

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

Институт прикладной математики, физики и информатики

УТВЕРЖДАЮ:

Директор института



Хорьков К.С.

« 30 » 08 2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

УРАВНЕНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

(наименование дисциплины)

направление подготовки / специальность

02.04.01 «Математика и компьютерные науки»

(код и наименование направления подготовки (специальности))

направленность (профиль) подготовки

Математические методы в экономике и финансах

(направленность (профиль) подготовки))

г. Владимир

2021

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель освоения дисциплины «Уравнения математической физики и их приложения» — ознакомление с фундаментальными методами исследования соотношений между бесконечно малыми величинами, которые возникают при моделировании физических процессов.

Задачи изучения дисциплины: овладение основными понятиями и методами теории уравнений математической физики и применениями их в приложениях.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина «Уравнения с частными производными» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений, учебного плана.

Пререквизиты дисциплины: математический анализ, линейная алгебра, дифференциальные уравнения, функциональный анализ.

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОПОП (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

| Формируемые компетенции | Планируемые результаты обучения по дисциплине, в соответствии с индикатором достижения компетенции | | Наименование оценочного средства |
|---|---|---|---|
| | Индикатор достижения компетенции | Результаты обучения по дисциплине | |
| ПК-1. Способен демонстрировать фундаментальные знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий. | ПК-1.1. Знает фундаментальные понятия математических и естественных наук, научные проблемы по тематике проводимых исследований и разработок. ПК-1.3. Умеет анализировать научные проблемы по тематике проводимых исследований и разработок, представлять результаты исследований. ПК-1.5. Владеет навыками осуществления теоретического обобщения научных данных, результатов экспериментов и наблюдений. | Знает основные понятия и методы теории уравнений с частными производными; Умеет использовать фундаментальные знания в области уравнений с частными производными в будущей профессиональной деятельности; Владеет навыками анализа моделей физических явлений | Типовой расчет, контрольные вопросы к рейтинг-контролю и промежуточной аттестации |
| ПК-5. Способен использовать современные методы разработки и реализации конкретных алгоритмов экономико-математических моделей на базе языков программирования и пакетов прикладных программ моделирования. | ПК-5.1. Знает возможности современных и перспективных средств разработки программных продуктов и технических средств для реализации алгоритмов экономико-математических моделей. ПК-5.2. Умеет использовать существующие типовые решения и шаблоны проектирования программного обеспечения. ПК-5.3. Владеет навыками организации описания типовых процессов и практик разработки и сопровождения требований к системам. ПК-5.4. Владеет навыками анализа возможностей программного обеспечения для реализации алгоритмов экономико-математических моделей. | Знает основные понятия и методы теории уравнений с частными производными; Умеет использовать фундаментальные знания в области уравнений с частными производными в будущей профессиональной деятельности; Владеет навыками анализа моделей физических явлений | Типовой расчет, контрольные вопросы к рейтинг-контролю и промежуточной аттестации |

4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоемкость дисциплины составляет 4 зачетных единицы, 144 часа.

Тематический план форма обучения – очная

| № п/п | Наименование тем и/или разделов/тем дисциплины | Семестр | Неделя семестра | Контактная работа обучающихся с педагогическим работником | | | | Самостоятельная работа | Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам) |
|----------------------------|---|----------|-----------------|---|----------------------|---------------------|---------------------------------|------------------------|---|
| | | | | Лекции | Практические занятия | Лабораторные работы | в форме практической подготовки | | |
| 1 | Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка | 6 | 1 | 2 | 2 | | 2 | 8 | |
| 1.1 | Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка | 6 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 4 | |
| 1.2 | Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка | 6 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 4 | |
| 2 | Классификация линейных уравнений 2-го порядка | 6 | 2-3 | 2 | 2 | | 2 | 8 | |
| 2.1 | Классификация линейных уравнений 2-го порядка от n переменных | 6 | 2 | 1 | 1 | | 1 | 4 | |
| 2.2 | Классификация линейных уравнений 2-го порядка на плоскости | 6 | 3 | 1 | 1 | | 1 | 4 | |
| 3 | Гиперболические уравнения | 6 | 4-9 | 6 | 6 | | 6 | 24 | |
| 3.1 | Уравнение колебаний струны | 6 | 4 | 1 | 1 | | 1 | 4 | |
| 3.2 | Метод Фурье для уравнения колебаний струны | 6 | 5-6 | 2 | 2 | | 2 | 8 | Рейтинг-контроль 1 |
| 3.3 | Корректные задачи | 6 | 7 | 1 | 1 | | 1 | 4 | |
| 3.4 | Волновое уравнение в пространстве | 6 | 8-9 | 2 | 2 | | 2 | 8 | |
| 4 | Эллиптические уравнения | 6 | 10-16 | 6 | 6 | | 6 | 24 | |
| 4.1 | Основные краевые задачи | 6 | 10-11 | 2 | 2 | | 2 | 8 | Рейтинг-контроль 2 |
| 4.2 | Уравнение Лапласа | 6 | 12-16 | 4 | 4 | | 4 | 16 | |
| 5 | Уравнение теплопроводности | 6 | 17-18 | 2 | 2 | | 2 | 8 | |
| 5.1 | Одномерное уравнение теплопроводности | 6 | 17 | 1 | 1 | | 1 | 4 | |
| 5.2 | Метод Фурье | 6 | 18 | 1 | 1 | | 1 | 4 | Рейтинг-контроль 3 |
| Всего за 2 семестр: | | | | 18 | 18 | | | 72 | Экзамен (36) |
| Итого по дисциплине | | | | 18 | 18 | | | 72 | Экзамен (36) |

Содержание лекционных занятий по дисциплине

Раздел 1. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.

Тема 1. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристики. Теорема об общем решении. Локальная теорема существования и единственности решения задачи Коши. Примеры.

Тема 2. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристики. Построение общего решения. Существование и единственность решения задачи Коши для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка. Метод построения решения задачи Коши. Примеры.

Раздел 2. Классификация линейных уравнений 2-го порядка.

Тема 1. Классификация линейных уравнений 2-го порядка от n переменных. Каноническая форма. Классификация линейных уравнений 2-го порядка от n переменных в точке. Канонический вид. Примеры.

Тема 2. Классификация линейных уравнений 2-го порядка на плоскости. Характеристики линейного уравнения 2-го порядка от двух переменных в области; классификация уравнений. Теорема о канонической форме. Пример уравнения смешанного типа.

Раздел 3. Гиперболические уравнения.

Тема 1. Уравнение колебаний струны. Уравнение малых поперечных колебаний струны, его вывод из физических соображений. Формула Даламбера. Постановка и однозначная разрешимость задач Коши и Гурса.

Тема 2. Метод Фурье для уравнения колебаний струны. Постановка задачи Штурма-Лиувилля, основные свойства её решений. Схема метода Фурье в применении к гиперболическим уравнениям. Первая краевая задача для уравнения колебаний струны. Общий случай неоднородности.

Тема 3. Корректные задачи. Понятие корректности краевой задачи. Примеры. Корректность первой краевой задачи для уравнения колебаний струны. Пример Адамара.

Тема 4. Волновое уравнение в пространстве. Постановка и корректность задачи Коши для волнового уравнения при $n > 1$. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Задача Штурма-Лиувилля в пространстве. Решение задачи о колебаниях прямоугольной мембраны методом Фурье. Цилиндрические функции и их свойства. Решение задачи о колебаниях круглой мембраны методом Фурье.

Раздел 4. Эллиптические уравнения.

Тема 1. Основные краевые задачи. Задачи Дирихле и Неймана. Принцип максимума для эллиптических уравнений. Единственность решения основных краевых задач для эллиптических уравнений.

Тема 2. Уравнение Лапласа. Уравнение Лапласа и его общее решение в полярных координатах на плоскости. Представимость решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в виде ряда и в виде интеграла Пуассона. Фундаментальные решения оператора Лапласа. Формулы Грина и их следствия. Гармонические функции и их свойства. Теоремы о среднем. Функция Грина оператора Лапласа и её свойства. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа при известной функции Грина. Формула Пуассона (случай шара).

Раздел 5. Уравнение теплопроводности.

Тема 1. Одномерное уравнение теплопроводности. Вывод одномерного уравнения теплопроводности. Принцип максимума. Постановка и однозначная разрешимость смешанной задачи и задачи Коши.

Тема 2. Метод Фурье. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье. Формула Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой; вывод с помощью преобразования Фурье.

Содержание практических занятий по дисциплине

Раздел 1. Линейные и квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка.

Тема 1. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристики. Теорема об общем решении. Локальная теорема существования и единственности решения задачи Коши. Примеры. Решение задач.

Тема 2. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка. Характеристики. Построение общего решения. Существование и единственность решения задачи Коши для квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка. Метод построения решения задачи Коши. Примеры. Решение задач.

Раздел 2. Классификация линейных уравнений 2-го порядка.

Тема 1. Классификация линейных уравнений 2-го порядка от n переменных. Каноническая форма. Классификация линейных уравнений 2-го порядка от n переменных в точке. Канонический вид. Примеры. Решение задач.

Тема 2. Классификация линейных уравнений 2-го порядка на плоскости. Характеристики линейного уравнения 2-го порядка от двух переменных в области; классификация уравнений. Теорема о канонической форме. Пример уравнения смешанного типа. Решение задач.

Раздел 3. Гиперболические уравнения.

Тема 1. Уравнение колебаний струны. Уравнение малых поперечных колебаний струны, его вывод из физических соображений. Формула Даламбера. Постановка и однозначная разрешимость задач Коши и Гурса. Решение задач.

Тема 2. Метод Фурье для уравнения колебаний струны. Постановка задачи Штурма-Лиувилля, основные свойства её решений. Схема метода Фурье в применении к гиперболическим уравнениям. Первая краевая задача для уравнения колебаний струны. Общий случай неоднородности. Решение задач.

Тема 3. Корректные задачи. Понятие корректности краевой задачи. Примеры. Корректность первой краевой задачи для уравнения колебаний струны. Пример Адамара. Решение задач.

Тема 4. Волновое уравнение в пространстве. Постановка и корректность задачи Коши для волнового уравнения при $n > 1$. Формулы Кирхгофа и Пуассона. Задача Штурма-Лиувилля в пространстве. Решение задачи о колебаниях прямоугольной мембраны методом Фурье. Цилиндрические функции и их свойства. Решение задачи о колебаниях круглой мембраны методом Фурье. Решение задач.

Раздел 4. Эллиптические уравнения.

Тема 1. Основные краевые задачи. Задачи Дирихле и Неймана. Принцип максимума для эллиптических уравнений. Единственность решения основных краевых задач для эллиптических уравнений. Решение задач.

Тема 2. Уравнение Лапласа. Уравнение Лапласа и его общее решение в полярных координатах на плоскости. Представимость решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в виде ряда и в виде интеграла Пуассона. Фундаментальные решения оператора Лапласа. Формулы Грина и их следствия. Гармонические функции и их свойства. Теоремы о среднем. Функция Грина оператора Лапласа и её свойства. Решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа при известной функции Грина. Формула Пуассона (случай шара). Решение задач.

Раздел 5. Уравнение теплопроводности.

Тема 1. Одномерное уравнение теплопроводности. Вывод одномерного уравнения теплопроводности. Принцип максимума. Постановка и однозначная разрешимость смешанной задачи и задачи Коши. Решение задач.

Тема 2. Метод Фурье. Решение смешанной задачи для уравнения теплопроводности методом Фурье. Формула Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой; вывод с помощью преобразования Фурье. Решение задач.

5. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

5.1. Текущий контроль успеваемости

Рейтинг-контроль 1

1. Методом характеристик построить общее решение линейного однородного либо квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка.
2. Методом характеристик построить интегральную поверхность линейного однородного либо квазилинейного уравнения в частных производных первого порядка, проходящую через данное начальное многообразие.
3. Методом характеристик привести к каноническому виду линейное уравнение в частных производных второго порядка на плоскости.
4. Для данного линейного уравнения в частных производных второго порядка на плоскости (гиперболического или параболического типа) построить решение задачи Коши.

Рейтинг-контроль 2

1. Решить задачу Штурма-Лиувилля (задачу на собственные значения и собственные функции).
2. Методом разделения переменных построить решение смешанной задачи для одномерного уравнения колебаний струны при отсутствии «неоднородностей» в уравнении и граничных условиях либо при наличии таковых.
3. Методом разделения переменных решить задачу о колебаниях круглой мембраны.

Рейтинг-контроль 3

1. Методом разделения переменных построить решение смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности при отсутствии «неоднородностей» в уравнении и граничных условиях либо при наличии таковых.
2. Методом разделения переменных построить решение задачи Дирихле для уравнения Лапласа либо уравнения Пуассона в круге (кольце, секторе, прямоугольнике и т.п.).

5.2. Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (экзамен)

Контрольные вопросы к экзамену

1. Линейные однородные уравнения в частных производных первого порядка (характеристики, построение общего решения, теорема существования и единственности решения задачи Коши).
2. Квазилинейные уравнения в частных производных первого порядка (характеристики, построение общего решения, теорема существования и единственности решения задачи Коши).
3. Канонический вид линейного уравнения 2-го порядка от n переменных в точке. Классификация уравнений.
4. Характеристики линейного уравнения 2-го порядка от двух переменных в области; классификация уравнений. Пример уравнения смешанного типа.
5. Теорема о канонической форме линейного уравнения 2-го порядка от двух переменных в области.
6. Вывод формулы Даламбера решения задачи Коши для уравнения свободных колебаний струны (неограниченной и полуограниченной).
7. Задача Штурма-Лиувилля; свойства её решений.
8. Общая схема решения первой краевой задачи для однородных гиперболических уравнений методом разделения переменных.
9. Решение смешанной задачи для уравнения свободных колебаний струны методом разделения переменных (случаи закреплённых концов и свободных концов).

10. Понятие корректности постановки краевой задачи. Примеры корректно и некорректно поставленных задач (в т.ч. пример Адамара).
11. Вывод формулы Даламбера решения задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний струны. Устойчивость решения.
12. Единственность решения задачи Коши для неоднородного уравнения колебаний струны.
13. Решение задачи Коши для волнового уравнения при $n=2$ и 3 (формулы Пуассона и Кирхгофа).
14. Задача Штурма-Лиувилля в пространстве; свойства её решений.
15. Решение задачи о колебаниях прямоугольной мембраны методом разделения переменных.
16. Цилиндрические функции и их свойства.
17. Решение задачи о колебаниях круглой мембраны методом разделения переменных.
18. Преобразование оператора Лапласа к полярным координатам на плоскости. Общее решение уравнения Лапласа на плоскости.
19. Принцип максимума для эллиптических уравнений.
20. Доказательство единственности решения первой и третьей краевых задач для эллиптических уравнений с помощью принципа максимума.
21. Решение задачи Неймана для уравнения Лапласа в круге; условие разрешимости задачи.
22. Представление решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в круге в виде ряда и в виде интеграла Пуассона.
23. Формулы Грина и их следствия.
24. Фундаментальные решения оператора Лапласа.
25. Теоремы о среднем и другие свойства гармонических функций.
26. Функция Грина для оператора Лапласа и её свойства. Построение решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа по известной функции Грина.
27. Вывод формулы Пуассона решения задачи Дирихле для уравнения Лапласа в шаре.
28. Решение смешанной задачи для одномерного уравнения теплопроводности методом разделения переменных.
29. Принцип максимума для одномерного уравнения теплопроводности.
30. Формула Пуассона решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.
31. Единственность решения задачи Коши для уравнения теплопроводности на прямой.

5.3. Самостоятельная работа обучающегося.

Самостоятельная работа студента состоит в выполнении заданий типового расчета, оформляемого отдельным отчетом и защищаемого студентом. Методические указания и задания можно брать из книги [3] перечня основной литературы (см. п. 6.1).

Фонд оценочных материалов (ФОМ) для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Книгообеспеченность

| Наименование литературы: автор, название, вид издания, издательство | Год издания | КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ |
|--|-------------|---|
| | | Наличие в электронном каталоге ЭБС |
| Основная литература | | |
| 1. Уравнения в частных производных [Электронный ресурс] / Треногин В.А., Недосекина И.С. - М. : ФИЗМАТЛИТ. | 2013 | http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922114486.html |

| | | |
|---|------|---|
| 2. Сборник задач по уравнениям математической физики [Электронный ресурс] / В.С. Владимиров, А.А. Вашарин и др. - 4-е изд., стереотип. - М. : ФИЗМАТЛИТ | 2004 | http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN5922103091.html |
| 3. Высшая математика. Уравнения математической физики. Сборник задач с решениями [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов. - 2-е изд., испр. и дополн. - М.: Издательский дом МЭИ | 2017 | http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785383012123.html |
| Дополнительная литература | | |
| 1. Численные методы в уравнениях математической физики [Электронный ресурс]: учеб. пособие / Персова М.Г., Соловейчик Ю.Г., Вагин Д.В., Домников П.А., Кошкина Ю.И. - Новосибирск : Изд-во НГТУ | 2016 | http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785778229716.html |

6.2. Периодические издания

1. Успехи математических наук, журнал РАН (корпус 3, ауд. 414)

6.3. Интернет-ресурсы


1. <http://window.edu.ru/>
2. <http://www.exponenta.ru/>
3. <http://allmath.com/>

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для проведения занятий по дисциплине имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного и практического типа. Практические работы проводятся в лаборатории численных методов (405-3, 528-3).

Перечень используемого лицензионного программного обеспечения: Maple.

Рабочую программу составил:

к.ф.-м.н., доцент каф. ФАиП Комаров М.А. 

Рецензент (представитель работодателя):

заместитель директора по развитию ООО «Баланс» Кожин А.В. 


Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП

Протокол № 1 от 30.08.2021 года

Заведующий кафедрой ФАиП к.ф.-м.н., доцент Бурков В.Д. 

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии
направления 02.04.01 «Математика и компьютерные науки»

Протокол № 1 от 30.08.2021 года

Председатель комиссии зав. кафедрой ФАиП Бурков В.Д. 

**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Рабочая программа одобрена на 20 ____ / 20 ____ учебный года

Протокол заседания кафедры № ____ от ____ года

Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на 20 ____ / 20 ____ учебный года

Протокол заседания кафедры № ____ от ____ года

Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на 20 ____ / 20 ____ учебный года

Протокол заседания кафедры № ____ от ____ года

Заведующий кафедрой _____