

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

Институт прикладной математики, физики и информатики



УТВЕРЖДАЮ:

Директор института

Хорьков К.С.

« 30 » 08 2021 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

СТАТИСТИКА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ

(наименование дисциплины)

направление подготовки / специальность

02.04.01 «Математика и компьютерные науки»

(код и наименование направления подготовки (специальности))

направленность (профиль) подготовки

Математические методы в экономике и финансах

(направленность (профиль) подготовки))

г. Владимир

2021

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель освоения дисциплины «Статистика случайных процессов» – научное представление о случайных процессах, а также о методах их исследования, знакомство с основными моделями и методами моделирования стохастических систем.

Задачи:

- изучить основные классы случайных процессов, усвоить методы исследования случайных процессов;
- научиться применять эти методы к конкретным случайным процессам и временным рядам, использовать в работе компьютер.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина «Статистика случайных процессов» относится к части, формируемой участниками образовательных отношений, учебного плана (дисциплина по выбору).

Пререквизиты дисциплины: линейная алгебра, математический анализ, теория вероятностей и математическая статистика, функциональный анализ

3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОПОП (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	
УК-1. Способен осуществлять критический анализ проблемных ситуаций на основе системного подхода, вырабатывать стратегию действий	<p>УК-1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации, методики системного подхода для решения профессиональных задач.</p> <p>УК-1.2. Умеет анализировать и систематизировать разнородные данные, оценивать эффективность процедур анализа проблем и принятия решений в профессиональной деятельности.</p> <p>УК-1.3. Владеет методологией системного и критического анализа проблемных ситуаций; методиками постановки цели, определения способов ее достижения, разработки стратегий действий.</p>	<p>Знает основные понятия статистики случайных процессов.</p> <p>Умеет применять математические методы и инструментальные средства для исследования объектов профессиональной деятельности; строить математические модели объектов профессиональной деятельности; использовать математические инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования.</p> <p>Владеет методами стохастического анализа и, кроме того, научиться содержательно интерпретировать формальные результаты.</p>	<p>Отчеты по лабораторным работам.</p> <p>Контрольные вопросы к отчетам по лабораторным работам.</p> <p>Контрольные вопросы к рейтинг-контролю и промежуточной аттестации.</p>
ПК-5. Способен использовать современные методы разработки и реализации конкретных алгоритмов экономико-математических моделей на базе языков программирования и	<p>ПК-5.1. Знает возможности современных и перспективных средств разработки программных продуктов и технических средств для реализации алгоритмов экономико-математических моделей.</p>	<p>Знает основные понятия статистики случайных процессов.</p> <p>Умеет применять математические методы и инструментальные средства для исследования объектов профессиональной</p>	<p>Отчеты по лабораторным работам.</p> <p>Контрольные вопросы к отчетам по лабораторным работам.</p>

пакетов прикладных программ моделирования.	ПК-5.2. Умеет использовать существующие типовые решения и шаблоны проектирования программного обеспечения. ПК-5.3. Владеет навыками организации описания типовых процессов и практик разработки и сопровождения требований к системам. ПК-5.4. Владеет навыками анализа возможностей программного обеспечения для реализации алгоритмов экономико-математических моделей.	деятельности; строить математические модели объектов профессиональной деятельности; использовать математические инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования. Владеет методами стохастического анализа и, кроме того, научиться содержательно интерпретировать формальные результаты.	Контрольные вопросы к рейтинг-контролю и промежуточной аттестации.
--	--	--	--

4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы, 108 часов.

Тематический план форма обучения – очная

№ п/п	Наименование тем и/или разделов/тем дисциплины	Семestr	Неделя семестра	Контактная работа обучающихся с педагогическим работником				Самостоятельная работа	Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	в форме практической подготовки		
1	Основы теории случайных процессов, стохастические модели	3	1-13	18		8		52	
1	Основные понятия теории меры и теории вероятностей. Обзор основных методов теории случайных процессов и важнейших классов случайных процессов.	3	1-2	2		2	2	8	
2	Стационарные процессы. Сохраняющие меру преобразования. Эргодические теоремы.	3	3-5	6		-	3	12	
3	Полумартингалы. Построение стохастического интеграла Ито. Стохастические дифференциальные уравнения.	3	6-9	8		-	4	16	Рейтинг-контроль 1
4	Марковские процессы.	3	10-13	2		6	4	16	Рейтинг-контроль 2
2	Модели и методы моделирования временных рядов, практическая реализация алгоритмов моделирования временных рядов	3	14-18	-		10		20	
5	Практическая реализация алгоритмов моделирования временных рядов.	3	14	-		2	1	4	
6	Модели типа ARMA.	3	15	-		2	1	4	
7	Экспоненциальное сглаживание.	3	16	-		2	1	4	
8	Локально стационарные временные ряды.	3	17-18			4	2	8	Рейтинг-контроль 3
Всего за 3 семестр:				18		18		72	Зачет
Итого по дисциплине				18		18		72	Зачет

Содержание лекционных занятий по дисциплине

Раздел 1. Основы теории случайных процессов, стохастические модели

Тема 1. Основные понятия теории меры и теории вероятностей. Обзор основных методов теории случайных процессов и важнейших классов случайных процессов. Определение случайного процесса, конечномерные распределения, построение процесса с заданным распределением, теорема Колмогорова. Примеры случайных процессов: винеровский процесс, пуассоновский процесс и т.д.

Тема 2. Стационарные процессы. Сохраняющие меру преобразования. Эргодические теоремы. Определение стационарных в узком смысле и стационарных в широком смысле случайных процессов и случайных последовательностей. Примеры. Определение стационарных в узком смысле и стационарных в широком смысле случайных процессов и случайных последовательностей. Примеры. Связь сохраняющего меру преобразования и стационарной последовательности. Понятие эргодической стационарной последовательности. Формулировки эргодических теорем для стационарных в узком смысле последовательностей и процессов.

Тема 3. Полумартингалы. Построение стохастического интеграла Ито. Стохастические дифференциальные уравнения. Определения случайных процессов и последовательностей, образующих мартингал, субмартигнал и супермартигнал. Примеры. Напоминание свойств условных математических ожиданий. Свойства мартингалов и полумартигналов с дискретным временем. Пример из теории игр. Разложение Дуба для субмартигналов. Мартигналы с непрерывным временем на примере винеровского процесса. Построение стохастического интеграла по винеровскому процессу от случайных функций. Понятие стохастических дифференциальных уравнений. Диффузионные процессы, задаваемые стохастическими уравнениями. Их связь с уравнениями в частных производных

Тема 4. Марковские процессы. Определения марковских процессов, марковских последовательностей и марковских цепей. Разные формы марковского свойства. Примеры. Модель испытаний, связанных в цепь Маркова. Примеры из теории массового обслуживания и теории ветвящихся процессов («очередь», «бесперебойное обеспечение», задача «рождения и гибели» и т.д.). Однородные цепи Маркова, уравнение Колмогорова-Чепмена. Эргодическая теорема. Классификация состояний марковской цепи по свойствам переходных вероятностей и по асимптотическим свойствам переходных вероятностей. Существование предельных и стационарных распределений. Примеры, иллюстрирующие введенные понятия и полученные результаты.

Содержание лабораторных занятий по дисциплине

Раздел 2. Модели и методы моделирования временных рядов, практическая реализация алгоритмов моделирования временных рядов.

Тема 5-8. Обработка сигналов: очистка от шума, сегментация сигналов на основе скрытых марковских моделей, сглаживания с адаптивными весами, выделение тренда и оценка дисперсии. Моделирование временных рядов на основе моделей типа ARMA. Экспоненциальное сглаживание: оценки среднего значения и параметра масштаба, экспоненциальное сглаживание в случае неравномерного расположения наблюдений, метод Хольта-Винтерса, робастный вариант экспоненциального сглаживания. Модели и методы моделирования локально стационарных временных рядов. Выполнение заданий.

5. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

5.1. Текущий контроль успеваемости

Рейтинг-контроль №1

Вариант 1

1. Пусть случайный процесс задан на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , где $\Omega = \{-1, 1\}$, $F - \sigma$ -алгебра всех подмножеств Ω , P – мера, приписывающая множествам $\{-1\}$, $\{1\}$ одинаковые вероятности $1/2$. Пусть $t \in [0, 1]$ и случайный процесс $\xi_t(\omega) = t\omega$. Найти все реализации (траектории) процесса.
2. Пусть $\eta \sim N(0, 1)$, $t \in R$. Найти все конечномерные распределения процесса $\xi_t = \eta + 2t$.
3. Описать σ -алгебру подмножеств отрезка $[0, 1]$, порожденную множествами $\left[0, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, 1\right]$. И функции, измеримые относительно нее.

Рейтинг-контроль №2

Вариант 1

1. Пусть w_t^0 , $0 \leq t \leq 1$ – условный винеровский процесс, т.е. $w_t^0 = w_t - tw_1$, найти его корреляционную функцию. Через w_t обозначен винеровский процесс.
2. Проверить, что если процесс ξ_t , $t \in T \subseteq R$ – процесс с независимыми приращениями, $M|\xi_t|^2 < \infty$, то он также является и процессом с некоррелированными приращениями.
3. Доказать, что D_{w_t} , $t \geq 0$ является функцией, не убывающей по t . w_t – винеровский процесс.

Рейтинг-контроль №3

Вариант 1

1. Нарисовать график и указать существенные и несущественные состояния цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Рассмотреть вопрос о стационарных, предельных, эргодических распределениях для марковской цепи с матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. В таблице представлены данные, отражающие динамику роста доходов на душу населения за восьмилетний период

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1133	1222	1354	1389	1342	1377	1491	1684

- a) Постройте диаграмму временного ряда;
- b) Проверьте гипотезу случайности по одному из критериев;
- c) Найдите уравнение линейного тренда и проверьте его значимость;
- d) Вычислите коэффициенты автокорреляции для лагов $t = 1, 2$;

- е) Проведите сглаживание с помощью простой скользящей средней с интервалом сглаживания $g = 3; 5$;
- ф) Проведите экспоненциальное сглаживание со значением константы $a = 0,1; 0,3$. В качестве начального значения возьмите среднее арифметическое первых двух уровней ряда.

5.2. Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (зачет)

Вопросы к зачету

1. Два определения случайных процессов, эквивалентность определений.
2. Примеры (случайное блуждание, процесс восстановления, модель Крамера-Лундберга, винеровский и пуассоновский процессы).
3. Винеровский процесс (определение, конечномерные распределения, корреляционная функция).
4. Основные классы случайных процессов.
5. Стационарные в узком смысле случайные последовательности (определение, примеры).
6. Сохраняющее меру отображение. Теорема о возвратности.
7. Сохраняющее меру отображение. Эргодичность и перемешивание.
8. Эргодические теоремы для сохраняющих меру отображений и случайных процессов, стационарных в узком смысле.
9. Условное математическое ожидание (определение, корректность определения, примеры).
10. Свойства условного математического ожидания.
11. Теоремы о предельном переходе под знаком условного математического ожидания.
12. Мартингалы и полумартингалы с дискретным временем (определения, примеры).
13. Разложение Дуба для субмартингалов.
14. Стохастический интеграл по винеровскому процессу от простой функции, его свойства.
15. Стохастический интеграл по винеровскому процессу от функций, интегрируемых с квадратом и непрерывных по t .
16. Понятие стохастического дифференциального уравнения.
17. Определение марковского процесса. Разные формы марковского свойства.
18. Марковская цепь с конечным числом состояний. Модель испытаний, связанных в цепь Маркова и пример из теории игр.
19. Задачи из теории массового обслуживания и теории ветвящихся процессов.
20. Однородная цепь Маркова. Уравнение Колмогорова-Чепмена.
21. Пример эргодической марковской цепи. Формулировка теоремы об эргодичности и существовании стационарного распределения.
22. Классификация состояний однородной цепи Маркова со счетным множеством состояний по арифметическим свойствам переходных вероятностей.
23. Классификация состояний однородной цепи Маркова со счетным множеством состояний, по асимптотическим свойствам переходных вероятностей.
24. Пример простого случайного блуждания, иллюстрирующий введенные понятия классификации состояний и предельного поведения переходных вероятностей.
25. Какие методы применяются для распознавания стационарности временных рядов?
26. Приведите примеры параметрических тестов проверки временных рядов на стационарность.
27. Приведите примеры непараметрических тестов проверки временных рядов на стационарность.
28. Охарактеризуйте процессы AR. В каких случаях процессы AR являются стационарными?
29. Охарактеризуйте процессы MA. Охарактеризуйте процессы ARMA. Опишите модель ARMA(3,2).
30. Как используется автокорреляционная функция для идентификации модели стационарного стохастического процесса.
31. Как осуществляется прогнозирование ARMA-процессов?

5.3. Самостоятельная работа обучающегося.

1. Корреляционной функцией винеровского процесса является

$$\begin{aligned} K_1(t,s) &= \min[t,s], \quad t,s \geq 0; \\ K_2(t,s) &= \min[t,s] - ts, \quad t,s \in [0,1]; \\ K_3(t,s) &= e^{-|t-s|}, \quad t,s \in R? \end{aligned}$$

2. Пусть случайный процесс задан на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , где $\Omega = \{-1, 1\}$, F – σ -алгебра всех подмножеств Ω , P – мера, приписывающая множествам $\{-1\}$, $\{1\}$ одинаковые вероятности $1/2$. Пусть $t \in [0,1]$ и случайный процесс $\xi_t(\omega) = t\omega$. Найти все реализации (траектории) процесса.

3. Винеровский процесс является ли гауссовским процессом, т.е. процессом, конечномерные распределения которого нормальны?

4. Пусть w_t^0 , $0 \leq t \leq 1$ – условный винеровский процесс, т.е. $w_t^0 = w_t - tw_1$, найти его корреляционную функцию. Через w_t обозначен винеровский процесс.

5. Дать определение винеровского процесса.

6. Пусть $\eta \sim N(0,1)$, $t \in R$. Найти все конечномерные распределения процесса $\xi_t = \eta + 2t$.

7. Пусть случайный процесс задан на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , где $\Omega = \{1, 2, 3\}$, F – σ -алгебра всех подмножеств Ω , P – мера, приписывающая множествам $\{2\}$, $\{1\}$, $\{3\}$ одинаковые вероятности $1/3$. Пусть $t \in [0,1]$ и случайный процесс $\xi_t(\omega) = t\omega$. Найти все трехмерные распределения процесса.

8. Пусть $\eta \sim U[0,1]$, $t \in \mathbb{R}$. Найти все одномерные распределения процесса $\xi_t = \eta + 2t$ и $D\xi_t$.

9. Доказать: $\xi^{-1}(D_1 \cup D_2) = \xi^{-1}(D_1) \cup \xi^{-1}(D_2)$; (*Взятие полного прообраза сохраняет теоретико-множественные операции.*)

10. Как называются процессы $\xi_t(\omega)$ и $\xi'_t(\omega)$, если они определены на одном вероятностном пространстве (Ω, F, P) и при любом $t \in T$ верно, что $P\{\xi_t(\omega) \neq \xi'_t(\omega)\} = 0$.

11. Описать σ -алгебру подмножеств отрезка $[0,1]$, порожденную множествами $\left[0, \frac{2}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, 1\right]$. И функции, измеримые относительно нее.

12. Что называют *конечномерными распределениями случайного процесса*.

13. Сформулировать условия симметрии и согласованности для конечномерных распределений случайного процесса.

14. Проверить, что если процесс ξ_t , $t \in T \subset R$ – процесс с независимыми приращениями, $M|\xi_t|^2 < \infty$, то он также является и процессом с некоррелированными приращениями.

15. Как называется процесс ξ_t , $t \in T \subset R$, если его конечномерные распределения не меняются при сдвиге, т.е., если $t_1, \dots, t_n \in T$, $(t_i \neq t_j)$, и для любого действительного h такого, что $t_1 + h, \dots, t_n + h \in T$, верно $F_{t_1, \dots, t_n}(x_1, \dots, x_n) = F_{t_1+h, \dots, t_n+h}(x_1, \dots, x_n)$.

16. Пусть F_1 и F_2 – две σ -алгебры подмножеств пространства Ω . Проверить является ли σ -алгеброй класс множеств $F_1 \cap F_2$?

17. Будет ли D_w , $t \geq 0$ функцией, не убывающей по t , w_t – винеровский процесс.

18. Нарисовать график и указать существенные и несущественные состояния цепи Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

19. Могут ли все состояния цепи Маркова с конечным числом состояний быть несущественными?

20. Винеровский процесс, выходящий из нуля, является мартингалом, субмартингалом или супремартингалом?

Фонд оценочных материалов (ФОМ) для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

6.1. Книгообеспеченность

Наименование литературы: автор, название, вид издания, издательство	Год издания	КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ	
		Наличие в электронном каталоге ЭБС	
Основная литература			
1. Крупин, В. Г. Высшая математика. Теория вероятностей, математическая статистика, случайные процессы. Сборник задач с решениями : учебное пособие / Крупин В. Г. - Москва : Издательский дом МЭИ, 2019. - ISBN 978-5-383-01225-3.	2019	https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785383012253.html	
2. Чжун, К. Л. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика / Чжун К. Л. - Москва : Лаборатория знаний, 2017. - 458 с. - ISBN 978-5-00101-524-6.	2017	https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785001015246.html	
3. Кельберт, М. Я. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Том 2: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов: Учебное пособие / Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. - Москва :МЦНМО, 2017. - 560 с.: ISBN 978-5-4439-2327-7.	2017	https://znanium.com/catalog/product/958603	
Дополнительная литература			
1. Федоткин, М. А. Модели в теории вероятностей / Федоткин М. А. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2012. - 608 с. - ISBN 978-5-9221-1384-7.	2012	https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922113847.html	
2. Соколов, Г. А. Теория случайных процессов для экономистов / Соколов Г. А. - Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2010. - 208 с. - ISBN 978-5-9221-1100-3. - Текст : электронный // ЭБС "Консультант студента" : [сайт]. - URL :	2010	https://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111003.html	
3. Ширяев, А. Н. Вероятность-1 : учебное пособие / А. Н. Ширяев. — Москва : МЦНМО, 2007. — 552 с. — ISBN 978-5-94057-105-6.	2007	https://e.lanbook.com/book/9448	
4. Ширяев, А. Н. Вероятность-2 : учебное пособие / А. Н. Ширяев. — Москва : МЦНМО, 2007. — 416 с. — ISBN 978-5-94057-106-3.	2007	https://e.lanbook.com/book/9449	
5. Миллер, Б. М. Теория случайных процессов в примерах и задачах : учебное пособие / Б. М. Миллер, А. Р. Панков. — Москва : ФИЗМАТЛИТ, 2007. — 320 с. — ISBN 978-5-9221-0206-3.	2007	https://e.lanbook.com/book/48168	

6.2. Периодические издания

- Успехи математических наук, журнал РАН (корпус 3, ауд. 414)

6.3. Интернет-ресурсы

- <http://window.edu.ru/>
- <http://www.exponenta.ru/>
- <http://allmath.com/>

7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для реализации данной дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного и практического типа. Практические работы проводятся в лаборатории численных методов (405-3).

Перечень используемого лицензионного программного обеспечения:

- Microsoft Excel
- Maple

Рабочую программу составила:

к.ф.-м.н., доцент ФАиП Буланкина Л.А.

Рецензент (представитель работодателя):

заместитель директора по развитию ООО «Баланс» Кожин А.В.

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП

Протокол № 1 от 30.08.2021 года

Заведующий кафедрой ФАиП к.ф.-м.н., доцент Бурков В.Д.

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии
направления 02.04.01 «Математика и компьютерные науки»

Протокол № 8 от 30.08.2021 года

Председатель комиссии зав. кафедрой ФАиП Бурков В.Д.

**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Рабочая программа одобрена на 20 ____ / 20 ____ учебный года

Протокол заседания кафедры № ____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на 20 ____ / 20 ____ учебный года

Протокол заседания кафедры № ____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на 20 ____ / 20 ____ учебный года

Протокол заседания кафедры № ____ от _____ года

Заведующий кафедрой _____