Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по УМР
____________________ А.А.Панфилов
«01» 10 2015 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ
«РЕШЕНИЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧ»
(наименование дисциплины)

Направление подготовки 01.04.02 Прикладная математика и информатика

Профиль/программа подготовки Математическое моделирование

Уровень высшего образования Магистратура

Форма обучения Очная

Семестр	Трудоемкость зач. ед,/ час.	Лекции, час.	Практич. занятия, час.	Лаборат. работы, час.	СРС, час.	Форма промежуточного контроля (экз./зачет)
3	6/216	36	36	-	99	Экзамен 45, КР
Итого	6/216	36	36	-	99	Экзамен 45, КР

Владимир 2015

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целями освоения дисциплины (модуля) «Решение экстремальных задач» является приобретение студентами знаний и навыков, в вариационном исчислении и способам его применения для различных приложений. Изучение данного курса позволит студентам получить представление об основных видах вариационных задач и аналитических методах их решения. Рассматриваются способы решения задач с подвижными и неподвижными границами, а также на условный экстремум и задач с угловыми точками. Будут изучены различные способы решения данных задач и их интерпретация в задачах оптимального управления.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Данная дисциплина относится к вариативной части ОПОП и является дисциплиной по выбору. Изучение данной дисциплины проходит в 3-м семестре и базируется на знаниях, приобретённых студентами в рамках курсов «Непрерывные математические модели», «Современные проблемы прикладной математики и информатики» и др.

Данный курс обеспечивает дальнейшее изучение дисциплин «Актуарная математика» и понадобится для изучения специальных дисциплин.

Знания, полученные в рамках изучения данной дисциплины, могут быть применены для написания выпускной квалификационной работы.

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования:

- способность использовать и применять углубленные знания в области прикладной математики и информатики (ОПК-4);
- способность разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач (ПК-2);
- способность разрабатывать и применять математические методы, системное и прикладное программное обеспечение для решения задач научной и проектно-технологической деятельности (ПК-3);
- способность разрабатывать и анализировать концептуальные и теоретические модели решаемых задач проектной и производственно-технологической деятельности (ПК-4).

В результате освоения дисциплины студент должен демонстрировать освоение указанных компетенций по дескрипторам «знания, умения, владения», в соответствии с тематическими модулями дисциплины, применять полученные знания в последующем обучении и профессиональной деятельности:

1. **Знать**: как применять углубленные знания в области математики и информатики для решения прикладных задач; (ОПК-4);
2. **Уметь:** использовать проводить научные исследования и получать новые научные и прикладные результаты; проводить углубленный анализ проблем, постановки и обоснования задач научной и проектно-технологической деятельности; разрабатывать концептуальные и теоретические модели решаемых задач (ПК-2, ПК-4);
3. **Владеть:** способностью к абстрактному мышлению, анализу, синтезу; способностью углубленного анализа проблем, постановки и обоснования задач научной и проектно-технологической деятельности; способностью разрабатывать концепту-

альные и теоретические модели решаемых научных проблем и задач; способностью проводить углубленный анализ проблем, постановки и обоснования задач научной и проектно-технологической деятельности (ПК-3).

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 6 зачетных единиц, 216 часов.

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)						Объем учебной работы, с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)*, форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	Контрольные работы	СРС	КП / КР		
1	Общая постановка задачи вариационного исчисления. Основные определения и теоремы	3	1-2	4	2	-		10		4 / 66%	
2	Метод вариаций в задачах с неподвижными границами	3	3-7	10	12	-		18		10 / 45%	Рейтинг-контроль №1
3	Вариационные задачи с подвижными границами и другие виды задач	3	8-11	8	8	-		24		8 / 50%	Рейтинг-контроль №2
4	Вариационные задачи на условный экстремум	3	12-15	8	10	-		24		8 / 44%	
5	Применение вариационного исчисления в теории оптимального управления	3	16-18	6	4	-		23		6 / 60%	Рейтинг-контроль №3
Всего		**3**	**18**	**36**	**36**			**99**	**КР**	**36 / 50%**	**Экзамен 45**

СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ
ЛЕКЦИИ

1. Общая постановка задачи вариационного исчисления. Основные определения и теоремы. (4 часа).
2. Метод вариаций в задачах с неподвижными границами. Вариация и ее свойства. Уравнение Эйлера. (6 часов)
3. Вариационные задачи с неподвижными границами различного вида (4 часа).
4. Вариационные задачи с подвижными границами и другие виды задач. Задачи с подвижными границами (4 часа)

5. Вариационные задачи с подвижными границами. Экстремали с угловыми точками (2 часа).
6. Вариационные задачи с подвижными границами. Односторонние вариации (2 часа).
7. Вариационные задачи на условный экстремум. Достаточные условия экстремума. Поле экстремалей (4 часа).
8. Вариационные задачи на условный экстремум.. Изопериметрические задачи (2 часа).
9. Прямые методы в вариационных задачах. Конечно-разностный метода Эйлера. . Метод Ритца. Метод Канторовича (2 часа).
10. Постановка задачи оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина (3 часа).
11. Оптимальное управление и вариационное исчисление (3 часа).

ПРАКТИЧЕСКИЕ ЗАНЯТИЯ

Практическая работа №1. Общая постановка задачи вариационного исчисления. (2 часа).

Практическая работа №2. Метод вариаций в задачах с неподвижными границами (12 часов).

Практическая работа №3. Вариационные задачи с подвижными границами (8 часов).

Практическая работа №4. Вариационные задачи на условный экстремум (10 часов).

Практическая работа №5. Задачи на оптимальное управление (4 часа).

5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Для достижения планируемых результатов освоения дисциплины используются следующие образовательные технологии:

- информационно-развивающие технологии;
- развивающие проблемно-ориентированные технологии;
- личностно ориентированные технологии обучения.

Методы	Лекция	Лабораторные и практичесие занятия	СРС
Метод IT	+	+	+
Работа в команде		+	
Case-study		+	
Проблемное обучение	+	+	
Контекстное обучение		+	+
Обучение на основе опыта	+	+	+
Индивидуальное обучение		+	+
Междисциплинарное обучение	+	+	+
Опережающая самостоятельная работа			+

В рамках изучения дисциплины возможно применение широко спектра образовательных технологий: лекционно-семинарская система обучения (традиционные лекционные и лабораторные занятия); case-study; метод проектов; обучение в малых группах; мастер-классы; применение мультимедиа технологий (проведение лекционных занятий с применением компьютерных презентаций и демонстрационных роликов с помощью проектора или ЭВМ); технология развития критического мышления; информационно-коммуникационные технологии (применение информационных технологий для мониторинга текущей успеваемости студентов и контроля знаний).

6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Текущим контролем успеваемости является действующая в университете система рейтинг-контроля.

Контрольные вопросы и задания к рейтинг-контролю №1

1. Найдите экстремаль функционала, зависящего от одной функции.

$$I[x(t)] = \int_0^1 (\dot{x}^2(t))dt$$

$x(0) = 0$
$x(1) = 1$

2. Найдите экстремаль функционала, зависящего от одной функции.

$$I[x(t)] = \int_0^2 [t(\dot{x}(t))^3 - 3x(t)(\dot{x}(t))^2]dt$$

$x(0) = 4$
$x(2) = 6$

3. Найдите экстремаль функционала, зависящего от нескольких функции

$$I[x_1(t), x_2(t), x_3(t)] = \int_2^4 \sqrt{1 + (\dot{x_1}(t))^2 + (\dot{x_2}(t))^2 + (\dot{x_3}(t))^2}dt$$

$x_1(2) = 1$
$x_2(2) = 2$
$x_3(2) = 5$

$x_1(4) = 3$
$x_2(4) = 4$
$x_3(4) = 9$

4. Найдите экстремаль функционала, зависящего от производной высшего порядка одной функции

$$I[x(t)] = \int_0^1 (3x(t)\dot{x}(t) + (\ddot{x}(t))^2)dt$$

$x(0) = 0$
$x(1) = 2$
$\dot{x}(0) = 0$
$\dot{x}(1) = 5$

5. Найдите экстремаль функционала, зависящего от одной функции.

$$I[x(t)] = \int_2^4 [t(\dot{x}(t))^4 - 2x(t)(\dot{x}(t))^3]dt$$

$x(2) = 1$
$x(4) = 5$

6. Найдите экстремаль функционала, зависящего от одной функции

$$I[x(t)] = \int_0^1 [t\dot{x}(t) - (\dot{x}(t))^2]dt$$

$x(0) = 1$

$x(1) = 1/4$

7. Найдите экстремаль функционала, зависящего от нескольких функции

$$I[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^3 \sqrt{1 + (\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2}dt$$

$x_1(0) = 1$

$x_2(0) = -2$

$x_1(3) = 7$

$x_2(3) = 1$

8. Найдите экстремаль функционала, зависящего от производной высшего порядка одной функции

$$I[x(t)] = \int_0^1 (48x(t) - (\ddot{x}(t))^2)dt$$

$x(0) = 0$

$x(1) = 1$

$\dot{x}(0) = 0$

$\dot{x}(1) = 4$

Контрольные вопросы и задания к рейтинг-контролю №2

1. Найдите экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_0^{\pi/4} [(\dot{x}(t))^2 - x^2(t)]dt$$

$x(0) = 1$

$T = \pi/4$

2. Найдите экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_0^T \frac{\sqrt{1 + (\dot{x}(t))^2}}{t-2}dt$$

$x(0) = 0$

$x(T) + 4T - 4 = 0$

3. Найдите кратчайшее расстояние между кривыми

$x(t) = t^2$ *и* $x(t) = t - 1$

4. Найдите экстремаль функционала.

$$I[x(t)] = \int_0^T [(\dot{x}(t))^2]dt$$

$x(0) = 0$

$x(T) = -T - 1$

5. Найдите экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_0^T \frac{\sqrt{1 + (\dot{x}(t))^2}}{t-1}dt$$

$x(0) = 0$
$(x(T) - \mathbf{1})^2 + (T - 5)^2 - \mathbf{4} = 0$

6. Найдите кратчайшее расстояние между кривыми

$(x(t))^2 + t^2 = 1$ и $(x(t))^2 + (t - 10)^2 = 4$

Контрольные вопросы и задания к рейтинг-контролю №3

1. Найдите экстремаль функционала

$$I[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^1 \sqrt{1 + (\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2}\, dt$$

$x_1(0) = 1$
$x_2(0) = 2$

$x_1(1) = 2$
$x_2(1) = 1$
$2x_1 - x_2 - 3t = 0$

2. Найдите экстремаль функционала

$$I[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^\pi [(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2]\, dt$$

$x_1(0) = 0$
$x_2(0) = 0$

$x_1(\pi) = 0$
$x_2(\pi) = \pi/2$
$\dot{x}_1 - x_2 - t\cos t = 0$

3. Найдите экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_0^1 [(\dot{x}(t))^2 + x^2(t)]\, dt$$

$x(0) = 0$
$x(1) = e^{-1}$

$$\int_0^1 e^{-t} x(t)\, dt = \frac{1}{4}(1 - 3e^{-2})$$

4. Найдите экстремаль функционала

$$I[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^1 [(\dot{x}_1(t))^2 + (\dot{x}_2(t))^2]\, dt$$

$x_1(0) = -1$
$x_2(0) = 0$

$x_1(1) = -1$
$x_2(1) = 1$
$x_1 + x_2 - 2t^2 + t + 1 = 0$

5. Найдите экстремаль функционала

$$I[x_1(t), x_2(t)] = \int_0^{\pi/2} [(\dot{x}_1(t))^2 - (\dot{x}_2(t))^2]\, dt$$

$x_1(0) = 0$

$x_2(0) = 0$
$x_1(\pi/2) = \pi/4$
$x_2(\pi/2) = -1/2$
$\dot{x_1} - x_2 - \sin t = 0$

6. Найдите экстремаль функционала

$$I[x(t)] = \int_0^{\pi} x(t) \sin t \, dt$$

$x(0) = 0$
$x(\pi) = 0$

$$\int_0^{\pi} (\dot{x}(t))^2 \, dt = \frac{\pi}{2}$$

Вопросы к экзамену

1. Вариационное исчисление . Общая постановка задачи и основные теоремы и определения
2. Вариационные задачи поиска безусловного экстремума
3. Метод вариации в задачах с неподвижными границами
4. Функционалы $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$, зависящие от одной функции
5. Функционалы $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x),..., y_n(x), y_1'(x),..., y_n'(x))dx$, зависящие от нескольких функций
6. Функционалы $\int_{x_0}^{x_1} F\left(x, y(x), y'(x),..., y^{(m)}(x)\right)dx$, зависящие от производных высшего порядка одной функции
7. Метод вариации в задачах с подвижными границами
8. Функционалы $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$, зависящие от одной функции. Случай гладких экстремалей
9. Функционалы $\int_{x_0}^{x_1} F(x, y(x), y'(x))dx$, зависящие от одной функции. Случай негладких экстремалей

10. Функционалы $\int\limits_{x_0}^{x_1} F(x, y_1(x), ..., y_n(x), y_1'(x), ..., y_n'(x))dx$, зависящие от нескольких функций

11. Вариационные задачи поиска условного экстремума

12. Задачи Лагранжа с голономными связями

13. Задачи Лагранжа с неголономными связями

14. Изопериметрические задачи

15. Постановка задачи оптимального управления.

16. Принцип максимума Понтрягина.

Вопросы для контроля самостоятельной работы

1. Задачи, приводящие к вариационным проблемам.
2. Простейшая задача вариационного исчисления. Вариация и ее свойства. Уравнение Эйлера.
3. Функционалы, зависящие от нескольких функций.
4. Функционалы, зависящие от производных высшего порядка.
5. Функционалы, зависящие от функций многих переменных.
6. Задача с подвижными концами.
7. Простейшая задача с подвижными границами.
8. Задача с подвижными границами для функционалов, зависящих от двух функций.
9. Экстремали с угловыми точками.
10. Основные типы задач на условный экстремум.
11. Необходимые условия в задаче Лагранжа.
12. Необходимые условия в изопериметрической задаче.
13. Принцип взаимности в изопериметрических задачах.
14. Формулировка вариационных задач.
15. Методы приближенного решения.
16. Двойственные вариационные задачи.

Темы курсовых работ

Вариант № 1.

Задача 1.

Найти точно и приближенно экстремаль функционала с закрепленной границей

$$J(y) = \int\limits_{-1}^{1} \left(y'^2 + 4y^2 - 8xy + 2x^2\right)dx; \quad y(-1) = 3; \quad y(1) = 1.$$

1. Привести вывод уравнения Эйлера. Решить соответствующую краевую задачу.
2. Подробно описать методику решения вариационной задачи конечно-разностным методом Эйлера. Найти приближенное решение методом Эйлера.

Показать сходимость полученного приближенного решения к точному при возрастании числа элементов, используемых в аппроксимации. Построить графики решений.

Задача 2.

Уравнение

$$EJ\frac{d^4w}{dx^4}+kw=q$$

описывает отклонение балки, покоящейся на упругом основании жесткостью k. Здесь EJ – постоянная жесткость балки на изгиб, а q – поперечная нагрузка на единицу ее длины.

1. Привести вывод уравнения изгиба балки, лежащей на упругом основании.
2. Пусть балка имеет единичную длину и свободно оперта на концах. Краевые условия, соответствующие свободно опертой балке, имеют вид $w=0$, $d^2w/dx^2=0$ при $x=0$ и $x=1$. Подробно описать методику решения вариационной задачи методом Ритца. Используя метод Ритца, найти отклонение балки, если $q/(EJ)=k/(EJ)=1$.
3. Построить точное решение задачи и сравнить его с полученными приближенными решениями.

Вариант № 2.

Задача 1.

Найти точно и приближенно экстремаль функционала с закрепленной границей

$$J(y)=\int_0^2\left(y'^2-4y'e^{2x}+\sin^2 x\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=-2.$$

1. Привести вывод уравнения Эйлера. Решить соответствующую краевую задачу.
2. Подробно описать методику решения вариационной задачи конечно-разностным методом Эйлера. Найти приближенное решение конечно-разностным методом Эйлера.

Показать сходимость полученного приближенного решения к точному при возрастании числа элементов, используемых в аппроксимации. Построить графики решений.

Задача 2.

Уравнение

$$EJ\frac{d^4w}{dx^4}+kw=q$$

описывает отклонение балки, покоящейся на упругом основании жесткостью k. Здесь EJ – постоянная жесткость балки на изгиб, а q – поперечная нагрузка на единицу ее длины.

1. Привести вывод уравнения изгиба балки, лежащей на упругом основании.
2. Пусть балка имеет единичную длину и защемлена в обоих концах так, что $w=0$, $dw/dx=0$ при $x=0$ и $x=1$. Подробно описать методику решения вариационной задачи методом Бубнова-Галеркина. Используя метод Бубнова-Галеркина, найти отклонение балки, если $q/(EJ)=k/(EJ)=1$.
3. Построить точное решение задачи и сравнить его с полученными приближенными решениями.

Вариант № 3.

Задача 1.

Найти точно и приближенно экстремаль функционала с закрепленной границей

$$J(y)=\int_1^4\left(y'^2+2xy'\ln x-\ln x\right)dx;\;\; y(1)=-1;\;\; y(4)=3.$$

1. Привести вывод уравнения Эйлера. Решить соответствующую краевую задачу.
2. Подробно описать методику решения вариационной задачи конечно-разностным методом Эйлера. Найти приближенное решение конечно-разностным методом Эйлера.

Показать сходимость полученного приближенного решения к точному при возрастании числа элементов, используемых в аппроксимации. Построить графики решений.

Задача 2.

Подробно описать методику решения вариационной задачи методом Ритца. Используя метод Ритца, найти решение уравнения Лапласа $\Delta u = 0$ в прямоугольнике $0 < x < a,\ 0 < y < b$, если на границе этого прямоугольника функция $u(x,y)$ принимает следующие значения

$$u\big|_{x=0} = A\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right),\;\; u\big|_{x=a} = 0,\;\; u\big|_{y=0} = B\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right),\;\; u\big|_{y=b} = 0.$$

Построить точное решение задачи. Исследовать сходимость приближенного решения и сравнить его с точным решением

$$u = A\frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\pi(a-x)}{b}\right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\pi a}{b}\right)}\sin\left(\frac{\pi y}{b}\right) + B\frac{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\pi(b-y)}{a}\right)}{\operatorname{sh}\left(\dfrac{\pi b}{a}\right)}\sin\left(\frac{\pi x}{a}\right).$$

Построить графики решений. В численных расчетах принять $A = 1$, $B = 1$, $a = b = 1$.

Вариант № 4.

Задача 1.

Найти точно и приближенно экстремаль функционала с закрепленной границей

$$J(y) = \int_{-1}^{1}\left(y'^2 + 4y^2 + 4x^2y + x\cos x\right)dx;\quad y(-1) = 2;\quad y(1) = 0.5.$$

1. Привести вывод уравнения Эйлера. Решить соответствующую краевую задачу.
2. Подробно описать методику решения вариационной задачи конечно-разностным методом Эйлера. Найти приближенное решение конечно-разностным методом Эйлера.

Показать сходимость полученного приближенного решения к точному при возрастании числа элементов, используемых в аппроксимации. Построить графики решений.

Задача 2.

В некоторой двумерной задаче стационарной теплопроводности для квадрата со стороной длины 2 температура на сторонах $x = \pm 1$ изменяется как $1 - y^2$, а на сторонах $y = \pm 1$ – как $1 - x^2$.

1. Привести вывод стационарного уравнения теплопроводности.
2. Подробно описать методику решения вариационной задачи методом Ритца. Используя метод Ритца и аппроксимацию, удовлетворяющую граничным условиям, найти распределение температуры на квадрате.
3. Построить графики приближенных решений.

Вариант № 5.

Задача 1.

Найти точно и приближенно экстремаль функционала с закрепленной границей

$$J(y)=\int_0^2\left(y'^2+9y^2+2xy-x\sin x\right)dx;\quad y(0)=1;\quad y(2)=2.$$

1. Привести вывод уравнения Эйлера. Решить соответствующую краевую задачу.
2. Подробно описать методику решения вариационной задачи конечно-разностным методом Эйлера. Найти приближенное решение конечно-разностным методом Эйлера.

Показать сходимость полученного приближенного решения к точному при возрастании числа элементов, используемых в аппроксимации. Построить графики решений.

Задача 2.

Решить задачу стационарной теплопроводности в материале, занимающем квадрат $|x| \le 1$, $|y| \le 1$, если на сторонах $y = \pm 1$ поддерживается температура 100^0C, тогда как на сторонах $x = \pm 1$ задано условие $\partial\varphi/\partial n = -1-\varphi$.

1. Привести вывод стационарного уравнения теплопроводности.
2. Подробно описать методику решения вариационной задачи методом Ритца. Методом Ритца найти распределение температуры на квадрате, используя аппроксимацию, удовлетворяющую краевым условиям только на сторонах $y = \pm 1$. Показать сходимость аппроксимации к краевому условию на сторонах $x = \pm 1$.
3. Построить графики приближенных решений.

Вариант № 6.

Задача 1.

Найти точно и приближенно экстремаль функционала с закрепленной границей

$$J(y)=\int_{-2}^0\left(y'^2-4y^2+2y+xe^{2x}\right)dx;\quad y(-2)=0;\quad y(0)=1.$$

1. Привести вывод уравнения Эйлера. Решить соответствующую краевую задачу.
2. Подробно описать методику решения вариационной задачи конечно-разностным методом Эйлера. Найти приближенное решение конечно-разностным методом Эйлера.

Показать сходимость полученного приближенного решения к точному при возрастании числа элементов, используемых в аппроксимации. Построить графики решений.

Задача 2.

1. Привести вывод уравнения и граничных условий для задачи кручения стержня.

2. Построить точное решение задачи о кручении стержня прямоугольного сечения: $-\Delta\psi = 2G\theta, \quad \psi(\pm a, y) = \psi(x, \pm b) = 0$.
3. Подробно описать методику решения вариационной задачи методом Ритца.
4. Решить методом Ритца задачу о кручении стержня прямоугольного сечения: $-\Delta\psi = 2G\theta, \quad \psi(\pm a, y) = \psi(x, \pm b) = 0$. В качестве координатных функций взять полиномы.
5. Исследовать сходимость полученного приближенного решения и сравнить его с точным решением.
6. Вычислить крутящий момент $M = 2\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-b}^{b}\psi(x, y)\,dx dy$.
7. Исследовать решение в зависимости от отношения сторон прямоугольника. Рассмотреть случай очень узкого прямоугольника.

Вариант № 7.

Задача 1.

Найти точно и приближенно экстремаль функционала с закрепленной границей

$$J(y) = \int\limits_0^1 \left(y'^2 - 9y^2 + 2y\sin x - x^2 e^x\right)dx; \quad y(0) = 1; \quad y(1) = -1 \quad .$$

1. Привести вывод уравнения Эйлера. Решить соответствующую краевую задачу.
2. Подробно описать методику решения вариационной задачи конечно-разностным методом Эйлера. Найти приближенное решение конечно-разностным методом Эйлера.

Показать сходимость полученного приближенного решения к точному при возрастании числа элементов, используемых в аппроксимации. Построить графики решений.

Задача 2.

Подробно описать методику решения краевой задачи методом Бубнова-Галеркина.

Используя приближенный метод Бубнова-Галеркина, найти решение задачи Дирихле в квадрате $0 \le x \le l$, $0 \le y \le l$

$$\Delta u = 0$$

при краевых условиях $u(x,0) = u(x,l) = x(l-x), \quad u(0,y) = u(l,y) = 0$.

Построить точное решение задачи. Исследовать сходимость приближенного решения и сравнить его с точным решением

$$u = \frac{8l^2}{\pi^3}\sum_{m=1}^{\infty}\left[\operatorname{ch}\left(\frac{\pi(2m-1)y}{l}\right) + \frac{1-\operatorname{ch}\left(\pi(2m-1)\right)}{\operatorname{sh}\left(\pi(2m-1)\right)}\operatorname{sh}\left(\frac{\pi(2m-1)y}{l}\right)\right]\frac{\sin\left(\dfrac{\pi(2m-1)x}{l}\right)}{(2m-1)^3}.$$

Построить графики решений, приняв $l = 1$.

Вариант № 8.

Задача 1.

Найти точно и приближенно экстремаль функционала с закрепленной границей

$$J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2+4y^2+6ye^x+2x\cos x\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=3\,.$$

1. Привести вывод уравнения Эйлера. Решить соответствующую краевую задачу.
2. Подробно описать методику решения вариационной задачи конечно-разностным методом Эйлера. Найти приближенное решение конечно-разностным методом Эйлера.

Показать сходимость полученного приближенного решения к точному при возрастании числа элементов, используемых в аппроксимации. Построить графики решений.

Задача 2.

Подробно описать методику решения задачи методом Бубнова-Галеркина.

Используя приближенный метод Бубнова-Галеркина, найти решение задачи Дирихле в прямоугольнике $0 \le x \le a,\ 0 \le y \le b$

$$\Delta u = 0$$

при краевых условиях

$$u(0,y)=V\frac{y}{b},\ u(a,y)=u(x,0)=0,\ u(x,b)=V\left(1-\frac{x}{a}\right).$$

Исследовать сходимость приближенного решения; построить графики приближенных решений.

Найти точное решение задачи и сравнить его с приближенным.

Вариант № 9.

Задача 1.

Найти точно и приближенно экстремаль функционала с закрепленной границей

$$J(y)=\int_{-1}^{1}\left(y'^2+y^2+4ye^x-x\sin x\right)dx;\quad y(-1)=1;\quad y(1)=3\,.$$

1. Привести вывод уравнения Эйлера. Решить соответствующую краевую задачу.
2. Подробно описать методику решения вариационной задачи конечно-разностным методом Эйлера. Найти приближенное решение конечно-разностным методом Эйлера.

Показать сходимость полученного приближенного решения к точному при возрастании числа элементов, используемых в аппроксимации. Построить графики решений.

Задача 2.

Подробно описать методику решения краевой задачи методом Бубнова-Галеркина.

Используя приближенный метод Бубнова-Галеркина, найти решение уравнения Лапласа в квадрате $0 < x < 1$, $0 < y < 1$, если на границе этого квадрата решение принимает следующие значения

$$u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=1}=0;\quad u\big|_{y=0}=x(1-x),\quad u\big|_{y=1}=x(1-x).$$

Исследовать сходимость приближенного решения; построить графики приближенных решений.

Найти точное решение задачи и сравнить его с приближенным.

Вариант № 10.

Задача 1.

Найти точно и приближенно экстремаль функционала с закрепленной границей

$$J(y) = \int_{-1}^{1} \left(y'^2 + 4y^2 + 8ye^{2x} + 3x^2 \right) dx; \quad y(-1) = 1; \quad y(1) = 3.$$

1. Привести вывод уравнения Эйлера. Решить соответствующую краевую задачу.
2. Подробно описать методику решения вариационной задачи конечно-разностным методом Эйлера. Найти приближенное решение конечно-разностным методом Эйлера.

Показать сходимость полученного приближенного решения к точному при возрастании числа элементов, используемых в аппроксимации. Построить графики решений.

Задача 2.

Подробно описать методику решения задачи методом Ритца.

Используя вариационный метод Ритца, найти решение уравнения Пуассона в квадрате $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$

$$\Delta u = -\frac{2}{5}xy$$

при краевых условиях $u(x,0) = u(x,1) = 0$, $u(0,y) = u(1,y) = 0$. Исследовать сходимость приближенного решения; построить графики.

Построить точное решение задачи и сравнить его с приближенным.

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

а) основная литература:

1. Машунин, Ю. К. Теория управления. Математический аппарат управления в экономике : учеб. пособие / Ю. К. Машунин. - М.: Логос, 2013. - 448 с. - (Новая университетская библиотека). - ISBN 978-5-98704-736-1.
2. Методы оптимизации и теории управления: методические указания к самостоятельной работе по дисциплинам «Методы оптимизации», «Математические методы теории управления» – Липецк: Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2013.– 18 с
3. Павлов, В. М. Искусство решать сложные задачи. Системный подход / В. М. Павлов. - М.: Издательско-торговая корпорация «Дашков и К°», 2014. - ISBN 978-5-394-02346-0.

б) дополнительная литература:

1. Алексеев В.М. Оптимальное управление: учебное пособие/ Алексеев В.М., Тихомиров В.М., Фомин С.В.– Электрон. текстовые данные.– М.: ФИЗМАТЛИТ, 2011.– 408 с.
2. Методы оптимизации и теории управления: методические указания к самостоятельной работе по дисциплинам «Методы оптимизации», «Математические методы теории управления»/ – Электрон. текстовые данные.– Липецк: Липецкий государственный технический университет, ЭБС АСВ, 2013.– 18 с.
3. Щербакова Ю.В. Дифференциальные уравнения: учебное пособие/ Щербакова Ю.В.– Электрон. текстовые данные.– Саратов: Научная книга, 2012.– 159 с.

в) периодические издания

1. Журнал «Вестник Российской академии наук», ISSN 0869-5873
2. Журнал «Вестник компьютерных и информационных технологий», ISSN 1810-7206.

в) интернет-ресурсы

1. Руководство по решению задач по курсу «Вариационное исчисление и методы оптимизации»: Методическое пособие. – Волгоград: Издательство Волгоградского государственного университета, 2004. – 52 с.
   Режим доступа: http://window.edu.ru/resource/835/25835/files/volsu419.pdf
2. Элементы вариационного исчисления. Учебнометодическое пособие. - Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 2006. - 20с.
   Режим доступа: http://window.edu.ru/resource/012/63012/files/eler.pdf
3. Избранные главы вариационного исчисления. Кузнецов Ю.А., Семенов А.В. Элетронное учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2012. – 69 с.
   Режим доступа: http://window.edu.ru/resource/195/79195/files/Kuznetzov_Semenov.pdf
4. А.А. Амосов, Н.У. Игнатьева, А.В. Перескоков Задачи по вариационному исчислнию. М.: Изд-во МЭИ, 2007. – 64с.
   Режим доступа: http://window.edu.ru/resource/144/59144/files/Zadachn.pdf
5. ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ. Практикум для вузов. Составитель Е.П. Белоусова. Издательско-полиграфический центр Воронежского государственного университета, 2008.
   Режим доступа: http://window.edu.ru/resource/601/65601/files/m08-237.pdf
6. Иглин С.П. Вариационное исчисление с применением MATLAB. Учебное пособие и варианты индивидуальных домашних заданий для студентов всех форм обучения. – Харьков: НТУ ХПИ, 2000.
   Режим доступа: http://www.exponenta.ru/educat/systemat/iglin/2/archives/varcalc.zip

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Лекционные аудитории, оснащённые доской (для мела или маркера), экраном для проекционных систем, проектором и ноутбуком.

Аудитории для проведения лабораторных занятий, оснащённые современными персональными компьютерами, объединёнными в локальную вычислительную сеть и укомплектованными необходимым системным и прикладным программным обеспечением, аудитории вычислительного центра.

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» программа «Математическое моделирование».

Рабочую программу составил доцент кафедры ФиПМ ______________________ Абрахин С.И.

Рецензент

(представитель работодателя) Квасов Д.С. Гендиректор
(место работы, должность, ФИО, подпись)

ООО "ФС Сервис"

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФиПМ

Протокол № 1А от 01.10.15 года

Заведующий кафедрой____ Аракелян С.М.
(ФИО, подпись)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления 01.04.02 «Прикладная математика и информатика» программа «Математическое моделирование».

Протокол № 1А от 01.10.15 года

Председатель комиссии ____ Аракелян С.М.
(ФИО, подпись)

ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Рабочая программа одобрена на ___________ учебный год
Протокол заседания кафедры № ______ от _________ года
Заведующий кафедрой____

Рабочая программа одобрена на ___________ учебный год
Протокол заседания кафедры № ______ от _________ года
Заведующий кафедрой____

Рабочая программа одобрена на ___________ учебный год
Протокол заседания кафедры № ______ от _________ года
Заведующий кафедрой____