Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых »
(ВлГУ)
КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА ВЛГУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

УЧЕБНАЯ ДИСЦИПЛИНА **МАТЕМАТИКА**
для специальности среднего профессионального образования
54.02.01 «Дизайн (по отраслям)»

Владимир 2016

Кафедра-разработчик: Колледж инновационных технологий и предпринимательства ВлГУ.

Составитель:
старший преподаватель колледжа ________________________________ И.С. Яппарова

Одобрено на заседании цикловой комиссии колледжа инновационных технологий и предпринимательства ВлГУ

протокол № ______ от «____» _________________ 20___ года

Председатель цикловой комиссии ________________________________Г.П. Тонконог

Директор КИТП ВлГУ ____Ю.Д. Корогодов

Пояснительная записка

Усвоение предусмотренной учебным планом дисциплины МАТЕМАТИКА предусматривает в качестве важнейшей составляющей самостоятельную работу обучающихся, существенно дополняющую аудиторные занятия.

Цели самостоятельной внеаудиторной работы студентов:
1)закрепление, углубление, расширение и систематизация знаний, полученных во время аудиторных занятий, самостоятельное овладение новым учебным материалом;
2)формирование общепрофессиональных умений;
3)формирование умений и навыков самостоятельного умственного труда;
4)развитие самостоятельности мышления;
5)формирование убежденности, волевых черт характера, способности к самоорганизации.

Самостоятельная работа студентов рассчитана на 24 часа, включает в себя подготовку студентов к практическим занятиям, контрольным работам, экзамену.

Теоретический материал и решение типовых задач содержится в конспектах лекций и в учебниках (см. список литературы).

№ п/п	Раздел(тема)дисциплины	Самостоятельная работа студента (в часах)	Виды СРС	Форма контроля СРС	Баллы по СРС
1	*Раздел 1* Элементы дискретной математики	2	Работа с конспектом лекций. Выполнение домашней работы.	Письменная домашняя работа.	3
2	*Раздел 2* Элементы математического анализа Тема 2.1.Теория пределов. Непрерывность	4	Работа с конспектом лекций. Доработка конспекта лекций. Выполнение домашней работы. Подготовка к контрольной работе.	Доработанный конспект лекций. Письменная домашняя работа. Контрольная работа.	3
3	Тема 2.2.Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной	6	Работа с конспектом лекций. Доработка конспекта лекций. Выполнение домашней работы. Подготовка к контрольной работе.	Доработанный конспект лекций. Письменная домашняя работа. Контрольная работа.	3
4	Тема 2.3.Интегральное исчисление функции одной действительной переменной	6	Работа с конспектом лекций. Доработка конспекта лекций. Выполнение домашней работы. Подготовка к контрольной работе	Доработанный конспект лекций. Письменная домашняя работа. Контрольная работа.	3

5	*Раздел 3* Элементы теории вероятностей и математической статистики..	6	Работа с конспектом лекций. Доработка конспекта лекций. Выполнение домашней работы.	Письменная домашняя работа.	3
			Подготовка к экзамену	Экзамен	
	Всего:	24		Итого	15

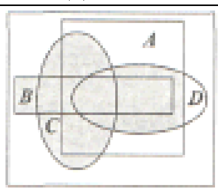
Раздел 1 **Элементы дискретной математики**

Повторите необходимый теоретический материал по конспекту лекции.
Для решения задач необходимо знать:

1. *Основные определения теории множеств;*
2. *Операции над множествами;*
3. *Отношения и их свойства;*
4. *Основные понятия и определения теории графов (граф, вершина графа, рёбра, дуги, нуль-граф, степень вершины и т. д.)*

Задания для самостоятельного решения

1. Дано множество A={8; 23; 14; 32; 48; 27; 54} Какие из следующих элементов принадлежат этому множеству, а какие нет: $\frac{24}{3}$; 24; $\frac{64}{2}$; 48; 28; 55, ∅. Запишите математическими символами.
2. Найти пересечение, объединение и разность (A\B, B\A), следующих множеств. Изобразите результат в виде множества, заданного перечислением всех его объектов. Начертите диаграммы Эйлера-Венна, иллюстрирующие результат:
A={24, 56, 78, 94, 102, 134, 256, 328} B={18, 24, 94, 103, 257, 382}
3. Найти пересечение, объединение и разность (A\B, B\A), следующих множеств. Изобразите результат в виде множества, заданного перечислением всех его объектов. Начертите диаграммы Эйлера-Венна, иллюстрирующие результат:
A={12, 45, 67}, B={45, 68, 139}
4. Дано: $A = [-8; 8)$, $B = (1; +\infty)$, $C = (-\infty; 3]$.
Найти:
а) $B \cup (A \cap C)$ =?
б) $B \cap (A \cup C)$ =?
5. Найти
А) разность множеств
Б) пересечение множеств
В) объединение множеств

10	

6. Решить задачу, используя диаграмму Эйлера-Венна:.

Четырнадцать спортсменов участвовали в кроссе, 16 – в соревнованиях по плаванью, 10 – в велосипедных гонках. Восемь участников участвовали в кроссе и заплыве, 4 – в кроссе и велосипедных гонках, 9 – в плавании и велосипедных гонках. Во всех трех соревнованиях участвовали три человека. Сколько всего было спортсменов?

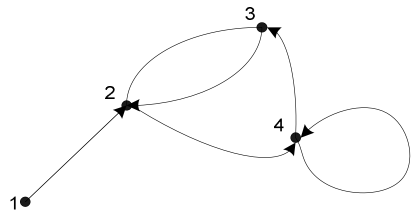
7. Задано универсальное множество U ={1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8} и множества X={1, 3, 6, 7}, Y = {3, 4, 7, 8}, Z = {3, 4, 7, 8}. Построить булеан множества X и любое разбиение множества Z. Выполнить действие $(X \setminus Y) \cap \overline{Z}$.

8. Пусть X={1,2,3,4}. Бинарное отношение $R \subseteq X \times X$ задано характеристическим свойством:

$$\mathrm{R} = \{(\mathrm{a}, \mathrm{b}) | \mathrm{a} + \mathrm{b} - \text{четное}, \mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mathrm{X}\}.$$

Представить отношение различными способами. Выяснить, какими свойствами оно обладает.

9.Постройте матрицу смежности и инцидентности для графа:

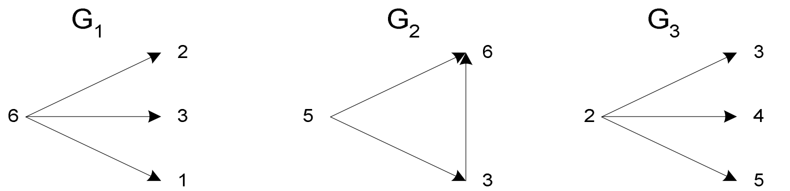


10 .Нарисуйте орграф по заданной матрице смежности:

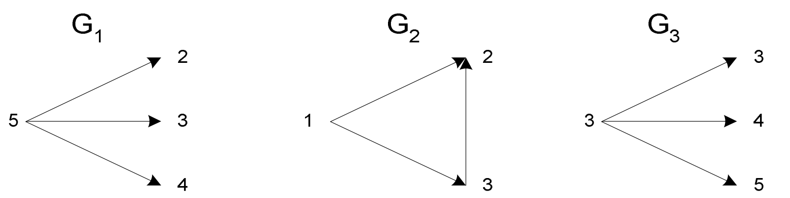
$$S = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

11. Постройте матрицы смежности и инцидентности графа G: $G_1 \cup G_2 \cup G_3$

А).



Б).



Раздел 2 **Элементы математического анализа**

Тема 2.1.Теория пределов. Непрерывность

Повторите необходимый теоретический материал по конспекту лекции.

Для решения задач необходимо знать:

1. *Определение предела функции в точке.*
2. *Определение предела функции на бесконечности.*
3. *Основные свойства пределов.*
4. *Бесконечно малые и бесконечно большие функции.*
5. *Принцип раскрытия неопределенностей* $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$,
6. *Основные свойства пределов.*
7. *Предел функции в точке и на бесконечности.*
8. *Таблица замечательных пределов.*
9. *Основные свойства пределов.*
10. *Определение непрерывных функций.*

Определение: Число *b* называется ***пределом функции*** $f(x)$ в точке *a*, если для всех значений *x*, достаточно близких к *a* и отличных от *a*, значение функции $f(x)$ сколько угодно мало отличаются от числа *b*.

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

Вывод: *Чтобы вычислить предел функции в точке нужно найти значение функции в точке, к которой стремится* x.

Например: $\lim_{x\to 2}(4x-5) = 4\cdot 2 - 5 = 3$

Например: $\lim_{x\to 3}\frac{2x+1}{4-7x} = \frac{2\cdot 3+1}{4-7\cdot 3} = -\frac{7}{17}$

Замечание: Если в результате вычисления предела получилась недопустимая арифметическая операция, то предел равен ∞*, т.е.* $\frac{1}{0} = \infty$

Например: $\lim_{x\to -2}\frac{2x+3}{x+2} = \frac{-4+3}{0} = \infty$

<u>*Определение*</u>: Числа *A* называется ***пределом функции*** $f(x)$ ***на бесконечности*** $(x\to\infty)$, если для всех достаточно больших по модулю значений аргумента *x* соответствующие значения функции $f(x)$ сколько угодно мало отличаются от числа *A*.

Пример ***1:*** Найти $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x+5}$

Решение: При $x\to\infty$ знаменатель $x+5$ стремится к бесконечности, а обратная ему величина, следовательно $3\cdot\frac{1}{x+5} = \frac{3}{x+5} \to 0$, если $x\to\infty$. Итак, $\lim_{x\to\infty}\frac{3}{x+5} = 0$.

*Пример 2****:*** $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+4x}{x^3-2}$

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+4x}{x^3-2}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{4}{x}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x^3}\right)}=0$

Пример 3: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-2}{x-4}$

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+5x-2}{x-4}=\frac{\infty}{\infty}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{5}{x}-\frac{2}{x^2}\right)}{x\left(1-\frac{4}{x}\right)}=\infty$

Пример 4: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+3x}{2x^2-5x+1}$

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6x^2+3x}{2x^2-5x+1}=\frac{\infty}{\infty}=\frac{6}{2}=3$

Предел функции в точке и на бесконечности.

Пример 1: $\lim\limits_{x\to 2}(4x-5)=4\cdot 2-5=3;$

Пример 2: $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x+1}{4-7x}=\frac{2\cdot 3+1}{4-7\cdot 3}=\frac{7}{17}$

Пример 5: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}$

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{4\cdot 3x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4\sin 4x}{3\cdot 4x}=\frac{4}{3}\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 4x}{4x}=\frac{4}{3}\cdot 1=\frac{4}{3}$

Пример 6: $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}$

Решение: $\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{\cos^2 x}{1+\sin^3 x}=\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin^2 x}{(1+\sin x)(1-\sin x+\sin^2 x)}=\lim\limits_{x\to -\frac{\pi}{2}}\frac{1-\sin x}{1-\sin x+\sin^2 x}=\frac{1-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)}{1-\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\sin^2\left(-\frac{\pi}{2}\right)}=\frac{1+1}{1+1+1}=\frac{2}{3}$

Пример 7: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$

Решение: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{(x/3)\cdot 3}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{(x/3)}\right]^3=\left[\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{(x/3)}\right]^3=e^3$

Пример 8: $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}$

Решение: $\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{5}{x}}=\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}\cdot 10}=\left[\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{\frac{1}{2x}}\right]^{10}=e^{10}$

Задания для самостоятельного решения

Вычислить пределы функций:

$$1)\lim_{x\to 0}\frac{x^4+2x^2-3x}{x^3-3x^2+x}\quad 2)\lim_{x\to 1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+x}\quad 3)\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$$

$$4)\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)}{\sqrt{x}-2}\quad 5)\lim_{x\to 1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}\quad 6)\lim_{x\to 1}\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$$

$$7)\lim_{x\to -2}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}\quad 8)\lim_{x\to 0}\frac{x^3-15x^2+x}{18x^2+15x}\quad 9)\lim_{x\to 2}\frac{\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x+2}\right)}{x-2}$$

Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

$$1)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)^{x^2+1}\quad 2)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}\quad 3)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$4)\lim_{x\to 0}\left(1+10x^2\right)^{x^3\cdot\frac{1}{x}}\quad 5)\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}\quad 6)\lim_{x\to 0}\frac{3x^2-5x}{\sin 4x}$$

$$7)\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{tgx}\quad 8)\lim_{x\to 0}\frac{9\ln(1-2x)}{4arctg3x}\quad 9)\lim_{x\to 0}\frac{\arcsin 7x}{\sin x\cdot x^2}$$

Тема 2.2. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной

Повторите необходимый теоретический материал по конспекту лекции.

Для решения задач необходимо знать:

1. *Производная функции одной переменной.*
2. *Формулы дифференцирования.*
3. *Дифференцирование функций.*
4. *Основные правила дифференцирования.*
5. *Производная. Ее геометрический смысл.*
6. *Правило дифференцирования сложной функции.*
7. *Дифференциал, его свойства, применение.*
8. *Производные и дифференциалы высших порядков.*
9. *Монотонность функции.*
10. *Исследование функции на монотонность с помощью производной.*
11. *Исследование функций одной переменной на экстремумы.*
12. *Исследование функции на выпуклость, вогнутость, точки перегиба.*

Производная сложной функции.

Определение: *Сложная функция* – это функция от функции, т.е. $y = f(\varphi(x))$, где $\varphi(x)$ -некоторая функция.

Например: $y=\sin 3x$, где $\varphi(x)=3x$, а $f(\varphi(x))=\sin 3x$

Теорема: Если функция $f(u)$ дифференцируема по u, а $u(x)$ дифференцируема по x, то производна функции $y = f(u(x))$ по независимой переменной x определяется равенством:

$$y'_x = y'_u\cdot y'_x$$

Пример 6: Найти производную функции: $y=\ln tg^2 3x$

Решение:

1. $\ln\left(tg^2 3x\right)$ - логарифмическая функция;

2. $(tg3x)^2$ - степенная функция;

3. $tg3x$ - тригонометрическая функция;

4. $3x$-линейная функция.

$$y' = \left(\ln tg^2 3x\right)' = \frac{1}{tg^2 3x}\cdot\left((tg3x)^2\right)' = \frac{1}{tg^2 3x}\cdot 2tg3x\cdot\left(tg3x\right)' = \frac{2}{tg3x}\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot\left(3x\right)' =$$

$$= \frac{2\cos 3x}{\sin 3x}\cdot\frac{1}{\cos^2 3x}\cdot 3 = \frac{6}{\sin 3x\cdot\cos 3x}$$

Пример 7: Найти производную функции: $y = \sqrt{\cos\ln x}$

Решение: $y' = \left(\sqrt{\cos\ln x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos\ln x}}\cdot\left(\cos\ln x\right)' = \frac{1}{2\sqrt{\cos\ln x}}\cdot\left(-\sin\ln x\right)\cdot\left(\ln x\right)' =$

$$= \frac{1}{2\sqrt{\cos\ln x}}\cdot\left(-\sin\ln x\right)\cdot\frac{1}{x}$$

Геометрический смысл производной.

Пример 8: Касательная проведена к графику функции $y = x^3$ в точке $C(-2;-8)$. Найдите угловой коэффициент касательной и угол наклона касательной. Составьте уравнение касательной и нормали.

Решение:

$x_0 = -2,\ y_0 = -8,\quad y' = \left(x^3\right)' = 3x^2$

1. $k = tg\alpha = y'(x_0) = y'(-2) = 12 \Rightarrow \alpha = arctg12$

2. $y + 8 = 12(x+2)$

$y = 12x + 16$ - уравнение касательной

$y + 8 = -\frac{1}{12}(x+2)$

$y = -\frac{1}{12}x - \frac{49}{6}$ - уравнение нормали

Задания для самостоятельной работы

1. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

   а) $y = \frac{x-1}{x^2+1}, x_0$ - точка пересечения графика с осью абсцисс.

   б) $y = (7-3x)^2, x_0$ - точка пересечения графика с прямой $y = 1$.

2. На графике функции $y = \frac{x+1}{x+2}$ найдите точки, в которых касательная параллельна прямой $y = x - 3$

3. Тело массой 3кг движется по закону $x(t) = 0.25t^4 + \frac{1}{3}t^3 - 7t + 2(\grave{\imath}\ )$. Найдите силу, действующую на тело в момент времени 2с.

4. Исследуйте функцию и постройте ее график:

   а) $y = \frac{2x+1}{x-1}$; б) $y = \frac{1}{x^2+1}$; в) $y = \frac{x+2}{x^2-9}$

5. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t) = 18t^2 - t^3, x = [м], t = [сек]$.Определите, в какой момент времени из промежутка $[4;8]$ скорость будет наибольшей, найдите скорость в этот момент.

6. Сколько корней имеет уравнение $3x - x^3 - 1 = 0$

Тема 2.3.Интегральное исчисление функции одной действительной переменной
Повторите необходимый теоретический материал по конспекту лекции.
Для решения задач необходимо знать:

1. *Понятие первообразной функции.*
2. *Понятие неопределенного интеграла.*
3. *Неопределенный интеграл и его свойства.*
4. *Табличный способ интегрирования.*
5. *Замена в неопределенном интеграле.*
6. *Определенный интеграл и его геометрический смысл.*
7. *Методы вычисления определенных интегралов.*
8. *Применение интегралов к вычислению площадей фигур.*

Определение: Совокупность всех первообразных $F(x)+C$ функции $f(x)$ на рассматриваемом промежутке называется *неопределенным интегралом* и обозначается:

$\int f(x)dx$, где $f(x)$ - подынтегральная функция;

$f(x)dx$ - подынтегральное выражение;

x - переменная интегрирования.

Т.о. если $F(x)$ - какая-нибудь первообразная функции $f(x)$ на некотором промежутке, то

$\int f(x)dx = F(x)+C$, где C - любое действительное число.

Пример 1: Найти $\int x^5 dx$

Решение: $\int x^5 dx = \frac{x^{5+1}}{5+1} + C = \frac{x^6}{6} + C$

Пример 2: Найти $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x}{2x} dx$

Решение: $\int \frac{3x^3 - 2x^2 + 5x}{2x} dx = \int \left(\frac{3}{2}x^2 - x + \frac{5}{2} \right) dx = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2} \cdot x + C = \frac{x^3}{2} - \frac{x^2}{2} + \frac{5}{2}x + C = \frac{1}{2}\left(x^3 - x^2 + x\right) + C$

Пример 3: Найти $\int \left(x^5 + 3e^x\right) dx$

Решение: $\int \left(x^5 + 3e^x\right) dx = \frac{x^6}{6} + 3e^x + C$

Пример 4: Найти $\int (2\sin x + 3\cos x) dx$

Решение: $\int (2\sin x + 3\cos x) dx = 2 \cdot (-\cos x) + 3\sin x + C = 3\sin x - 2\cos x + C$

Пример 5: Найти $\int \frac{3}{\cos^2 x} dx$

Решение: $\int \frac{3}{\cos^2 x} dx = 3 \cdot \int \frac{1}{\cos^2 x} dx = 3\operatorname{tg} x + C$

Пример 6. $\int (1+x)^5 dx$
Решение: Положим 1 + X = Z.
Продифференцируем это равенство:d(l + x) = dz
dx = dz

Заменим в интеграле: $\int (1+x)^5 dx = \int z^5 \, dz = \frac{z^6}{6} + C = \frac{1}{6} \cdot (1+6)^6 + C$

Пример 7. $\int \sin(a+bx) dx$
Решение: Положим: a+ bx= z

d(a + b x) = dz
b·dx = dz
dx = $\frac{dz}{b}$
Заменим:

$$\int \sin(a+bx)dx = \int \frac{\sin z}{b}dz = \frac{1}{b}\cdot(-\cos z) + C = -\frac{1}{b}\cos(a+bx) + C$$

Задания для самостоятельной работы

1. Вычислите интегралы:

1)$\int 4(2x-1)^2dx$

2) $\int (x-3)^2dx$

3) $\int cos^5 xdx$

4) $\int (x^2-3x+2)\, cos5xdx$, здесь надо взять u = x^2 - 3x + 2, dv = cos5xdx

6) $\int_{-1}^{0}(3x^2+1)dx$

7) $\int_1^3 \frac{3x^4-2x^2+6}{x^2}dx$;

8) $\int_1^5\left(\frac{1}{\sqrt{11-2x}}+1\right)dx$

9) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{\cos^2-1}$

10) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\frac{x}{8}-\sin\frac{x}{8}\right)^2dx$

2. Точка движется прямолинейно со скоростью $v(t)=6t^2-4t-1$. Найдите закон движения точки, если в момент времени $t=1$ с координата точки была равна 4 м.
3. Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

   а) $y=x^2-4x+4$; $y=4-x$;

   б) $y=4x-x^2$, $y=x$, $y=0$.

4. Найдите площадь фигуры, ограниченной графиком функции $y=x^2+2x+1$ и графиком ее первообразной, проходящим через точку $K(-2;1)$.

Раздел 3 **Элементы теории вероятностей и математической статистики.**
Повторите необходимый теоретический материал по конспекту лекции.
Для решения задач необходимо знать:

1. *Основные определения комбинаторики.*
2. *Классическое определение вероятности.*
3. *Независимость случайных событий.*
4. *Статистическое определение вероятностей.*

5. *Теоремы сложения и умножения вероятностей.*
6. *Случайная величина и ее функция распределения.*
7. *Математическое ожидание и дисперсия дискретной случайной величины: их свойства, правила вычисления.*

1). Три стрелка производят по одному выстрелу в цель независимо друг от друга. Вероятности попадания в цель для каждого из них равны соответственно 0,7; 0,8; 0,9. Найти вероятность того, что: а) в цель попадет только один стрелок; б) в цель попадут только два стрелка; в) в цель попадет хотя бы один стрелок.

Решение.

а) Рассмотрим следующие события:

A_1 - первый стрелок попал в цель;

A_2 - второй стрелок попал в цель;

A_3 - третий стрелок попал в цель;

$\overline{A}_1$ - первый стрелок не попал в цель;

$\overline{A}_2$ - второй стрелок не попал в цель;

$\overline{A}_3$ - третий стрелок не попал в цель.

По условию $P(A_1) = 0,7$; $P(A_2) = 0,8$; $P(A_3) = 0,9$; $P(\overline{A}_1)=1 - 0,7 = 0,3$; $P(\overline{A}_2) = 0,2$; $P(\overline{A}_3) = 0,1$.

Пусть событие B - попал только один стрелок. Тогда

$$B = A_1\overline{A}_2\,\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\,\overline{A}_2A_3$$

Отсюда в силу несовместимости событий-слагаемых и независимости событий-сомножителей.

$$P(B)=P(A_1)P(\overline{A}_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(A_2)P(\overline{A}_3)+P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2)P(A_3)=$$
$$=0,7\cdot 0,2\cdot 0,1+0,3\cdot 0,8\cdot 0,1+0,3\cdot 0,2\cdot 0,9=0,092$$

б) Пусть событие C - попадут только два стрелка. Тогда

$$C = A_1A_2\overline{A}_3+A_1\overline{A}_2A_3+\overline{A}_1A_2A_3$$

Отсюда

$$P(C)=0,7\cdot 0,8\cdot 0,1+0,7\cdot 0,2\cdot 0,9+0,3\cdot 0,8\cdot 0,9=0,398$$

в) Пусть событие D - попал хотя бы один стрелок. Тогда противоположное событие $\overline{D}$ - не попал ни один из них, т.е. $\overline{D}=\overline{A}_1\cdot\overline{A}_2\cdot\overline{A}_3$. Поэтому $P(\overline{D})=0,3\cdot 0,2\cdot 0,1=0,006$.

Отсюда

$$P(D)=1 - P(\overline{D}) = 1 - 0,006 = 0,994.$$

2). Среди 15 микрокалькуляторов, имеющихся в вычислительной лаборатории, лишь 6 новых, а остальные - бывшие в употреблении. Наугад взято три микрокалькулятора. Какова вероятность, что все они окажутся новыми?

Решение.

Рассмотрим события:

A - первый из взятых микрокалькуляторов новый;

B - второй микрокалькулятор новый;

C - третий микрокалькулятор новый.

Тогда $P(A)=\dfrac{6}{15}$.

Вероятность того, что второй микрокалькулятор будет новый, при условии, что первым уже был отобран новый микрокалькулятор, т.е. условная вероятность события B, равна

$$P_A(B)=\frac{5}{14}$$

Вероятность того, что третьим будет отобранный микрокалькулятор, при условии, что уже отобраны два новых микрокалькулятора, т.е. условная вероятность события С, равна

$$P_{AB}(C)=\frac{4}{13}$$

Искомая вероятность того, что все три отобранных микрокалькулятора окажутся новыми, равна

$$P(ABC)=P(A)\cdot P_A(B)\cdot P_{AB}(C)=\frac{6}{15}\cdot\frac{5}{14}\cdot\frac{4}{13}=\frac{4}{91}$$

3). Заданы законы распределения двух независимых случайных величин Х и У.

X	-5	2	3	4
P	*0,4*	*0,3*	*0,1*	*0,2*

Y	1	4
P	*0,2*	*0,8*

Найти математическое ожидание и дисперсию для случайной величины

Z = 3X - 2Y

Р е ш е н и е . Найдем математические ожидания и дисперсии для случайных величин Х и У.

$$M(X)=-5\cdot 0{,}4+2\cdot 0{,}3+3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2=-0{,}3\ ;$$

$$M(У)=1\cdot 0{,}2+4\cdot 0{,}8=3{,}4.$$

Напишем законы распределения для случайных величин X^2 и $У^2$:

X^2	25	4	9	16
P	*0,4*	*0,3*	*0,1*	*0,2*

Y^2	1	16
P	*0,2*	*0,8*

Найдем математические ожидания для случайных величин X^2 и $У^2$:

$$M(X^2)=25\cdot 0{,}4+4\cdot 0{,}3+9\cdot 0{,}1+16\cdot 0{,}2=15{,}3\ ;$$

$$M(У^2)=1\cdot 0{,}2+16\cdot 0{,}8=13{,}0.$$

Отсюда

$$D(X)=M(X^2)-[M(X)]^2=15{,}3-(-0{,}3)^2=15{,}21\ ;$$

$$D(Y)=M(Y^2)-[M(Y)]^2=13{,}0-(3{,}4)^2=1{,}44.$$

Наконец, пользуясь свойствами математического ожидания и дисперсии, а также независимостью случайных величин Х и У, получаем:

$$M(Z)=M(2X-7Y)=2M(X)-7M(Y)=2(-0{,}3)-7\cdot 3{,}4=-24{,}4\ ;$$

$$D(Z)=D(2X-7Y)=4D(X)+49D(Y)=4\cdot 15{,}21+49\cdot 1{,}44=131{,}4.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Из корзины, в которой находятся 4 белых и 7 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется черным.

2. В корзине 20 шаров: 5 синих, 4 красных, остальные черные. Выбирают наудачу один шар. Определить, с какой вероятностью он будет цветным.

3. В одной корзине находятся 4 белых и 8 черных шаров, в другой – 3 белых и 9 черных. Из каждой корзины вынули по шару. Найти вероятность того, что оба шара окажутся белыми.

4. Бросают две монеты. Определить, с какой вероятностью появится «герб» на обеих монетах.

5. Из корзины, в которой находятся 7 белых и 3 черных шара, вынимают один шар. Найти вероятность того, что шар окажется белым.

6. В лотерее 100 билетов. Разыгрывается один выигрыш в 200 рублей и двадцать выигрышей по 50 рублей. Пусть X – величина возможного выигрыша для человека, имеющего один билет. Составить закон распределения этой случайной величины X.

7. Случайная величина X задана законом распределения:

1	4	6
0,1	0,6	0,3

Найти ее математическое ожидание.

8. Согласно статистике, вероятность того, что двадцатипятилетний человек проживет еще год, равно 0,992. Компания предлагает застраховать жизнь на год на 1000 у.е. с уплатой 10 у.е. взноса. Определить, какую прибыль ожидает компания от страховки одного двадцатипятилетнего человека.

9. Случайная величина X задана законом распределения:

1	5	8
0,1	0,2	0,7

Найти дисперсию и среднее квадратичное отклонение этой случайной величины X.

10. Случайные величины X и Y заданы законом распределения. Найти математическое ожидание этих случайных величин и определить по таблицам, какая из данных величин более рассеяна. Подсчитать дисперсии $D(X)$ и $D(Y)$. Убедиться, что $D(X)>D(Y)$.

X	2	20	28	50
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Y	23	25	26
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Перечень рекомендуемых учебных изданий, дополнительной литературы:

Основные источники:

1. Дадаян А. А. Математика: Учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 544 с.: 60x90 1/16. - (Профессиональное образование). (переплет)ISBN 978-5-91134-460-3.
2. Шипачев В. С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие / В.С. Шипачев. - 10-е изд., стер. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 304 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010071-5
3. Ячменёв Л.Т. Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование; Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-369-01032-7

Дополнительные источники:

1. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для учреждений СПО/ В. П. Григорьев, Ю. А. Дубинский – 10-е изд.,стер. – М.: Издат. Центр «Академия», 2014 ISBN 978-5-4468-0784-0
2. Математика: учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования / С. Г. Григорьев, С. В. Иволгина; под ред. В. А. Гусева. – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 416 с., ISBN: 978-5-4468-0624-9
3. Канцедал С. А. Дискретная математика: Учебное пособие / С.А. Канцедал. - М.: ИД ФОРУМ: НИЦ Инфра-М, 2013. - 224 с.: 60x90 1/16. - (Профессиональное образование). (переплет)ISBN 978-5-8199-0304-9.

Интернет-ресурсы:

1. www.fcior.edu.ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).
2. www.school-collection.edu.ru (Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов).
3. http://www.studentlibrary.ru/ Электронно-Библиотечная Система «Консультант Студента».
4. http://e.lanbook.com/ Электронная библиотечная система издательства «Лань».
5. http://www.biblio-online.ru/ Электронно-библиотечная система.
6. http://znanium.com/ Электронно-библиотечная система.
7. http://www.iprbookshop.ru/ Электронно-библиотечная система.