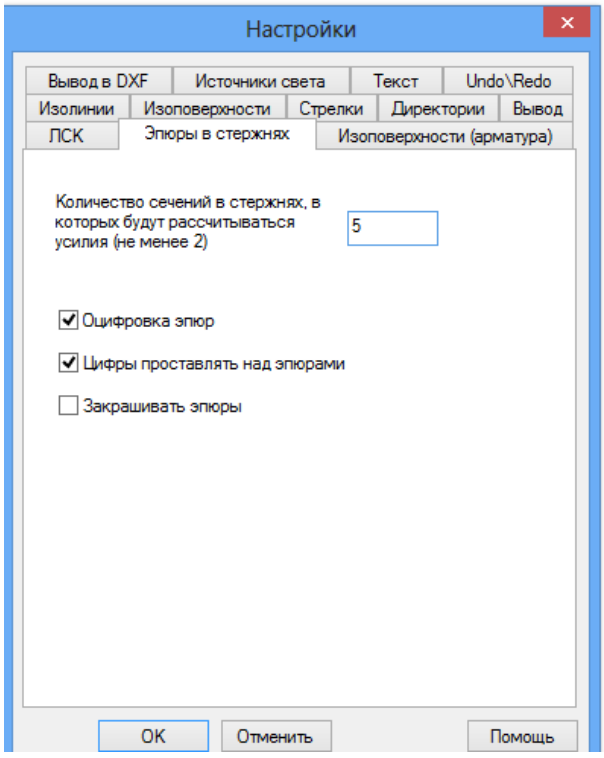


Рис. 160

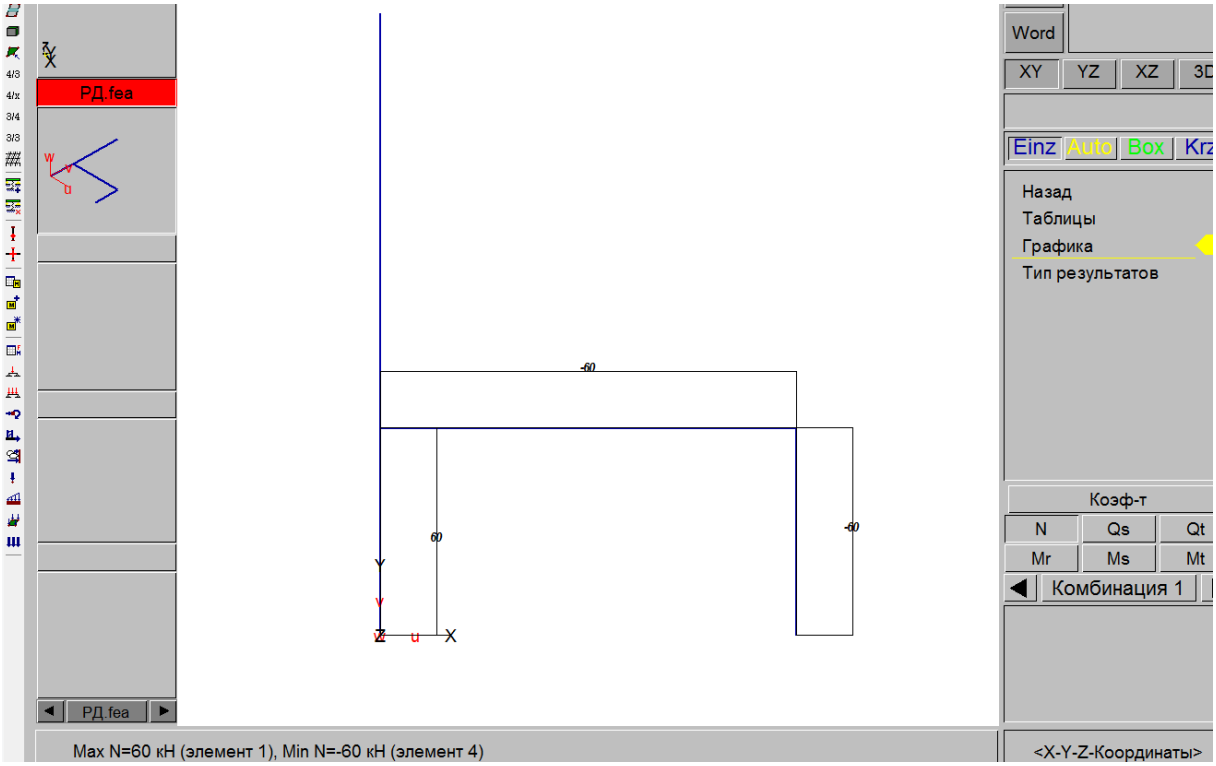


Рис. 161

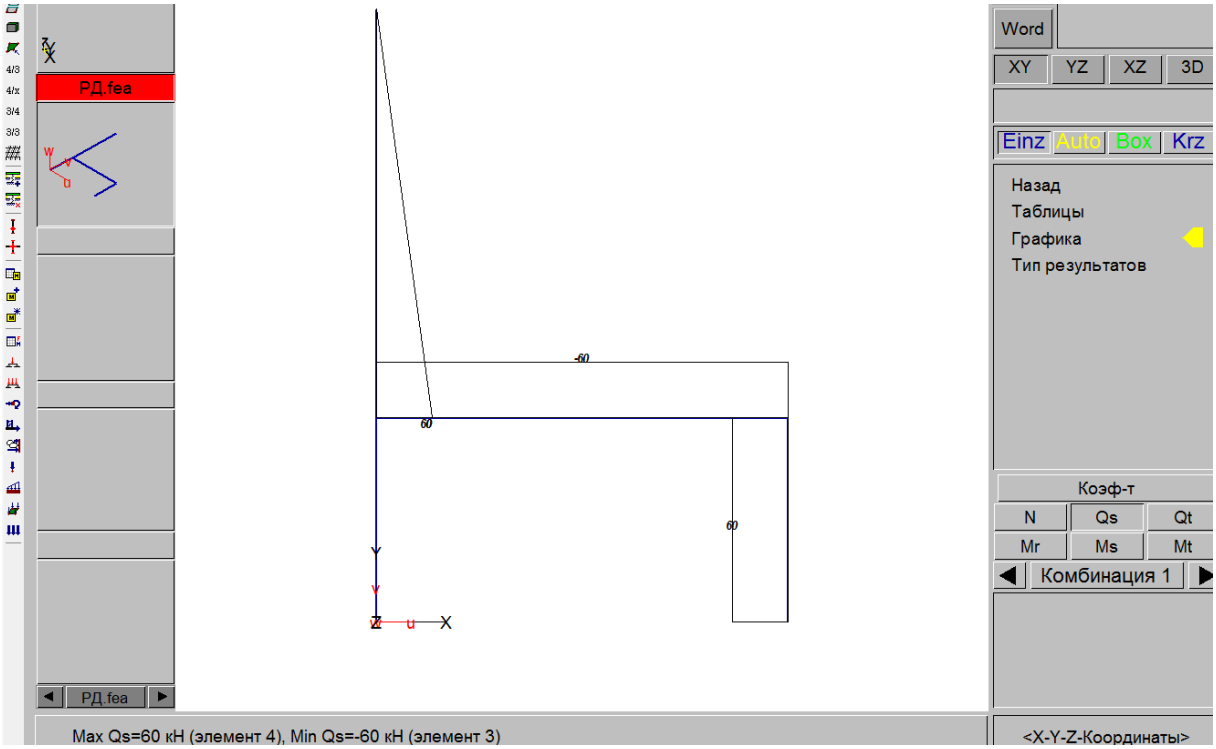


Рис. 162

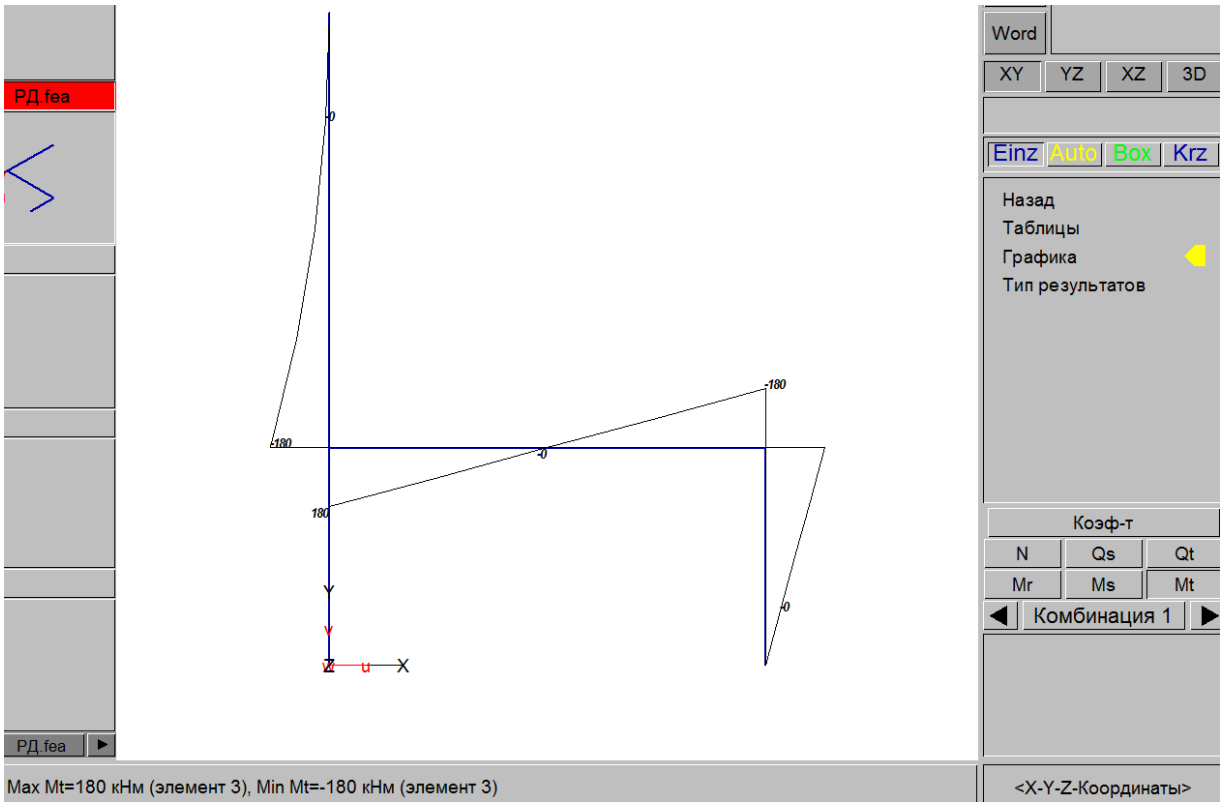


Рис. 163

Расчет трехшарнирной рамы в ПК STARK ES

Рассмотрим определение усилий и деформаций в трехшарнирной раме при помощи ПК STARK ES на примере системы, показанной на рис. 164.

Геометрическая модель рамы (рис. 165) сформирована при помощи команды **Геометрия – Установить элементы**.

Зададим опорные связи. Используем команду **Редактировать – Связи – Опорные закрепления:** ***Установить***. Задаем шарнирно-неподвижную опору, нажимая в окне выбора клавиши *X*, *Y*, *Z* (рис. 166), и другую шарнирно-неподвижную опору (и обеспечиваем геометрическую неизменяемость системы), нажимая в окне выбора клавиши *X*, *Y*, *Z*, R_x (рис. 167).

Жесткости элементов задаются так же, как это делалось выше для фермы и балки.

Ключевой шарнир зададим командой **Редактировать – Шарниры – Элементные:** ***Установить*** (рис. 168, 169).

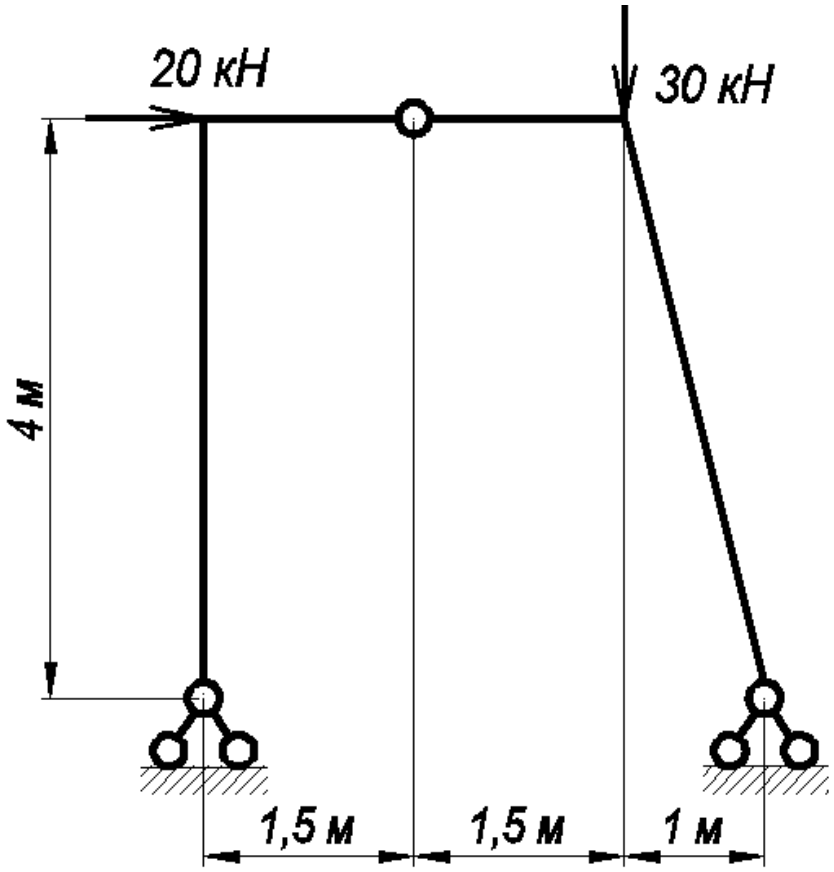


Рис. 164

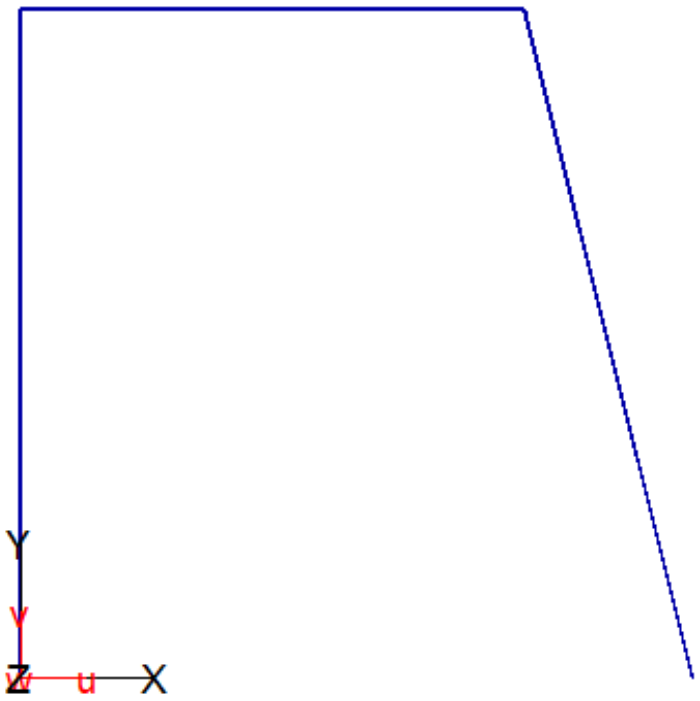


Рис. 165

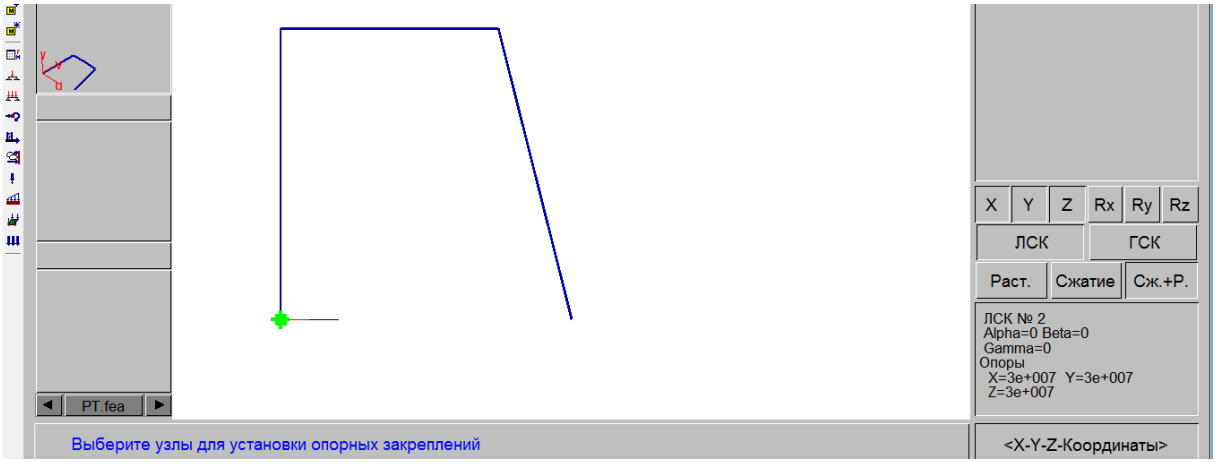


Рис. 166

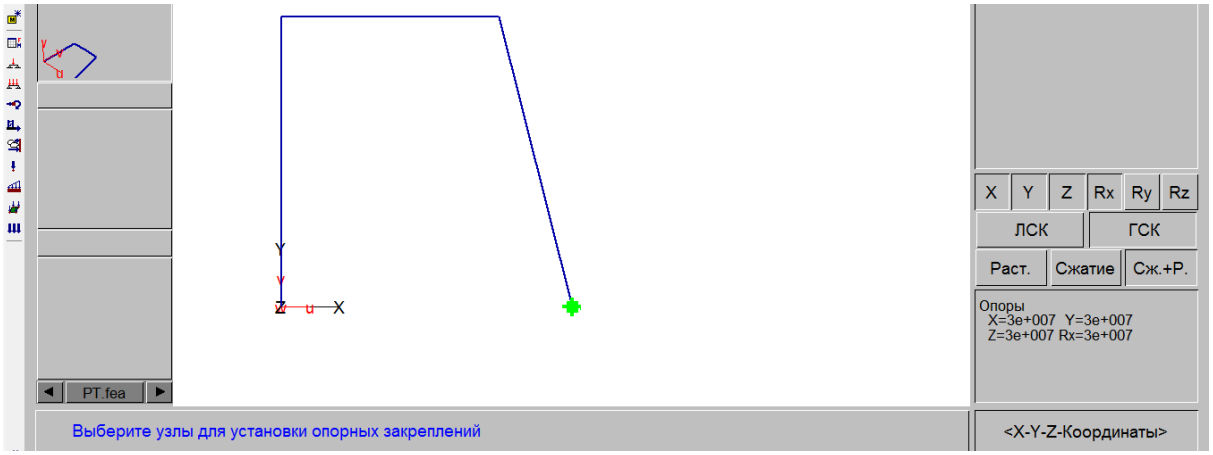


Рис. 167

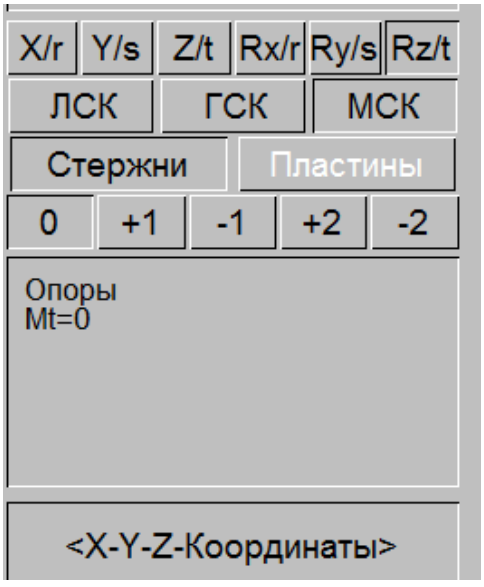


Рис. 168

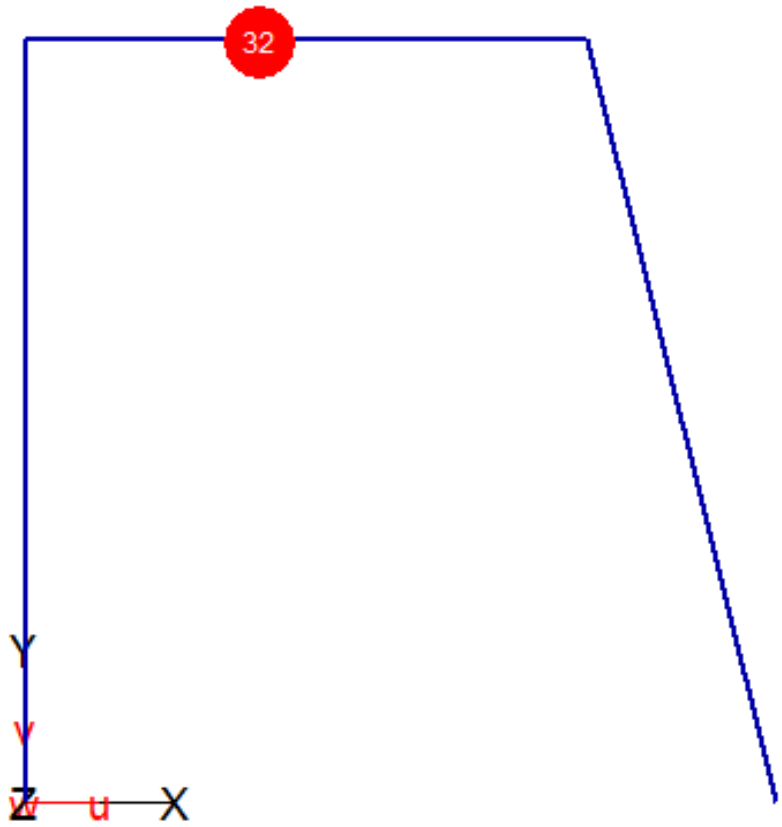


Рис. 169

Нагрузка задается так же, как это делалось выше для фермы (рис. 170 – 173).

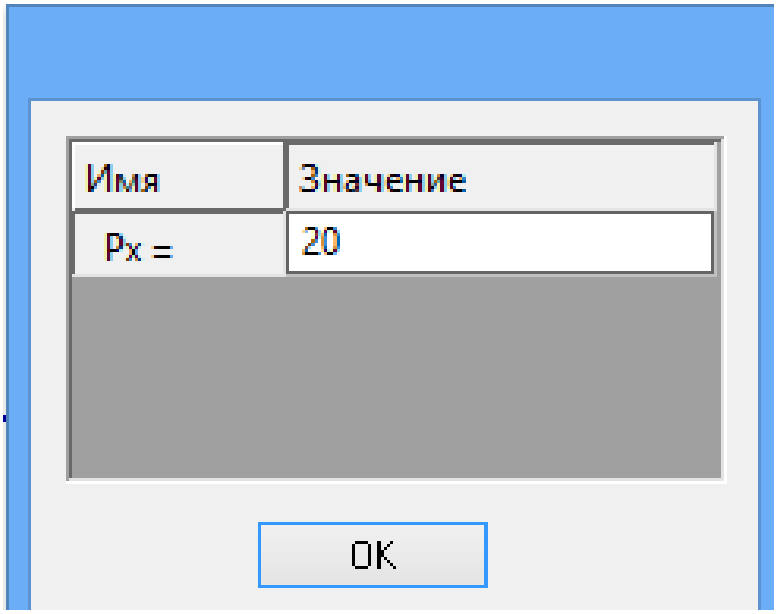


Рис. 170

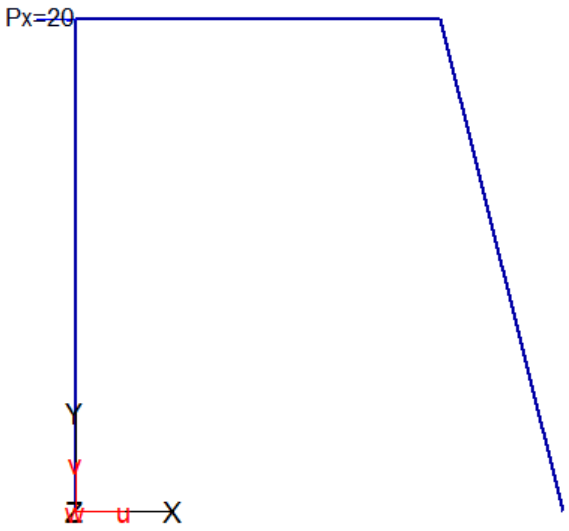


Рис. 171

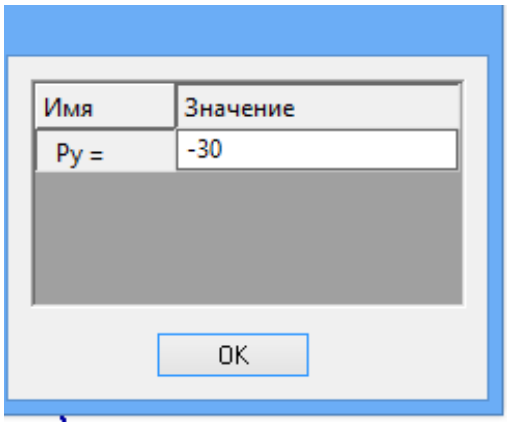


Рис. 172

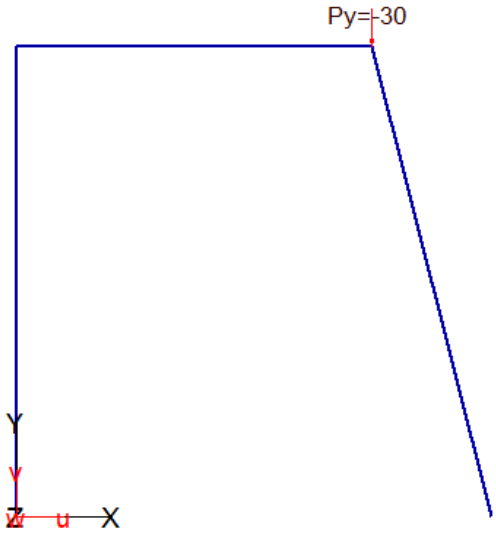


Рис. 173

Зададим комбинацию нагружений (пункт **Комбинации)** (рис. 174).

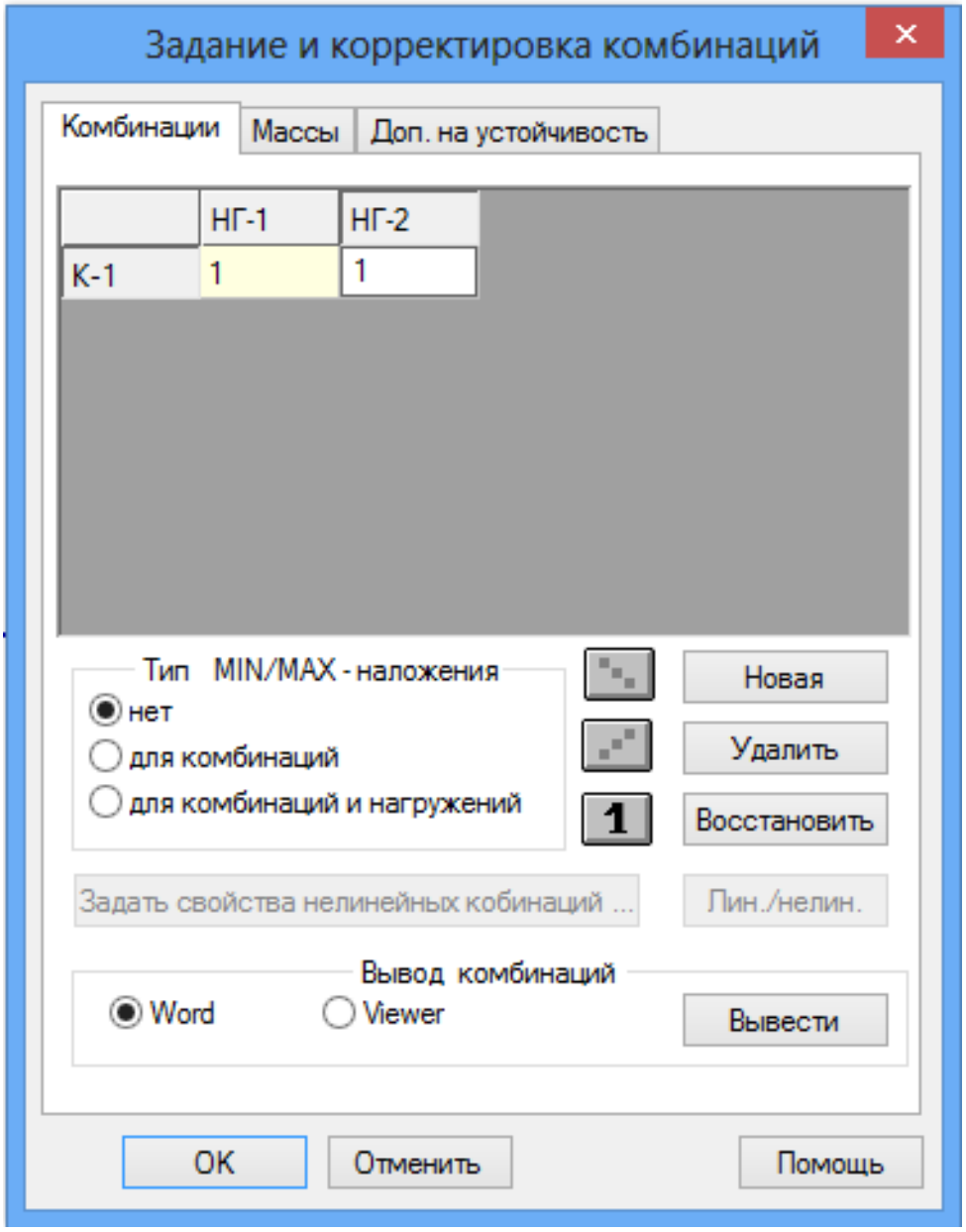


Рис. 174

Расчет выполняется так же, как это делалось выше.

Результаты расчета отображаются так же, как и выше. Для большей наглядности схемы деформации рамы количество ее элементов увеличено командой **Геометрия – Делить стержни**, как это делалось выше (рис. 175). На рис. 176 – 178 представлены эпюры продольной, поперечной сил и изгибающего момента. На рис. 179 представлена нумерация узлов.

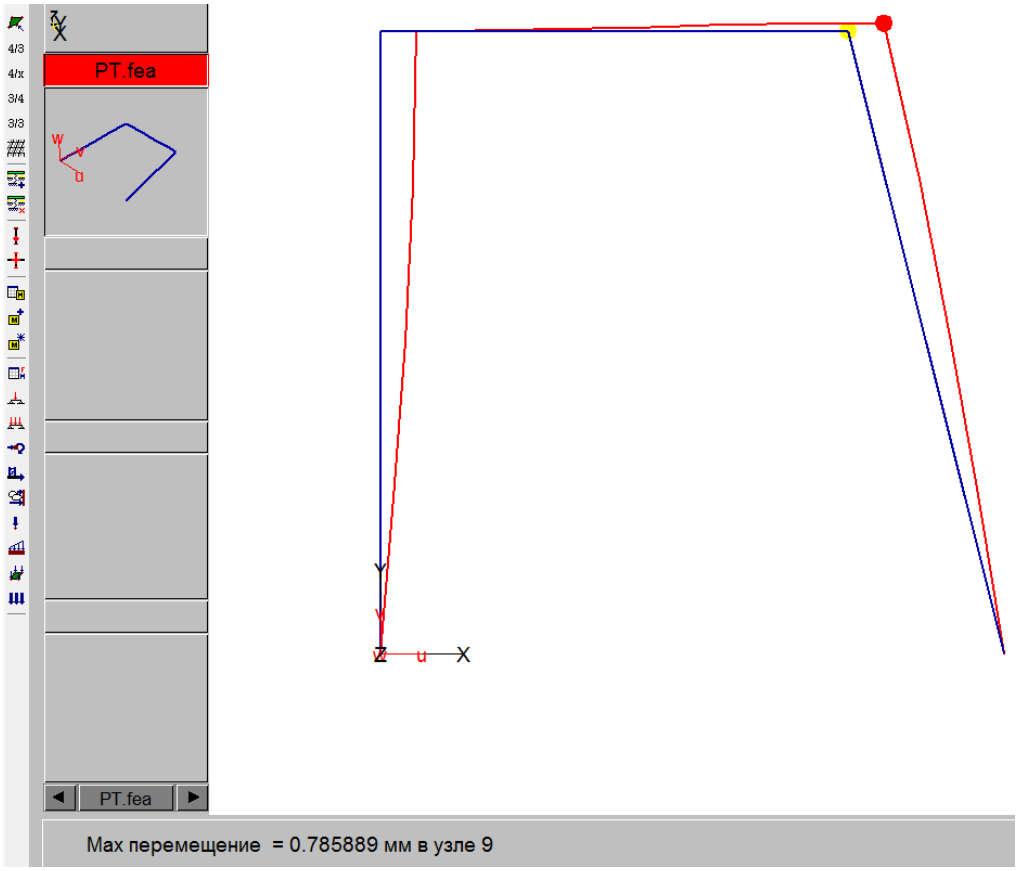


Рис. 175

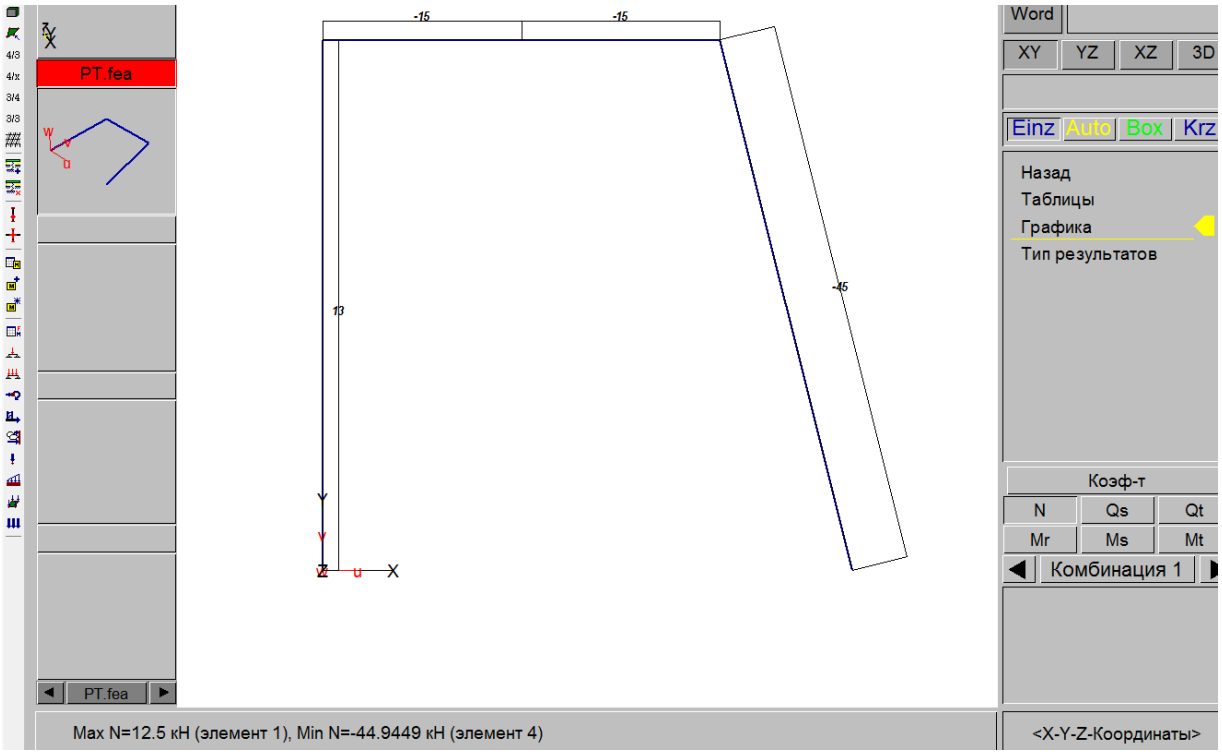


Рис. 176

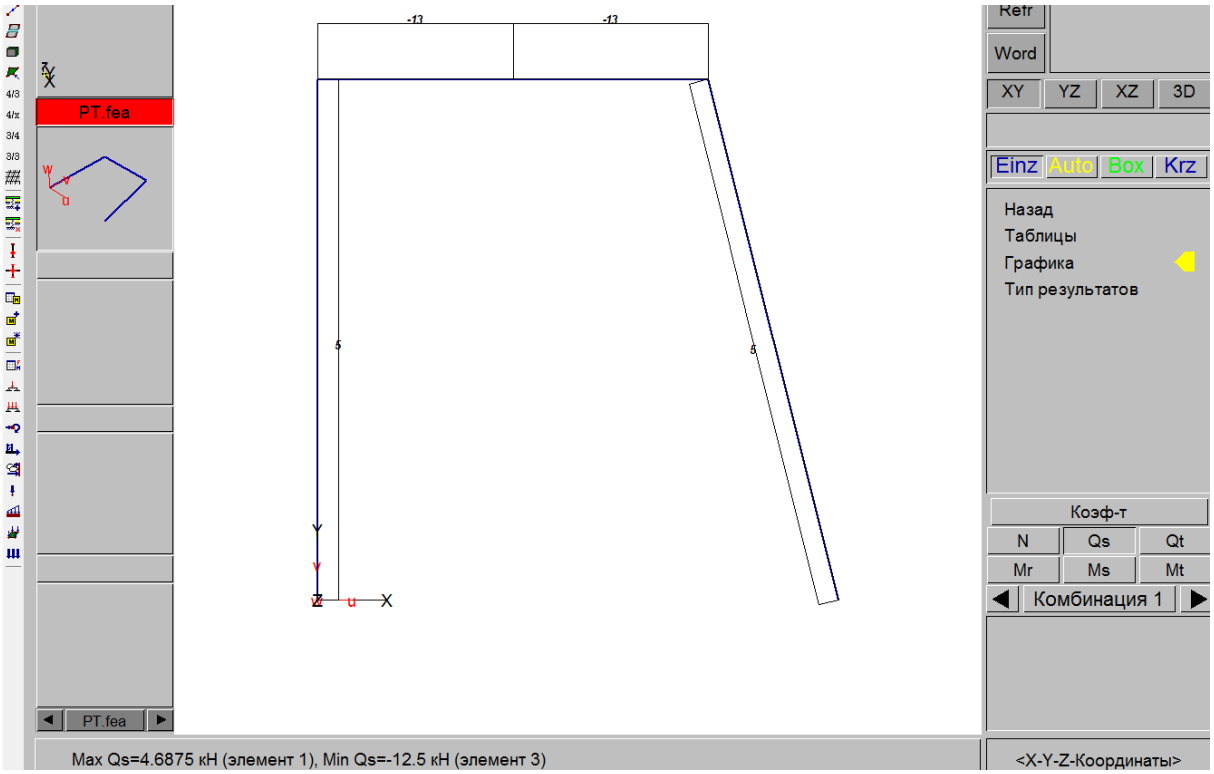


Рис. 177

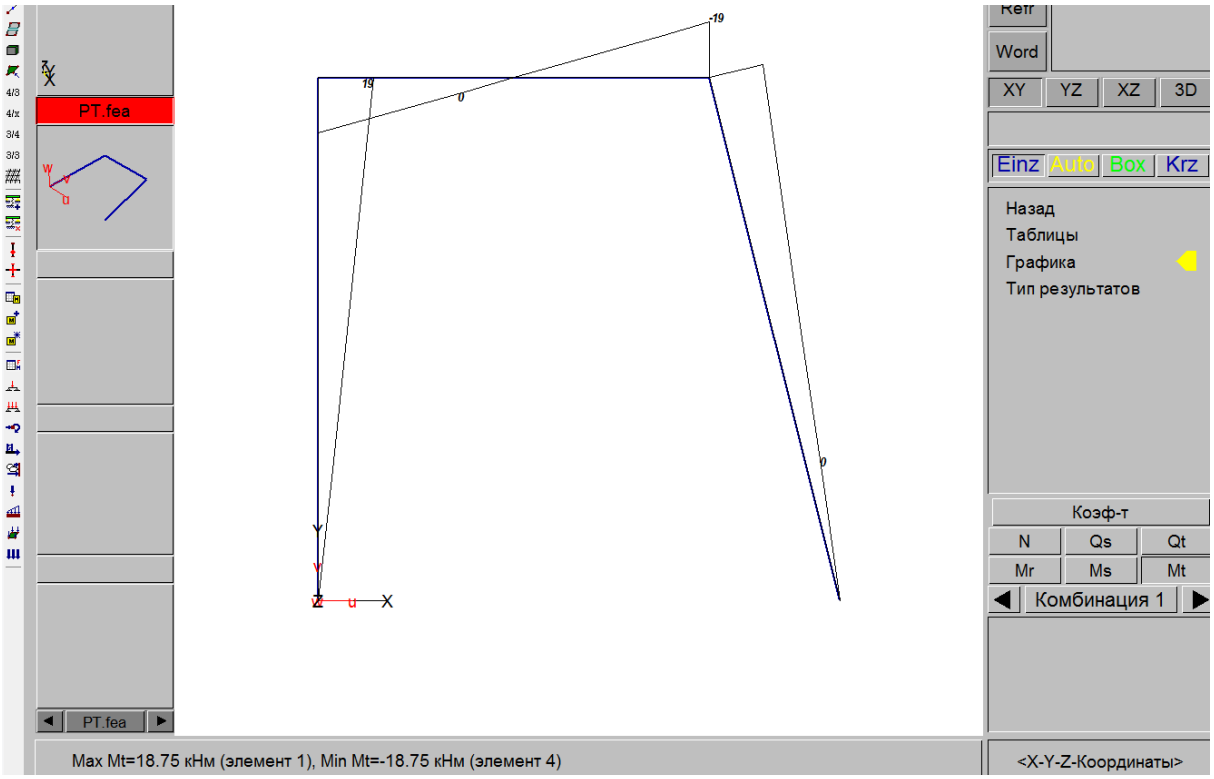


Рис. 178

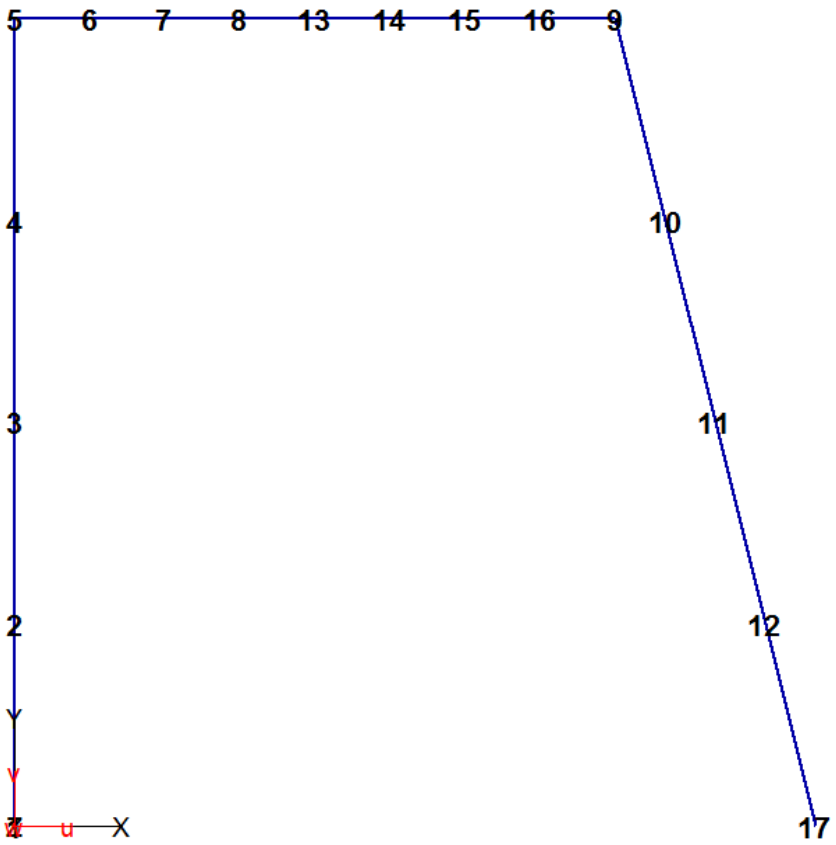


Рис. 179

Расчет сложной фермы в ПК STARK ES

Рассмотрим определение усилий и деформаций в мостовой ферме при помощи ПК STARK ES на примере плоской статически определимой сложной (шпренгельной) фермы, показанной на рис. 180.

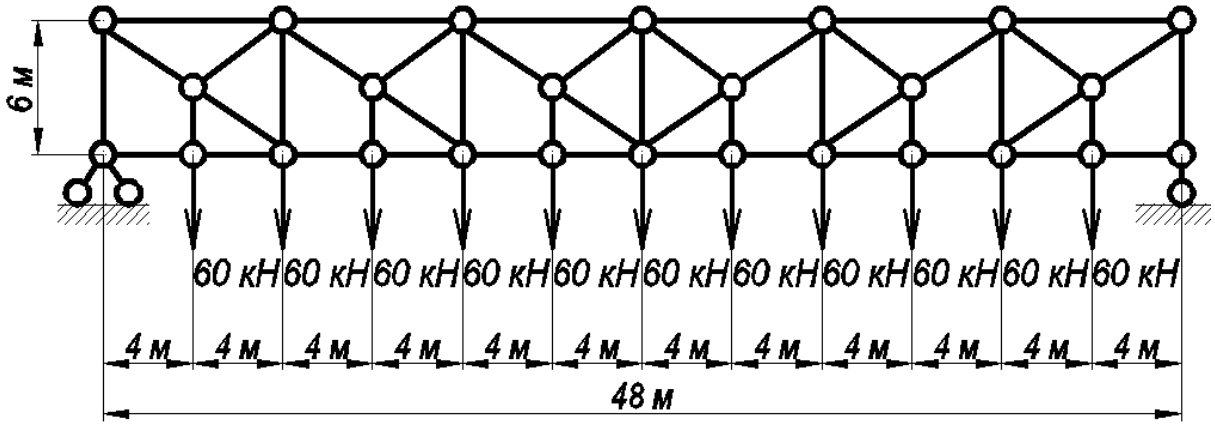


Рис. 180

Геометрическую модель фермы сформируем, используя команду **Геометрия – Создать: Рама/Ферма**. По общему очертанию ферма относится к фермам с параллельными поясами (крайний левый вариант в верхнем меню диалогового окна команды **Геометрия – Создать: Рама/Ферма**) (рис. 181).

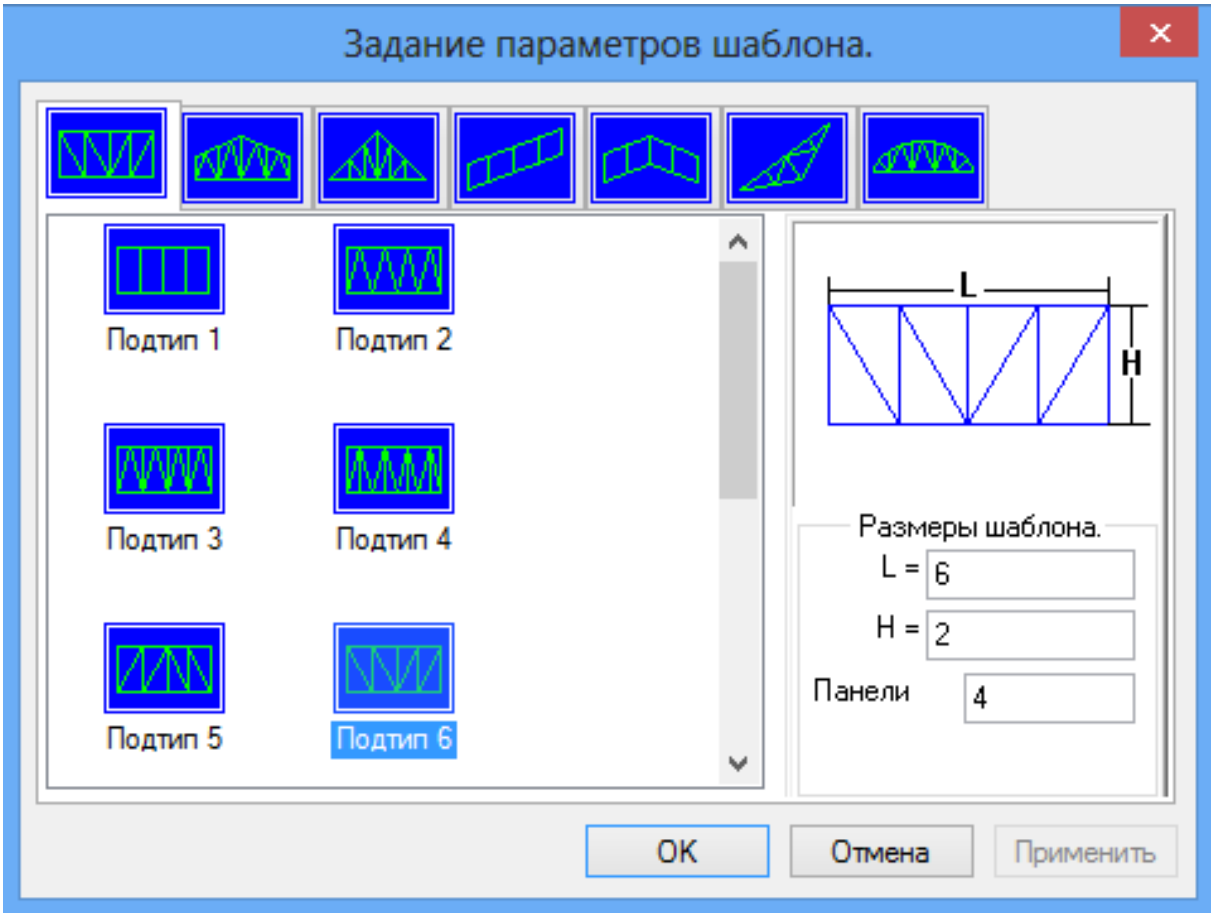


Рис. 181

По виду решетки ферма принадлежит к шпренгельным фермам. Такого варианта решетки в меню диалогового окна команды **Геометрия – Создать: Рама/Ферма** нет, поэтому в меню решеток выбран вариант *Подтип 6* (см. рис. 181, рис. 182). Таким образом, в полученную геометрическую модель (рис. 183) необходимо добавить элементы решетки.

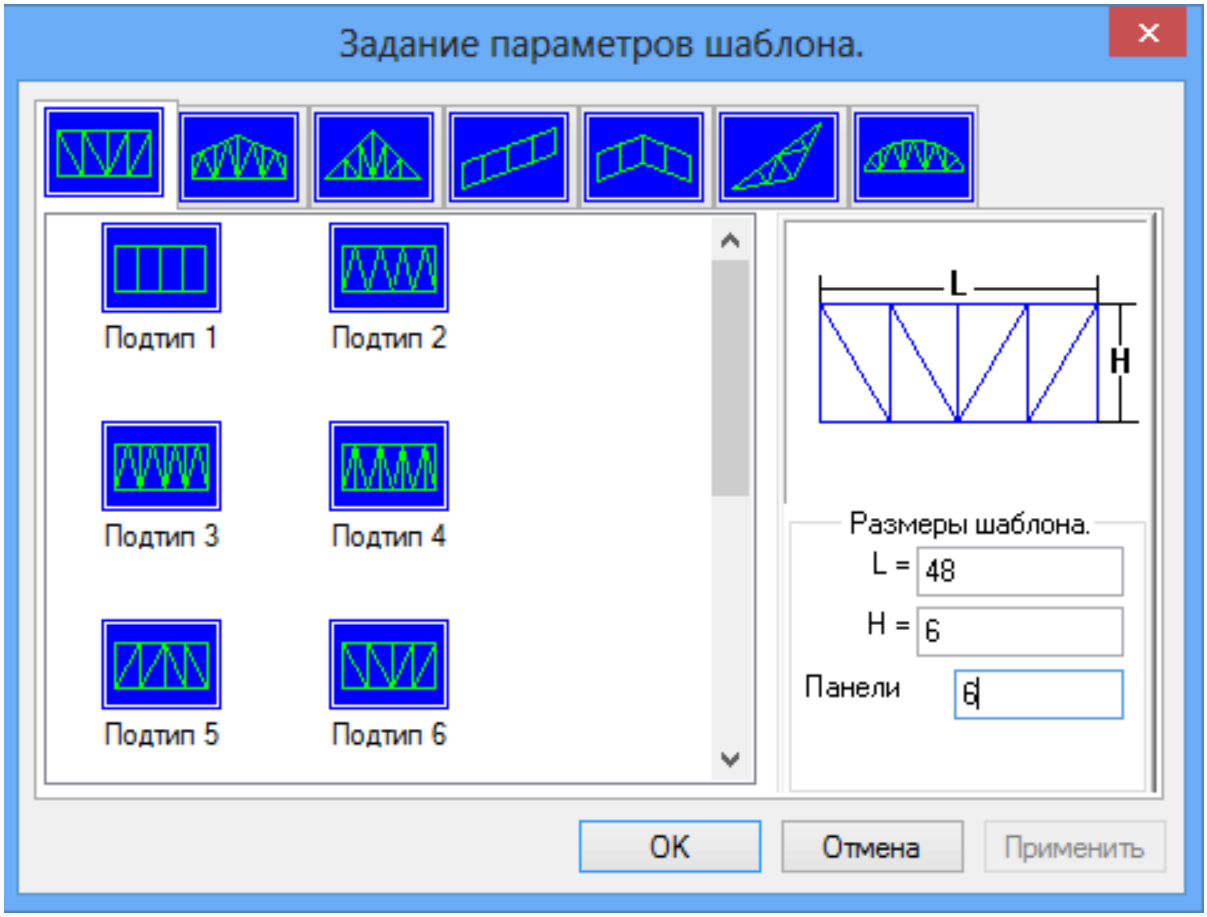


Рис. 182

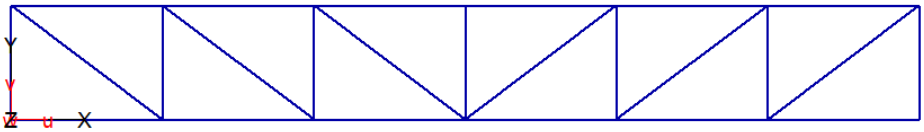


Рис. 183

Для добавления элементов решетки сначала поделим пополам раскосы и стержни нижнего пояса (команда **Геометрия – Делить стержни**) (рис. 184). В результате деления в серединах раскосов и стержней нижнего пояса образовались дополнительные узлы, что дает возможность добавить необходимые элементы решетки.

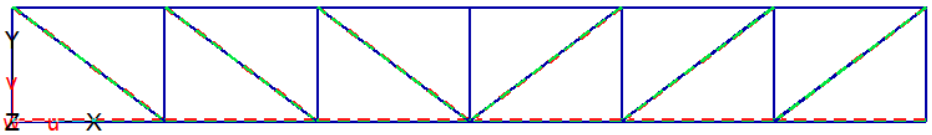


Рис. 184

Для добавления элементов используем команду **Геометрия – Установить элементы**; координаты узлов теперь удобнее задавать не в табло, а указывая курсором на узлы уже имеющихся в модели элементов («привязываясь» к ним). На рис. 185, 186 показан процесс добавления полураскоса в крайнюю левую панель фермы: узел, указанный как начальная точка для стержня, помечается окружностью; от него за курсором тянется так называемая резиновая линия, помогающая ориентироваться при добавлении элемента. Подобным образом добавлены остальные недостающие элементы решетки фермы (рис. 187).

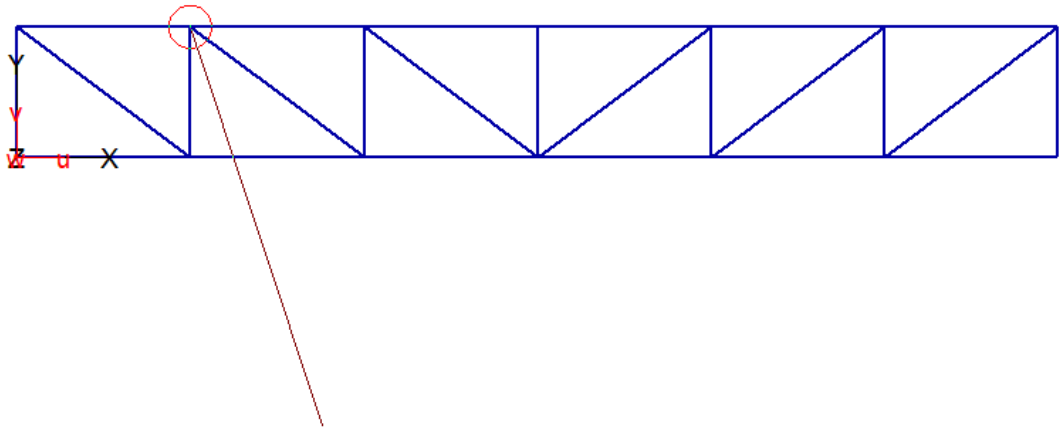


Рис. 185

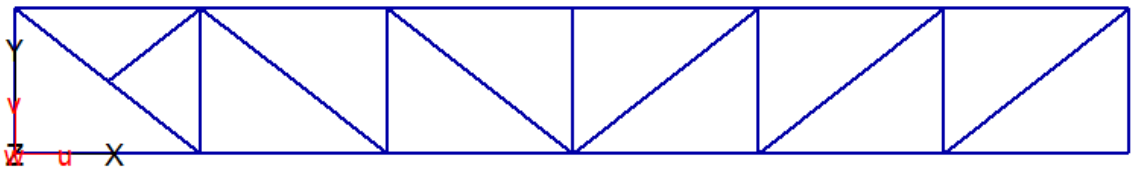


Рис. 186

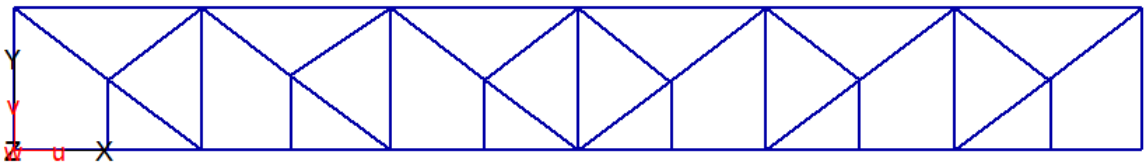


Рис. 187

Нагрузка в виде сосредоточенных сил задается так же, как это делалось выше в других примерах (рис. 188).

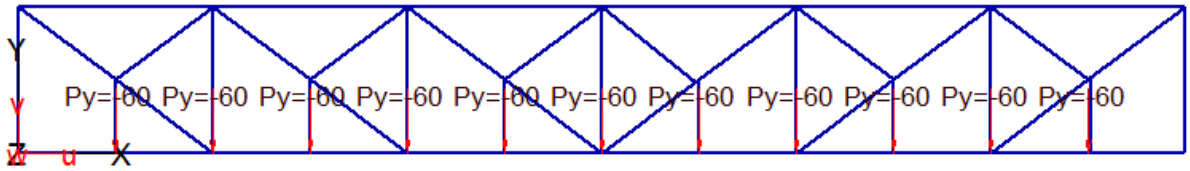


Рис. 188

Жесткости элементов задаются подобно тому, как это делалось выше в других примерах.

Связи между элементами заданы командой **Редактировать – Шарниры – Элементные:** ***Установить***. В окне выбора нажимаем клавишу $R_{z/t}$ (указываем направление взаимного смещения соединяемых связью элементов, которое эта связь разрешает, в нашем случае это взаимный поворот относительно оси *z*).

Опорные связи задаются так же, как это делалось выше для простой фермы.

Расчет выполняется подобно тому, как это делалось выше в других примерах.

Результаты расчета отображаются так же, как это делалось выше в других примерах. Схема деформации фермы и значение наибольшего прогиба представлены на рис. 189.

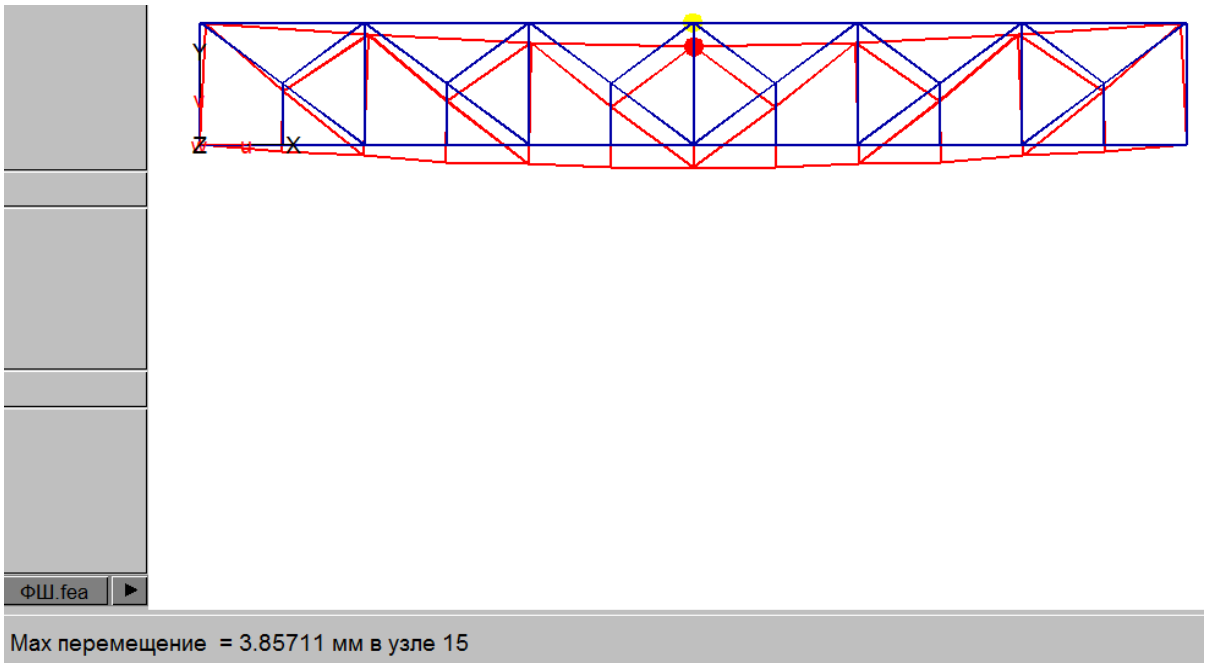


Рис. 189

Внутренние усилия удобно представить в таблице. На рис. 190 дана таблица продольных сил в некоторых стержнях фермы (в верхнем поясе).

Проект	Ферма шпренгельная балочная		Страница 1
Примечание	Ферма шпренгельная		Файл ФШ
Дата	07.09.18	STARK_ES 2015	Кондратьева Л.

Усилия в стержнях (статический расчет)

Элем	Комб	Сеч. [м]	Nr [кН]	Qs [кН]	Qt [кН]	Mr [кНм]	Ms [кНм]	Mt [кНм]
6	1	0.00	-440.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		8.00	-440.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
12	1	0.00	-680.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00
		8.00	-680.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
18	1	0.00	-760.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		8.00	-760.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
20	1	0.00	-760.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		8.00	-760.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
26	1	0.00	-680.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00
		8.00	-680.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
32	1	0.00	-440.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
		8.00	-440.00	-0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Рис. 190

На рис. 191 отображена нумерация стержней.

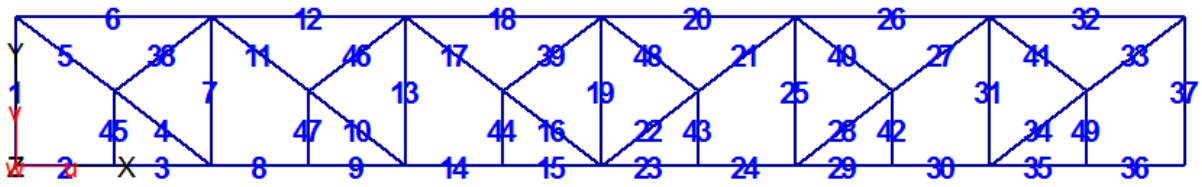


Рис. 191

Расчет трехшарнирной арки в ПК STARK ES

При формировании геометрических моделей стержневых систем с криволинейными стержнями (рис. 192) в ПК STARK ES эффективно использовать возможности взаимодействия STARK ES с графическими ПК (AutoCAD, ArchiCAD), в которых можно быстро вычертить кривые, а затем экспортировать их в STARK ES.

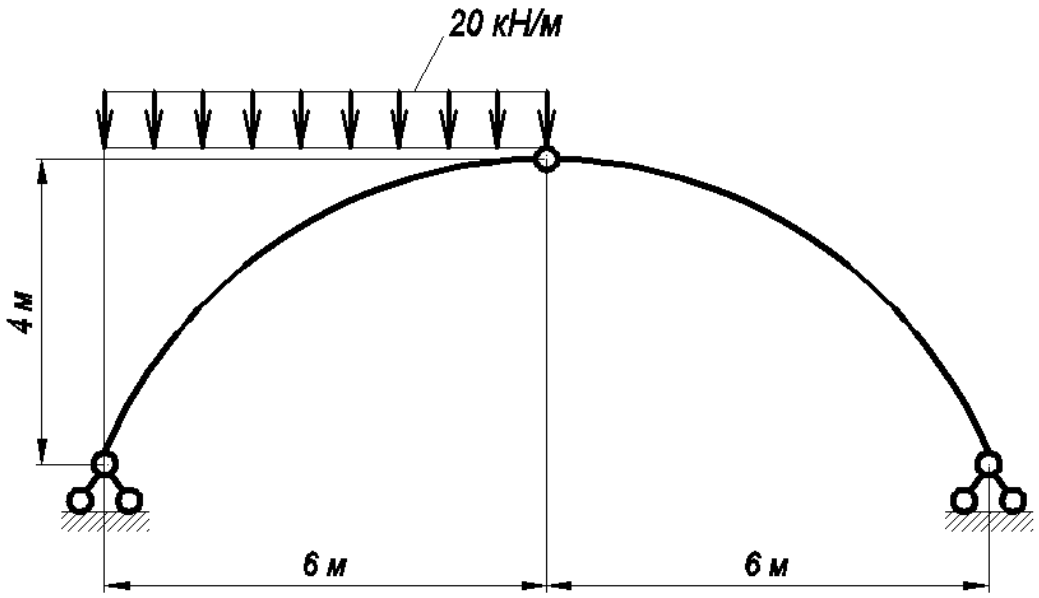


Рис. 192

Рассмотрим определение усилий и деформаций в трехшарнирной арке при помощи ПК STARK ES на примере арки, очерченной по дуге окружности (см. рис. 192). Геометрическую модель арки сформируем, используя ПК AutoCAD. Для этого вычертим дугу окружности арки (использована команда **Дуга**; дуга построена по трем точкам) (рис. 193).

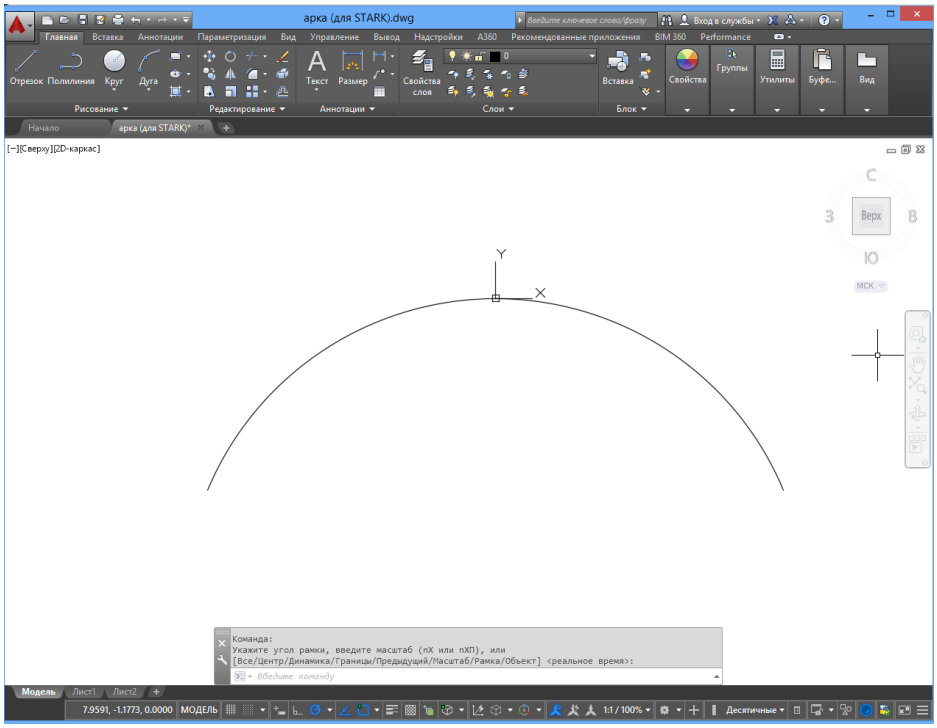


Рис. 193

Этот чертеж в AutoCAD сохраним в файле с расширением .dxf (файл называется *арка (для STARK). dxf*) (рис. 194).

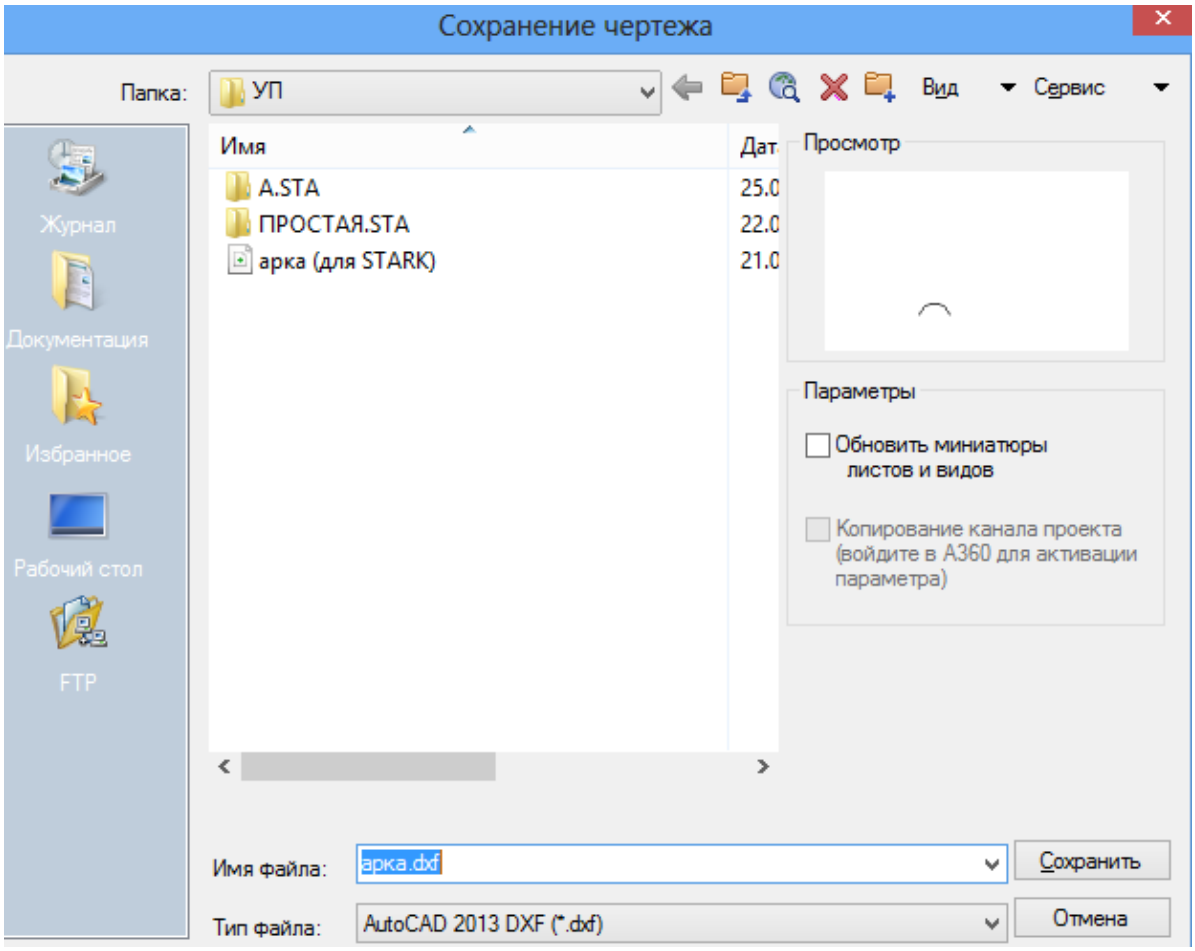


Рис. 194

Затем в ПК STARK ES создадим новый проект и используем команду **Растр – DXF Открыть** (рис. 195). В появившемся диалоговом окне выбираем только что созданный файл с расширением .dxf (рис. 196); в следующем диалоговом окне оставляем настройки по умолчанию (рис. 197). Результатом будет экспорт геометрической модели арки в ПК STARK ES (рис. 198).

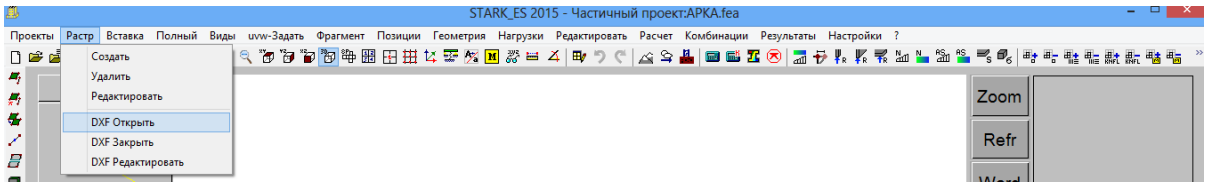


Рис. 195

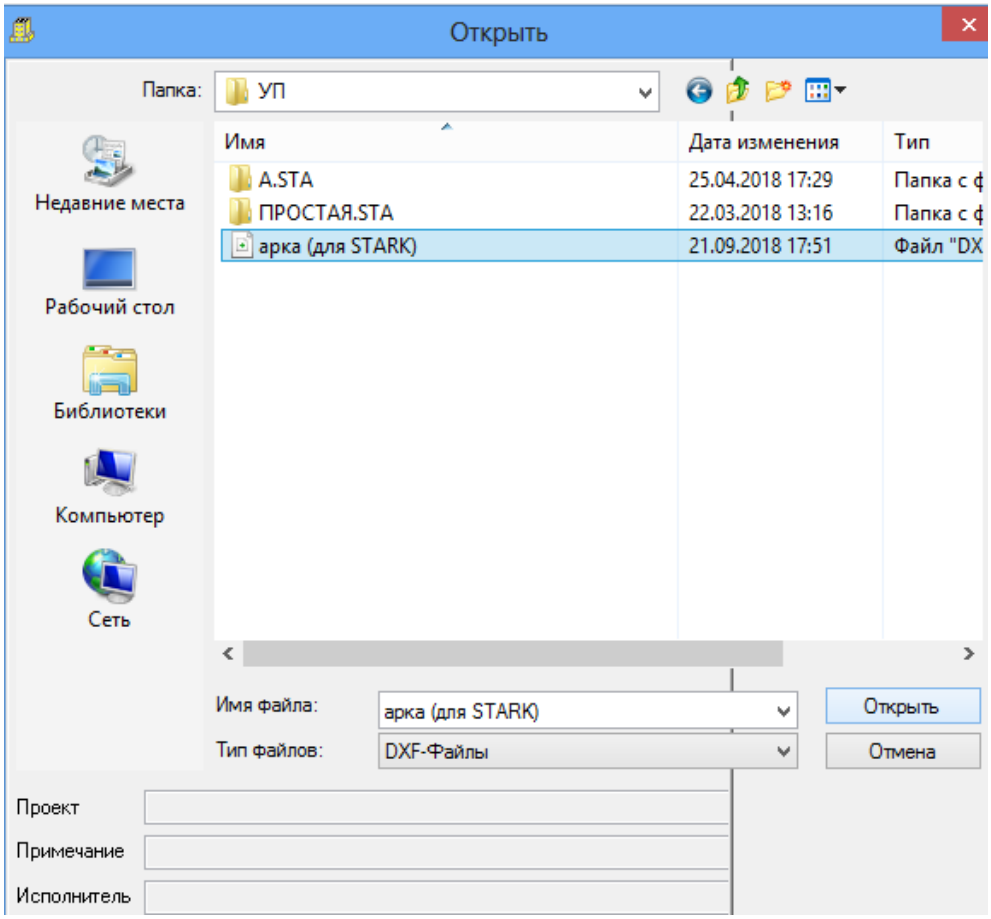


Рис. 196

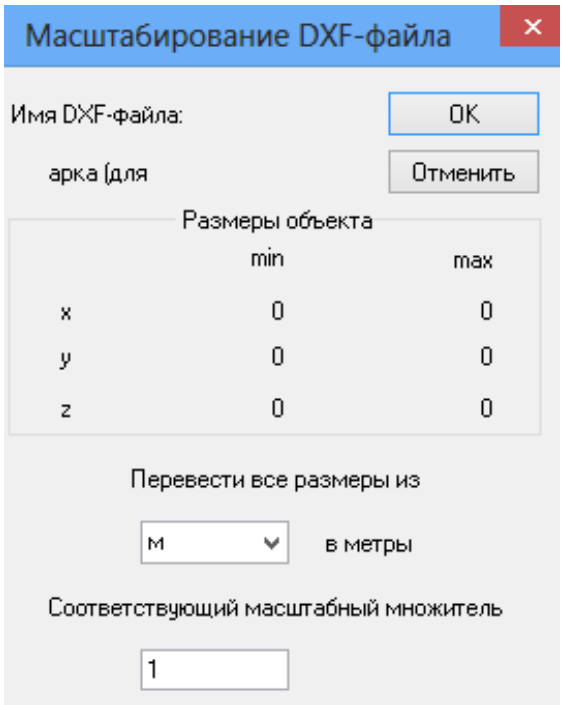


Рис. 197

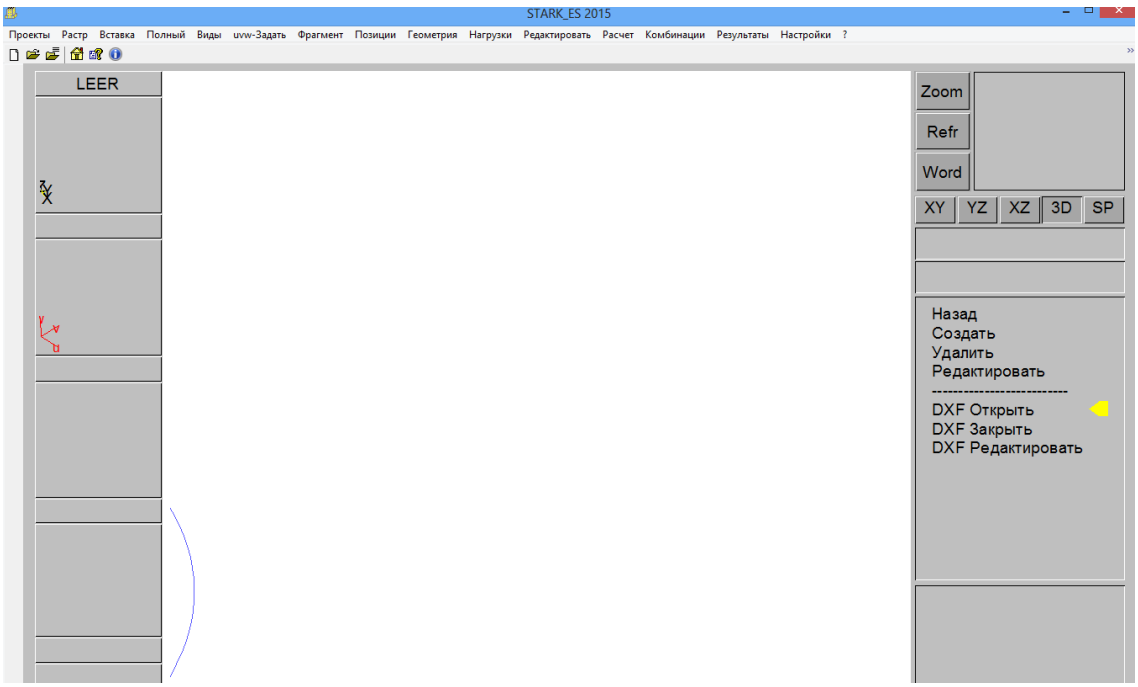


Рис. 198

Изменим вид геометрической модели (с помощью команд **XY** и **Zoom**) (рис. 199) и воспользуемся командой **Геометрия – Установить элементы** (рис. 200).

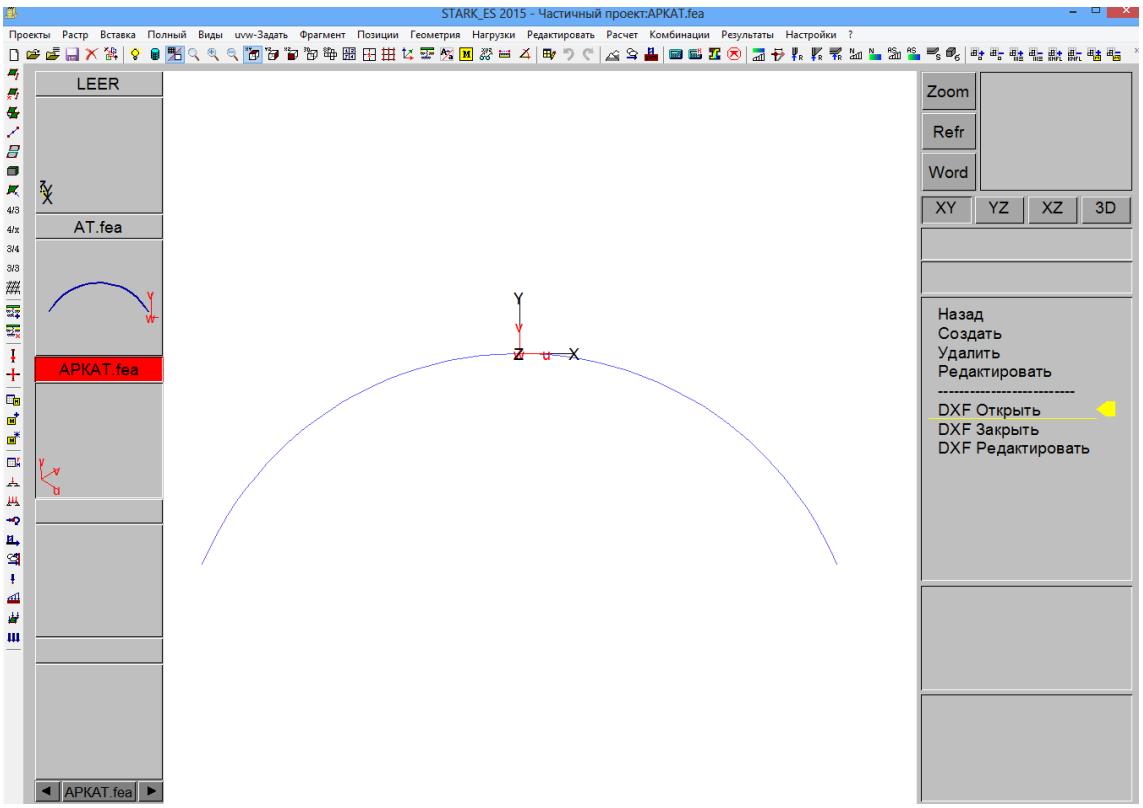


Рис. 199

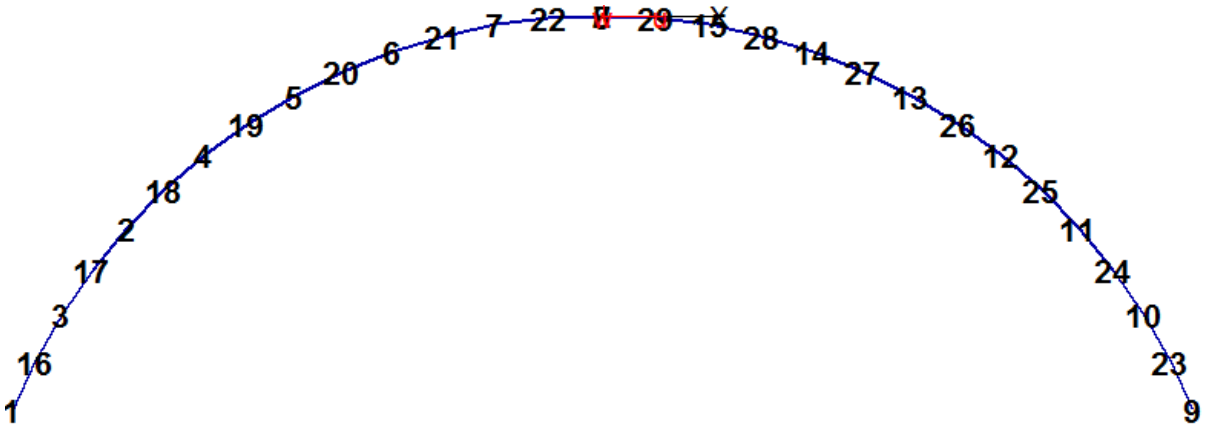


Рис. 200

Далее обычным образом установим опорные связи (рис. 201, 202), ключевой шарнир (рис. 203), зададим жесткости и нагрузку (рис. 204, 205).

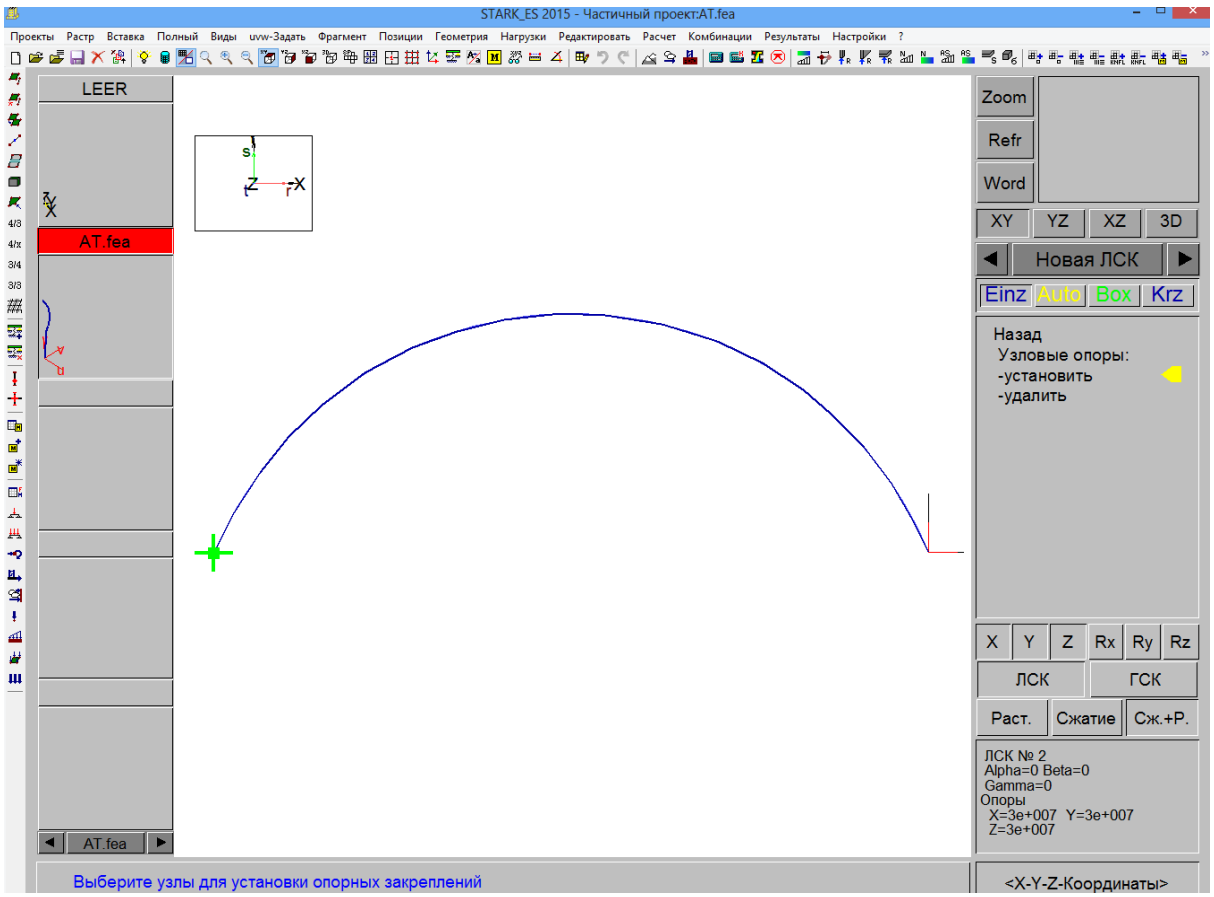


Рис. 201

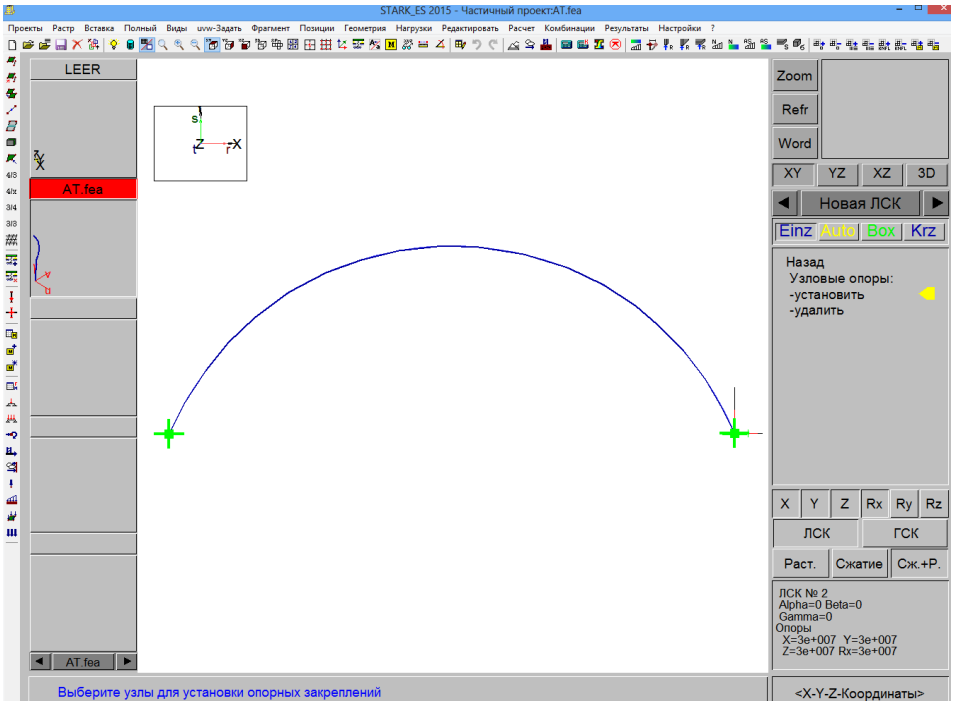


Рис. 202

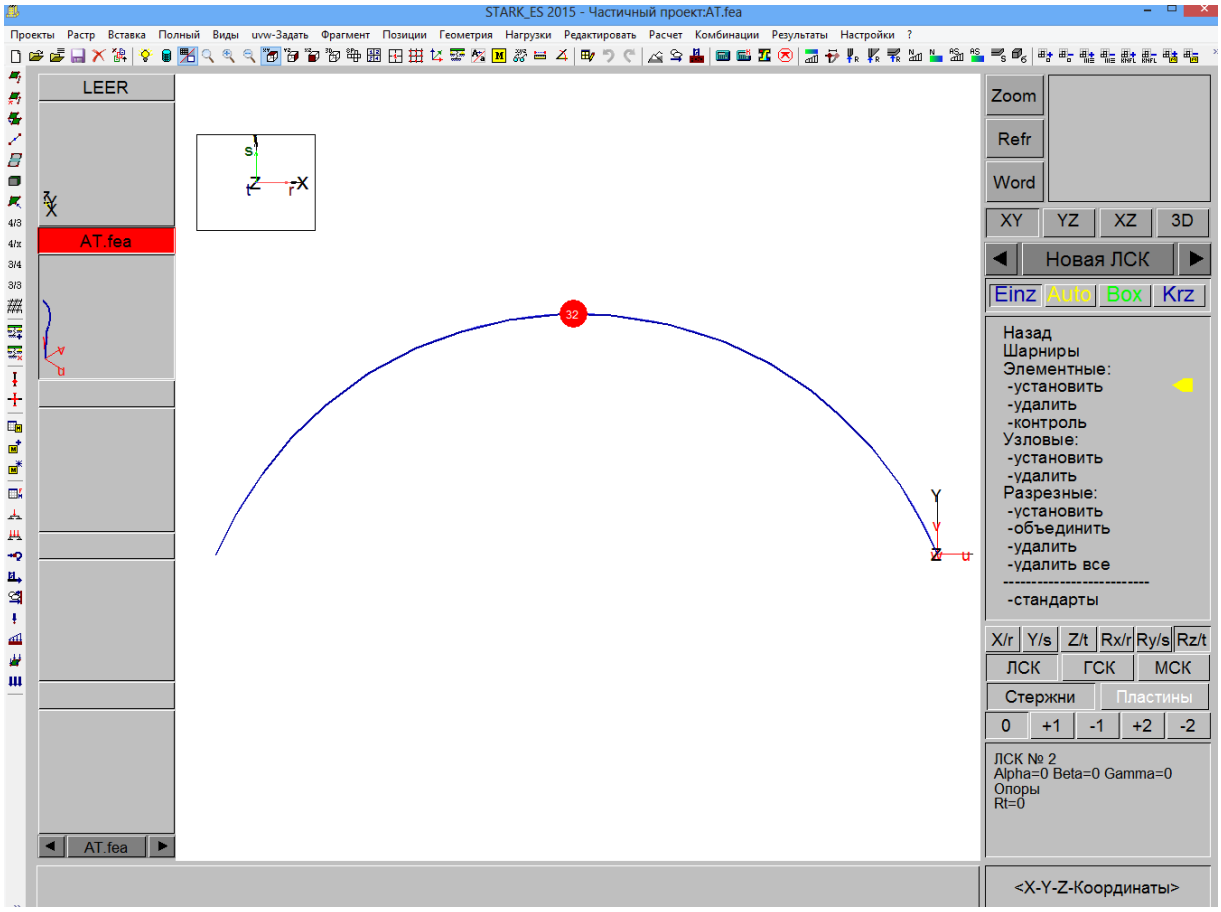


Рис. 203

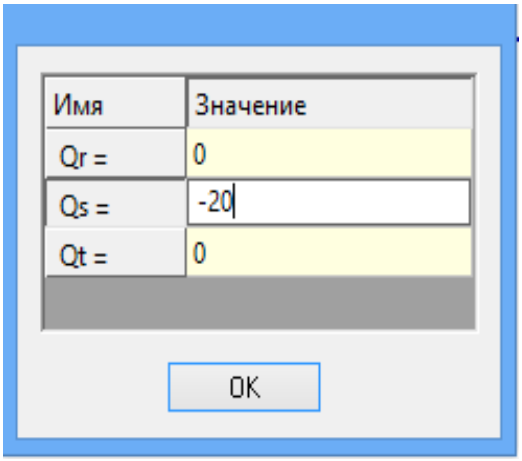


Рис. 204

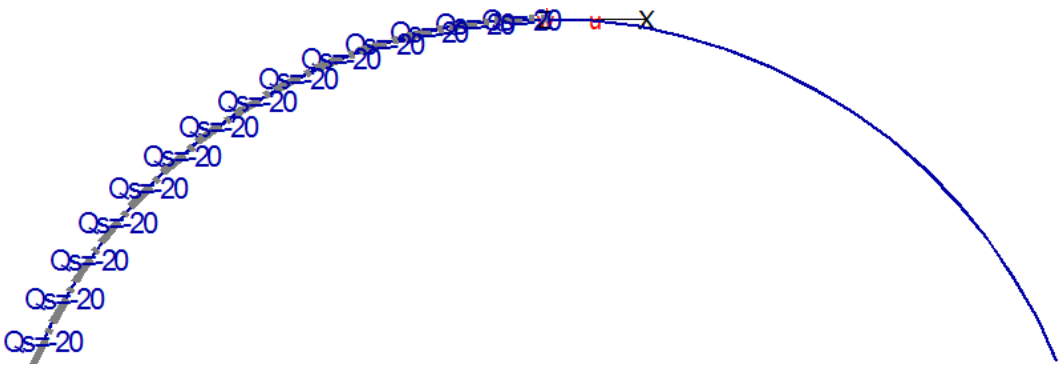


Рис. 205

Расчет выполняется подобно тому, как это делалось выше в других примерах. Результаты расчета отображаются так же, как это делалось выше в других примерах. Схема деформации трехшарнирной арки представлена на рис. 206. Эпюры поперечной, продольной сил и изгибающего момента даны соответственно на рис. 207 – 209.

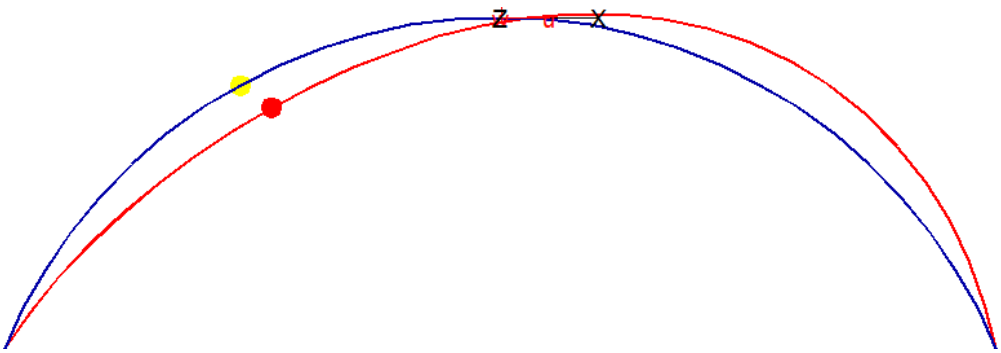


Рис. 206

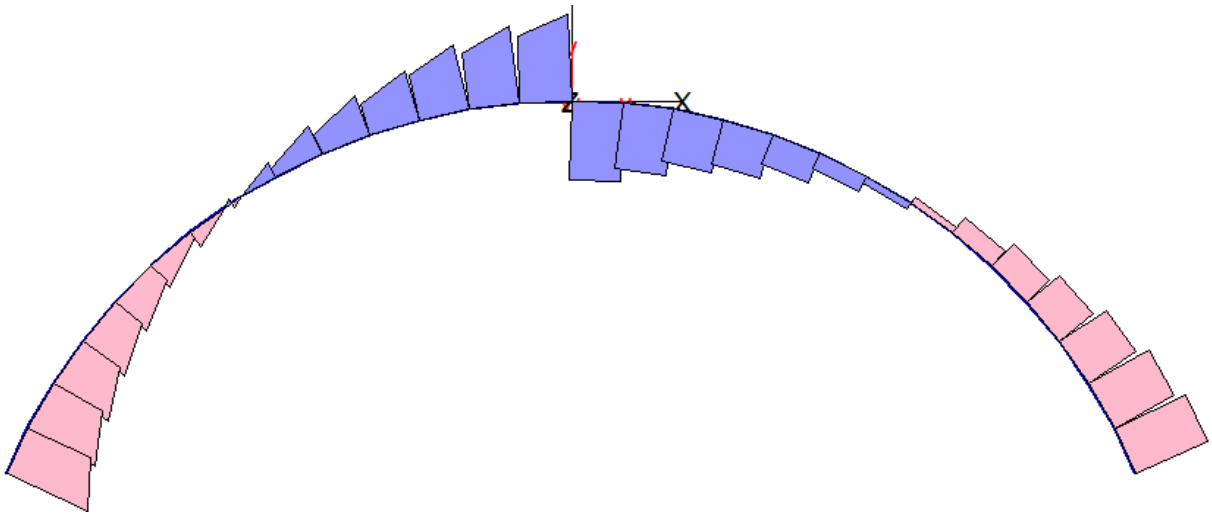


Рис. 207

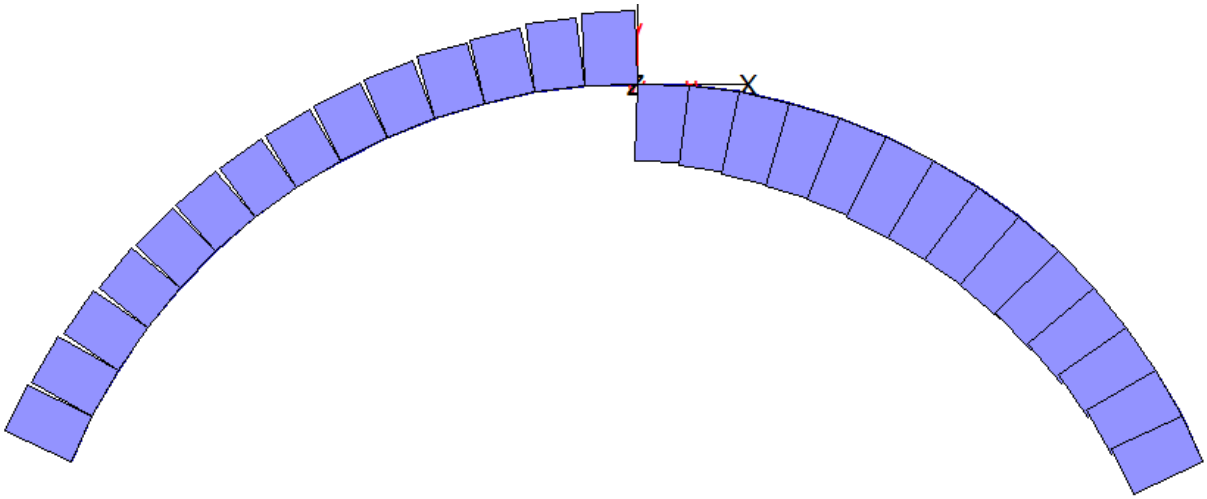


Рис. 208

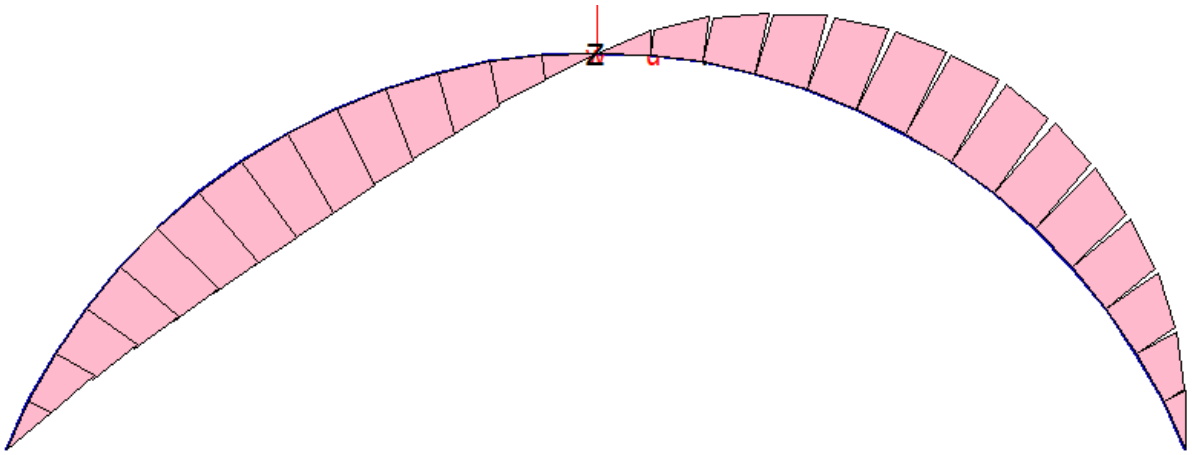


Рис. 209

Ординаты эпюры поперечной силы в левой половине арки отложены следующим образом: положительные – внутрь арки, отрицательные – наружу; в правой половине арки – наоборот. Все ординаты эпюры продольной силы отрицательные (трехшарнирная арка при нагрузке, направленной сверху вниз, работает на сжатие), но в левой части арки они отложены наружу, в правой – внутрь.

На эпюре изгибающего момента ординаты отложены, как обычно, со стороны растянутых волокон элементов.

Расчет пространственной рамы в ПК STARK ES

Рассмотрим определение усилий и деформаций в пространственной раме при помощи ПК STARK ES на примере статически определимой консольной рамы, показанной на рис. 210 (на рис. 211 пространственная рама показана с другой точки зрения).

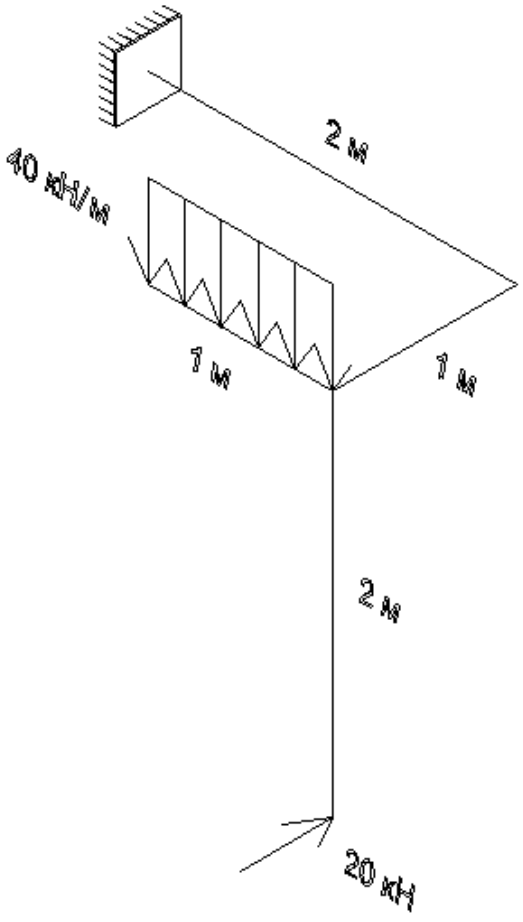


Рис. 210

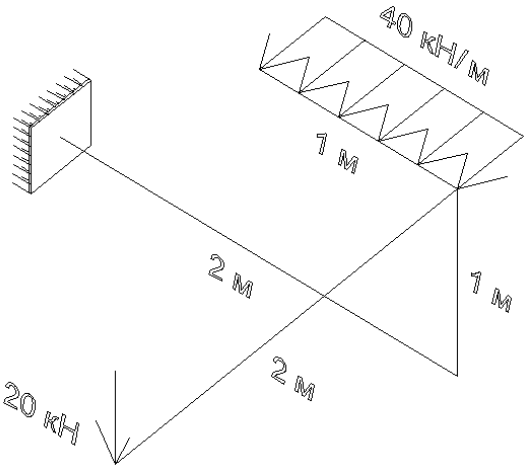


Рис. 211

Геометрическую модель рамы сформируем, используя команду **Геометрия – Установить элементы**. На рис. 212, 213 показано задание вертикального (по рис. 210) стержня рамы (начало координат – в заделке, рис. 214). Значения координат узлов всех элементов приведены в табл. 1. Для лучшего представления сформированной геометрической модели пространственной конструкции используем пункт **Виды** верхнего меню, позволяющий показать несколько видов модели одновременно (рис. 215).

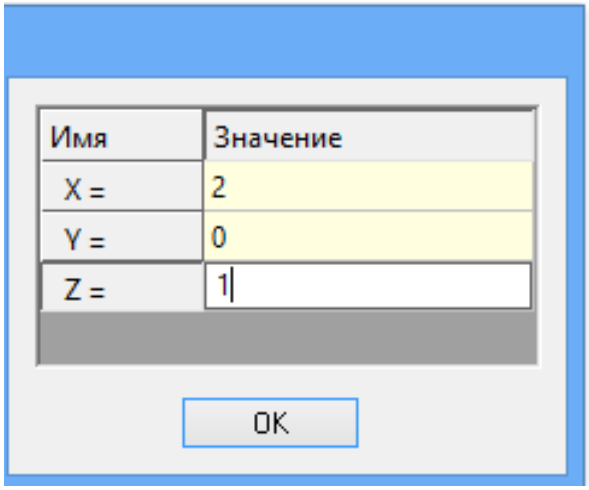


Рис. 212

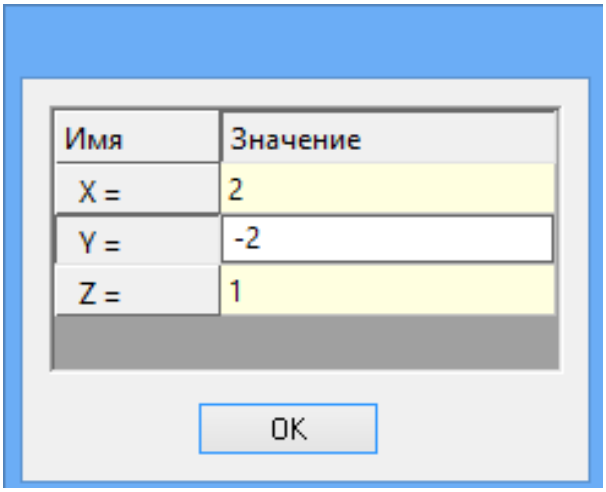


Рис. 213

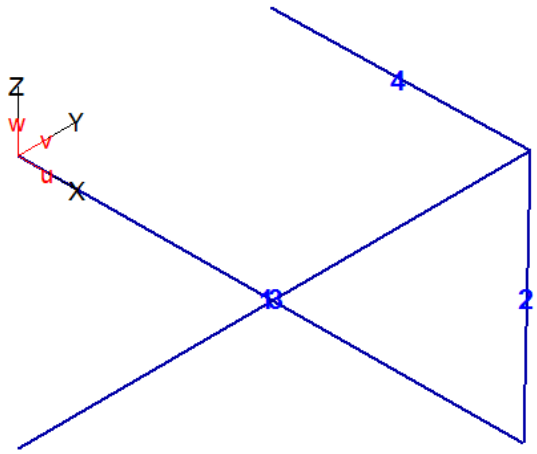


Рис. 214

Таблица 1

Номер элемента	Узел элемента	Координата *x*	Координата *y*	Координата *z*
1	Начальный узел	0	0	0
	Конечный узел	2	0	0
2	Начальный узел	2	0	0
	Конечный узел	2	0	1
3	Начальный узел	2	0	1
	Конечный узел	2	–2	1
4	Начальный узел	2	0	1
	Конечный узел	1	0	1

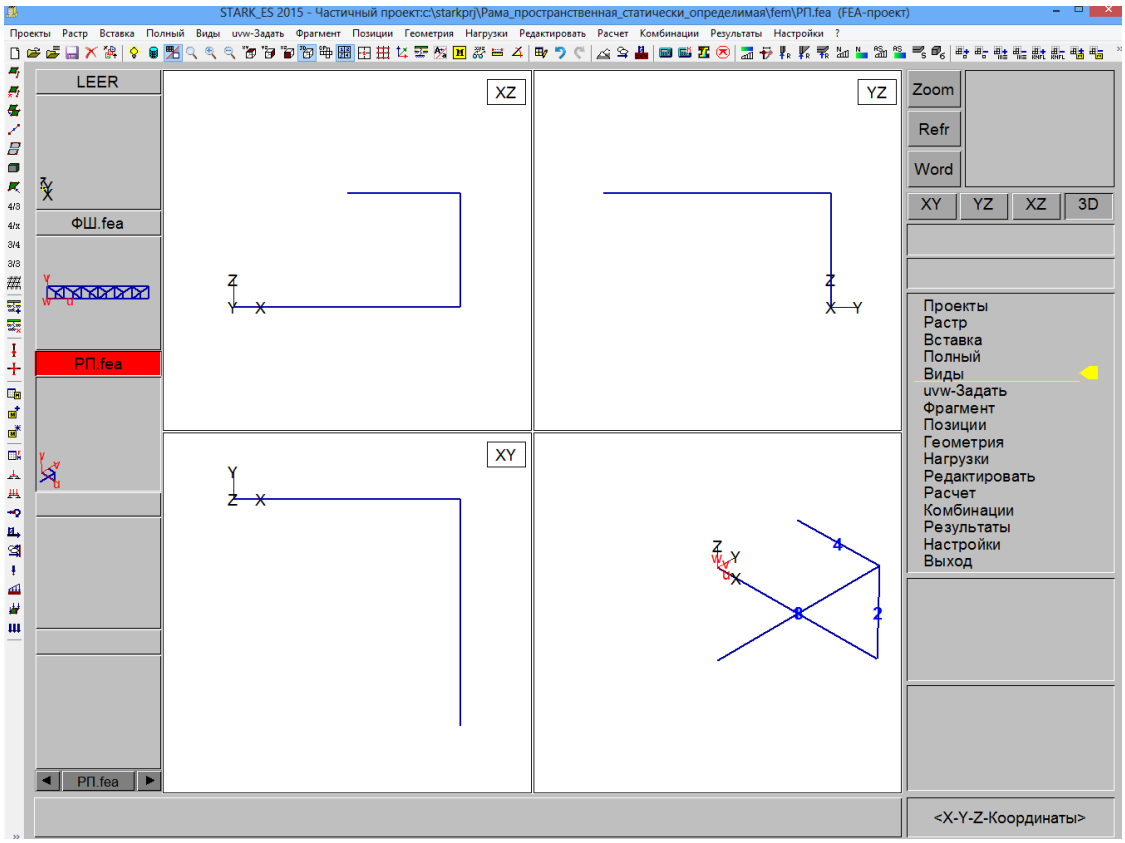


Рис. 215

Опорные связи заданы командой **Редактировать – Связи – Опорные закрепления: *Установить*** (рис. 216).

Нагрузки заданы командами **Нагрузки – Узловые – Силы и моменты: *Установить*** (рис. 217, 218) и **Нагрузки – Элементные – Равномерно распределенная: *Установить*** (рис. 219, 220).

Жесткости элементов задаются подобно тому, как это делалось выше в других примерах.

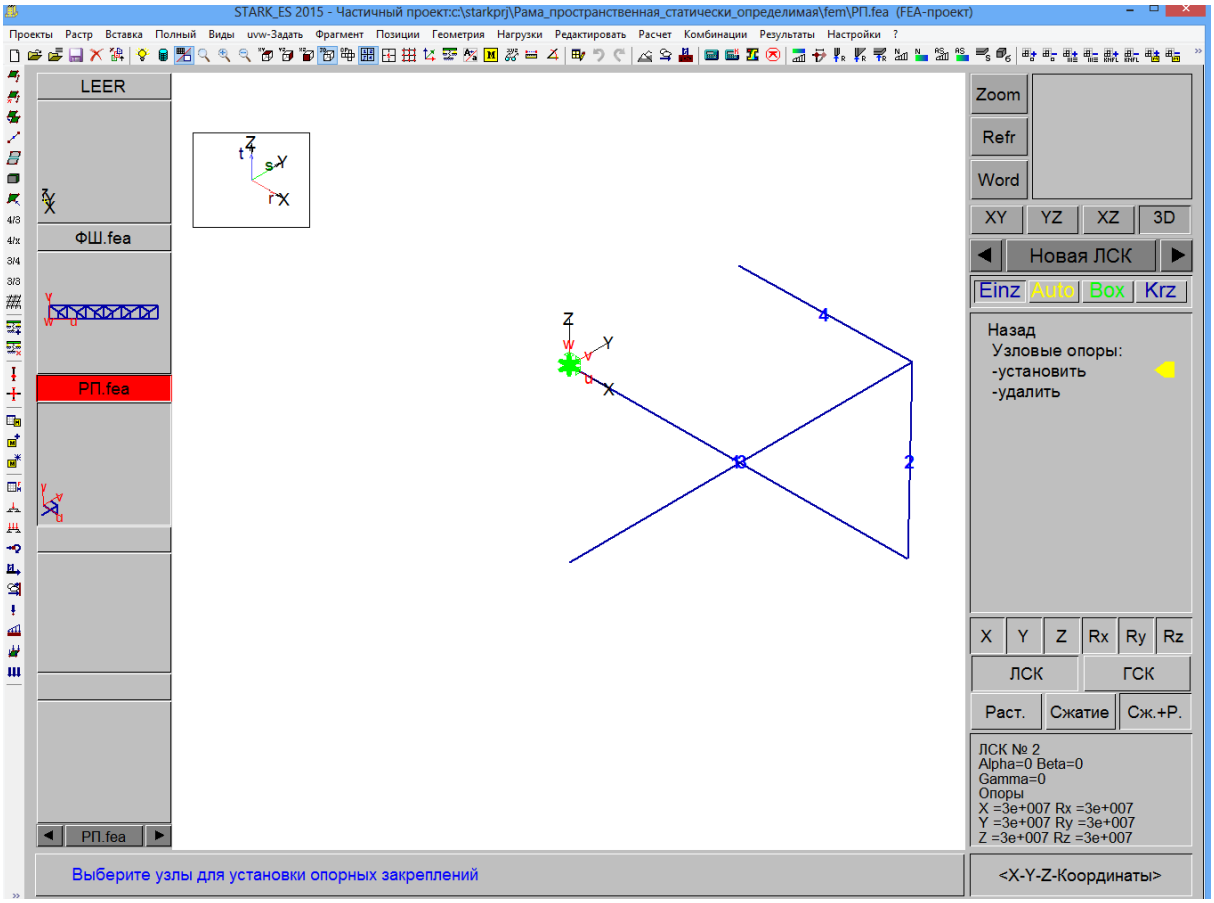


Рис. 216

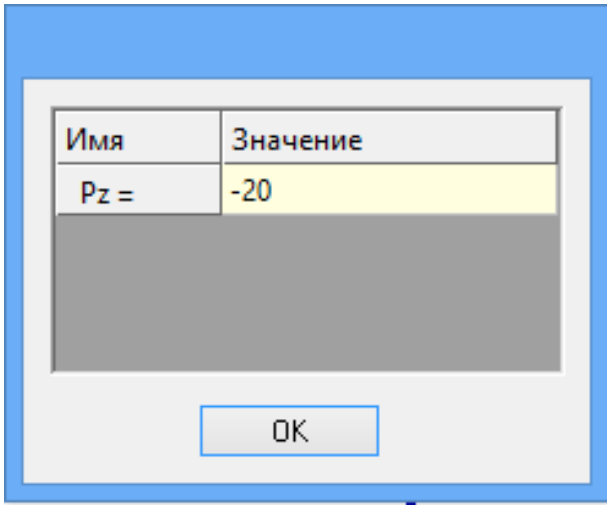


Рис. 217

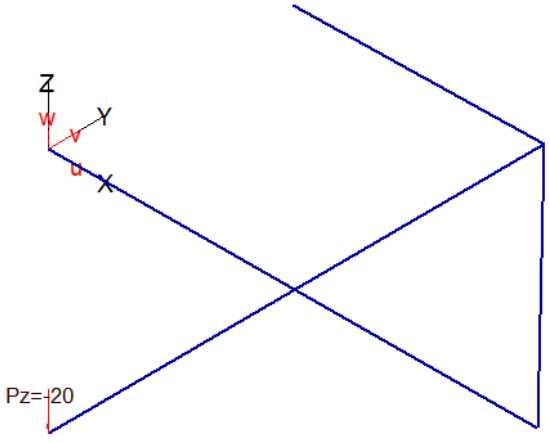


Рис. 218

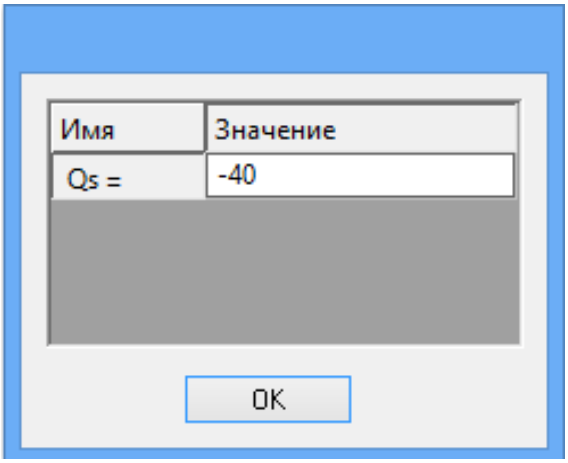


Рис. 219

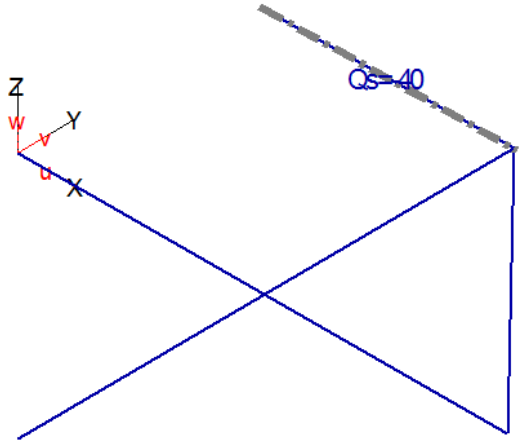


Рис. 220

Расчет выполняется так же, как это делалось выше в других примерах.

Результаты расчета отображаются подобно тому, как это делалось выше в других примерах. Схема деформации рамы и значение наибольшего прогиба представлены на рис. 221 (каждый элемент поделен на четыре части). Эпюры некоторых внутренних усилий и экстремальные значения этих усилий представлены на рис. 222 (продольные силы), рис. 223, 224 (поперечные силы в разных плоскостях).

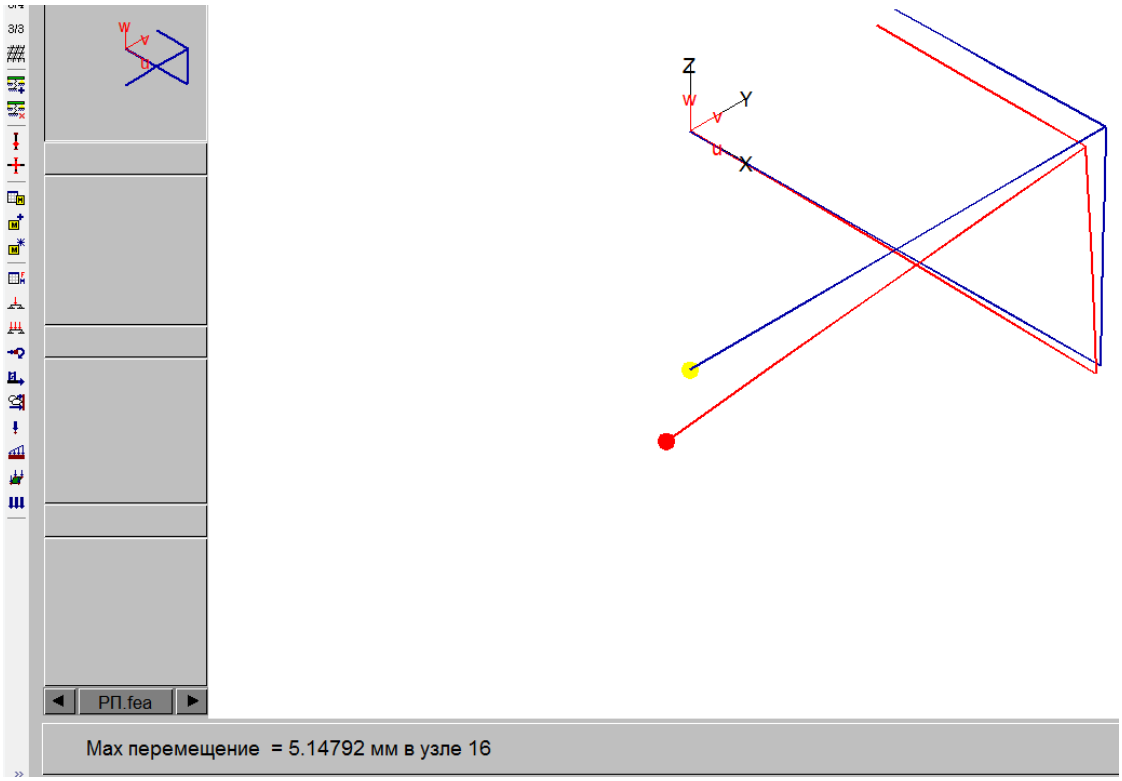


Рис. 221

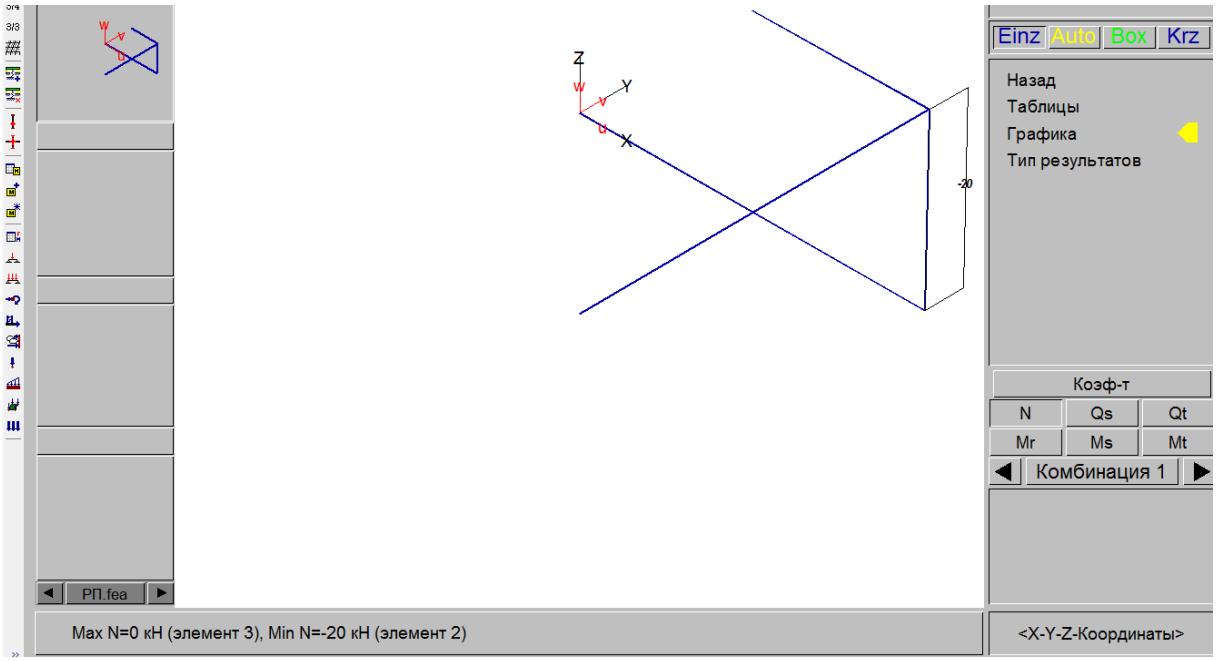


Рис. 222

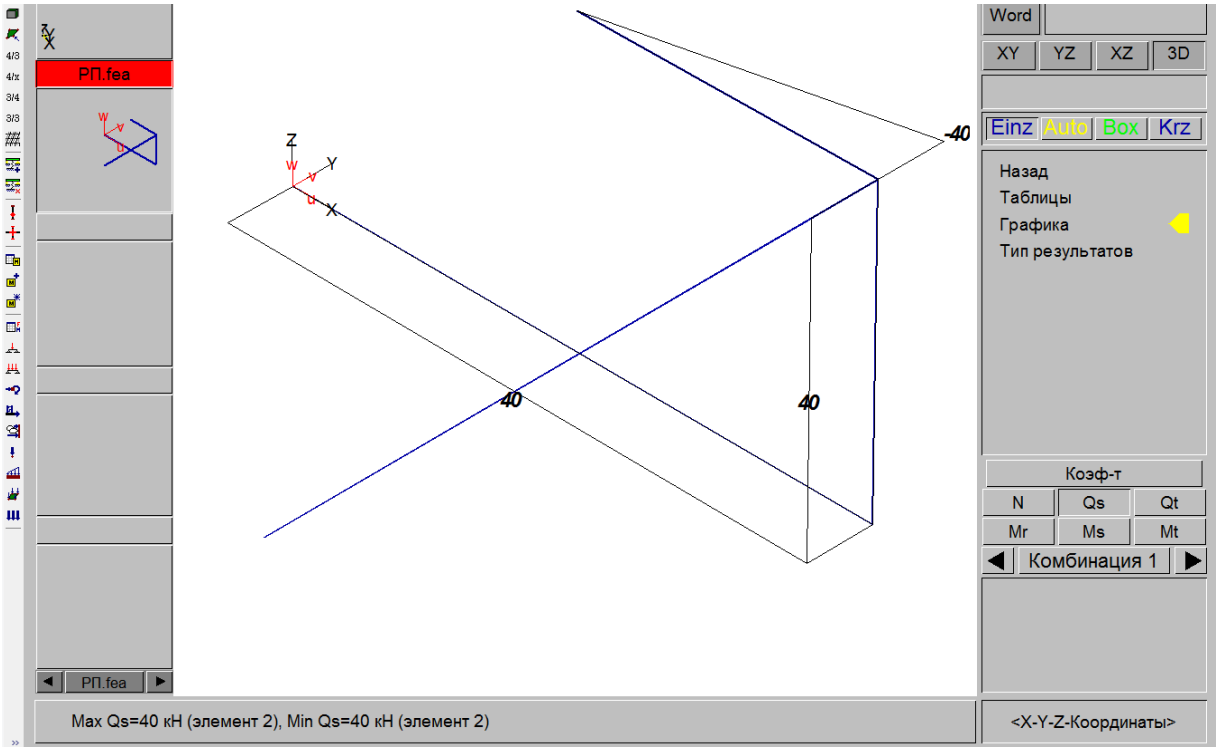


Рис. 223

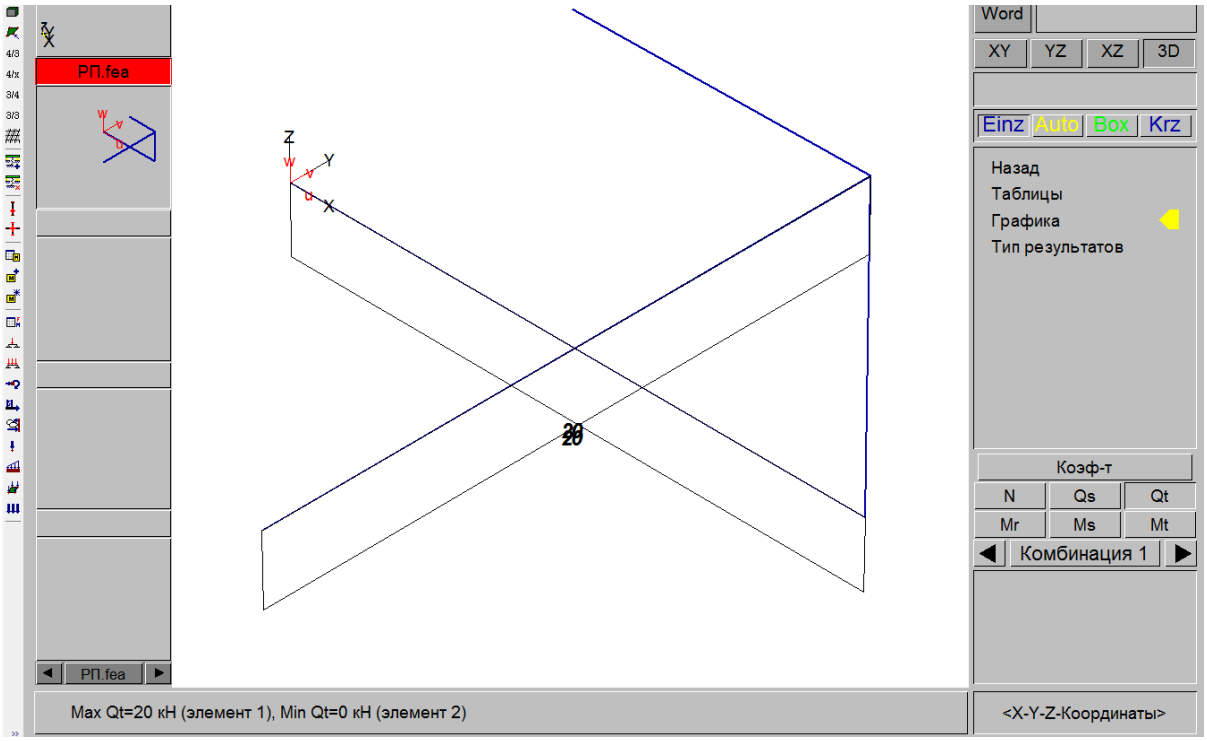


Рис. 224

Расчет пространственной фермы в ПК STARK ES

Рассмотрим определение усилий и деформаций в пространственной ферме при помощи ПК STARK ES на примере статически определимой фермы. На рис. 225 представлен вид фермы в плане, ферма показана на рис. 226. Опоры фермы пространственные шарнирно-неподвижные в нижних узлах.

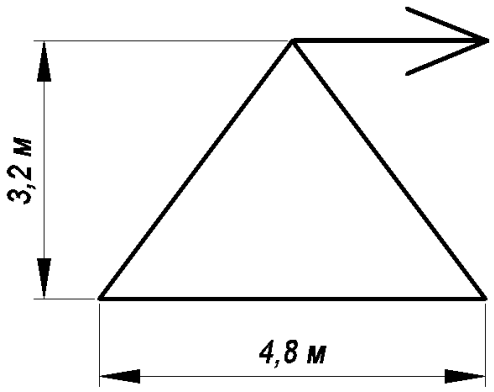


Рис. 225

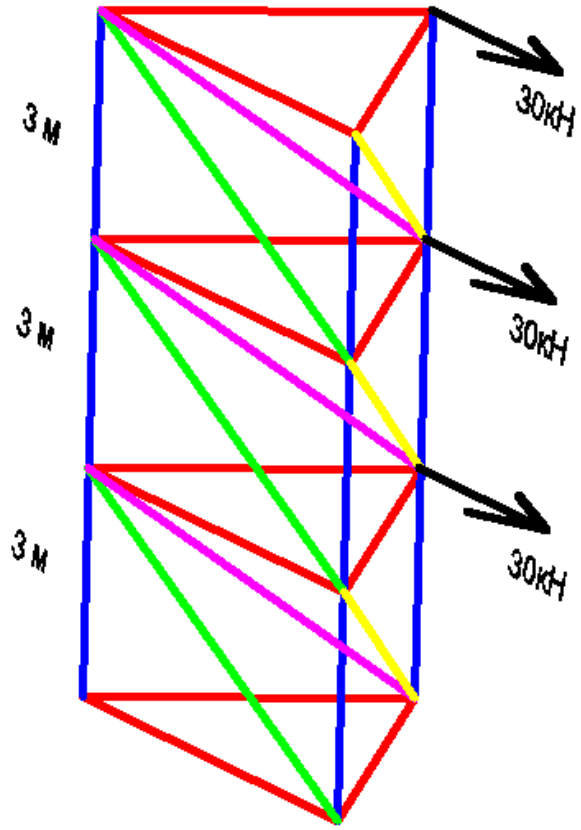


Рис. 226

Сформируем геометрическую модель фермы. Сначала при помощи команды **Геометрия – Установить элементы** создадим три стержня решетки (рис. 227). Зададим жесткости этих элементов (рис. 228).

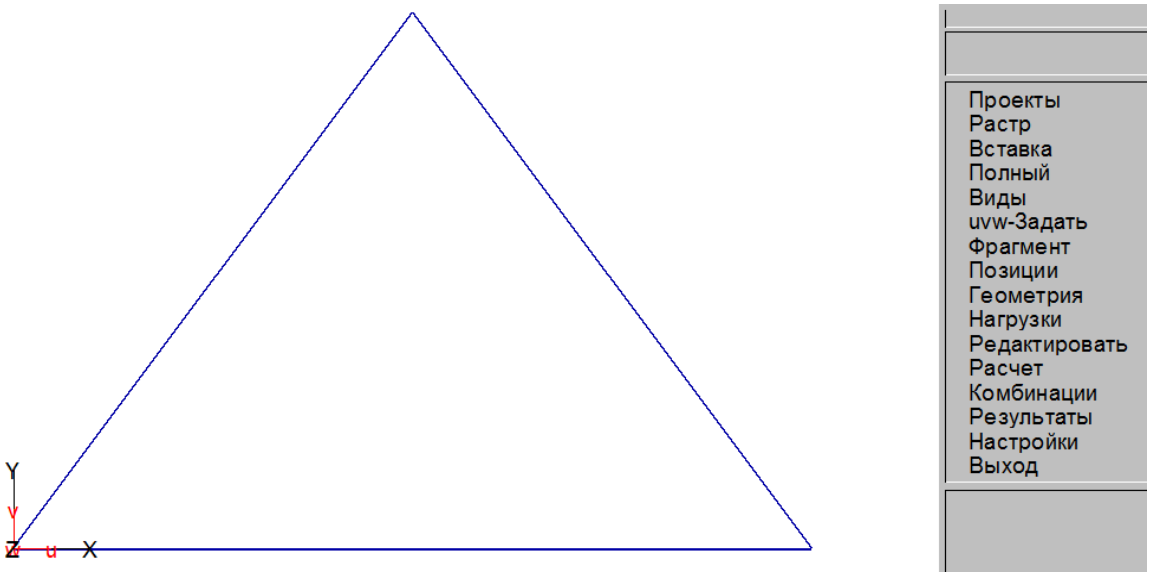


Рис. 227

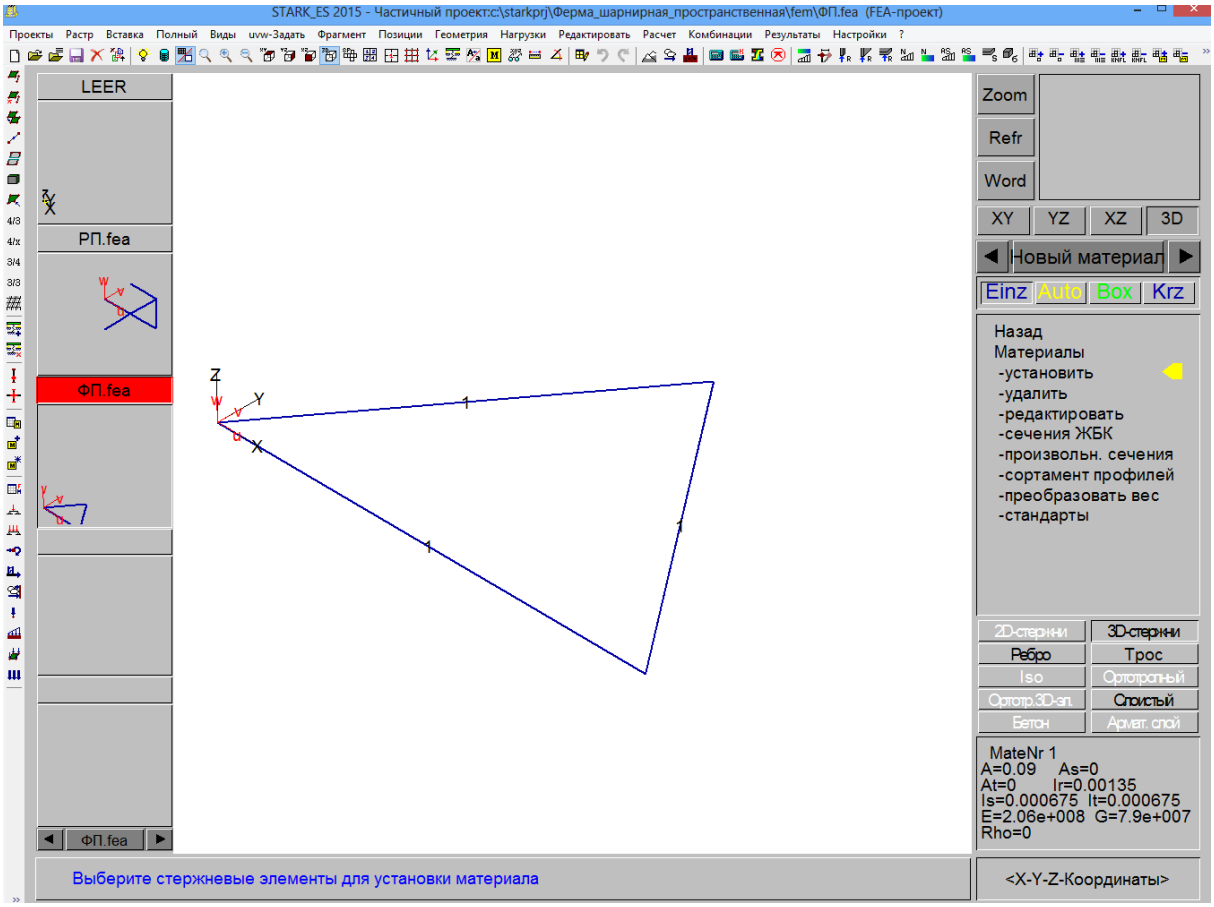


Рис. 228

Затем скопируем эти повторяющиеся элементы. Для этого используем команду **Геометрия – Копировать элементы** (рис. 229). В диалоговом окне этой команды отметим, что будет копироваться вместе с элементами. Элементы можно копировать вместе с их жесткостями, узловыми шарнирами, элементными шарнирами, узловыми опорами, местными системами координат. В нашем случае оставим все флажки (шарниры и опоры пока не установлены).

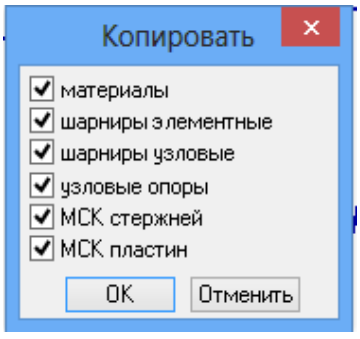


Рис. 229

После нажатия клавиши *OK* в окне информации появляется сообщение *«Выберите элементы для копирования»*. Выберем эти три элемента (рис. 230). Далее зададим значение и направление смещения при копировании. В окне информации появляется сообщение *«Укажите начальную точку (P1)»* (это начальная точка вектора смещения); зададим ее в начале координат (рис. 231). После этого в окне информации появляется сообщение *«Укажите конечную точку (новое положение для P1)»* (это конечная точка вектора смещения); зададим ее (рис. 232). В результате появляются первая копия (рис. 233) и предложение в окне информации задать конечную точку следующего вектора смещения; зададим ее (рис. 234). Так же зададим конечную точку последнего (третьего) вектора смещения ($X = 0$, $Y = 0$, $Z = 9$). В итоге получим результат, показанный на рис. 235.

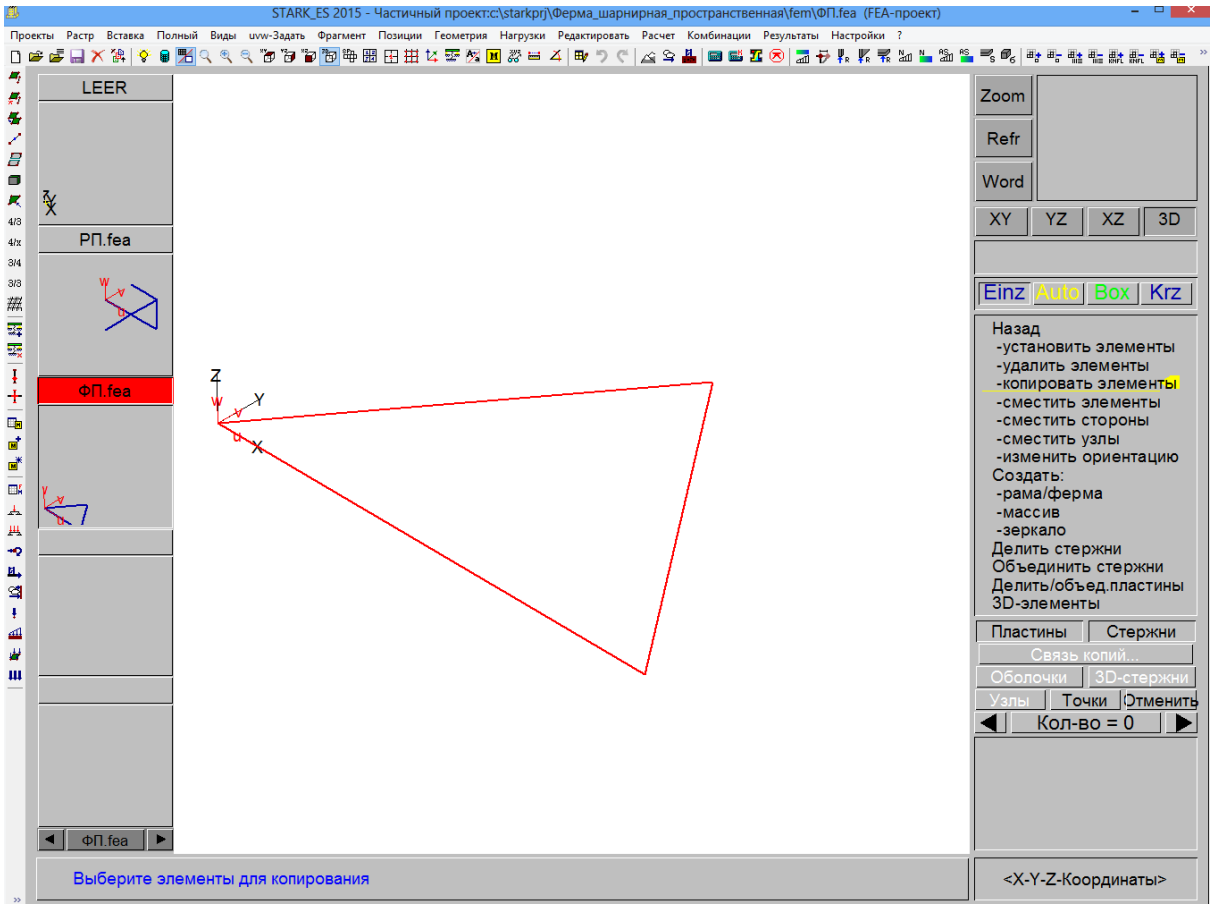


Рис. 230

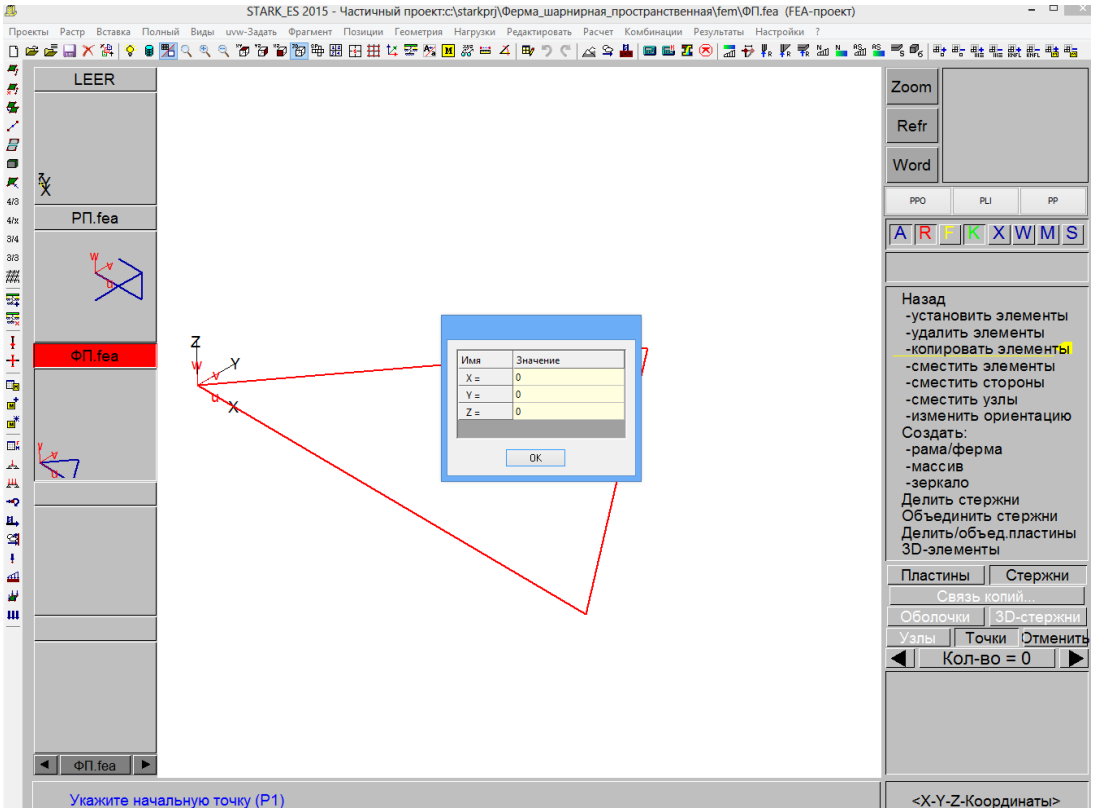


Рис. 231

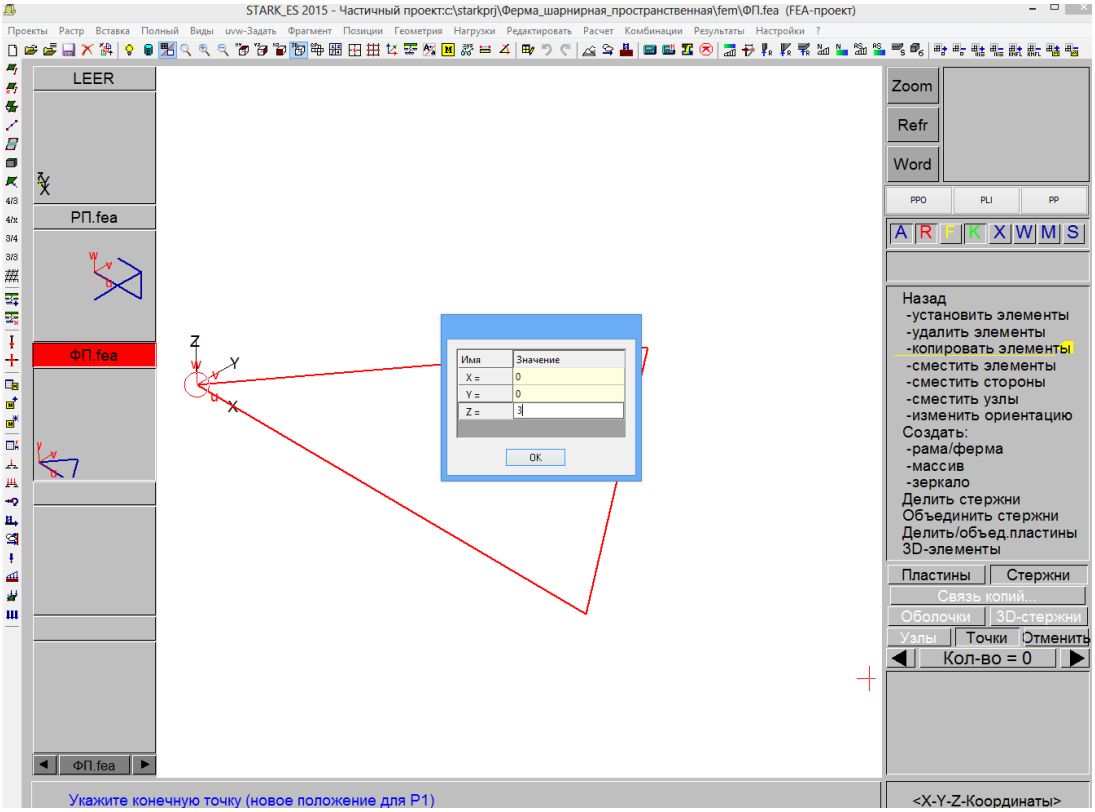


Рис. 232

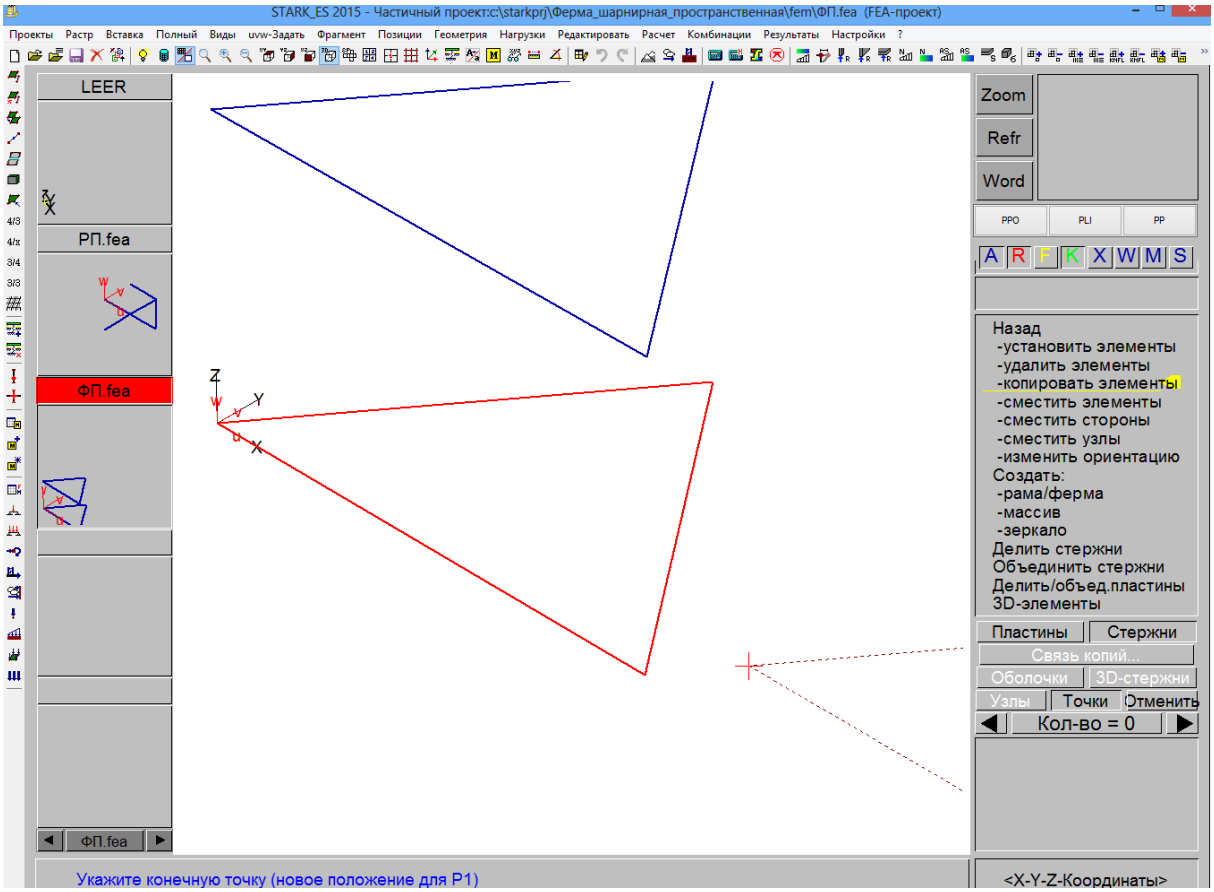


Рис. 233

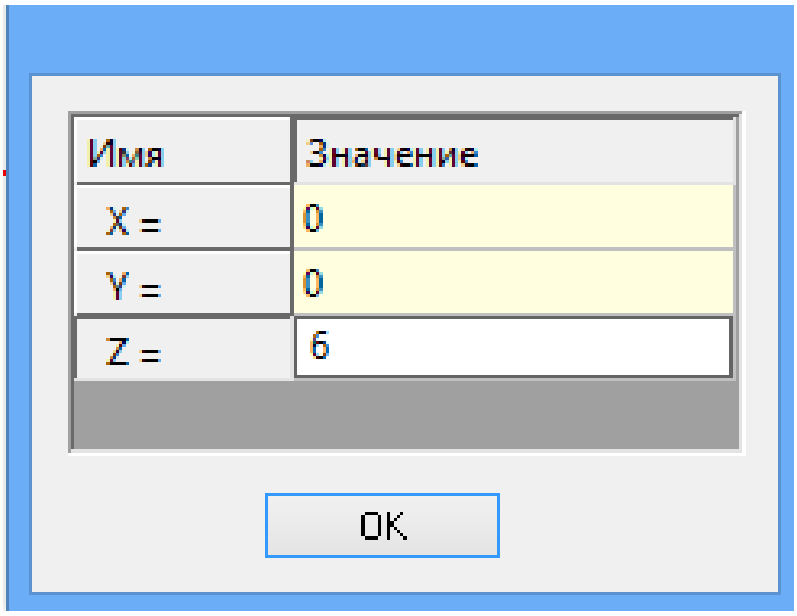


Рис. 234

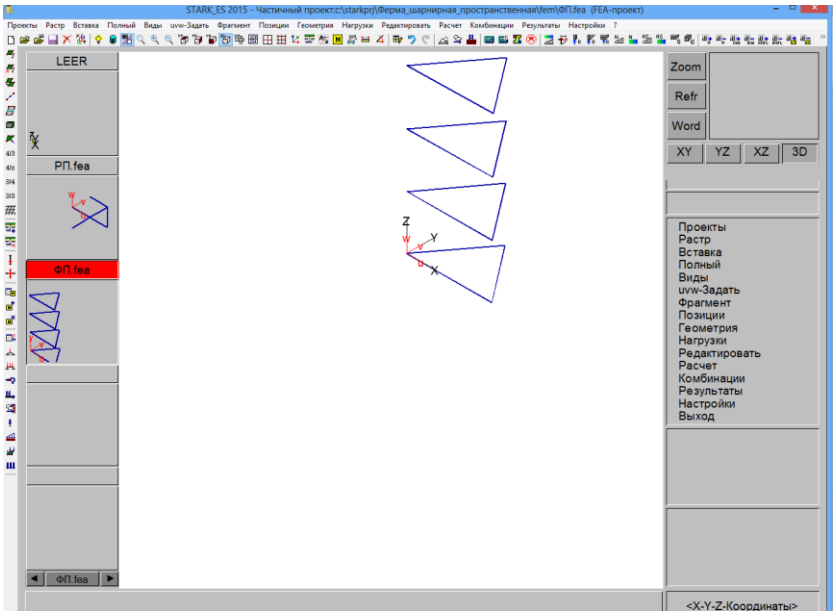


Рис. 235

Если в процессе работы изображение модели в рабочей зоне нужно сделать крупнее, можно воспользоваться колесиком мыши, а также видовой командой **Zoom** из бокового меню. После загружения этой команды на экране появляются горизонтальная и вертикальная линии, пересекающиеся в месте расположения курсора (рис. 236). Указав курсором два противоположных угла прямоугольной зоны, которая должна занять весь экран (рис. 237), получаем желаемый результат (рис. 238).

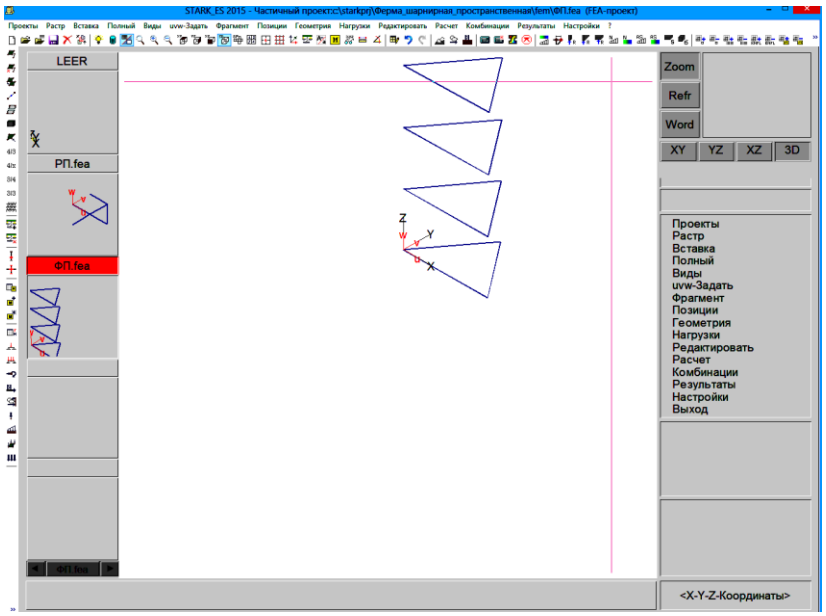


Рис. 236

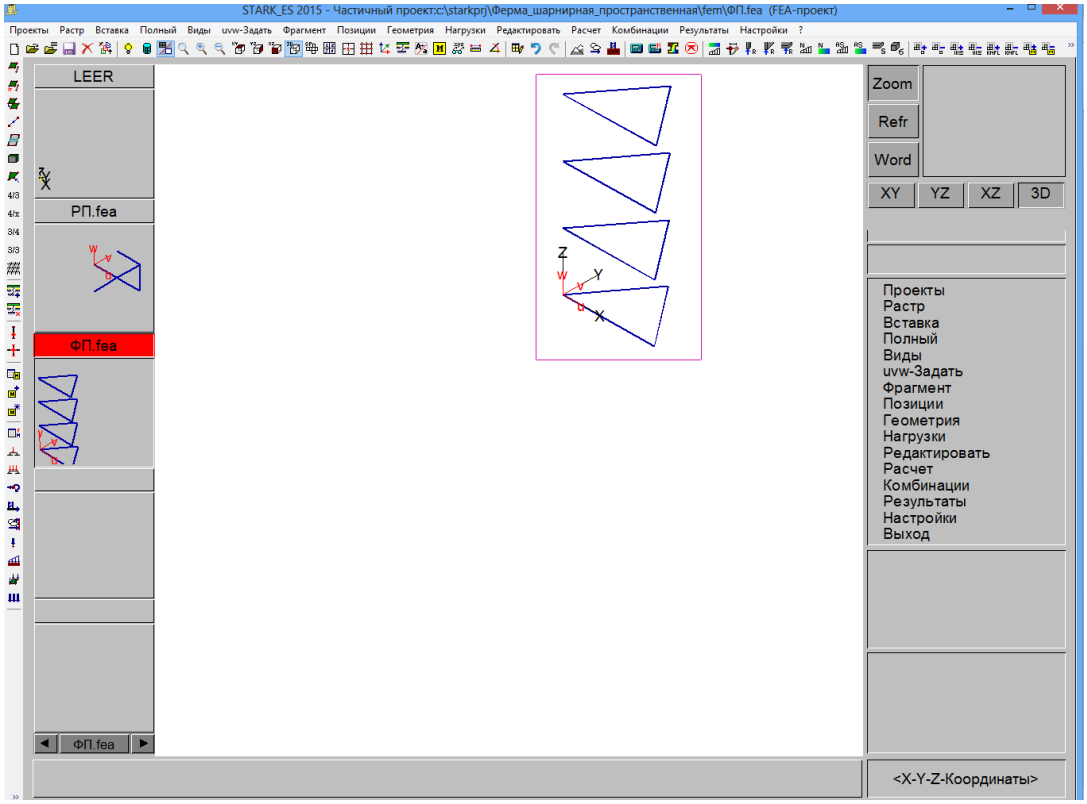


Рис. 237

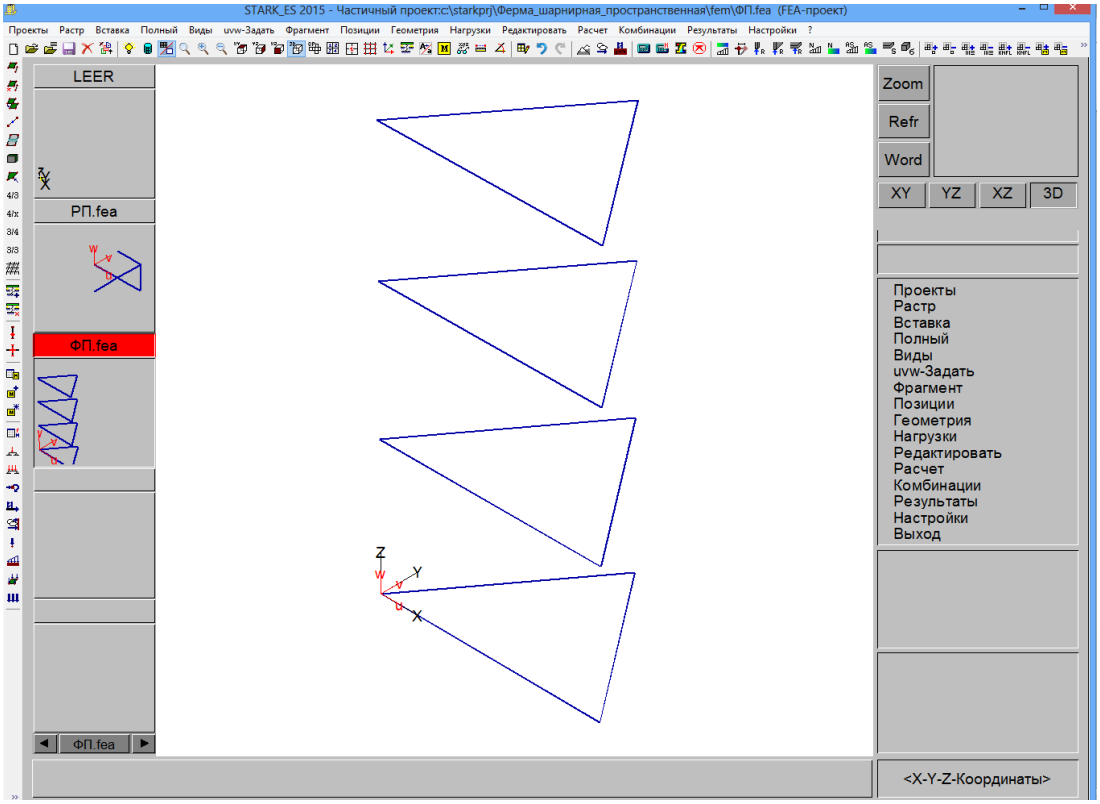


Рис. 238

Продолжим формирование геометрической модели пространственной фермы. Теперь с помощью команды **Геометрия – Установить элементы** создадим поясные стержни фермы (рис. 239) и раскосы (рис. 240) в одной из панелей. Зададим жесткости этих элементов (рис. 241). После этого снова используем команду **Геометрия – Копировать элементы** и копируем поясные стержни и раскосы. Начальную и конечную точки векторов смещения теперь можно задавать, указывая курсором на узлы фермы. Геометрическая модель готова (рис. 242). На рис. 243 представлены виды модели с разных точек зрения.

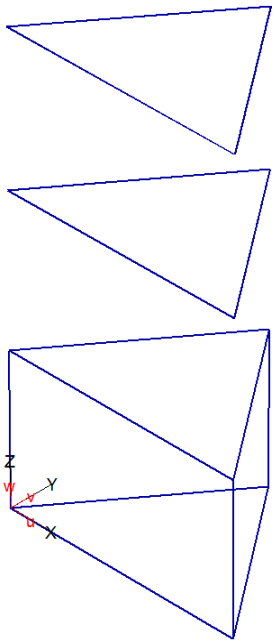


Рис. 239

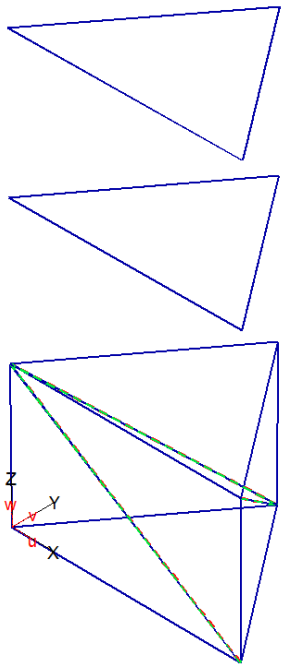


Рис. 240

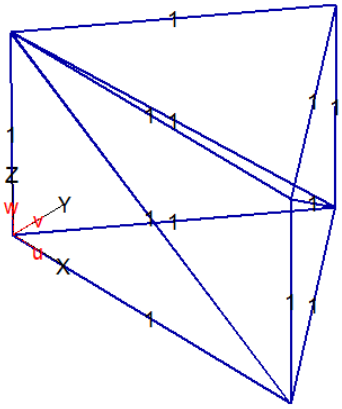


Рис. 241

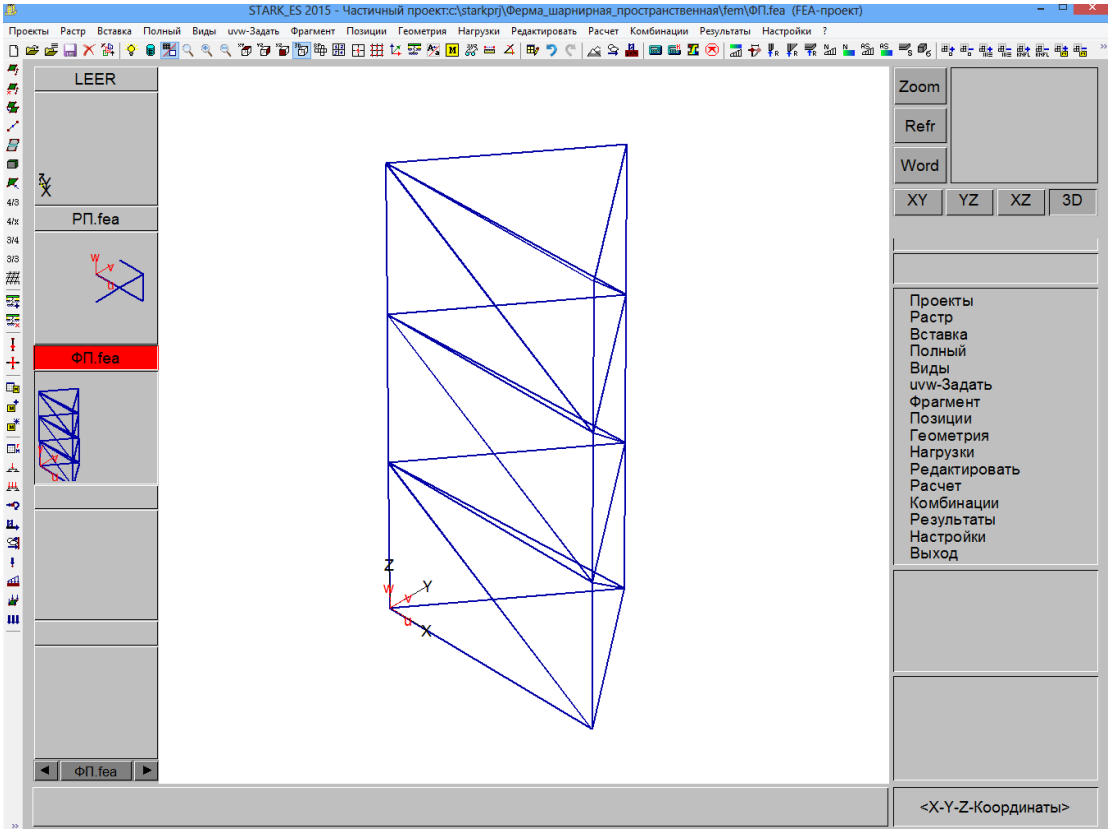


Рис. 242

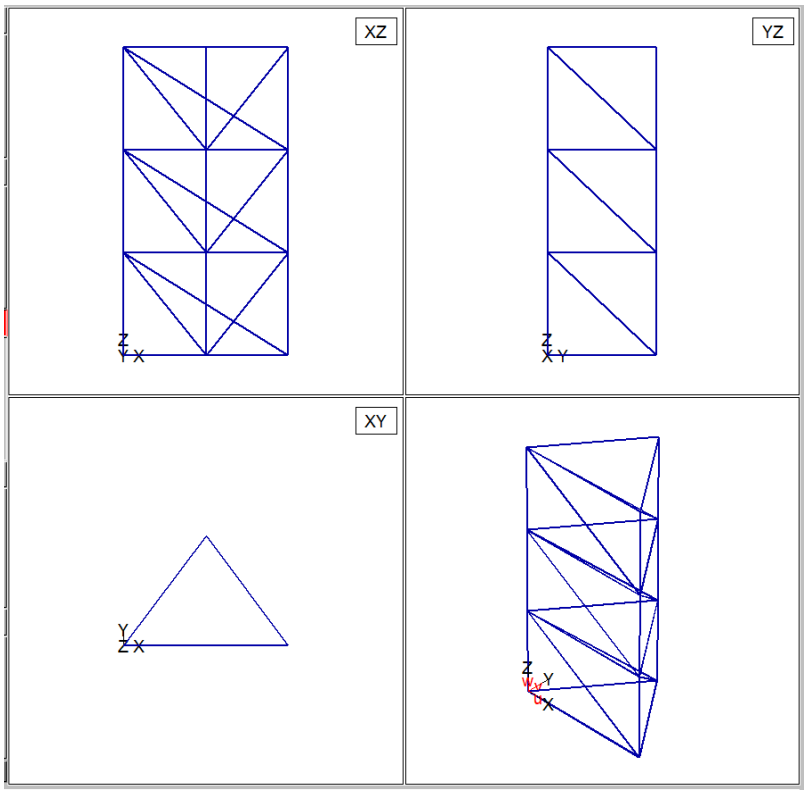


Рис. 243

Опорные связи заданы командой **Редактировать – Связи – Опорные закрепления:** ***Установить*** (рис. 244).

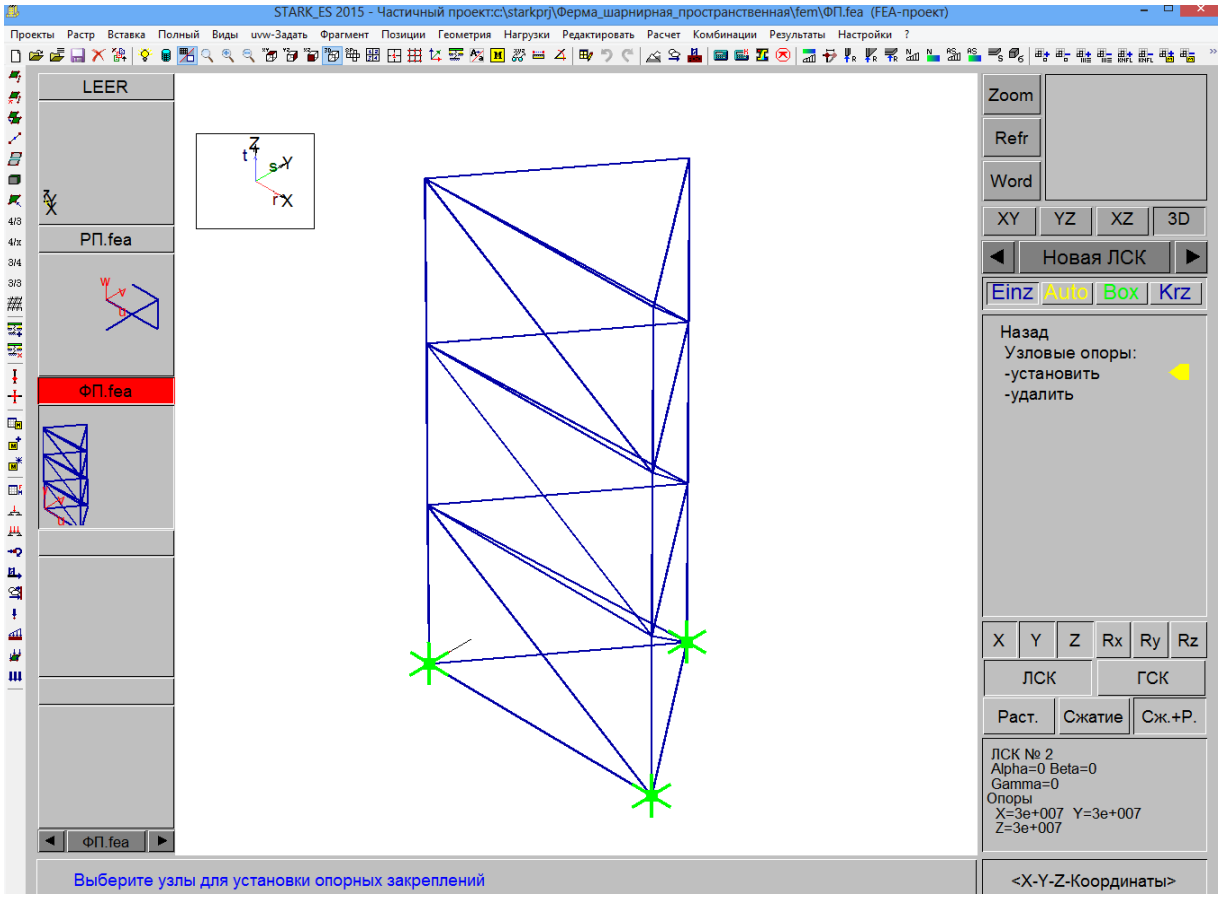


Рис. 244

Нагрузки заданы командой **Нагрузки – Узловые – Силы и моменты:** ***Установить*** (рис. 245, 246).

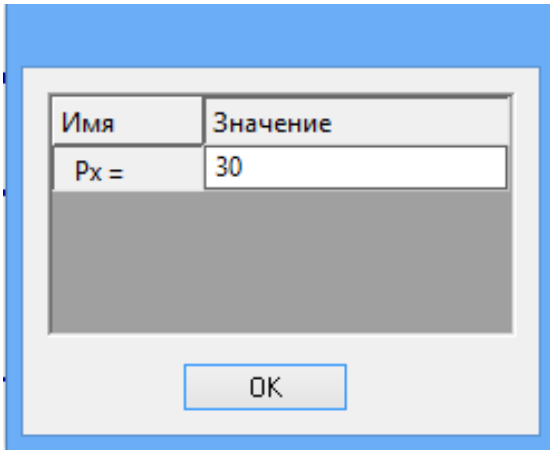


Рис. 245

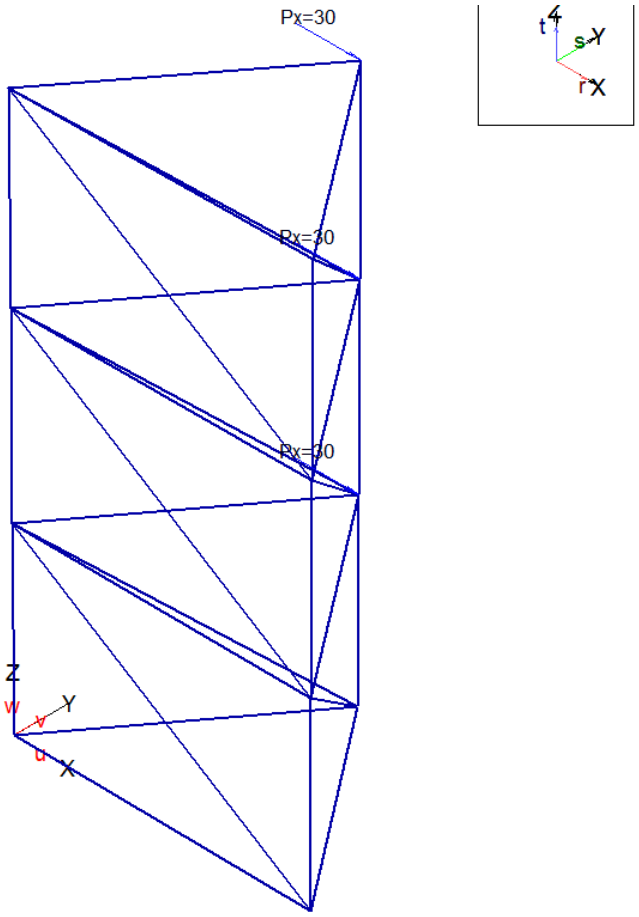


Рис. 246

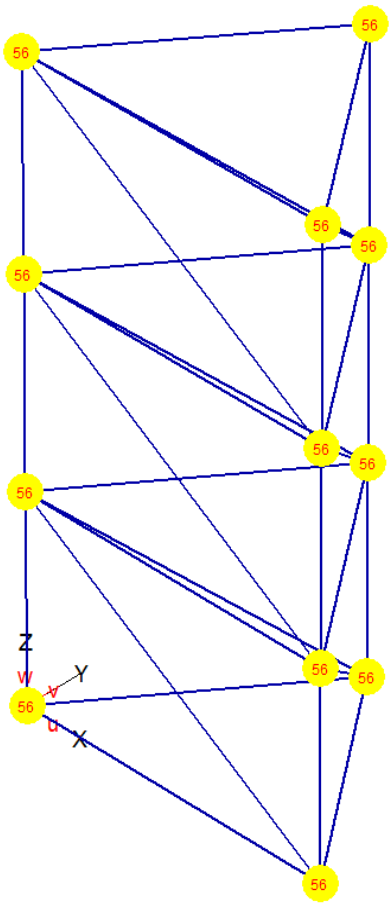


Рис. 247

Установим шарниры в узлы фермы. Связи между элементами фермы должны разрешать взаимные повороты элементов относительно всех трех координатных осей (рис. 247).

Расчет выполняется подобно тому, как это делалось выше в других примерах.

Результаты расчета отображаются так же, как это делалось выше в других примерах. Схема деформации фермы и значение наибольшего перемещения представлены на рис. 248. Внутренние усилия в пространственной ферме удобно анализировать по таблице. Покажем усилия в некоторых стержнях. Отметим стержни (это стержни *10* и *12*), усилия в которых будут представлены в таблице (рис. 249). Таблица продольных сил в отмеченных стержнях показана на рис. 250.

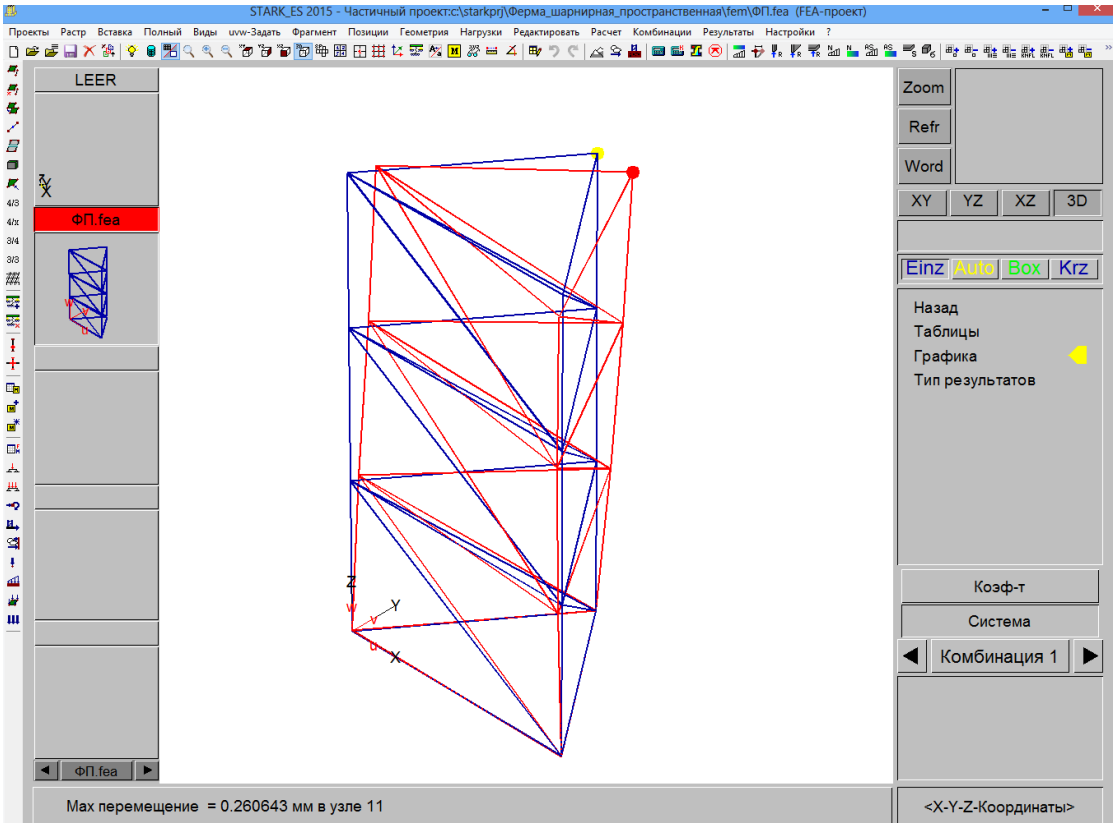


Рис. 248

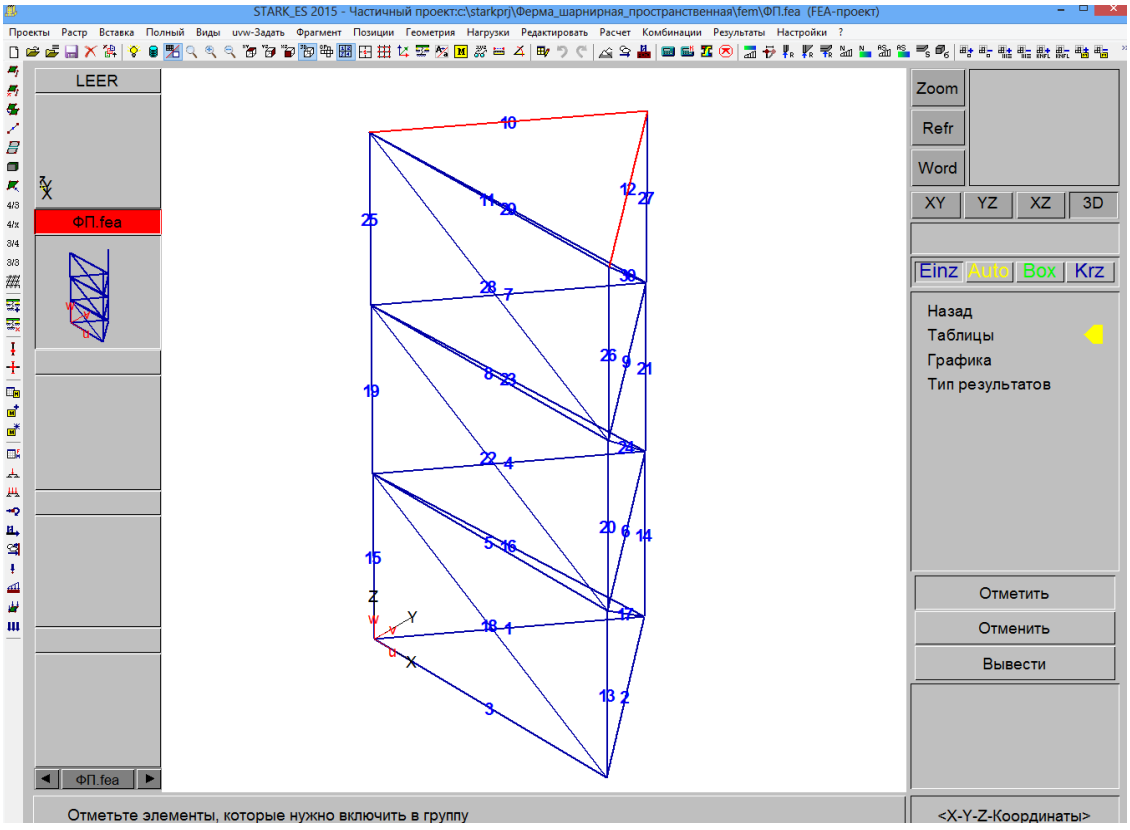


Рис. 249

Проект	Ферма шарнирная пространственная		Страница 1
Примечание	Ферма пространственная		Файл ФП
Дата	07.09.18	STARK_ES 2015	Кондратьева Л.

Усилия в стержнях (статический расчет)

Элем	Комб	Сеч. [м]	Nr [кН]	Qs [кН]	Qt [кН]	Mr [кНм]	Ms [кНм]	Mt [кНм]
10	1	0.00	24.42	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.00
		4.00	24.42	0.00	0.00	-0.00	-0.00	0.00
12	1	0.00	-24.40	0.00	0.00	0.00	-0.00	0.00
		4.00	-24.40	0.00	0.00	-0.00	0.00	0.00

Рис. 250

Контрольные вопросы и задания

1. В каких частях исследуемой при помощи МКЭ области размеры конечных элементов уменьшаются?
2. В каких частях исследуемой при помощи МКЭ области размеры конечных элементов увеличиваются?
3. Какие строительные конструкции при расчете МКЭ моделируются с использованием одномерных конечных элементов?
4. Какие строительные конструкции при расчете МКЭ моделируются с использованием двумерных конечных элементов?
5. Какие строительные конструкции при расчете МКЭ моделируются с использованием трехмерных конечных элементов?
6. Какие существуют виды одномерных конечных элементов?
7. Какие существуют виды двумерных конечных элементов?
8. Какие существуют виды трехмерных конечных элементов?
9. Каковы особенности разбиения двумерной области на конечные элементы?
10. Какое соотношение сторон треугольного конечного элемента предпочтительно?
11. Влияет ли на результаты расчета при помощи МКЭ порядок нумерации узлов?
12. Какой порядок нумерации узлов конечноэлементной модели эффективнее всего?

13. Какова основная идея МКЭ?

14. К какой группе математических методов относится МКЭ?

15. Какие вычислительные компьютерные программы реализуют МКЭ?

16. Каковы основные этапы создания дискретной модели исследуемой при помощи МКЭ области?

17. Какими могут быть аппроксимирующие функции?

18. Каковы основные преимущества МКЭ при расчетах конструкций?

19. Можно ли исследовать при помощи МКЭ неоднородные конструкции?

20. Можно ли рассчитать при помощи МКЭ арку?

21. Что может приниматься за неизвестные при расчете конструкции МКЭ?

22. Какие конечные элементы называются ферменными?

23. Какие конечные элементы называются балочными?

24. Какая координатная система называется местной?

25. Какая координатная система называется глобальной?

26. Как привести внешние нагрузки к узловым усилиям?

27. Какой принцип лежит в основе приведения внешних нагрузок к узловым усилиям?

28. Что характеризует матрица направляющих косинусов?

29. Что характеризует матрица соединения?

30. Как выглядит единичная матрица ферменного конечного элемента?

31. Как выглядит единичная матрица балочного конечного элемента?

32. Как связаны вектор узловых перемещений и вектор узловых усилий ферменного конечного элемента в местной системе координат?

33. Как связаны вектор узловых перемещений и вектор узловых усилий балочного конечного элемента в местной системе координат?

34. Как связаны вектор узловых перемещений и вектор узловых усилий балочного конечного элемента в глобальной системе координат?

35. Как связаны вектор узловых перемещений и вектор узловых усилий ферменного конечного элемента в глобальной системе координат?

36. Как связаны матрицы жесткости ферменного конечного элемента в глобальной и местной системах координат?

37. Как связаны матрицы жесткости балочного конечного элемента в глобальной и местной системах координат?

38. Какие конструкции моделируют ферменными элементами?

39. Где разработан ПК STARK ES?

40. Для чего предназначен ПК STARK ES?

41. Возможен ли расчет в ПК STARK ES на сейсмические воздействия?

42. Возможен ли расчет в ПК STARK ES конструкций, материал которых работает за пределами упругих деформаций?

43. Возможен ли расчет в ПК STARK ES оснований зданий и сооружений?

44. Какие сооружения спроектированы при помощи ПК STARK ES?

45. Что может быть результатом расчета конструкции методом конечных элементов?

46. Может ли ПК STARK ES обмениваться данными с другими программами?

47. Перечислите основные элементы рабочего стола ПК STARK ES.

48. Что отражается в строке заголовка?

49. Что содержится в верхнем меню?

50. Для чего используется окно выбора?

51. Какие сообщения появляются в окне информации?

52. Для чего используется окно редактора?

53. Что можно увидеть в окне просмотра?

54. Что включает в себя каталог проектов?

55. Для чего служит окно координат?

56. Где на рабочем столе ПК STARK ES можно увидеть имя текущего файла?

57. Какое расширение имеет файл проекта ПК STARK ES?

58. Какие команды включает в себя пункт **Проекты** верхнего меню ПК STARK ES?

59. Какие команды включает в себя пункт **Геометрия** верхнего меню ПК STARK ES?

60. Какие команды включает в себя пункт **Редактировать** верхнего меню ПК STARK ES?

61. Какие команды включает в себя пункт **Расчет** верхнего меню ПК STARK ES?

62. Какие варианты формирования геометрической модели фермы существуют в ПК STARK ES?

63. Какие виды ферм выделяют по общему очертанию?

64. Назовите виды простых решеток плоских ферм.

65. Какие стержни фермы называются поясными?

66. Какие стержни фермы называются раскосами?

67. Какие стержни фермы называются стойками?

68. Что называют панелью фермы?

69. Какой пояс фермы называется грузовым?

70. Как задается нагрузка собственного веса в ПК STARK ES?

71. Что называется жесткостью стержня?

72. По какому принципу задаются внешние (опорные) связи в ПК STARK ES?

73. По какому принципу задаются внутренние связи (между элементами) в ПК STARK ES?

74. Какое правило знаков используется в ПК STARK ES для силовых воздействий?

75. Какие виды отображения результатов расчета конструкции используются в ПК STARK ES?

76. Как изменить (увеличить) масштаб изображения перемещений на схеме деформации?

77. Какие внутренние усилия возникают в стержнях простой шарнирной фермы?

78. Какие внутренние усилия возникают в элементах многопролетной шарнирной балки?

79. Какие внутренние усилия возникают в стержнях плоской рамы?

80. Какие варианты формирования геометрической модели плоской рамы существуют в ПК STARK ES?

81. Какие фермы называются шпренгельными?

82. Каковы особенности формирования геометрических моделей арок?

83. Какие внутренние усилия возникают в стержнях пространственной шарнирной фермы?

84. Как можно задавать смещение для копирования элементов геометрической модели при работе в ПК STARK ES?

85. Каково назначение пространственных ферм?

86. Какое правило знаков используется для продольной силы?

87. Определите внутренние усилия в стержнях фермы (рис. 251) при помощи ПК STARK ES (вариант выдается преподавателем).

88. Определите внутренние усилия и максимальный прогиб в МШБ (рис. 252) при помощи ПК STARK ES (вариант выдается преподавателем).

89. Определите внутренние усилия и максимальный прогиб в раме (рис. 253; табл. 2) при помощи ПК STARK ES (вариант выдается преподавателем).

90. Определите внутренние усилия в пространственной раме (рис. 254; табл. 3) при помощи ПК STARK ES (вариант выдается преподавателем).

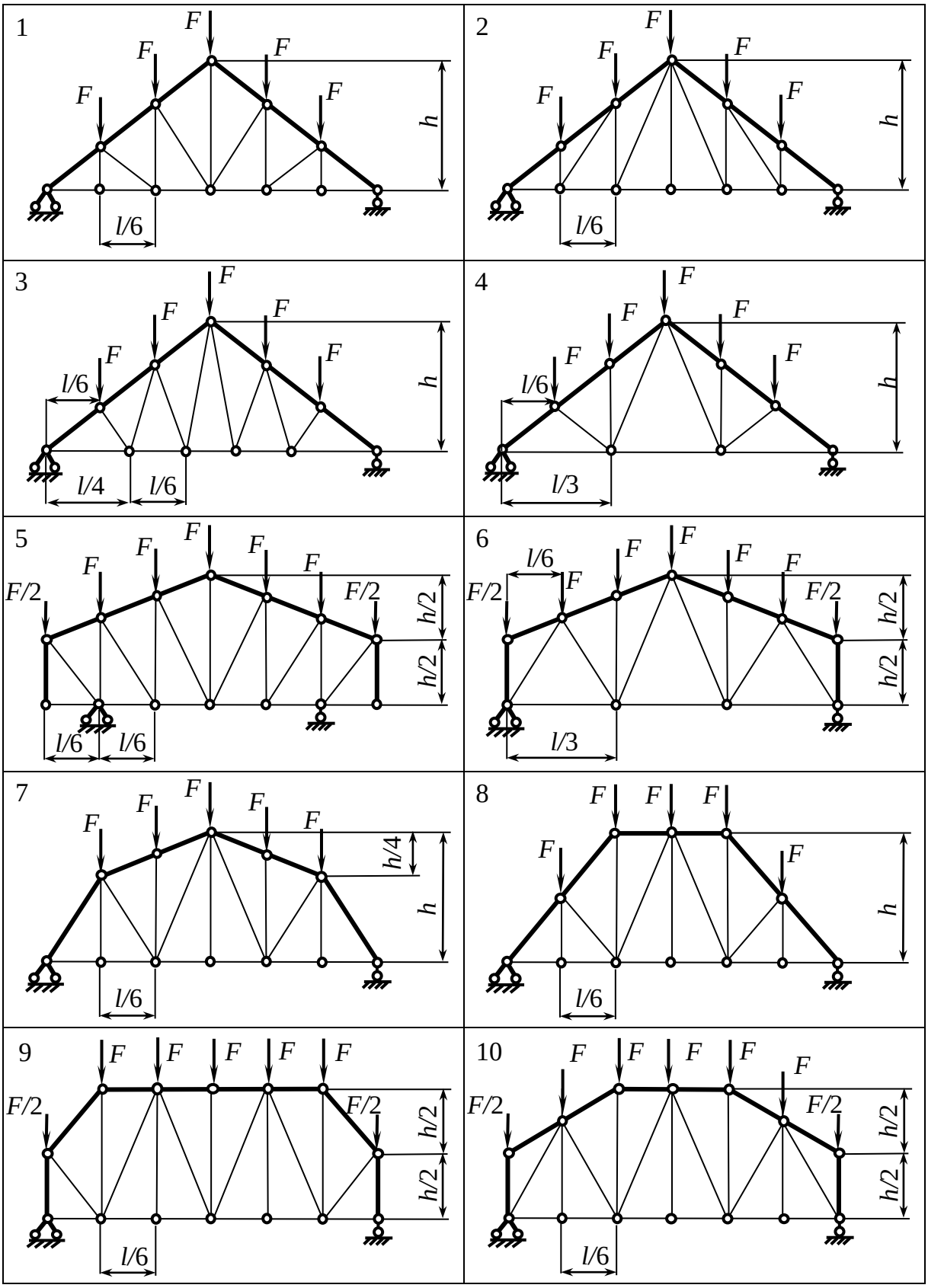

1
F
F
F
F
F
h
l/6
2
F
F
F
F
F
h
l/6
3
F
F
F
F
F
F
h
l/6
l/4
l/6
4
F
F
F
F
F
F
h
l/6
l/3
5
F
F
F
F
F
F
F/2
F/2
h/2
h/2
l/6
l/6
6
l/6
F
F
F
F
F
F/2
F/2
h/2
h/2
l/3
7
F
F
F
F
F
F
h/4
h
l/6
8
F
F
F
F
F
F
h
l/6
9
F
F
F
F
F
F
F/2
F/2
h/2
h/2
l/6
10
F
F
F
F
F
F
F/2
F/2
h/2
h/2
l/6

Рис. 251

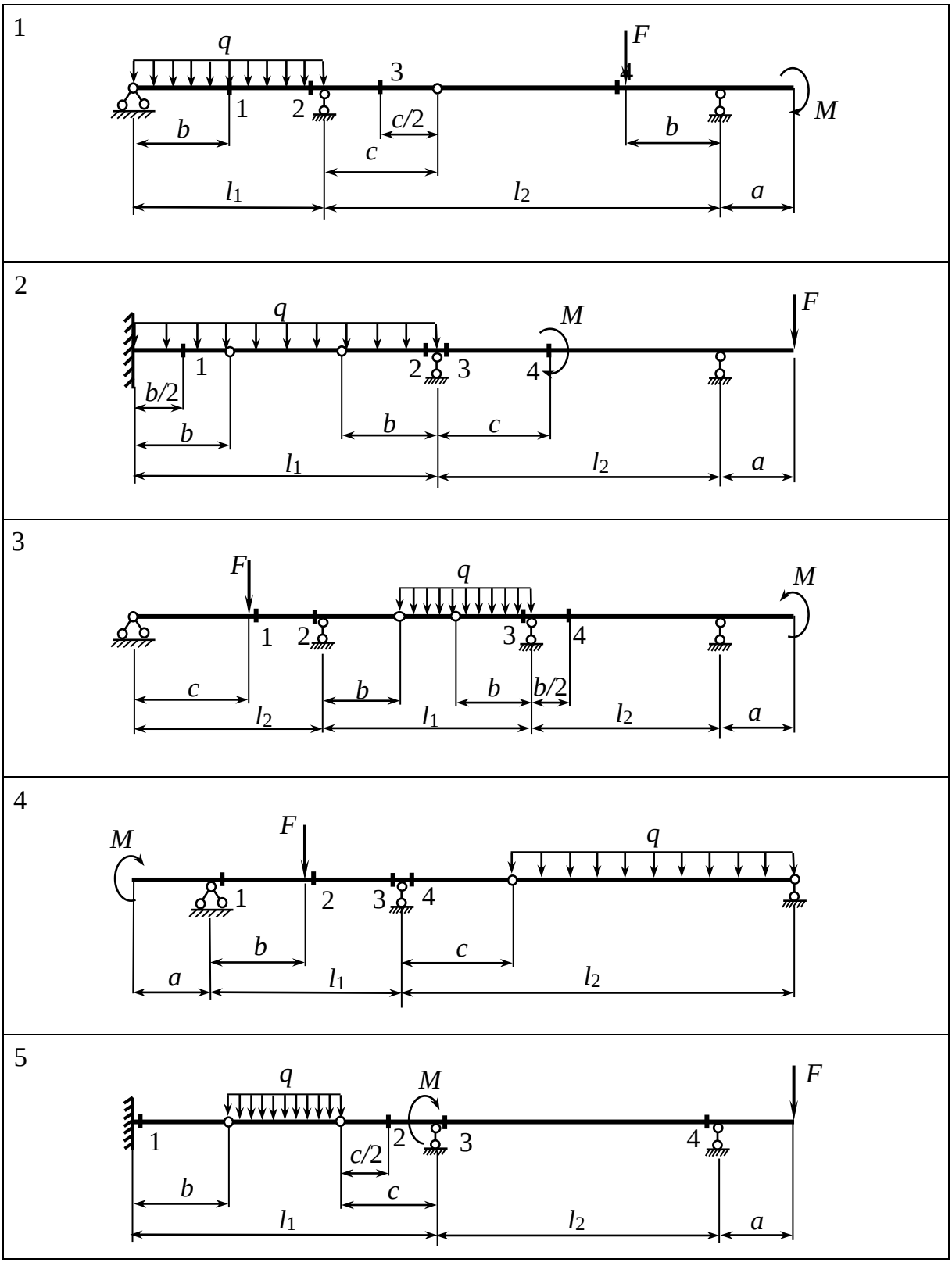


Рис. 252 (начало, окончание на с. 149)

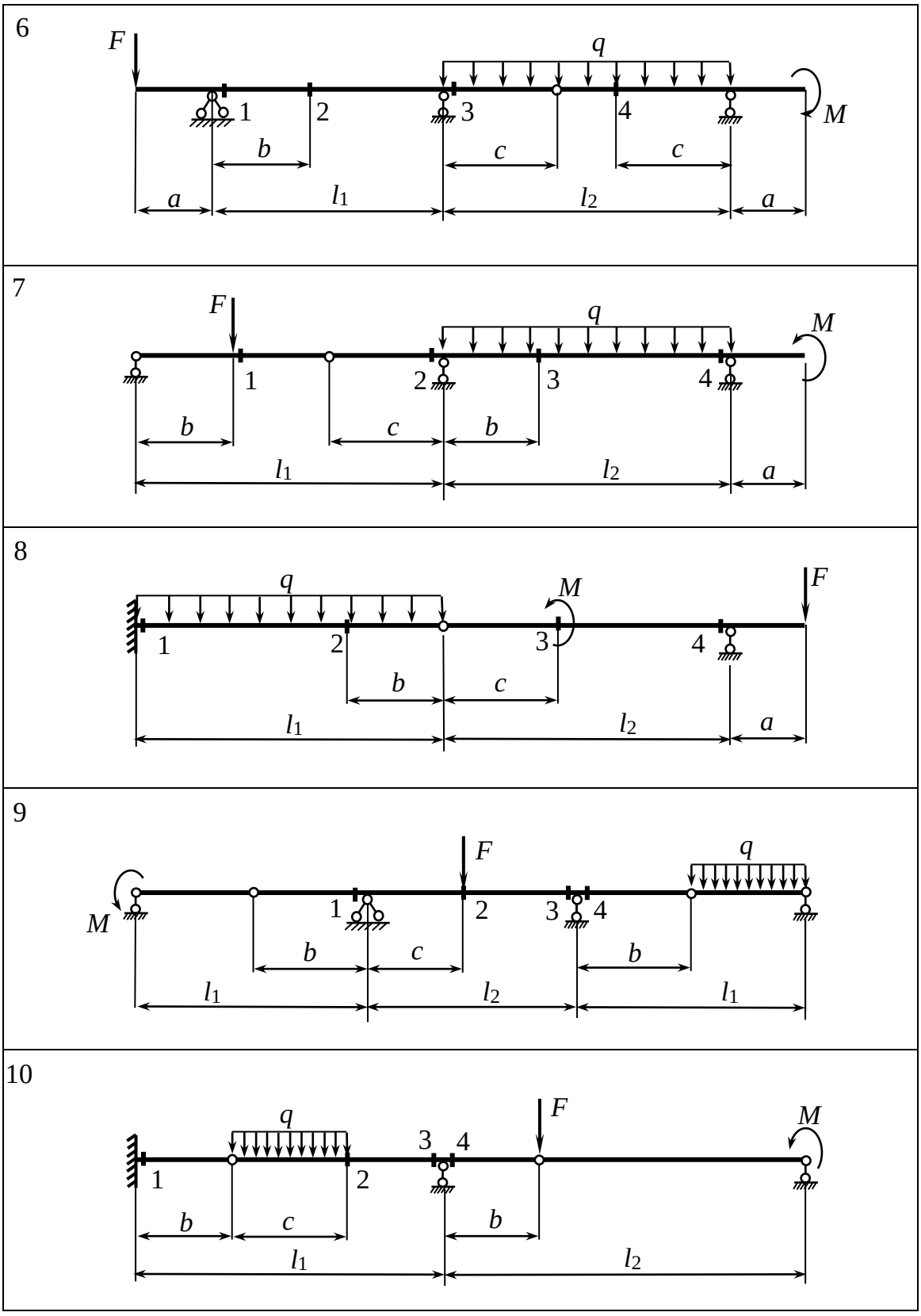


Рис. 252 (окончание, начало на с. 148)

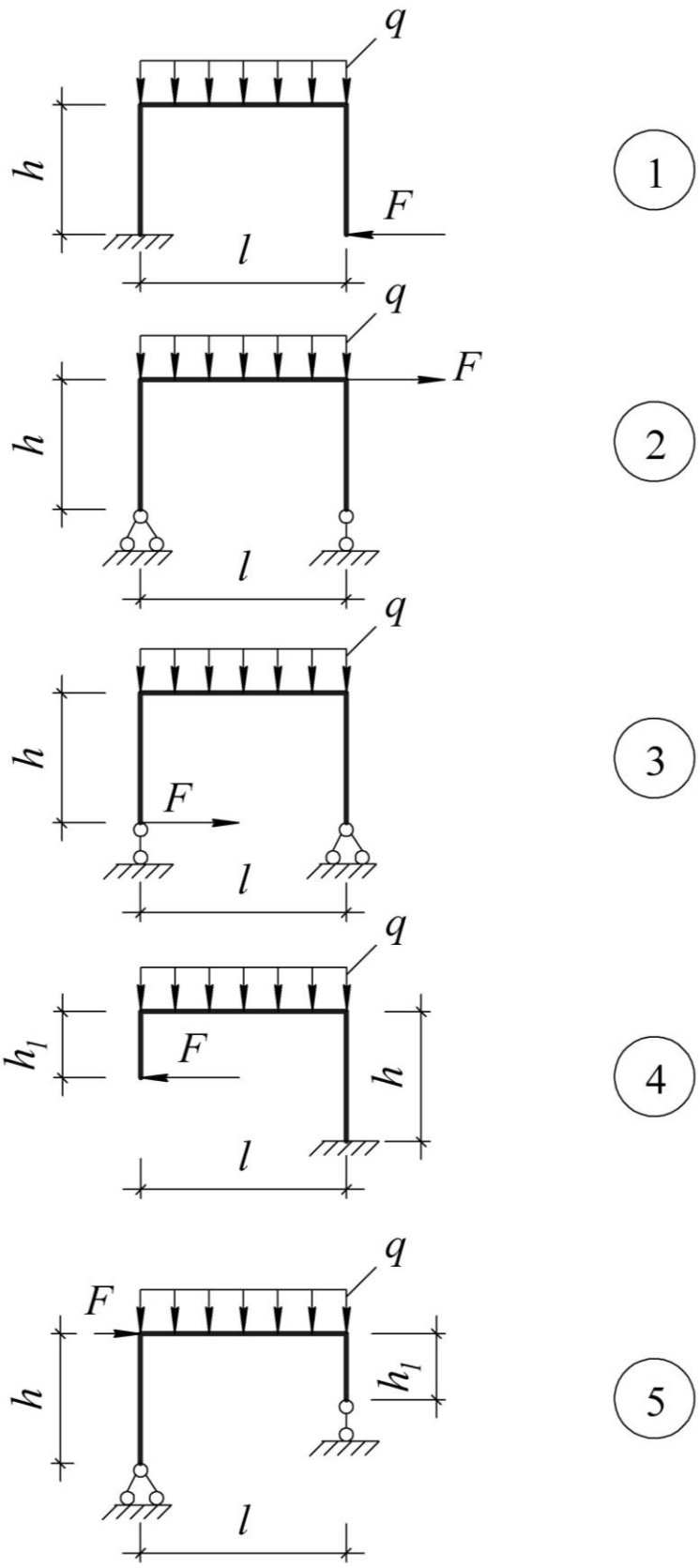


Рис. 253 (начало, окончание на с. 151)

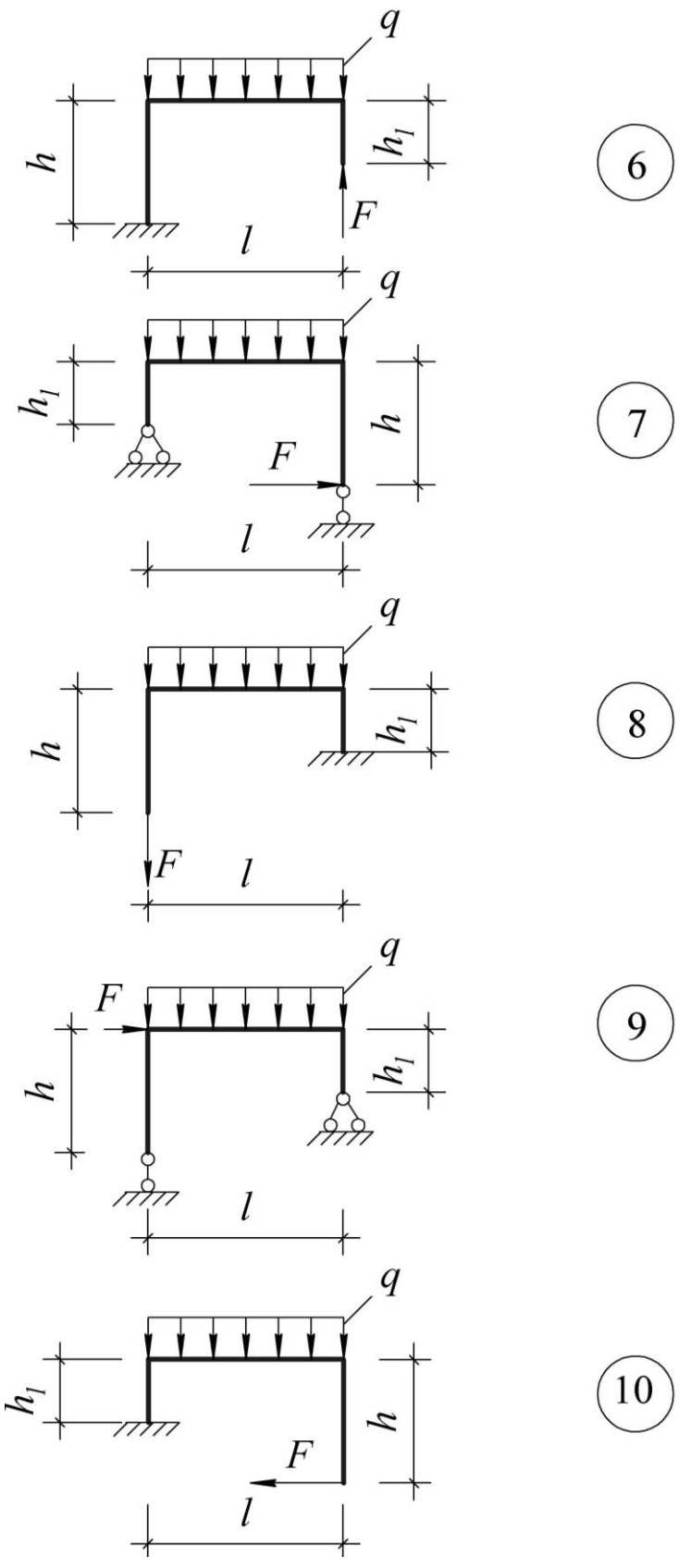


Рис. 253 (окончание, начало на с. 150)

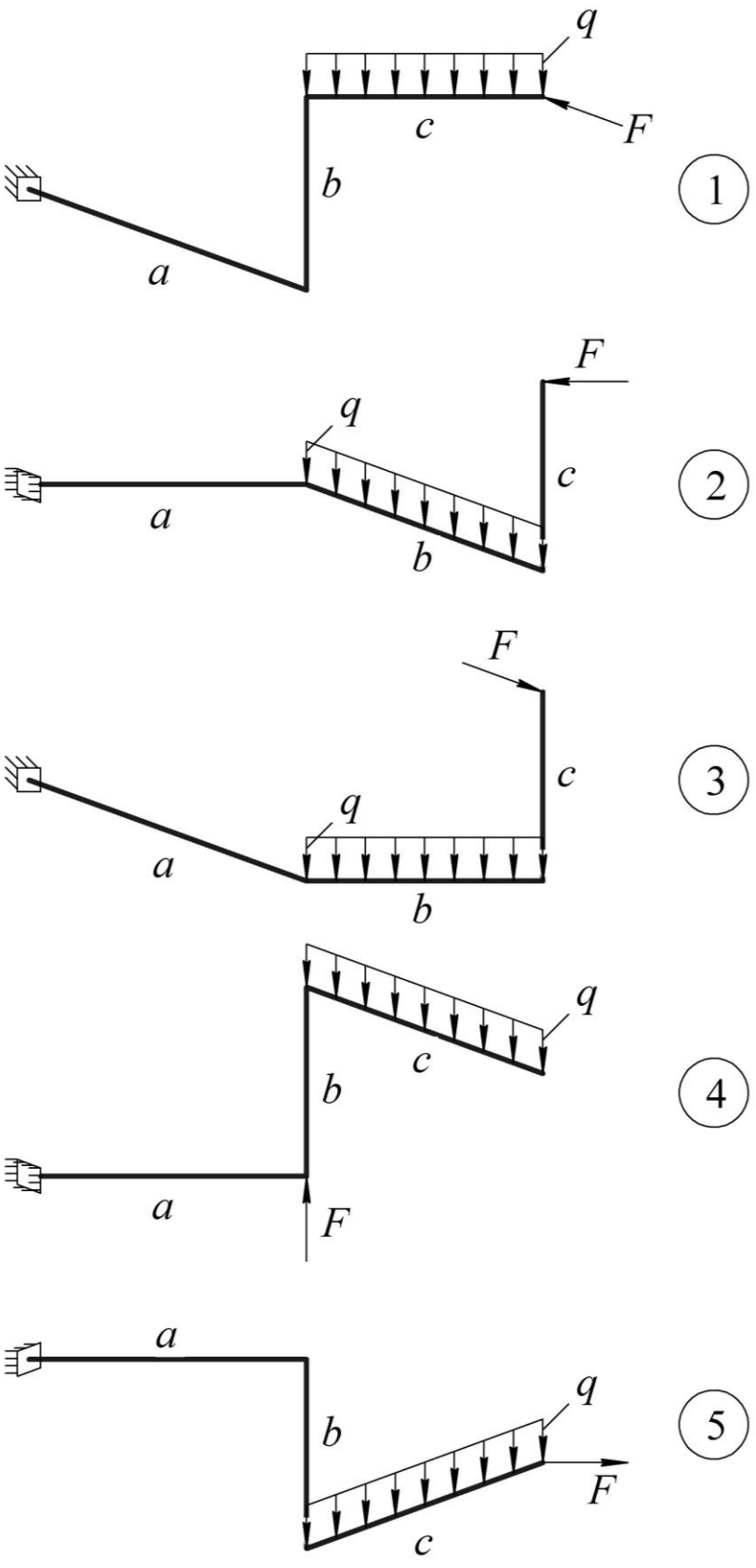


Рис. 254 (начало, окончание на с. 153)

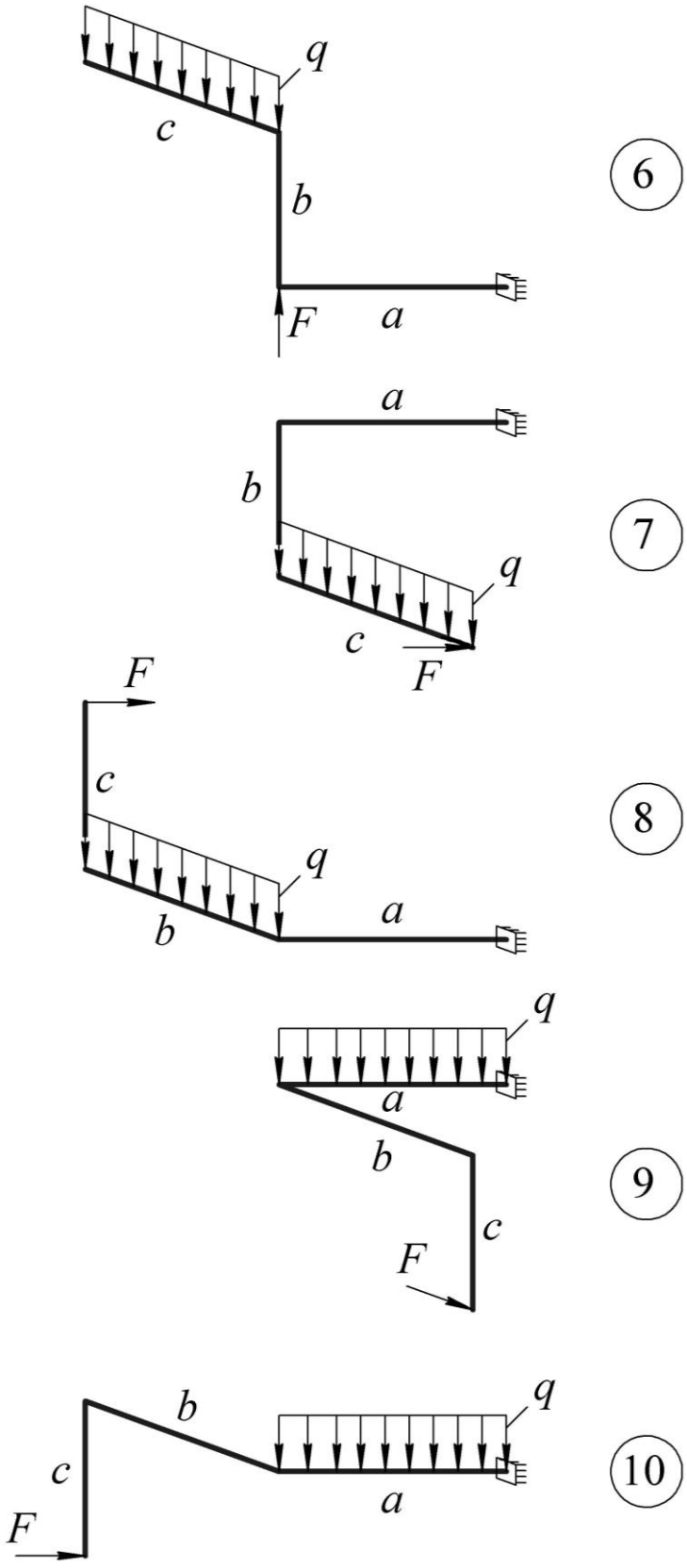


Рис. 254 (окончание, начало на с. 152)

Таблица 2

Цифра варианта	I	II			III	IV
	Номер схемы по рис. 253	l, м	h, м	h_1, м	q, кН/м	F, кН
1	1	2,75	2,00	1,00	0,40	0,30
2	2	2,25	1,75	1,25	0,45	0,28
3	3	1,75	1,50	1,25	0,50	0,26
4	4	1,25	1,25	1,00	0,55	0,24
5	5	3,50	2,00	1,50	0,60	0,22
6	6	3,00	3,00	2,50	0,65	0,20
7	7	2,50	2,25	2,00	0,70	0,18
8	8	2,00	2,00	1,50	0,75	0,16
9	9	1,50	1,50	1,00	0,80	0,12
0	10	3,25	2,50	2,00	0,85	0,10

Таблица 3

Цифра варианта	I	II			III	IV
	Номер схемы по рис. 254	a, м	b, м	c, м	q, кН/м	F, кН
1	1	1,00	3,50	2,25	0,40	0,10
2	2	1,50	3,00	2,50	0,45	0,12
3	3	2,00	2,75	3,00	0,50	0,14
4	4	2,50	2,25	2,75	0,55	0,16
5	5	3,00	2,50	3,50	0,60	0,18
6	6	3,50	2,00	1,00	0,65	0,20
7	7	1,25	1,75	1,50	0,70	0,22
8	8	1,75	1,50	1,25	0,75	0,24
9	9	2,25	1,25	1,75	0,80	0,26
0	10	2,75	1,00	2,00	0,85	0,28

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В пособии рассмотрены и теоретическая база компьютерных технологий расчетов инженерных сооружений (основы метода конечных элементов), и практические навыки работы с одной из расчетных программ – отечественным программным комплексом STARK ES.

Будущие учебные пособия планируется посвятить расчетам статически неопределимых стержневых систем, пластинчатых конструкций, расчетам на динамические нагрузки, на устойчивость при помощи ПК STARK ES; рассмотрению других численных методов решения инженерно-технических задач в строительстве.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики / Г. К. Клейн [и др.]. – М. : Высш. шк., 1980. – 384 с.

2. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы [Электронный ресурс] / Н. С. Бахвалов, Н. П. Жидков, Г. М. Кобельков. – М. : БИНОМ, 2012. – 636 с. – ISBN 978-5-9963-0802-6. – Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996308026.html (дата обращения: 15.11.2018).

3. *Бахвалов, Н. С.* Численные методы в задачах и упражнениях [Электронный ресурс] / Н. С. Бахвалов, А. В. Лапин, Е. В. Чижонков ; под ред. В. А. Садовничего. – М. : БИНОМ, 2015. – 243 с. – ISBN 978-5-9963-2980-9. – Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996329809.html (дата обращения: 15.11.2018).

4. *Сидоров, В. Н.* Метод конечных элементов в расчете сооружений. Теория, алгоритм, примеры расчетов в программном комплексе SIMULIA Abaqus [Электронный ресурс] / В. Н. Сидоров, В. В. Вершинин. – М. : АСВ, 2015. – 288 с. – ISBN 978-5-4323-0090-4. – Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785432300904.html (дата обращения: 15.11.2018).

5. Численные и аналитические методы расчета строительных конструкций [Электронный ресурс] / А. Б. Золотой [и др.]. – М. : АСВ, 2009. – 336 с. – ISBN 978-5-9309-3675-9. – Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785930936759.html (дата обращения: 15.11.2018).

6. *Присекин, В. Л.* Основы метода конечных элементов в механике деформируемых тел [Электронный ресурс] / В. Л. Присекин, Г. И. Расторгуев. – Новосибирск : Изд-во НГТУ, 2010. – 238 с. – ISBN 978-5-7782-1287-9. – Режим доступа: http://znanium.com/catalog/product/548237 (дата обращения: 16.11.2018).

7. *Розин, Л. А.* Стержневые системы как системы конечных элементов / Л. А. Розин. – Л. : Изд-во ЛГУ, 1976. – 232 с.

8. *Сегерлинд, Л.* Применение метода конечных элементов / Л. Сегерлинд. – М. : Мир, 1979. – 393 с.

9. Метод конечных элементов : метод. указания к практ. занятиям / Владим. политехн. ин-т ; сост. В. М. Кислов. – Владимир, 1982. – 44 с.

10. *Кислов, В. М.* Определение физических и геометрических параметров конструкций на основе метода конечных элементов : учеб. пособие / В. М. Кислов ; Владим. гос. техн. ун-т. – Владимир, 1994. – 88 с.

11. *Формалев, В. Ф.* Численные методы / В. Ф. Формалев, Д. Д. Ревизников. – М. : Физматлит, 2006. – 400 с. – ISBN 5-9221-0737-2.

12. Основы метода конечных элементов. Введение. Расчет стержневых систем : конспект лекций / сост. Л. Е. Кондратьева. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2007. – 36 с.

13. STARK ES. Справочные материалы [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://dwg.ru/dnl/4974 (дата обращения: 17.11.2018).

14. *Киселев, В. А.* Строительная механика. Общий курс / В. А. Киселев. – М. : Стройиздат, 1986. – 520 с.

15. *Кондратьева, Л. Е.* Строительная механика : учеб. пособие / Л. Е. Кондратьева. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2013. – 252 с. – ISBN 978-5-9984-0399-6.

16. Справочное пособие по строительной механике [Электронный ресурс] : учеб. пособие : в 2 т. / Ю. В. Верюжский [и др.]. – М. : АСВ, 2014. – Т. 1. – 640 с. – ISBN 978-5-4323-0005-8. – Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785432300058.html (дата обращения: 17.11.2018).

17. Справочное пособие по строительной механике [Электронный ресурс] : учеб. пособие : в 2 т. / Ю. В. Верюжский [и др.]. – М. : АСВ, 2014. – Т. 2. – 432 с. – ISBN 978-5-4323-0007-2. – Режим доступа: http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785432300072.html (дата обращения: 17.11.2018).

18. Строительная механика : метод. указания к выполнению заданий для студентов строит. специальностей заоч. формы обучения / сост.: Л. Е. Кондратьева, И. А. Черноусова. – Владимир : Ред.-издат. комплекс ВлГУ, 2004. – 44 с.

19. Методические указания и задания по сопротивлению материалов для студентов специальностей «Теплогазоснабжение и вентиляция», «Водоснабжение и водоотведение». Статически определимые системы / сост.: Л. Е. Кондратьева, В. И. Тарасенко. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2008. – 36 с.

20. ЕВРОСОФТ [Электронный ресурс]. – Режим доступа: http://www.eurosoft.ru/about/ (дата обращения: 17.11.2018).

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ 3

ОСНОВЫ МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ 4
Основная идея метода конечных элементов 4
Дискретизация области 6
Расчет стержневых систем. Постановка задачи 10
Матрица жесткости ферменного элемента 11
Матрица жесткости балочного элемента 14
Приведение внешней нагрузки к узловым усилиям 19
Преобразование матрицы жесткости ферменного элемента при переходе от местной системы координат к глобальной 21
Преобразование матрицы жесткости балочного элемента при переходе от местной системы координат к глобальной 23
Характеристики совокупности элементов 25
Пример решения задачи методом конечных элементов 26

РАБОТА В ПРОГРАММЕ STARK ES 36
Основные возможности программы STARK ES 36
Рабочий стол ПК STARK ES 40
Расчет простой фермы в ПК STARK ES 46
Расчет многопролетной шарнирной балки в ПК STARK ES 77
Расчет двухопорной рамы в ПК STARK ES 91
Расчет трехшарнирной рамы в ПК STARK ES 101
Расчет сложной фермы в ПК STARK ES 109
Расчет трехшарнирной арки в ПК STARK ES 114
Расчет пространственной рамы в ПК STARK ES 123
Расчет пространственной фермы в ПК STARK ES 129

Контрольные вопросы и задания 142

ЗАКЛЮЧЕНИЕ 155

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК 156

Учебное издание

КОНДРАТЬЕВА Людмила Евгеньевна

ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ ИНЖЕНЕРНО-ТЕХНИЧЕСКИХ ЗАДАЧ В СТРОИТЕЛЬСТВЕ

Учебное пособие

Редактор Т. В. Евстюничева

Технический редактор А. В. Родина

Корректор Н. В. Пустовойтова

Компьютерная верстка Л. В. Макаровой

Выпускающий редактор А. А. Амирсейидова

Подписано в печать 28.12.18.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 9,30. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.