

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)



Проректор по учебно-методической работе

А.А. Панфилов

« 19 » 09

2015 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«СТАТИСТИКА СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ»

Направление подготовки: 02.04.01 – «Математика и компьютерные науки»

Программа подготовки: «Математические методы в экономике и финансах»

Уровень высшего образования: магистратура

Форма обучения очная

Семестр	Трудоём- кость зач. ед., час.	Лекций, час.	Практич. занятий, час.	Лаборат. работ час.	СРС, час.	Форма промежуточного контроля (экз/зачет)
1	5/180	18	18	-	108	Экзамен (36)
Итого:	5/180	18	18	-	108	Экзамен (36)

Владимир 2015

Цели освоения дисциплины

Цель преподавания курса - дать студентам научное представление о случайных процессах, а также о методах их исследования, познакомить с основными моделями и методами моделирования стохастических систем.

Задачи курса. В соответствии с целью студенты должны познакомиться с основными классами случайных процессов, усвоить методы исследования случайных процессов, уметь применять их к конкретным случайным процессам и временным рядам, использовать в работе компьютер.

1. Место дисциплины в структуре ОПОП ВО

Дисциплина «Статистика случайных процессов» относится к дисциплинам по выбору вариативной части ОПОП подготовки магистров по направлению 02.04.01 – «Математика и компьютерные науки», логически и содержательно связана с другими математическими и естественнонаучными дисциплинами. Курс базируется на общих курсах теории вероятностей и математической статистики, использует методы теории функций. В свою очередь, является основой для ряда дисциплин, как развивающих методы статистики случайных процессов, так и использующих эти методы для решения реальных прикладных задач (например, задач актуарной и финансовой математики).

2. Компетенции обучающегося, формируемые в результате освоения дисциплины

Освоение дисциплины направлено на формирование следующих общекультурных, общепрофессиональных и профессиональных компетенций: способности

- к абстрактному мышлению, анализу, синтезу (ОК-1);
- находить, формулировать и решать актуальные и значимые проблемы фундаментальной и прикладной математики (ОПК-1);
- к интенсивной научно-исследовательской работе (ПК-1).
- Способностью к применению методов математического и алгоритмического моделирования при анализе экономических и социальных процессов, задач бизнеса, финансовой и актуарной математики (ПК-7)

В результате освоения дисциплины «Статистика случайных процессов» обучающийся должен:

знать статистику случайных процессов (ОК-1, ПК-1);

уметь применять математические методы и инструментальные средства для исследования объектов профессиональной деятельности; строить математические модели объектов профессиональной деятельности; использовать математические инструментальные средства для обработки, анализа и систематизации информации по теме исследования (ПК-1, ОПК-1, ОК-1, ПК-7);

владеть методами стохастического анализа и, кроме того, научиться содержательно интерпретировать формальные результаты (ПК-1, ОПК-1).

3. Структура и содержание дисциплины «Статистика случайных процессов»

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 часов.

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)				Объем учебной работы, с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля Успеваемости (по неделям семестра), форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	СРС		
	Основы теории случайных процессов, стохастические модели								
1	Основные понятия теории меры и теории вероятностей. Определение случайного процесса, конечномерные распределения, построение процесса с заданным распределением, теорема Колмогорова.	1	1	2	-		6	1(50%)	
2	Примеры случайных процессов: винеровский процесс, пуассоновский процесс и т.д.. Обзор основных методов теории случайных процессов и важнейших классов случайных процессов.	1	2	-	2		6	1(50%)	
3	Определение стационарных в узком смысле и стационарных в широком смысле случайных процессов и случайных последовательностей. Примеры.	1	3	2	-		6	1(50%)	

4	Сохраняющие меру преобразования и их свойства. Теорема Пуанкаре о "возвратности". Эргодичность и перемешивание. Эргодическая теорема Биркгофа-Хинчина	1	4	2	-	6	1(50%)	Рейтинг-контроль 1
5	Связь сохраняющего меру преобразования и стационарной последовательности. Понятие эргодической стационарной последовательности. Формулировки эргодических теорем для стационарных в узком смысле последовательностей и процессов.	1	5	2	-	6	1(50%)	
6	Определения случайных процессов и последовательностей, образующих мартингал, субмартингал и супермартингал. Примеры. Напоминание свойств условных математических ожиданий.	1	6	2	-	6	1(50%)	
7	Свойства мартингалов и полумартингалов с дискретным временем. Пример из теории игр. Разложение Дуба для субмартингалов.	1	7	2	-	6	1(50%)	
8	Мартингалы с непрерывным временем на примере винеровского процесса. Построение стохастического интеграла по винеровскому процессу от случайных функций.	1	8	2	-	6	1(50%)	
9	Понятие стохастических дифференциальных уравнений. Диффузионные процессы, задаваемые стохастическими уравнениями. Их связь с уравнениями в частных производных	1	9	2	-	6	1(50%)	
10	Определения марковских процессов, марковских последовательностей и марковских цепей. Разные формы марковского свойства. Примеры	1	10	2	-	6	1(50%)	

11	Модель испытаний, связанных в цепь Маркова. Примеры из теории массового обслуживания и теории ветвящихся процессов ("очередь", "бесперебойное обеспечение", задача "рождения и гибели" и т.д.)	1	11	-	2	6	1(50%)	Рейтинг-контроль 2
12	Однородные цепи Маркова, уравнение Колмогорова - Чэпмена. Эргодическая теорема.	1	12	-	2	6	1(50%)	
13	Классификация состояний марковской цепи по свойствам переходных вероятностей и по асимптотическим свойствам переходных вероятностей. Существование предельных и стационарных распределений. Примеры, иллюстрирующие введенные понятия и полученные результаты.	1	13	-	2	6	1(50%)	
	Модели и методы моделирования временных рядов, практическая реализация алгоритмов моделирования временных рядов							
14	Обработка сигналов: очистка от шума, сегментация сигналов на основе скрытых марковских моделей, сглаживания с адаптивными весами, выделение тренда и оценка дисперсии.	1	14	-	2	6	1(50%)	
15	Моделирование временных рядов на основе моделей типа ARMA.	1	15	-	2	8	1(50%)	

16	Экспоненциальное сглаживание: оценки среднего значения и параметра масштаба, экспоненциальное сглаживание в случае неравномерного расположения наблюдений, метод Хольта-Винтерса, робастный вариант экспоненциального сглаживания.	1	16	-	2	8	1(50%)	
17	Модели и методы моделирования локально стационарных временных рядов.	1	17-18	-	4	8	2(50%)	Рейтинг-контроль 3
Итого:180				18	18	108	18 (50%)	Экз.(36)

4. Образовательные технологии

4.1. Активные и интерактивные формы обучения

1. Традиционные лекционные и практические занятия;
2. обучение в малых группах (выполнение практических работ в группах из двух или трёх человек);
3. применение мультимедиа технологий (проведение лекционных и практических занятий с применением компьютерных презентаций и демонстрационных роликов с помощью проектора или ЭВМ);
4. технология развития критического мышления (прививание студентам навыков критической оценки предлагаемых решений);
5. информационно-коммуникационные технологии (применение информационных технологий для мониторинга текущей успеваемости студентов и контроля знаний). Объем учебной работы, с применением интерактивных методов 18 часов — 50%.

4.2 Самостоятельная работа студентов

Целью самостоятельной работы являются формирование личности студента, развитие его способности к самообучению и повышению своего профессионального уровня.

Насыщенность курса новыми для студента материалами предполагает интенсивную самостоятельную работу, эффективному характеру которой способствуют еженедельные консультации. Самостоятельная работа включает домашнюю работу с лекционными материалами с целью расширения и углубления теоретических знаний, выполнение заданий и самостоятельных изысканий, предусмотренных контрольными работами. В основе самостоятельной работы лежит изучение рекомендованной основной и дополнительной литературы, а также выполнение самостоятельных изысканий, включенных в учебно-методический макет по дисциплине.

Самостоятельная работа заключается в изучении содержания тем курса по конспектам, учебникам и дополнительной литературе, подготовке к практическим занятиям, к экзамену.

При освоении дисциплины используются следующие сочетания видов учебной работы с методами и формами активизации познавательной деятельности студентов для достижения запланированных результатов обучения и формирования компетенций:

- самостоятельное изучение теоретического материала дисциплины с использованием Internet-ресурсов, информационных баз, методических разработок, специальной учебной и научной литературы;

- самостоятельная работа, направленная на углубление и закрепление знаний, а также развитие практических умений, поиск и анализ литературы и электронных источников информации по заданной проблеме, выполнении домашних заданий, изучении тем, вынесенных на самостоятельную проработку, изучении теоретического материала к практическим занятиям, подготовке к контрольным мероприятиям и экзамену.

5.Оценочные средства для текущего контроля успеваемости, промежуточной аттестации по итогам освоения дисциплины и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов.

5.1. Оценочные средства для текущего контроля успеваемости

Текущий контроль знаний, согласно «Положению о рейтинговой системе комплексной оценки знаний студентов в ВлГУ» (далее Положение) в рамках изучения дисциплины «Статистика случайных процессов» предполагает выполнение контрольных работ.

Контрольная работа к рейтинг-контролю №1

Контрольная работа №1 «Статистика случайных процессов»

Вариант 1

1. Пусть случайный процесс задан на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , где $\Omega = \{-1, 1\}$, F – σ -алгебра всех подмножеств Ω , P – мера, приписывающая множествам $\{-1\}, \{1\}$ одинаковые вероятности $1/2$. Пусть $t \in [0, 1]$ и случайный процесс $\xi_t(\omega) = t\omega$. Найти все реализации (траектории) процесса.

2. Пусть $\eta \sim N(0, 1)$, $t \in R$. Найти все конечномерные распределения процесса $\xi_t = \eta + 2t$.

3. Описать σ -алгебру подмножеств отрезка $[0, 1]$, порожденную множествами $[0, \frac{2}{3}]$, $[\frac{1}{3}, 1]$. И функции, измеримые относительно нее.

Контрольная работа к рейтинг-контролю №2

Контрольная работа №2 «Статистика случайных процессов»

Вариант 1

1. Пусть w_t^0 , $0 \leq t \leq 1$, - условный винеровский процесс, т.е. $w_t^0 = w_t - tw_1$, найти его корреляционную функцию. Через w_t обозначен винеровский процесс.

2. Проверить, что если процесс $\xi_t, t \in T \subseteq R$ - процесс с независимыми приращениями, $M|\xi_t|^2 < \infty$, то он также является и процессом с некоррелированными приращениями.

3. Доказать, что $Dw_t, t \geq 0$ является функцией, не убывающей по t . w_t - винеровский процесс.

4. Проверить, что винеровский процесс, выходящий из нуля, является мартингалом.

Контрольная работа к рейтинг-контролю №3

Контрольная работа №3 «Статистика случайных процессов»

Вариант 1

1. Нарисовать граф и указать существенные и несущественные состояния цепи

Маркова с матрицей вероятностей перехода за один шаг

$$\begin{pmatrix} 1/4 & 1/4 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/3 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 1/2 & 0 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

2. Рассмотреть вопрос о стационарных, предельных, эргодических распределениях для марковской цепи с матрицей переходных вероятностей

$$\begin{pmatrix} 0,5 & 0 & 0,5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,25 & 0,5 & 0,25 & 0 \\ 0 & 0,5 & 0,5 & 0 \end{pmatrix}$$

3. В таблице представлены данные, отражающие динамику роста доходов на душу населения за восьмилетний период

t	1	2	3	4	5	6	7	8
y	1133	1222	1354	1389	1342	1377	1491	1684

- Постройте диаграмму временного ряда;
- Проверьте гипотезу случайности по одному из критериев;
- Найдите уравнение линейного тренда и проверьте его значимость;
- Вычислите коэффициенты автокорреляции для лагов $t=1;2$;
- Проведите сглаживание с помощью простой скользящей средней с интервалом сглаживания $g=3;5$;
- Проведите экспоненциальное сглаживание со значением константы $a=0,1;0,3$. В качестве начального значения возьмите среднее арифметическое первых двух уровней ряда.

Задание на СРС

Примеры заданий.

1. Корреляционной функцией винеровского процесса является

$$K_1(t, s) = \min[t, s], \quad t, s \geq 0;$$

$$K_2(t, s) = \min[t, s] - ts, \quad t, s \in [0,1];$$

$$K_3(t, s) = e^{-|t-s|}, \quad t, s \in R?$$

2. Пусть случайный процесс задан на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , где $\Omega = \{-1, 1\}$, F – σ -алгебра всех подмножеств Ω , P – мера, приписывающая множествам $\{-1\}, \{1\}$ одинаковые вероятности $1/2$. Пусть $t \in [0, 1]$ и случайный процесс $\xi_t(\omega) = t\omega$. Найти все реализации (траектории) процесса.

3. Винеровский процесс является ли гауссовским процессом, т.е. процессом, конечномерные распределения которого нормальны?

4. Пусть w_t^0 , $0 \leq t \leq 1$, – условный винеровский процесс, т.е. $w_t^0 = w_t - tw_1$, найти его корреляционную функцию. Через w_t обозначен винеровский процесс.

5. Дать определение винеровского процесса.

6. Пусть $\eta \sim N(0, 1)$, $t \in R$. Найти все конечномерные распределения процесса $\xi_t = \eta + 2t$.

7. Пусть случайный процесс задан на вероятностном пространстве (Ω, F, P) , где $\Omega = \{1, 2, 3\}$, F – σ -алгебра всех подмножеств Ω , P – мера, приписывающая множествам $\{2\}, \{1\}, \{3\}$ одинаковые вероятности $1/3$. Пусть $t \in [0, 1]$ и случайный процесс $\xi_t(\omega) = t\omega$. Найти все трехмерные распределения процесса.

8. Пусть $\eta \sim U[0, 1]$, $t \in R$. Найти все одномерные распределения процесса $\xi_t = \eta + 2t$ и $D\xi_1$.

9. Доказать: $\xi^{-1}(D_1 \cup D_2) = \xi^{-1}(D_1) \cup \xi^{-1}(D_2)$; (Взятие полного прообраза сохраняет теоретико-множественные операции.)

10. Как называются процессы $\xi_t(\omega)$ и $\xi_t'(\omega)$, если они определены на одном вероятностном пространстве (Ω, F, P) и при любом $t \in T$ верно, что $P\{\xi_t(\omega) \neq \xi_t'(\omega)\} = 0$.

11. Описать σ -алгебру подмножеств отрезка $[0, 1]$, порожденную множествами $[0, \frac{2}{3}]$, $[\frac{1}{3}, 1]$. И функции, измеримые относительно нее.

12. Что называют конечномерными распределениями случайного процесса.

13. Сформулировать условия симметрии и согласованности для конечномерных распределений случайного процесса.

14. Проверить, что если процесс ξ_t , $t \in T \subseteq R$ – процесс с независимыми приращениями, $M|\xi_t|^2 < \infty$, то он также является и процессом с некоррелированными приращениями.

15. Как называется процесс ξ_t , $t \in T \subseteq R$, если его конечномерные распределения не меняются при сдвиге, т.е., если $t_1, \dots, t_n \in T$, $(t_i \neq t_j)$, и для любого действительного h такого, что $t_1+h, \dots, t_n+h \in T$, верно $F_{t_1 \dots t_n}(x_1 \dots x_n) = F_{t_1+h \dots t_n+h}(x_1 \dots x_n)$.

16. Пусть F_1 и F_2 – две σ -алгебры подмножеств пространства Ω . Проверить является ли σ -алгеброй класс множеств $F_1 \cap F_2$?

17. Будет ли Dw_t , $t \geq 0$ функцией, не убывающей по t . w_t – винеровский процесс.

18. Нарисовать граф и указать существенные и несущественные состояния цепи Маркова

с матрицей вероятностей перехода за один шаг
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} & 0 & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

19. Могут ли все состояния цепи Маркова с конечным числом состояний быть несущественными?

20. Винеровский процесс, выходящий из нуля, является мартингалом, субмартингалом или супермартингалом?

5.2. Оценочные средства для промежуточной аттестации студентов по итогам освоения дисциплины

Вопросы к экзамену по дисциплине «Статистика случайных процессов».

1. Два определения случайных процессов, эквивалентность определений.
2. Примеры (случайное блуждание, процесс восстановления, модель Крамера-Лундберга, винеровский и пуассоновский процессы).
3. Винеровский процесс (определение, конечномерные распределения, корреляционная функция).
4. Основные классы случайных процессов.
5. Стационарные в узком смысле случайные последовательности (определение, примеры).
6. Сохраняющее меру отображение. Теорема о возвратности.
7. Сохраняющее меру отображение. Эргодичность и перемешивание.
8. Эргодические теоремы для сохраняющих меру отображений и случайных процессов, стационарных в узком смысле.
9. Условное математическое ожидание (определение, корректность определения, примеры).
10. Свойства условного математического ожидания.
11. Теоремы о предельном переходе под знаком условного математического ожидания.
12. Мартингалы и полумартингалы с дискретным временем (определения, примеры).
13. Разложение Дуба для субмартингалов.
14. Стохастический интеграл по винеровскому процессу от простой функции, его свойства.
15. Стохастический интеграл по винеровскому процессу от функций, интегрируемых с квадратом и непрерывных по t .
16. Понятие стохастического дифференциального уравнения.
17. Определение марковского процесса. Разные формы марковского свойства.
18. Марковская цепь с конечным числом состояний. Модель испытаний, связанных в цепь Маркова и пример из теории игр.
19. Задачи из теории массового обслуживания и теории ветвящихся процессов.
20. Однородная цепь Маркова. Уравнение Колмогорова-Чепмена.
21. Пример эргодической марковской цепи. Формулировка теоремы об эргодичности и существовании стационарного распределения.
22. Классификация состояний однородной цепи Маркова со счетным множеством состояний по арифметическим свойствам переходных вероятностей.

23. Классификация состояний однородной цепи Маркова со счетным множеством состояний, по асимптотическим свойствам переходных вероятностей.
24. Пример простого случайного блуждания, иллюстрирующий введенные понятия классификации состояний и предельного поведения переходных вероятностей.
25. Какие методы применяются для распознавания стационарности временных рядов?
26. Приведите примеры параметрических тестов проверки временных рядов на стационарность.
27. Приведите примеры непараметрических тестов проверки временных рядов на стационарность.
28. Охарактеризуйте процессы AR. В каких случаях процессы AR являются стационарными?
29. Охарактеризуйте процессы MA. Охарактеризуйте процессы ARMA. Опишите модель ARMA(3,2).
30. Как используется автокорреляционная функция для идентификации модели стационарного стохастического процесса.
31. Как осуществляется прогнозирование ARMA-процессов?

В конце семестра студенты сдают экзамен по дисциплине «Статистика случайных процессов». Экзамен сдается устно, по билетам, в которых представлены вопросы из перечня «Вопросы для экзамена» и задача.

Эти средства в целом позволяют оценить степень усвоения теоретических знаний; приобретенные студентами практические умения, а также профессиональные компетенции студентов.

6. Учебно-методическое и информационное обеспечение дисциплины

6.1. Основная литература (из фонда библиотеки ВлГУ)

1. Высшая математика. Теория вероятностей, математическая статистика, *случайные процессы*. Сборник задач с решениями [Электронный ресурс]: учебное пособие / В.Г. Крупин, А.Л. Павлов, Л.Г. Попов. - М.: Издательский дом МЭИ, 2013. Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785383008553.html>
2. Элементарный курс теории вероятностей. Стохастические процессы и финансовая математика [Электронный ресурс] / К.Л. Чжун, Ф. АитСахлиа. - М.: БИНОМ, 2014. Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996313174.html>
3. Модели в теории вероятностей [Электронный ресурс] / Федоткин М.А. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2012. Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922113847.html>

6.2. Дополнительная литература (из фонда библиотеки ВлГУ)


1. Вероятность и статистика в примерах и задачах. Т. 2: Марковские цепи как отправная точка теории случайных процессов и их приложения. [Электронный ресурс] / Кельберт М.Я., Сухов Ю.М. - М.: МЦНМО, 2010. Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575573.html>
2. Вероятность: В 2-х кн. Кн. 2. [Электронный ресурс] / Ширяев А.Н. - 4-е изд., переработ. и доп. - М.: МЦНМО, 2007. Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940571063.html>
3. Теория случайных процессов в примерах и задачах [Электронный ресурс] / Миллер Б.М., Панков А.Р.— Электрон. текстовые данные.— М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007. Режим доступа: <http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922102063.html>

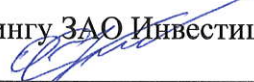
4. Теория случайных процессов для экономистов [Электронный ресурс] / Соколов Г.А. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2010. Режим доступа:
<http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111003.html>

7. Материально-техническое обеспечение дисциплины

- Лекционная аудитория (318-3): 75 посадочных мест, мультимедийный проектор с автоматическим экраном.
- Электронные учебные материалы на компакт-дисках.


Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению 02.04.01 «Математика и компьютерные науки».

Рабочую программу составил доцент каф. ФАиП Л.А.Буланкина 
(ФИО, подпись)

Рецензент (ы) директор по маркетингу ЗАО Инвестиционная фирма
«ПРОК - Инвест»  О.В. Крисько


Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП

Протокол № 9А от 18.09.2015 года

Заведующий кафедрой А.А. Давыдов 
(ФИО, подпись)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления направлению 02.04.01 «Математика и компьютерные науки».

Протокол № 1/2 от 21.09.2015 года

Председатель комиссии А.А. Давыдов 
(ФИО, подпись)

ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Рабочая программа одобрена на _____ учебный год
Протокол заседания кафедры № _____ от _____ года
Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на _____ учебный год
Протокол заседания кафедры № _____ от _____ года
Заведующий кафедрой _____

Рабочая программа одобрена на _____ учебный год
Протокол заседания кафедры № _____ от _____ года
Заведующий кафедрой _____