

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)

Институт прикладной математики, физики и информатики



УТВЕРЖДАЮ:

Директор института

Хорьков К.С.

« 30 » 08 2021 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

**ДИСКРЕТНЫЕ И ВЕРОЯТНОСТНЫЕ МОДЕЛИ**

(наименование дисциплины)

**направление подготовки / специальность**

**02.04.01 «Математика и компьютерные науки»**

(код и наименование направления подготовки (специальности))

**направленность (профиль) подготовки**

**Математические методы в экономике и финансах**

(направленность (профиль) подготовки)

г. Владимир

2021

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Цель освоения дисциплины «Дискретные и вероятностные модели» – изучение математических методов анализа и моделирования, дополняющих основные классические методы.

Задачи:

- ознакомление с аппаратом теории вероятности и дискретной математики, применяемым при математическом моделировании;
- формирование теоретических знаний и практических навыков для решения разнообразных прикладных задач и задач математического моделирования;
- подготовка в области построения и использования различных математических моделей, ознакомление с методами и приемами самостоятельных математических исследований.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина «Дискретные и вероятностные модели» относится к базовой части учебного плана.

Пререквизиты дисциплины: математический анализ, линейная алгебра, теория вероятностей и математическая статистика, дискретная математика и математическая логика, теория случайных процессов, численные методы.

## 3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОПОП (компетенциями и индикаторами достижения компетенций)

Формируемые компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, в соответствии с индикатором достижения компетенции		Наименование оценочного средства
	Индикатор достижения компетенции	Результаты обучения по дисциплине	
<b>ОПК-2.</b> Способен проводить под научным руководством исследование на основе существующих методов в конкретной области профессиональной деятельности	<b>ОПК-2.1.</b> Знает способ проведения научных обзоров, публикаций, рефератов и библиографий по тематике проводимых исследований на русском и английском языке. <b>ОПК-2.2.</b> Умеет решать научные задачи в связи с поставленной целью и в соответствии с выбранной методикой. <b>ОПК-2.3.</b> Владеет практическим опытом исследований в конкретной области профессиональной деятельности.	<b>Знать</b> основные дискретные и вероятностные модели. <b>Уметь</b> применять их аппарат для решения прикладных задач. <b>Владеть</b> дискретными и вероятностными методами исследования и анализа.	Типовой расчет, контрольные вопросы к рейтинг-контролю и промежуточной аттестации.
<b>ПК-1.</b> Способен демонстрировать фундаментальные знания математических и естественных наук, программирования и информационных технологий.	<b>ПК-1.1.</b> Знает фундаментальные понятия математических и естественных наук, научные проблемы по тематике проводимых исследований и разработок. <b>ПК-1.2.</b> Знает средства проектирования программного обеспечения, баз данных и программных интерфейсов. <b>ПК-1.3.</b> Умеет анализировать научные проблемы по тематике проводимых исследований и	<b>Знать</b> основные понятия теории дискретных и вероятностных моделей. <b>Уметь</b> применять их для решения прикладных задач. <b>Владеть</b> методами дискретных и вероятностных моделей.	Типовой расчет, контрольные вопросы к рейтинг-контролю и промежуточной аттестации.



	<p>разработок, представлять результаты исследований.</p> <p><b>ПК-1.4.</b> Умеет выработать варианты и выбирать средства реализации требований к программному обеспечению.</p> <p><b>ПК-1.5.</b> Владеет навыками осуществления теоретического обобщения научных данных, результатов экспериментов и наблюдений.</p> <p><b>ПК-1.6.</b> Владеет навыками проектирования структур данных, баз данных, программных интерфейсов.</p>		
--	--	--	--

#### 4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 часов.

##### Тематический план форма обучения – очная

№ п/п	Наименование тем и/или разделов/тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Контактная работа обучающихся с педагогическим работником				Самостоятельная работа	Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	в форме практической подготовки		
1	Производящая и характеристическая функции в теории вероятностей. Вероятностное моделирование.	2	1-5	10	6		8	30	
2	Производящая функция для последовательностей. Специальные числа и функции.	2	6-7	4	2		3	20	Рейтинг-контроль 1
3	Преобразование Фурье	2	8-9	4	2		3	20	
4	Дискретное преобразование Фурье	2	10-15	12	6		9	30	Рейтинг-контроль 2
5	Быстрые алгоритмы	2	16-18	6	2		4	26	Рейтинг-контроль 3
<b>Всего за 2 семестр:</b>				<b>36</b>	<b>18</b>			<b>126</b>	<b>Экзамен (36)</b>
<b>Итого по дисциплине</b>				<b>36</b>	<b>18</b>			<b>126</b>	<b>Экзамен (36)</b>

##### Содержание лекционных занятий по дисциплине

**Тема 1. Производящая и характеристическая функции в теории вероятностей. Вероятностное моделирование.** Производящая и характеристическая функции. Предельные теоремы теории вероятностей. Вероятностное моделирование. Производящая функция в теории вероятностей. Факториальные моменты. Производящая функция для случайного числа слагаемых и последовательности распределений. Теорема Пуассона. Характеристические функции в теории вероятностей. Соответствие множеств функций распределения и характеристических функций. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема. Датчики случайных чисел. Моделирование методом Монте-Карло.

**Тема 2. Производящая функция для последовательностей. Специальные числа и функции.** Производящая функция для последовательностей. Производящая функция для последовательностей. Свертка последовательностей. Числа Фибоначчи и фибоначчива система счисления. Формулы для конечных сумм и их вывод. Числа и полиномы Бернулли.

**Тема 3. Преобразование Фурье функций.** Преобразование Фурье суммируемых функций и его свойства. Свертка функций. Преобразование Фурье функций, суммируемых в квадрате как унитарный оператор. Теорема Планшереля. Спектральное разложение унитарного оператора.

**Тема 4. Дискретное преобразование Фурье.** Дискретное преобразование Фурье конечных сигналов и его свойства. Свертка сигналов. Циркулянтная матрица. Дискретное преобразование Фурье как унитарный оператор и его спектральное разложение. Сигналы Бернулли. Применение дискретного преобразования Фурье для вычисления конечных тригонометрических сумм.

**Тема 5. Быстрые алгоритмы.** Реверсная перестановка. Алгоритм Кули-Тьюкки быстрого дискретного преобразования Фурье в матричном виде и в виде блок-схемы. Практическая реализация быстрых алгоритмов.

### Содержание практических занятий по дисциплине

**Тема 1. Производящая и характеристическая функции в теории вероятностей. Вероятностное моделирование.** Производящая и характеристическая функции. Предельные теоремы теории вероятностей. Вероятностное моделирование. Производящая функция в теории вероятностей. Факториальные моменты. Производящая функция для случайного числа слагаемых и последовательности распределений. Теорема Пуассона. Характеристические функции в теории вероятностей. Соответствие множеств функций распределения и характеристических функций. Закон больших чисел. Центральная предельная теорема. Датчики случайных чисел. Моделирование методом Монте-Карло. Решение задач.

**Тема 2. Производящая функция для последовательностей. Специальные числа и функции.** Производящая функция для последовательностей. Производящая функция для последовательностей. Свертка последовательностей. Числа Фибоначчи и фибоначчива система счисления. Формулы для конечных сумм и их вывод. Числа и полиномы Бернулли. Решение задач.

**Тема 3. Преобразование Фурье функций.** Преобразование Фурье суммируемых функций и его свойства. Свертка функций. Преобразование Фурье функций, суммируемых в квадрате как унитарный оператор. Теорема Планшереля. Спектральное разложение унитарного оператора. Решение задач.

**Тема 4. Дискретное преобразование Фурье.** Дискретное преобразование Фурье конечных сигналов и его свойства. Свертка сигналов. Циркулянтная матрица. Дискретное преобразование Фурье как унитарный оператор и его спектральное разложение. Сигналы Бернулли. Применение дискретного преобразования Фурье для вычисления конечных тригонометрических сумм. Решение задач.

**Тема 5. Быстрые алгоритмы.** Реверсная перестановка. Алгоритм Кули-Тьюкки быстрого дискретного преобразования Фурье в матричном виде и в виде блок-схемы. Практическая реализация быстрых алгоритмов. Решение задач.



## **5. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

### **5.1. Текущий контроль успеваемости**

#### **Рейтинг-контроль № 1.**

1. Производящая функция в теории вероятностей.
2. Производящая функция последовательности.
3. Последовательность Фибоначчи.
4. Фибоначчиева система счисления.
5. Линейная форма Фибоначчи.

#### **Рейтинг-контроль № 2.**

1. Характеристическая функция в теории вероятностей.
2. Преобразование Фурье.
3. Унитарная форма преобразования Фурье.

#### **Рейтинг-контроль № 3.**

1. Дискретное преобразование Фурье.
2. Спектральное разложение дискретного преобразования Фурье.
3. Быстрый алгоритм дискретного преобразования Фурье.

### **5.2. Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (экзамен).**

#### **Вопросы для подготовки к зачету**

1. Производящая функция в теории вероятности. Факториальные моменты.
2. Производящая функция для случайного числа слагаемых и последовательности распределений.
3. Теорема Пуассона.
4. Производящая функция для последовательностей. Свертка последовательностей.
5. Числа Фибоначчи и производящая функция для них.
6. Фибоначчиева система счисления.
7. Линейная форма Фибоначчи.
8. Характеристические функции в теории вероятностей.
9. Закон больших чисел.
10. Центральная предельная теорема.
11. Преобразование Фурье суммируемых функций и его свойства.
12. Свертка функций. Преобразование Фурье свертки.
13. Преобразование Фурье функций суммируемых в квадрате
14. Теорема Планшереля.
15. Функции Эрмита.
16. Спектральное разложение унитарного оператора преобразования Фурье.
17. Пространство дискретных периодических сигналов
18. Дискретное преобразование Фурье
19. Циркулянтная матрица.
20. Спектральное разложение оператора дискретного преобразования Фурье
21. Алгоритм Кули-Тьюкки для дискретного преобразования Фурье
22. Сигналы Бернулли.
23. Суммы степеней синусов в равноотстоящих узлах.

### 5.3. Самостоятельная работа обучающегося.

Самостоятельная работа студента состоит в выполнении заданий типового расчета, оформляемого отдельным отчетом и защищаемого студентом. Методические указания и задания подготовлены в системе TEX выдаются студентам в виде pdf-файла. TEX-листинг задания приводится.

1. Атаку по объекту совершают с помощью последовательно вылетающих самолетов с нагрузкой в  $n$  авиационных бомб, каждая из которых с равной вероятностью может попасть и промахнуться по объекту. Случайная величина  $\xi_k$  равна числу попаданий по объекту при  $k$ -ом вылете на объект. В результате атаки (сброс всех бомб) одного самолета цель, перемещающаяся по объекту, может быть поражена с вероятностью  $p$ . Осуществляется постоянный мониторинг атак, в результате которого дается указание об их прекращении при поражении цели. Найти производящую функцию случайной величины  $\eta_\nu = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_\nu$ , равной числу попавших по объекту бомб в результате осуществленных  $\nu$  вылетов до поражения цели. Вычислить математическое ожидание и дисперсию случайной величины  $\eta_\nu$ .

Данные для задачи:

$N$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$n$	4	4	4	3	3	3	5	5	5	6	6	6
$p$	0,4	0,3	0,6	0,4	0,3	0,6	0,4	0,6	0,4	0,3	0,6	0,2

2. Два числа  $n_1 = 50$  и  $n_2 = 100 + 6N$  представить в фибоначчевой системе счисления. Составить алгоритм сложения двух чисел в фибоначчевой системе счисления. Продемонстрировать действие этого алгоритма на примере сложения чисел  $n_1$  и  $n_2$ .

3А. Два числа  $n_1 = 50$  и  $n_2 = 100 + 6N$  записать в канонической линейной форме Фибоначчи. Составить алгоритм сложения двух чисел, представленных в канонической линейной форме Фибоначчи с аналогичным представлением суммы. Продемонстрировать действие этого алгоритма на примере сложения чисел  $n_1$  и  $n_2$ .

3Б. Число  $n_2 = 100 + 6N$  представить в виде слова в алфавите  $\{0,1\}$ , где каждое из тройки чисел  $a, b, j$  для канонической линейной формы Фибоначчи числа  $n_2$  представлено в фибоначчевой системе счисления.

4. Пусть функция плотности распределения случайной величины  $\xi$  равна  $p_\xi(x) = Ce^{-N|x|}$ . Вычислить: а) константу  $C$ , б) характеристическую функцию, в) математическое ожидание, г) дисперсию.

5. Функции плотности распределения независимых случайных величин  $\xi_1$  и  $\xi_2$  равны  $p_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-N)^2}{2}}$ ;  $p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x+N)^2}{2}}$ . Для случайной величины  $\xi = \xi_1 + \xi_2$  найти: а) функцию плотности, б) математическое ожидание, в) дисперсию.

6. Вычислить преобразование Фурье для:

а) единичного импульса длиной  $N$ :  $f(x) = 1$ , если  $x \in [0, N]$ , и  $f(x) = 0$ , если  $x \notin [0, N]$ ;

б) пилоидального импульса высотой  $N$ :  $f(x) = \frac{N-x}{x}$ , если  $x \in [0, N]$ , и  $f(x) = \frac{N+x}{x}$ , если  $x \in [-N, 0]$ ,  $f(x) = 0$ , если  $x \notin [-N, N]$ ;

в) функции  $e^{-Nx^2}$ .

7. Написать матрицу \$\$\$ унитарной формы дискретного преобразования Фурье порядка 4. Вычислить степени  $F^2, F^3, F^4$  этой матрицы  $F$ . Вычислить матрицы проекторов на собственные подпространства:

$$\begin{aligned} Q_0 &= 14(E + F + F^2 + F^3), & Q_1 &= 14(E + iF - F^2 - iF^3), \\ Q_2 &= 14(E - F + F^2 - F^3), & Q_3 &= 14(E - iF - F^2 + iF^3). \end{aligned}$$

Вычислить размерности собственных подпространств.

Найти базис из собственных векторов этой матрицы  $F$ .

8. Написать матрицу  $F_6$  дискретного преобразования Фурье порядка 6 в трех видах: общий вид, приведенный и числовой.



9. Для выбранного числового массива  $n = (n_0 n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6 n_7)$  выполнить все шаги быстрого алгоритма реализации ДПФ.

Указание: в качестве массива цифр  $n$  взять дату вашего рождения:  $n_0 n_1$  – день,  $n_2 n_3$  – месяц,  $n_4 n_5 n_6 n_7$  – год.

10. Вычислить сигналы Бернулли:  $b_3$  периода  $N + 3$  для вариантов  $1 \leq N \leq 5$  или  $b_2$  периода  $N$  для вариантов  $N > 5$ .

Фонд оценочных материалов (ФОМ) для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

## 6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 6.1. Книгообеспеченность

Наименование литературы: автор, название, вид издания, издательство	Год издания	КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ
		Наличие в электронном каталоге ЭБС
Основная литература		
1. Беспалов М.С. Дискретные и вероятностные модели. Учебное пособие. Владимир: ВлГУ. 2017. 84с.	2017	<a href="http://e.lib.vlsu.ru:80/handle/123456789/6747">http://e.lib.vlsu.ru:80/handle/123456789/6747</a>
Дополнительная литература		
1. Чистяков В.П. Курс теории вероятностей. М.: Наука, 1987	1987	
2. Беспалов М.С. Математические методы в информатике и вычислительной технике. В 2-х ч. Ч.2. Введение в прикладной гармонический анализ. Владимир. ВлГУ. 2007.	2007	<a href="http://e.lib.vlsu.ru:80/handle/123456789/2949">http://e.lib.vlsu.ru:80/handle/123456789/2949</a>
3. Ефимов А.В., Золотарев Ю.Г. Терпигорева В.М. Математический анализ. В 2-х. т. М: Высш. школа, 1980	1980	
4. Бернюков А.К. Избранные главы дискретной математики. Уч. пос. Владимир: ВлГУ. 2009	2009	<a href="http://e.lib.vlsu.ru:80/handle/123456789/1432">http://e.lib.vlsu.ru:80/handle/123456789/1432</a>
5. Лукач Е. Характеристические функции. М: Наука, 1979	1979	
6. Феллер В. Введение в теорию вероятностей и ее приложения. М:Мир, 1967	1967	
7. Романовский И.В. Дискретный анализ. СПб: Невский диалект. 2003	2003	
8. Малоземов В.Н., Машарский С.М. Основы дискретного гармонического анализа. СПб: Лань. 2012	2012	
9. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения. М.: Наука. 1982	1982	

### 6.2. Периодические издания

1. Успехи математических наук, журнал РАН (корпус 3, ауд. 414)
2. Автоматика и телемеханика, журнал РАН (корпус 3, ауд. 414)

### 6.3. Интернет-ресурсы

1. <http://window.edu.ru/>
2. <http://www.exponenta.ru/>
3. <http://allmath.com/>
4. <http://lib.mexmat.ru>
5. <http://www.mathnet.ru/>
6. <http://exponenta.ru/>
7. <http://www.edu.ru/>

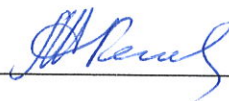
## 7. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для реализации данной дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного и практического типа. Практические работы проводятся в лаборатории численных методов (405-3).

Перечень используемого лицензионного программного обеспечения: Microsoft Excel, Maple, MathCad, MATLAB.

Рабочую программу составил:

д.ф.-м.н., профессор каф. ФАиП Беспалов М.С.



Рецензент (представитель работодателя):

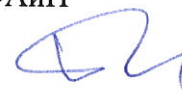
заместитель директора по развитию ООО «Баланс» Кожин А.В.



Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП

Протокол № 1 от 30.08.2021 года

Заведующий кафедрой ФАиП к.ф.-м.н., доцент Бурков В.Д.



Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии  
направления 02.04.01 «Математика и компьютерные науки»

Протокол № 1 от 30.08.2021 года

Председатель комиссии зав. кафедрой ФАиП Бурков В.Д.





**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ  
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

Рабочая программа одобрена на 20\_\_\_\_ / 20\_\_\_\_ учебный года

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

---

Рабочая программа одобрена на 20\_\_\_\_ / 20\_\_\_\_ учебный года

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

---

Рабочая программа одобрена на 20\_\_\_\_ / 20\_\_\_\_ учебный года

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

---