Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**
(ВлГУ)

Колледж инновационных технологий и предпринимательства

УТВЕРЖДАЮ
Директор колледжа ВлГУ

______________ Ю.Д. Корогодов

«_____» ________________ 20___г.

Рассмотрено и одобрено на заседании ПЦК
естественно-научных дисциплин колледжа ВлГУ
от «______» _______________ 20____г.

_______________ Г.П. Тонконог

Курс практических занятий

УЧЕБНОЙ ДИСЦИПЛИНЫ ОБЩЕОБРАЗОВАТЕЛЬНОГО ЦИКЛА

МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА; ГЕОМЕТРИЯ

для специальностей среднего профессионального образования
гуманитарного профиля

Владимир 20___ г.

Пояснительная записка

Курс практических занятий используется для проведения практических занятий по математике для студентов 1-го курса специальностей среднего профессионального образования гуманитарного профиля. Практические задания разработаны в соответствии с учебной программой. Максимально охвачены все разделы математики: алгебра и начала математического анализа, геометрия, теория вероятностей и математическая статистика. Практические занятия служат связующим звеном между теорией и практикой. Они необходимы для закрепления теоретических знаний, полученных на уроках теоретического обучения, а так же для получения практических знаний.

К практическому занятию от студента требуется предварительная подготовка, которую он должен провести перед занятием.

В зависимости от содержания они могут выполняться студентами индивидуально или фронтально.

Практические занятия проводятся с целью:

- формирования практических умений в соответствии с требованиями к уровню подготовки обучающихся установленными рабочей программой дисциплины по конкретным
- обобщение, систематизация, углубление, закрепление полученных теоретических знаний;
- совершенствование умений применять полученные знания на практике, реализацию единства интеллектуальной и практической деятельности.

Данный курс рассчитан на 76 учебных часов.

Может быть полезна преподавателям математики.

Кафедра-разработчик: Колледж инновационных технологий и предпринимательства ВлГУ.

Составили: Гаврилова И.Е. - ст.преподаватель КИТП

Яппарова И.С. - ст.преподаватель КИТП

Раздел 1. Развитие понятия о числе

Тема 1.1. Числа. Приближенные вычисления (4 часа)

Арифметические действия над числами, нахождение приближенных значений и погрешностей вычислений (абсолютной и относительной), сравнение числовых выражений. Приближенные вычисления и решение прикладных задач.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме.

Повторение теоретических основ:

1. Натуральные, целые и рациональные числа.
2. Арифметические действия над числами.
3. Действительные числа.
4. Приближенные вычисления. Округление чисел.
5. Абсолютная и относительная погрешности вычислений.
6. Комплексные числа.

1. Записать в виде обыкновенной дроби числа:

1.1 2,(13) **1.2** 1,3(2)
1.3 3,17(5) **1.4** 0,(127)
1.5 5,1(28) **1.6** 11,5(3)
1.7 17,(18) **1.8** 26,3(34)

2. Выполнить действия и результат изобразить геометрически.

2.1 $(2-3i)-(-3+i)+(-2+5i)$

2.2 $(-1+5i)+(-3-4i)-(-7+2i)$

3. Выполнить действия:

3.1 $2i^7+3i^{101}-5i^{39}+4i^{84}-i^{47}$

3.2 $3i^{14}+5i^{10}-3i^{27}+i^{72}$

3.3 $(2-i\sqrt{2})^2$

3.4 $\dfrac{\sqrt{2}+i^{37}}{1+i^{16}}$

3.5 $\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{1-i^{14}}$

3.6 $\dfrac{-2i}{1-i^3}$

3.7 $\dfrac{3i^{27}+(i\sqrt{3})^2}{i^5}$

3.8 $\dfrac{(2+i)(1+i)}{3-i^9}$

3.9 $\dfrac{1+i}{2+5i}+\dfrac{i-2}{2-5i}$

3.10 $\dfrac{3-4i}{1+2i}-\dfrac{2+i}{1-3i}$

3.11 $\dfrac{1+3i}{i}-i+\dfrac{1+i}{1-i}$

3.12 $\dfrac{(-1+i\sqrt{3})^2}{8}$

3.13 $\dfrac{(1+i)^2}{(2-2i)^2}\cdot\left(\dfrac{3-i}{2+i}-\dfrac{2-i}{3+i}\right)$

3.14 $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^3$

3.15 $\left(\dfrac{1-i\sqrt{2}}{1+i\sqrt{2}}\right)^2\cdot((2+i\sqrt{2})^2+5)$

3.16 $\dfrac{-\sqrt{3}+i^{39}}{i^{20}}$

3.17 $\dfrac{3i^{15}+(i\sqrt{3})^4}{i^9}$

3.18 $\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2-\dfrac{(1+i\sqrt{3})^2}{2i^{16}}$

3.19 $\dfrac{3i^{41}-(i\sqrt{3})^2}{2i^{10}}$

3.20 $\dfrac{(1-2i)^2}{2+i}-i^{23}+5i^6$

4. Найти модуль и аргумент комплексного числа.

4.1 $z=2-3i$
4.2 $z=-4+3i$
4.3 $z=-3-i$
4.4 $z=5+2i$
4.5 $z=2$
4.6 $z=-4i$
4.7 $z=-3$
4.8 $z=2i$

Раздел 2. Основы тригонометрии

Тема 2.1. Тригонометрические функции числового аргумента (6 часов)

Радианный метод измерения углов вращения и связь с градусной мерой. Основные тригонометрические тождества, формулы сложения, удвоения, преобразование суммы тригонометрических функций в произведение, преобразование произведения тригонометрических функций в сумму.

Повторение теоретических основ:

1. Определение тригонометрических функций числового аргумента ($\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$, $\operatorname{ctg}\alpha$).
2. Знаки тригонометрических функций по четвертям.
3. Значения тригонометрических функций в некоторых углах.
4. Соотношение между тригонометрическими функциями одного аргумента (тригонометрические тождества).
5. Теоремы сложения.
6. Формулы двойного аргумента.
7. Формулы понижения степени.
8. Правило приведения тригонометрических функций к функциям острого угла.
9. Дополнительные углы и их свойства.
10. Формулы преобразования суммы или разности тригонометрических функций в произведение.
11. Четность, нечетность тригонометрических функций.
12. Периодичность тригонометрических функций.

1.*Найти радианную меру дуг* :

$14°5'; 75°; 130°12'; 86°54'; 215°12';$

2. *Найти градусную меру дуг* :

$\dfrac{5\pi}{36}; \dfrac{7\pi}{12}; \dfrac{5\pi}{9}; \dfrac{11\pi}{30}; \dfrac{4\pi}{3}; \dfrac{11\pi}{6}; 0{,}78; 1{,}2; 4{,}3;$

3.*Вычислите радиус окружности, если дуга длиной* 0,84 *м содержит* 1,5 *радиан.*

4.*Углы треугольника соотносятся, как* $1:3:5$. *Вычислите их величины в радианной мере.*

5.*На числовой окружности постройте точки соответствующие числам* :

$\dfrac{\pi}{6};\quad \dfrac{\pi}{4};\quad -\dfrac{2\pi}{3};\quad -\dfrac{3\pi}{4};\quad 1{,}5;\quad 5;\quad -2; 6;\quad -4;$

6. *Могут ли синус или косинус быть равными* :

$0{,}85;\quad -\frac{\sqrt[3]{3}}{3};\quad \sqrt{10};\quad \sqrt{\frac{10}{\pi}};\quad \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$ при $a>0\quad b>0$;

7. *Определить знак выражения* :

7.1. $\cos 150^\circ$; 7.2. $\operatorname{tg} 220^\circ$; 7.3. $\operatorname{ctg} 400^\circ$; 7.4. $\sin 238^\circ$;

7.5. $\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{3\pi}{4}$; 7.6. $\operatorname{tg}\frac{2\pi}{3}-tg\frac{3\pi}{4}$; 7.7. $\sin 130^\circ - \sin 140^\circ$;

7.8. $\cos 50^\circ - \operatorname{ctg} 50^\circ$; 7.9. $\sin 100^\circ \cdot \sin 120^\circ$; 7.10. $\cos 200^\circ \cdot \sin 110^\circ$;

7.11. $\sin 150^\circ \cdot \cos 150^\circ \cdot \operatorname{tg} 150^\circ$; 7.12. $\sin 320^\circ \cdot \cos 125^\circ \cdot \operatorname{tg} 250^\circ$.

8. *Проверьте равенства* :

8.1. $\sin\pi+3\cos\frac{3\pi}{2}-tg^2\frac{\pi}{3}+ctg^2\frac{\pi}{6}=0$; 8.2. $\sin^3\frac{\pi}{4}+\cos^3\frac{\pi}{4}-\sin\frac{\pi}{4}$;

8.3. $2\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)+3\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)-3ctg\left(-\frac{\pi}{4}\right)+4tg0=2.$

9. *Дано* : $\operatorname{tg}\alpha=-\frac{3}{4}\qquad \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

Вычислить : $ctg\alpha;\ \cos\alpha;\ \sin\alpha$

10. *Дано* : $\cos\alpha=-\frac{12}{13}\qquad \pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$;

Вычислить : $\sin\alpha;\ \operatorname{tg}\alpha;\ \operatorname{ctg}\alpha$

11. Дано : $\sin\alpha=\frac{3}{5}\qquad \frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$;

Вычислить : $\cos\alpha;\ tg\alpha;\ ctg\alpha$

12. Дано : $\operatorname{ctg}\alpha=\frac{8}{15}\qquad \frac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$;

Вычислить : $\sin\alpha;\ \cos\alpha;\ tg\alpha$

13. Вычислить:

13.1. $\frac{2\sin\alpha\cdot\cos\alpha}{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)}$, *при* $\alpha=60^\circ,\beta=120^\circ$; 13.2. $\frac{4-2\operatorname{tg}^2 45^\circ+ctg^4 60^\circ}{3\sin^3 90^\circ-4\cos^2 60^\circ+4ctg45^\circ}$;

13.3. $3-\sin^2\pi-2\cos\frac{\pi}{6}+3tg\frac{\pi}{3}-4ctg\frac{\pi}{2}$; 13.4. $\sin\alpha+\sin 2\alpha+\sin 3\alpha$, *при* $\alpha=\frac{\pi}{6}$

13.5. $\frac{5+ctg^4\frac{\pi}{6}-tg^2\frac{\pi}{4}}{ctg\frac{\pi}{4}-4\cos^2\frac{\pi}{3}-8\sin^3\frac{\pi}{6}}$; 13.6. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)-2tg\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-ctg\left(-\frac{\pi}{2}\right)$;

13.7. $\cos^3\left(-\frac{\pi}{3}\right)-ctg^3\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin^3\left(-\frac{\pi}{6}\right)$;

13.8. $\frac{\left(2a\sin\frac{\pi}{6}\right)^3-\left(btg\frac{\pi}{4}\right)^3-\left(2ab\cos\frac{\pi}{2}\right)^2}{(a\cos 0)^2+2ab\cos\frac{\pi}{3}+2b^2\cos^2\frac{\pi}{4}}, a=1, b=2$

14. Упростить выражение:

14.1. $\operatorname{tg}^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+ctg^2\alpha\cdot\sin^2\alpha$; 14.2. $\frac{\cos^3\alpha-\sin^3\alpha}{1+\sin\alpha\cdot\cos\alpha}$;

14.3. $(1+\sin\alpha)\cdot(tg\alpha+ctg\alpha)\cdot(1-\sin\alpha)$;

14.4. $\dfrac{\cos^2(2\pi-\alpha)+\sin^2\left(\dfrac{3}{2}\pi-\alpha\right)}{tg^2\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot ctg^2\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}$;

14.5. $\dfrac{\sin^3\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}{tg^3\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)\cdot\cos^3\left(\alpha-\dfrac{3\pi}{2}\right)}$;

14.6. $\sin(\alpha-90^\circ)-\cos(\alpha-180^\circ)+tg(\alpha-270^\circ)+ctg(360^\circ+\alpha)$;

14.7. $\dfrac{\cos\left(-\dfrac{5\pi}{6}\right)}{\cos\dfrac{11\pi}{6}}-\dfrac{tg\dfrac{\pi}{6}\cdot\sin\dfrac{5\pi}{6}}{\cos\pi}+\cos\left(-\dfrac{4\pi}{3}\right)\cdot ctg\dfrac{2\pi}{3}$;

14.8. $\dfrac{\sin 7\alpha - \sin 5\alpha}{\sin 7\alpha+\sin 5\alpha}$;

14.9. $\dfrac{\cos\alpha-\cos 3\alpha+\cos 5\alpha-\cos 7\alpha}{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha+\sin 7\alpha}$;

14.10. $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha+\sin 5\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha+\cos 5\alpha}$;

14.11. $\dfrac{1+tg2\alpha\cdot tg\alpha}{ctg\alpha+tg\alpha}$;

14.12. $\dfrac{\sin(\pi-\alpha)\cdot ctg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(2\pi-\alpha)}{tg(\pi+\alpha)\cdot tg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\sin(-\alpha)}$;

14.13. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-\cos\alpha\cdot\sin\beta}{\cos(\alpha-\beta)-\sin\alpha\cdot\sin\beta}$;

14.14. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha\cdot\cos\beta}{2\sin\alpha\cdot\sin\beta+\cos(\alpha+\beta)}$;

14.15. $\dfrac{\sin 2\alpha\cdot\cos\alpha}{(1+\cos 2\alpha)\cdot(1+\cos\alpha)}$;

14.16. $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha\cdot\mathrm{tg}2\alpha}{\mathrm{tg}2\alpha-\mathrm{tg}\alpha}$;

14.17. $(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-(\sin\alpha-\cos\alpha)^2$;

14.18. $\dfrac{\sin^2\alpha-\sin^2\beta}{\sin\alpha\cdot\cos\beta-\sin\beta\cdot\cos\alpha}$;

14.19. $\dfrac{\mathrm{tg}(45^\circ+\alpha)+tg(\alpha-45^\circ)}{ctg(\alpha+45^\circ)+ctg(45^\circ-\alpha)}$;

14.20. $\dfrac{\sin(\alpha+\beta)-2\sin\alpha+\sin(\alpha-\beta)}{\cos(\alpha+\beta)-2\cos\alpha+\cos(\alpha-\beta)}$.

15. Доказать тождества:

15.1. $\dfrac{tg\alpha}{1-tg^2\alpha}\cdot\dfrac{ctg^2\alpha}{ctg\alpha}=1$;

15.2. $\dfrac{\cos^2(4\pi-\alpha)}{tg^2(9\pi+\alpha)+1}=\cos^4\alpha$;

15.3. $\dfrac{\cos(6\pi+\alpha)\cdot tg(3\pi-\alpha)}{\sin(4\pi-\alpha)\cdot ctg(5\pi+\alpha)}=tg\alpha$;

15.4. $\dfrac{\sin(2\pi-\alpha)\cdot tg\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot ctg\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\cos(2\pi+\alpha)\cdot tg(\pi+\alpha)}=1$;

15.5. $\sin(6\pi-x)\cdot\cos(8\pi-x)\cdot tg(9\pi-x)\cdot ctg(10\pi-x)=-\dfrac{1}{2}\sin 2x$;

15.6. $\dfrac{\mathrm{tg}\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)\cdot\cos\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)\cdot\cos(-\alpha)}{ctg(\pi-\alpha)\cdot\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\alpha\right)}=\sin\alpha$;

15.7. $tg10^\circ\cdot tg20^\circ\cdot tg30^\circ\cdot tg40^\circ\cdot tg50^\circ\cdot tg60^\circ\cdot tg70^\circ\cdot tg80^\circ=1$;

15.8. $\dfrac{\sin 2\alpha}{1+\cos 2\alpha}\cdot\dfrac{\cos\alpha}{1+\cos\alpha}=tg\dfrac{\alpha}{2};$ 15.9. $\dfrac{1}{\cos^4\alpha+\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha+\sin^2\alpha+tg^2\alpha}=\cos^2\alpha;$

15.10. $\dfrac{1-2\cos^2(\pi+\alpha)}{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)}+\dfrac{1-2\cos^2(\pi-\alpha)}{\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)+\cos(\pi+\alpha)}=2\sin\alpha;$

15.11. $\dfrac{\left(\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+\alpha\right)+\sin(\pi-\alpha)\right)^2-1}{tg\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin(\pi+\alpha)*\cos(\pi-\alpha)}=2tg^2\alpha;$ 15.12. $\dfrac{\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta}{\mathrm{tg}(\alpha+\beta)}+\dfrac{tg\alpha-tg\beta}{tg(\alpha-\beta)}=2;$

15.13. $\sin^6\alpha+\cos^6\alpha+0{,}75\sin^2 2\alpha=1;$ 15.14. $\dfrac{\sec^2\dfrac{\alpha}{2}\left(ctg^2\dfrac{\alpha}{2}-ctg^2\dfrac{3\alpha}{2}\right)}{\cos\alpha\left(1+ctg^2\dfrac{3\alpha}{2}\right)}=8;$

15.15. $\dfrac{\cos 3\alpha-\cos\alpha}{2\sin\alpha\cdot\sin 2\alpha}=-1;$ 15.16. $\dfrac{\sin 2\alpha-\sin\alpha}{1-\cos\alpha+\cos 2\alpha}=tg\alpha;$

15.17. $\dfrac{\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha}{ctg^2\alpha-\cos^2\alpha}=tg^6\alpha;$ 15.18. $(\sin\alpha+\sin\beta)^2\cdot(\cos\alpha+\cos\beta)^2=4\cos^2\dfrac{\alpha-\beta}{2}.$

Контрольная работа. Основные тригонометрические формулы.

Тема 2.2. Функции, их свойства и графики. (4 часа)

Определение функций. Построение и чтение графиков функций. Исследование функции. Свойства линейной, квадратичной, кусочно-линейной и дробно-линейной функций. Непрерывные и периодические функции. Преобразование графика функции. Свойства и графики тригонометрических функций. Обратные функции и их графики. Обратные тригонометрические функции. Гармонические колебания.

Повторение теоретических основ:

1. Определение функции.
2. Область определения и множество значений функции.
3. Алгоритм исследования функции.
4. Графики и свойства линейной, квадратичной, кусочно-линейной и дробно-линейной функций.
5. Преобразование графиков.
6. Свойства и графики тригонометрических функций.
7. Обратные функции.
8. Обратные тригонометрические функции.
9. Гармонические колебания.

1. Найти область определения функции и вычислить ее значение, если:

1.1 $f(x)=4x^3+5x$

при x = - 1,26

1. Найти область определения функции и вычислить ее значение, если:

1.1 $f(x)=4x^3+5x$

при x = - 1,26

1.2 $f(x)=\dfrac{4x}{x-5}$

при x = 0,764

1.3 $f(x)=\dfrac{x-8}{x^2-7x+12}$
при x = 1,26

1.4 $f(x)=\sqrt{4-x^2}+\dfrac{1}{x}$
при x = 0,284

1.5 $f(x)=\sqrt{4+x}-\sqrt{x+2}$
при x = 1,52

1.6 $f(t)=\dfrac{1}{\sqrt{t^2-3}}$
при t = 4,17

1.7 $g(x)=\sqrt{\dfrac{1}{3}x^2-3}$
при x = 4,17

1.8 $y=\sqrt{20+3x-2x^2}$
при x = 1,82

1.9 $\psi(z)=\sqrt{\dfrac{(z-1)(z+5)}{z^2}}$
при z = 2,78

1.10 $f(x)=\sqrt[3]{x^2-4}+\sqrt{\dfrac{2}{x^2-3}}$
при x = 4,81

1.11 $f(x)=\dfrac{2}{x^2-5x+6}$
при x = 3,17

1.12 $y=\sqrt{\dfrac{x-2}{x+3}}$
при x = 2,36

1.13 $f(x)=\sqrt{2x-3x^2}$
при x = 0,426

1.14 $f(x)=\sqrt{x+1}-\sqrt{x^2-5x+4}$
при x = 4,03

1.15 $g(t)=\sqrt{5-t-\dfrac{6}{t}}$
при t = 1,49

1.16 $f(x)=\dfrac{\sqrt[3]{5-x^2}}{3x-7}$
при x = 3,12

2. Схематически построить графики функций:

2.1 $y=\left|\dfrac{3}{2}x\right|$

2.2 $y=|-4x-3|$

2.3 $y=\dfrac{6}{|x|}$

2.4 $f(x)=\dfrac{-12}{|x|}$

2.5 $y=2x^2-6x+5$

2.6 $f(x)=|x^2-4|$

2.7 $f(x)=|x^2-4x+1|$

2.8 $f(x)=x^3-3$

2.9 $y=(x-2)^3$

2.10 $y=-\dfrac{12}{x-4}$

2.11 $y=\dfrac{9x}{x^2-4}$

2.12 $y=\dfrac{4x}{x^2-9}$

3. Найти область изменения функции**:**

3.1 $y=4x+1$ **3.2** $y=x^3+2$

3.3 $y=\dfrac{x}{|x|}$ **3.4** $y=\dfrac{3}{x^2+2}$

3.5 $y=x^2+x+1$ **3.6** $y=|x^2+3x|$

3.7 $y=\sqrt{\dfrac{x+3}{x-2}}$ **3.8** $y=\dfrac{1}{|x|}$

3.9 $y=\dfrac{2x}{x^2+1}$ **3.10** $y=-\dfrac{4x}{x^2+4}$

3.11 $y=5-(x+3)^2$

3.12 $y = |x-2| - |x+1|$

3.13 $y = -2x^2 + 3x - 1$

3.14 $e = 2x^2 + 3x - 5$

3.15 $y = -5 + 2x - x^2$

3.16 $y = x^2 + x - 6$

4. Найти интервалы возрастания и интервалы убывания функции**:**

4.1 $y = 2x$

4.2 $y = -\frac{1}{2}x$

4.3 $y = \frac{1}{x}$

4.4 $y = \frac{2}{x^2+1}$

4.5 $y = |x-2|$

4.6 $y = x^2 + 4x - 2$

4.7 $y = -x^2 + 3x + 4$

4.8 $y = (x-1)^2 - 3$

4.9 $y = |-x^2 - 3x + 4|$

4.10 $y = 2x^3 - x$

5. Определить наибольшее значение функции**:**

5.1 $y = 16 - x^2$

5.2 $y = -3 + 4x - x^2$

5.3 $y = (3-x)(x+1)$

5.4 $y = \frac{3}{x^2+x+1}$

5.5 $y = \frac{2}{\sqrt{4x^2+3}}$

5.6 $y = \sqrt{-2x^2 - 3x + 1}$

6. Определить наименьшее значение функции**:**

6.1 $y = x^2 - 9$

6.2 $y = (x+2)(x-3)$

6.3 $y = x^2 + 6x$

6.4 $y = \sqrt{x^2 - 4x + 13}$

6.5 $y = \sqrt{x^2 + 3}$

6.6 $y = \frac{5}{3 - x^2}$

7. Исследовать функцию на четность и нечетность**.**

7.1 $f(x) = 3x^3 + 4x$

7.2 $f(x) = \frac{4x^2}{x^4 - 2}$

7.3 $f(x) = \frac{3x}{1 - x^2}$

7.4 $f(x) = \frac{5x}{x^3 - x}$

7.5 $f(x) = 3 - 2x + x^2$

7.6 $f(x) = x^3 + 4$

7.7 $f(x)=\dfrac{3-x}{4x+1}$

7.8 $f(x)=\dfrac{3x-1}{x^2+4}$

7.9 $f(x)=\dfrac{5x}{x^4+3}$

7.10 $f(x)=\sqrt{x^2-1}+\dfrac{1}{x^2+1}$

7.11 $f(x)=x^4-\sqrt{x^2+2}$

7.12 $f(x)=\sqrt[3]{(x+1)^2}+\sqrt[3]{(x-1)^2}$

8. Постройте графики функций:

8.1. $y=3\sin x$; 8.2. $y=2\cos x$; 8.3. $y=-\dfrac{1}{3}\sin x$; 8.4. $y=\cos x$;

8.5. $y=\sin 2x$; 8.6. $y=\sin\dfrac{1}{2}x$; 8.7. $y=\cos 2x$; 8.8. $y=\cos\dfrac{1}{2}x$;

8.9. $y=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$; 8.10. $y=\cos\left(x+\dfrac{\pi}{3}\right)$; 8.11. $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$; 8.12. $y=\cos\left(x-\dfrac{\pi}{6}\right)$.

9. Найдите период, частоту, амплитуду и начальную фазу следующих гармонических колебаний:

9.1. $y=2\sin\left(3x-\dfrac{\pi}{3}\right)$; 9.2. $y=\dfrac{1}{3}\sin\left(\pi\cdot x-\dfrac{\pi}{4}\right)$; 9.3. $y=3\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{6}\right)$;

9.4. $y=-3\sin\dfrac{x}{3}$; 9.5. $y=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}-2x\right)$; 9.6. $y=5\sin(2\pi t-3\pi)$.

10. Найдите амплитуду и начальную фазу сумм следующих гармонических колебаний:

10.1. $y_1=\sin t$ *и* $y_2=\cos t$; 10.2. $y_1=3\sin\dfrac{t}{2}$ *и* $y_2=5\sin\dfrac{t}{2}$;

10.3. $y_1=2\sin 2t$ *и* $y_2=2\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)$; 10.4. $y_1=\sqrt{2}\sin 5t$ *и* $y_2=\sqrt{2}\cos 5t$;

10.5. $y_1=2\sin 2t$ *и* $y_2=2\sin\left(2t+\dfrac{\pi}{3}\right)$; 10.6. $y_1=3\sin\dfrac{1}{2}t$ *и* $y_2=3\sin\dfrac{1}{2}t$.

Тема 2.3. Тригонометрические уравнения и неравенства (4 часа)

Обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус, арктангенс.

Решение простейших тригонометрических уравнений и *неравенств.*

Повторение теоретических основ:

1. Арксинус, арккосинус и арктангенс числа.
2. Простейшие тригонометрические уравнения и их решения.
3. Решение уравнений вида: $\sin\alpha=\pm1$, $\sin\alpha=0$, $\cos\alpha=\pm1$, $\cos\alpha=0$.
4. Решение тригонометрических уравнений различными способами (метод введения новой переменной, уравнения, сводящиеся к квадратному).
5. Решение тригонометрических неравенств.

1. Вычислить:

1.1. $\arcsin\dfrac{1}{2}$; 1.2. $arcctg\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$; 1.3. $\arcsin 0{,}788$; 1.4. $arcctg\,2{,}145$; 1.5. $\arcsin(-0{,}756)$;

1.6. $arctg(-0{,}4173)$; 1.7. $\arcsin\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 1.8. $\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 1.9. $arcctg1$; 1.10. $\arccos 0{,}9063$;

1.11. $arcctg0{,}9652$; 1.12. $\arccos(-0{,}8961)$; 1.13. $arcctg(-2{,}96)$; 1.14. $arctg(\sqrt{3})$;

1.15. $\sin\left(2\arccos\frac{1}{2}\right)$; 1.16. $\arcsin 0+\arcsin 1+\arcsin(-1)$; 1.17. $tg\left(\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)+arcctg\sqrt{3}\right)$;

1.18. $\cos\left(\frac{1}{2}\arcsin\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$; 1.19. $ctg(2\arccos* 0{,}764)$; 1.20. $\cos(\arcsin 0{,}456+arcctg1{,}52)$.

2. Решить уравнения:

2.1. $\sin 2x=\frac{1}{2}$; 2.2. $\cos\left(\frac{x}{3}-\frac{\pi}{4}\right)=0$; 2.3. $tg5x=1$; 2.4. $\sin\left(\frac{x}{4}-\frac{\pi}{3}\right)=0$; 2.5. $ctg\frac{x}{2}=0$;

2.6. $\sin\frac{x}{2}=-1$; 2.7. $\cos 3x=1$; 2.8. $tg\frac{x}{2}=0$; 2.9. $tg\left(x+\frac{\pi}{3}\right)=1$; 2.10. $ctg4x=1$;

2.11. $\sin 4x\cdot tg\frac{x}{2}=0$; 2.12. $\cos 2x\cdot tgx=0$; 2.13. $\sin 2x\cdot\cos x-\cos 2x\cdot\sin x=0$;

2.14. $2\sin^2 x=1$; 2.15. $\cos^2 x=1$; 2.16. $ctg^2x=3$; 2.17. $tg^2x=1$; 2.18. $tg^3x=tgx$;

2.19. $tgx(\sin x+\cos x)=0$; 2.20. $\cos x(tgx-1)=0$; 2.21. $tg\frac{x}{2}\cdot(1+\cos x)=0$;

2.22. $\sin 3x\cdot\cos x-\cos 3x\cdot\sin x=-\frac{\sqrt{3}}{2}$; 2.23. $\cos 4x\cdot\cos x+\sin 4x\cdot\sin x=-\frac{1}{2}$;

2.24. $4\sin^3 x+4\sin^2 x-3\sin x-3=0$; 2.25. $2\cos x+tgx-2tgx\cdot\cos x-1=0$;

3. Решить уравнения:

3.1. $2\sin^2 x-7\sin x+3=0$; 3.2. $4\cos^2 x+\sin x-1=0$;

3.3. $2\sin^2 x+3\cos x=0$; 3.4. $\cos^2 4x-\sin^2 4x-\cos 4x=0$;

3.5. $\cos 2x=\sin x$; 3.6. $3\sin^2\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)-\cos(x+4\pi)=0$;

3.7. $2\sin^2 x+5\sin\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)-2=0$; 3.8. $2\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos 2x$;

3.9. $\cos^2(90^\circ+x)-\cos^2 x-3\cos(90^\circ-x)+2=0$;

3.10. $ctg^2\left(x-\frac{\pi}{2}\right)-ctg\left(x-\frac{3\pi}{2}\right)-2=0$; 3.11. $4\sin x-\cos^2(\pi-x)-4=0$;

3.12. $5ctg^2x-8ctgx+3=0$; 3.13. $\sin^2 x-10\sin x\cdot\cos x+21\cos^2 x=0$;

3.14. $\cos^2 x+\sin x\cdot\cos x-1=0$; 3.15. $3\sin^2 x-4\cos^2 x=\frac{1}{2}\sin 2x$;

3.16. $\sin^2(x+\pi)-10\sin(x+\pi)\cdot\cos(x-\pi)+21\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=0$;

3.17. $3\sin^2 x+2\sin x\cdot\cos x-5\sin^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)=0$; 3.18. $3\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+5\cos^2 x-2=0$;

3.19. $\sin 5x+\cos\left(\frac{\pi}{2}-7x\right)=0$; 3.20. $\cos(x-70^\circ)=\sin(x+70^\circ)$;

3.21. $\cos x = \sin 3x$; 3.22. $1 - \cos x = 2\sin\frac{x}{2}$;

3.23. $\sin(30° + x) + \sin(30° - x) = \frac{1}{2}$; 3.24. $\cos 15x = \sin 5x$;

3.25. $3\sin x + 4\cos x = 4$; 3.26. $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$; 3.27. $8\sin x + 3\cos x = 5$;

3.28. $3\sin 2x + 2\cos 2x = 2$; 3.29. $\cos 3x + \sin 2x \cdot \sin x = 0$;

3.30. $\sin 2x - 2\sin x = \cos 2x - 2\cos x + 1$; 3.31. $\sqrt{3}(\cos x + \sin 3x) = \cos 3x + \sin x$.

4. Решить неравенства:

4.1. $\cos x > -\frac{1}{2}$; 4.2. $tgx < -\sqrt{3}$; 4.3. $\sin x < \frac{\sqrt{3}}{2}$;

4.4. $ctgx > \sqrt{3}$; 4.5. $\sin x < 0$; 4.6. $ctgx < 1$;

4.7. $\sin x > -\frac{1}{2}$; 4.8. $tgx > \frac{\sqrt{3}}{3}$; 4.9. $\sin x > -1$;

4.10. $\cos x < -\frac{\sqrt{3}}{2}$; 4.11. $\cos\frac{x}{2} < -\frac{1}{2}$; 4.12. $\sin\frac{x}{2} < 0$;

4.13. $ctgx > -\sqrt{3}$; 4.14. $\sin\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) > \frac{1}{2}$; 4.15. $\cos\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < \frac{\sqrt{3}}{2}$.

5. Решить системы уравнений:

5.1. $\begin{cases} x + y = a \\ \sin x + \sin y = a \end{cases}$; 5.2. $\begin{cases} 2^{\sin x + \cos y} = 1 \\ 16^{\sin^2 x + \cos^2 y} = 4 \end{cases}$; 5.3. $\begin{cases} x + y = a \\ tgx + tgy = a \end{cases}$; 5.4. $\begin{cases} \sin x \cdot \sin y = 0{,}36 \\ \cos x \cdot \cos y = 0{,}14 \end{cases}$.

Контрольная работа. Тригонометрические уравнения.

Раздел 3. Начала математического анализа

Тема3.1. Предел последовательности. (2 часа)

Числовая последовательность, способы ее задания, вычисления членов последовательности. Предел последовательности. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.

Повторение теоретических основ:

1. Определение числовой последовательности, способы ее задания.
2. Арифметическая и геометрическая прогрессии. Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия.
3. Предел последовательности.

1. Окрестностью какой точки является интервал (2,1; 2,3)?

а) 2; б) 2,15; в) 2,2.

2. Интервал (7; 5) окрестность точки 6, чему равен радиус этой окрестности?

а) 2; б) 1; в) 1,5.

3. Последовательность $y_n = \frac{1}{2n}$ **является:**

а) сходящейся; б) расходящейся; в) ничего определенного сказать нельзя.

(y_n)

4. Число b называют пределом последовательности , если:

а) в любой окрестности точки **b** содержатся все члены последовательности, начиная с некоторого номера;

б) в любой окрестности точки **b** содержатся некоторые члены последовательности, начиная с некоторого номера;

в) в любой окрестности точки **b** не содержатся члены последовательности.

5. Равенство $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = b$ **означает, что прямая** $y = b$ **является для графика** $y_n = f(n)$**:**

а) горизонтальной асимптотой;

б) вертикальной асимптотой;

в) наклонной асимптотой.

6. Какое из утверждений верно?

а) если последовательность имеет предел, то она монотонна;

б) если последовательность не монотонна, то она не имеет предела;

в) если последовательность ограничена, то она имеет предел.

7. Предел последовательности $y_n = \dfrac{(2n+1)(n-3)}{n^2}$ **равен:**

а) 0; б) 1; в) 2.

8. Сумма геометрической прогрессии $27, 9, 3, 1, \dfrac{1}{3}, \ldots$ **равна:**

а) 40; б) 41; в) 40,5.

9. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7n+9}{6n-1}$:

а) 0; б) $1\dfrac{1}{6}$; в) $2\dfrac{1}{6}$.

10. Найти сумму членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии**:**

10.1 $3\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}; \dfrac{2}{15}\ldots$ **10.2** $-\dfrac{8}{9}; \dfrac{2}{8}; -\dfrac{1}{2}\ldots$ **10.3** $\sqrt{\dfrac{4}{3}}; -\sqrt{\dfrac{3}{4}}; \sqrt{\dfrac{27}{64}}\ldots$

Тема3.2. Производная и ее применение. (4 часа)

Производная: механический и геометрический смысл производной.
Уравнение касательной в общем виде.
Правила и формулы дифференцирования, таблица производных элементарных функций.
Исследование функции с помощью производной.

Нахождение наибольшего, наименьшего значения и экстремальных значений функции.

Повторение теоретических основ:

1. Определение производной.
2. Механический и геометрический смысл производной.
3. Касательная к графику функции, уравнение касательной.
4. Правила и формулы дифференцирования.
5. Дифференцирование сложной функции.
6. Алгоритм исследования функции.
7. Нахождение с помощью производной: возрастание и убывание функции, точки экстремума, наибольшее и наименьшее значения функции.

Найти производные функций:

1. $y = x^4$ 2. $f(x) = 3x^5$ 3. $y = 4x^{-2}$ 4. $s = \frac{4}{3}t^4 - \frac{1}{2}t^2 + 2t$

5. $f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + 1$ Найти f'(3)

6. $y = 3x^3(x^2 - 7x + 4)$ 7. $y = 2\sqrt{x}$ 8. $y = \frac{1}{x^3}$ 9. $y = x^2\sqrt{x}$

10. $y = \frac{6x^2}{5\sqrt{x}}$ 11. $f(x) = \frac{6x^3}{7\sqrt{x}}$ Найти f'(1,24)

12. $f(x) = 3x^3\sqrt[3]{x^2}$ Найти f'(0,917)

13. $y = \frac{3x^3 - 4x}{5\sqrt{x}}$ 14. $y = \frac{x^2}{x^3 - 2x}$ 15. $y = \frac{3x^3 + 2x}{1 - 4x^2}$

16. $y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$ 17. $y = x(\sqrt{x} + 2)$ Найти y'(4,2)

18. $f(t) = \frac{t}{\sqrt[3]{t}}$ Найти f'(8) 19. $y = -\frac{\sqrt{x}}{3\sqrt[4]{x^3}}$

20. $f(x) = \frac{x}{1-x^2} + \frac{1}{x}$ 21. $y = \frac{2x^5}{3\sqrt{x}} + \frac{4}{x^3} - \frac{x^5}{2} + 3x - 1$

22. $y = \frac{4}{x^5} + x\sqrt{x} - \frac{x^2}{4} + 2$ 23. $f(x) = 6x^2\sqrt[3]{x} + \frac{5}{x^4} - \frac{x^3}{2}$

Уравнения касательной и нормали к кривой.

1. Составить уравнения касательной и нормали к графику функции $f(x) = x^2 + 4x + 5$ в точке с абсциссой $x = -3$.
2. К графику функции $f(x) = x + 3x^2$ в её точке с абсциссой $x = -1$ проведены касательная и нормаль. Составьте их уравнения.
3. Составьте уравнения касательной, проведённой к графику функции $y = e^{\frac{x}{2}}$ в точке её пересечения с осью OY.
4. Найдите точки, в которых касательная к параболе $y=x^2$ параллельна прямой $y-4x-1=0$ и перпендикулярна к ней.

5. Составьте уравнение касательной к кривой xy = 2 в точке N(2;1)
6. Какой угол с положительным направлением оси OX составляет касательная, проведённая к графику функции $f(x) = \frac{1}{6}x^3$ в точке с абсциссой $x = -\frac{3}{4}$
7. Составьте уравнение касательной и нормали к кривой $y = \frac{x}{1+x^2}$ в точке с абсциссой $x = 0$.
8. Составьте уравнения касательных к графику функции $f(x) = x^3 + x^2$, угловые коэффициенты которых равны 8.
9. Составьте уравнения касательных к графику функции $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$, параллельных прямой $4y - 7x = 28$
10. Вычислите площадь треугольника образованного касательной проведённой к графику функции $y = x^3$ в точке A(3;27) и осями координат.

Физические приложения производной.

1. Движение точки, движущейся прямолинейно, задано уравнением $s = t^3 + 5t^2 + 4$. Найдите скорость и ускорение в момент t = 2c
2. Найдите ускорение точки, если скорость точки, движущейся прямолинейно, задана уравнением $v = t^2 + t - 1$ в момент t = 3c
3. Точка движется прямолинейно по закону $s = 6t - t^2$. В какой момент времени скорость точки окажется равной нулю?
4. Точка движется прямолинейно по закону $s = t^2 - 8t + 4$. В какой момент времени скорость точки окажется равной нулю?
5. Закон изменения температуры T тела в зависимости от времени t задан уравнением $T = 0{,}2t^2$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени t = 10?
6. Температура тела T изменяется в зависимости от времени t по закону $T = 0{,}5t^2 - 2t$. С какой скоростью нагревается это тело в момент времени t = 5?
7. Тело массой 10 кг. движется прямолинейно по закону $s = 3t^3 + t + 4$. Найти кинетическую энергию тела ($mv^2/2$) через 4с после начала движения.
8. Тело массой 100кг. движется прямолинейно по закону $s=5t^2 - 2$. Найдите кинетическую энергию тела через 2с после начала движения.
9. Сила тока I изменяется в зависимости от времени t по закону $I=0{,}4t^2$ (I - в амперах, t - в секундах). Найдите скорость изменения силы тока в конце 8-ой секунды.
10. Изменение силы тока I в зависимости от времени t дано уравнением $I=2t^2-5t$ (I - в амперах, t - в секундах). Найдите скорость изменения силы тока в конце 10-ой секунды.
11. Угол поворота шкива в зависимости от времени t определяется из равенства $\varphi=t^2+3t-5$. Найти:
    а) среднюю угловую скорость в промежутке времени от t = 3 до t = 5
    б) угловую скорость в момент времени t = 5
12. Тело вращается вокруг оси, причём закон изменения угла $\varphi = 0{,}1t^2$. Найти угловую скорость вращения тела в момент t = 5.
13. Угол φ, на который поворачивается колесо через t секунд, определяется из равенства $\varphi = at^2 - bt + c$, где a, b, c - постоянные величины. Найти:
    а) угловую скорость вращения колеса; б) момент его остановки
14. Колесо вращается так, что угол поворота пропорционален квадрату времени. Первый оборот был сделан колесом за 8 сек. Определить угловую скорость колеса через 32 секунды после начала вращения.
15. Точка движется прямолинейно по закону $S=\frac{1}{2}\sqrt{t}$. Найти её скорость в момент t =2,25.
16. Движение точки задано уравнением $S = t^2 - 4t + 20$. В какой момент времени скорость точки будет равна нулю?

17. Движение точки задано уравнением: $S=\frac{1}{4}t^4 - 4t^3 + 16t^2$

а) В какие моменты времени точка была в начальном пункте?

б) В какие моменты времени скорость её равна нулю?

18. Пуля вылетает из пистолета вверх со скоростью 300м/сек. Найти скорость пули в момент t = 10 сек и определить сколько времени пуля поднимается вверх. Сопротивление воздуха не учитывается. **Замечание.** Высота S (в метрах), которую достигает за t секунд тело, брошенное вертикально вверх со скоростью v_0м/сек, определяется из формулы: $S = v_0t - 4{,}9t^2$.

19. С крыши дома, имеющего высоту равную 50 м брошен вертикально вверх мяч со скоростью 20м/сек. Найти:

а) скорость подъёма в конце второй секунды; б) момент начала падения

в) наибольшую высоту подъёма относительно поверхности земли.

20. Найти силу F, действующую на материальную точку массы « m », которая движется прямолинейно по закону $S = 2t^3 - t^2$ при t = 3с. .

Производная сложной функции.

Найти производные функции:

1. $y=(2x^3-4x^2+x)^7$ 2. $y=(x^3-1)^7$ 3. $y=1/(x^2-1)^4$

4. $f(x)=\sqrt{x^3-4x+2}$ 5. f(t)= `t^{2} - t + 1 Найдите f '(2)

6. $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 7. $y=\sqrt[5]{x^3-4x}$ 8. $f(x)=\sqrt[4]{(3x-x^2)^3}$

9. $y=x^2\cdot\sqrt{2x-1}$ 10. $f(x)=(t^2+1)\cdot\sqrt{t^2-1}$ 11. $f(x)=\sqrt{\frac{2}{2x^2+1}}$

12. $y=2x-1/\sqrt{x^2+4}$ 13. $y=x/\sqrt{a^2+x^2}$ 14. $Y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

15. $y=\sqrt{2px}$ 16. $y=\frac{2}{(x^3-4x+2)^5}$ 17. $y=\sqrt[3]{x^3-1}$

18. $f(x)=(2x-1)^2\cdot\sqrt{1-2x}$

Производные тригонометрических функций.

Найти производные функций:

1. y = sin7x 2. y = tg4x 3. y = cos5x 4. y = tgx-ctg2x

5. $y = \sin^3 x$ 6. $y = -1/4 \cos^4 x$ 7. $f(x)= -\mathrm{ctg}^5 x$ Найти $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$

8. $y = \sqrt{\sin 5x}$ 9. $y = \sin 4x\cdot\cos x$ 10. $y = \mathrm{tg}^5 3x-\sin 4x$

11. $y = \cos x-1/3 \cos^3 x$ 12. $y = 3/8\, x - 1/4 \sin 2x + 1/32 \sin 4x$

13. Точка движется прямолинейно по закону $S = a\cdot\cos\frac{\pi t}{2}$. Найти:

а) Скорость движения точки при $t = \frac{\pi}{4}$

б) При каких значениях t скорость точки равна 0

14. Точка движется прямолинейно по закону $S = \sin^2 t$. Найти время t, когда ускорение равно 0. Найти скорость движения в этот момент времени.

Тема3.3. Первообразная и интеграл. (4 часа)

Интеграл и первообразная.

Теорема Ньютона—Лейбница.

Применение интеграла к вычислению физических величин и площадей.

Повторение теоретических основ:

1. Таблица первообразных.
2. Интеграл (определенный и неопределенный).
3. Формула Ньютона—Лейбница.
4. Площадь криволинейной трапеции.

Найти неопределенные интегралы

1. $\int 5dx$;

2. $\int 6x^2 dx$;

3. $\int (4x^2 - x + 3)dx$;

4. $\int 2(3x-1)^2 dx$;

5. $\int \frac{x^3 + 2\sqrt{x}}{x} dx$;

6. $\int \frac{2\sqrt{x}}{x^5} dx$;

7. $\int (2x^3 - x^{-1})dx$;

8. $\int \frac{dt}{3t^2}$;

9. $\int \frac{du}{\sqrt[3]{u^2}}$;

10. $\int \frac{xdx}{3\sqrt[3]{x^2}}$;

11. $\int (4\sin x - 3\cos x)dx$;

12. $\int \frac{x^3 dx}{\cos\alpha}$;

13. $\int \left(2x - \frac{9}{2}\sqrt{x} - \frac{8}{x^2}\right)dx$;

14. $\int \left(\sqrt{x} + \frac{1}{\sqrt{x}} + 1\right)dx$;

15. $\int \frac{x+1}{\sqrt[3]{x}} dx$;

16. $\int 2^{x-1} dx$;

17. $\int 3^{x+2} dx$;

18. $\int \frac{5dx}{3\cos^2 x}$;

19. $\int \frac{2dx}{3\sin^2 x}$;

20. $\int \frac{4dx}{3\sqrt{1-x^2}}$;

21. $\int \frac{3dx}{2\left(1+x^2\right)}$;

22. $\int \frac{\sin 2x dx}{\cos x}$;

23. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin x + \cos x}$;

24. $\int \frac{\cos 2x dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$;

25. $\int \frac{dx}{\sin^2 x \cdot \cos^2 x}$;

26. $\int \frac{x^2 dx}{x^2 + 1}$;

27. $\int 3 \cdot \sec^2 x dx$;

28. $\int ctg^2 x dx$;

29. $\int 3tg^2 x\, dx$;

30. $\int \sqrt{2 + 2\cos 2x}\, dx$;

31. $\int \frac{x^2 - 4x - 5}{x+1} dx$

Простейшие приложения неопределенного интеграла.

1.Найти функцию, производная которой $y' = 2x - 3$, если при х = 2 у = 6.

2.Найти $\int(\cos x - \sin x)dx$,если при значение первообразной функции равно 6 при х = π

3.Найти уравнение кривой, если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен 2х

4. Найти уравнение кривой , проходящей через точку А(0;1) , у которой угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $3x^2 - 4x + 1$.

5.Для функции $\frac{1}{\cos^2 x}$ найдите первообразную, график которой проходит через точку $\left(\frac{\pi}{6};0\right)$

6.Найти уравнение кривой, проходящей через точку М (1;4), если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $3x^2 - 2x$

7 Составьте уравнение кривой, проходящей через точку А (–1;3), если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен утроенному квадрату абсциссы точки касания.

8. Найти уравнение кривой, проходящей через точку А(0;1) , у которой касательная в любой точке имеет угловой коэффициент, равный ординате точки касания.

9. Найдите ту первообразную функции f (x)= $3x^2 + 2x + 1$ график которой проходит через начало координат.

10. Одна из первообразных функции $\frac{1}{\cos^2 x}$ проходит через точку $\left(\frac{\pi}{6};0\right)$, а вторая – через точку $\left(\frac{\pi}{3};1\right)$. График какой из них расположен выше? какова разность этих первообразных?

11. Составьте уравнение кривой, проходящей через точку М(1;4), если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен кубу абсциссы точки касания.

12. Составьте уравнение кривой, проходящей через точку М (е; 2), если угловой коэффициент касательной в каждой ее точке равен $1/x$

13. Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону $v = 3t^2 - 2t$. Найти закон движения.

14. Скорость прямолинейного движения точки изменяется по закону v(t) = $3t^2 + 4$. Найти закон движения, если за время t = 2с точка прошла расстояние S равное 20 м.

15. Скорость прямолинейно движущейся точки задана формулой v (t) = 2t – 3. Найти закон движения точки, если к моменту начала отсчета она прошла путь 6 м.

16.Скорость прямолинейного движения точки v (t) = 2Cos t. Найти закон движения , если в момент t = π/6 точка находилась на расстоянии S = 4 м от начала отсчета.

17. Тело брошенное вертикально вверх с начальной скоростью v_0. Найдите закон движения этого тела (сопротивление воздуха не учитывать).

18.Точка движется прямолинейно с ускорением $a = 12t^2 + 6t$. Найдите закон движения точки , если в момент t = 1с ее скорость v = 8 м/с, а путь S = 6 м.

Определенный интеграл

Вычислить следующие интегралы

1. $\int_2^3 x^2dx$; **2.** $\int_{-1}^2 (x^2+2x+1)dx$; **3.** $\int_{-1}^1 e^x dx$; **4.** $\int_1^e \frac{dx}{x}$; **5.** $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$; **6.** $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{\sin^2 x}$;

7. $\int_{-1}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; **8.** $\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$; **9.** $\int_1^8 \sqrt[3]{x^2}dx$; **10.** $\int_{10}^{9} \frac{x-1}{\sqrt{x}}dx$; **11.** $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 2x dx$;

12. $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)dx$; **13.** $\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; **14.** $\int_1^{\sqrt{3}} \frac{dx}{1+x^2}$; **15.** $\int_0^{5\sqrt{3}} \frac{dx}{25+x^2}$; **16.** $\int_0^2 \frac{dx}{\sqrt{4-x^2}}$; **17.** $\int_0^{\frac{\pi}{12}} \frac{2dx}{Cos^2 3x}$.

Приложения определенного интеграла.

Вычисление площадей плоских фигур.

1. Вычислить площадь фигуры ограниченной линиями:

1.1 $x + 2y - 4 = 0$, $y = 0$, $x = -3$, $x = 2$. 1.2 $y = x^2$, $y = 0$, $x = 2$, $x = 3$.

1.3 $y = -x^2 + 4$, $y = 0$. 1.4 $y^2 = x$, $y \geq 0$, $x = 1$, $x = 4$.

1.5 $y = \sin x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \pi$. 1.6 $y = x^3$, $x = 1$, $x = 3$, $y = 0$. 1.7 $y = -6x$, $y = 0$, $x = 4$. 1.8 $y = 2e^x$, $y = 0$, $x = 0$, $x = 4$.

1.9 $y^2 = 9x$, $x = 1$, $x = 9$. 1.10 $y = x^2 - x$, $x = 0$, $x = 2$ и осью ох.

1.11 $y = 9 - x^2$ и осью ох. 1.12 $y = x^2 - 5x + 4$ и осью ох. 1.13 $x^2 = 4y$, $x = 0$, $y = 0$, $y = 4$. 1.14 $y = 2^x$, $x = 0$, $x = 3$, $y = 0$. 1.15 $y = 5x$, $x = 2$, $y = 0$. 1.16 $y = 4/x$, $x = 2$, $x = 6$, $y = 0$.

1.17 Найти площадь, ограниченную одной полуволной синусоиды и осью ОХ.

1.18 Найти площадь фигуры, ограниченной осями координат и кривой $y = 4(1-x^3)$.

1.19 $y = -x^2$, $x = -3$, $x = -1$, $y = 0$. 1.20 $y^2 = -9x$, $x = -4$, $x = -1$, $y = 0$.

2. Вычислить площадь фигуры, заключенной между линиями.

2.1 $y = x^2$ и $y = 2x$. 2.2 $y = x^2$ и $y = -3x$. 2.3 $y = x^2$ и $y = 2x + 8$. 2.4 $y = 2x^2 + 1$ и $y = x^2 + 10$. 2.5 $y = x^2$ и $y = 2 - x^2$. 2.6 $y = x$ и $x^2 = 3y$. 2.7 $y = -x^2 + x + 6$ и $y = 0$. 2.8 $y = x^2 - 6x + 9$ и $3x - y - 9 = 0$.

2.9 $y = \frac{1}{3}x^3$ и $y = 3x$. 2.10 $y = x^2 - 2x - 3$ и $x - y + 3 = 0$.

2.11 $y^2 = 9x$ и $y - x = 0$. 2.12 $y^2 = x$ и $x^2 = y$. 2.13 $y = x^2$ и $y = 1 - x^2$. 2.14 $x^2 + y^2 = 8$ и $y^2 = 2x$. 2.15 $y = x^2$ и $y = \frac{1}{x}$. 2.16 $y = e^{x}$, $y = e^{-x}$, $x = 1$.

2.17 $x - 2y + 4 = 0$, $3x + 2y - 12 = 0$ и $y = 0$. 2.18 $y = -x^2 - 1$, $x = 1$, $x = 4$, $y = 0$.

2.19 $y = 4x - x^2$, $x = 5$, $y = 0$. 2.20 $y = -x^2 + 5$ и $y = x + 3$

2.21 $y = 2x^2 - 1$ и $y = x^2$. 2.22 $y = x + 6$ и $y = 8 + 2x - x^2$. 2.23 $x = 2 - y - y^2$ и $x = 0$. 2.24 $y = \frac{1}{3}x^3$, $y = 0$, $x = -1$, $x = 2$.

2.25 $y = x^2$ и $y = 2x + 8$.

Вычисление пути, пройденного точкой.

1. Скорость движения точки изменяется по закону $v(t) = 3t^2 + 2t + 1$
Найти путь, пройденный точкой за 10 с от начала движения.

2. Скорость движения точки $V = 9t^2 - 8t$. Найти путь, пройденный точкой за четвертую секунду.
3. Скорость движения точки $V = 12t - 3t^2$. Найти путь пройденный точкой от начала движения до ее остановки.
4. Скорость движения тела задана уравнением $V = \left(2t + \dfrac{8}{t^2}\right)$ м/с. Найти путь, пройденный телом за вторую секунду.
5. Скорость движения тела задана уравнением $V = (18t - 3t^2)$м/с. Найти путь, пройденный телом от начала движения до его остановки.
6. Два тела начинают движение одновременно из одной и той же точки: одно со скоростью $V = 3t^2$ (м/мин), другое со скоростью $V = 2t$ (м/мин). На коком расстоянии друг от друга они будут через 10 минут, если они движутся по прямой линии в одном направлении.
7. Тело брошено с поверхности земли вертикально вверх со скоростью $V= (39{,}2 - 9{,}8t)$ м/с. Найти наибольшую высоту подъема тела.
8. Тело движется прямолинейно со скоростью $V = (2t + a)$ м/с. Найти значение a, если известно, что за промежуток времени от $t_1 = 0$ до $t_2 = 2$ с тело прошло путь 40 м.

Контрольная работа. Производная и интеграл.

Раздел 4. Корни, степени и логарифмы

Тема 4.1. Корни и степени. (4 часа)

Степень с действительными показателями.

1. Вычислить.

1.1 $\left(\frac{3}{5}\right)^{-1} \cdot \left(2 - 0.75^{-2}\right)^{-2} - 65 \cdot \left(\frac{1}{0.1}\right)^{-1}$

1.2 $\dfrac{2 \cdot 0.4^{-1}}{0.4^{-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}$

1.3 $16^{0.5} - \left(\frac{1}{16}\right)^{-0.75} + \left(\frac{1}{2}\right)^{-4}$

1.4 $0.6^{0.5} \cdot \left(2 - \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\right)^{-1} - 6 \cdot (-3)^{-1}$

1.5 $5^{\frac{3}{5}} \cdot 125 \cdot 25^{-0.3} \cdot 5^{-2.5}$

1.6 $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-3} \cdot 81^3 \cdot 9^{-6} + \left(\frac{1}{9}\right)^{-5} \cdot 3^{-5}}{\left(-\frac{1}{81}\right)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{49}\right)^{-\frac{1}{2}}}$

1.7 $\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \cdot 5^{-1} - \left(\frac{3}{4}\right)^0}{81^{-\frac{1}{2}}} + \left(-\frac{5}{3}\right)^{-2} - 5^{-1}$

1.8 $\left(\sqrt{12} - 2\sqrt{27} + 3\sqrt{75}\right) \cdot \sqrt{3}$

1.9 $\left(\sqrt{4 - \sqrt{7}} + \sqrt{4 + \sqrt{7}}\right)^2$

1.10 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{80}} \cdot 2^{-\sqrt{20}} + 9^{0.5} \cdot \left(\frac{1}{27}\right)^{-\frac{2}{3}} \cdot 3.7^0$

1.11 $6^{-\sqrt{8}} \cdot 6^{\sqrt{18}} - \left(-5^0\right) \cdot \left(4\sqrt{2}\right)^2 + \sqrt[-5]{0.00032}$

1.12 $3^{\sqrt{45}} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{-\sqrt{12}} - \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^{-0.25} \cdot 36^{\frac{1}{2}} \cdot 0.1^{-2}$

1.13 $5^{\sqrt{20}} \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^{-\sqrt{18}} + \left(125^4\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot 0.125^{-\frac{4}{3}}$

1.14 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-\sqrt{80}} \cdot 2^{\sqrt{45}} + 0.125^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{2}}$

1.15 $0.008^{-\frac{1}{3}} - \left(\frac{1}{6}\right)^{-2} + 256^{\frac{3}{8}} - 2^{-1} + 6.5$

1.16 $-2.4^0 \cdot \left(\left(\frac{7}{8}\right)^{-0.5}\right)^{-2} \cdot \left(\frac{7}{3}\right)^{-1} \cdot 9^{-\frac{1}{2}} + 3^{-1}$

1.17 $-5^0 \cdot \left(\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)^{-0.25} \cdot 36^{\frac{1}{2}} \cdot (0.1)^{-2}$

1.18 $\left(\left(4\frac{17}{27}\right)^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[\frac{1}{2}]{5}-\left(-3^{0}\right)\right)^{\frac{1}{2}}$

1.19 $\left(\frac{1}{10}\right)^{-5}\cdot 10^{-2}+\dfrac{(0.5)^{-2}-\left(\frac{2}{7}\right)^{0}}{(-2)^{-2}}$

1.20 $\dfrac{(-2.5)^{0}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^{-\frac{3}{2}}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{3}\cdot 16^{0.5}}$

1.21 $\sqrt{\sqrt{65}-7}\cdot\sqrt{\sqrt{65}+7}$

1.22 $\sqrt[3]{12-\sqrt{80}}\cdot\left(12+80^{0.5}\right)^{\frac{1}{3}}$

2. Выполнить действия.

2.1 $\left(\dfrac{a^{2}b^{-1}}{c^{-3}d^{4}}\right)^{-2}\Bigg/\left(\dfrac{3b^{2}d^{-3}}{4a^{-1}c^{2}}\right)^{-1}$

2.2 $\left(3a^{\frac{2}{3}}-b^{-1}\right)\cdot\left(3a^{\frac{2}{3}}+b^{-1}\right)$

2.3 $\left(\frac{1}{2}x^{0.25}+x^{0.75}\right)^{2}-x^{1.5}\cdot\left(1+x^{-0.5}\right)$

2.4 $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{2}$

2.5 $\left(a\sqrt{a}+\sqrt{\frac{a}{2}}-\sqrt{2a}\right)^{2}$

2.6 $\left(\dfrac{a^{\frac{3}{2}}+b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}+b^{\frac{1}{2}}}-(a+b)\right)\cdot a^{-\frac{1}{2}}b^{-\frac{1}{2}}$

2.7 $\dfrac{xy^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}y}{x-y}+y\left(x^{\frac{1}{2}}+y^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}$

2.8 $\dfrac{(1-x)^{\frac{1}{5}}}{(1-x)^{-\frac{4}{5}}}\cdot\left(1-x^{\frac{1}{2}}\right)+\dfrac{1}{x^{-\frac{1}{2}}}$

Тема 4.2. Показательная, логарифмическая и степенная функции. (6 часов)

1. Вычислить.

1.1 $\log_{0.1} x = -2$

1.2 $\log_{81} x = \frac{1}{2}$

1.3 $\log_x 7 = -1$

1.4 $\log_{\sqrt{x}} 8 = 3$

1.5 $\log_x 128 = -\frac{1}{2}$

1.6 $\log_{3\sqrt[3]{3}} x = -0.75$

1.7 $\log_x 3\frac{3}{8} = 3$

1.8 $\log_{\frac{2}{3}} 2.25 = x$

1.9 $\log_{5\sqrt[3]{5}} x = -0.8$

1.10 $\log_{2\sqrt[5]{2}} x = \frac{5}{6}$

1.11 $\log_{0.6} 4\frac{17}{27} = x$

1.12 $\log_{3\sqrt{3}} \frac{1}{81} = x$

1.13 $\log_{\sqrt{2}} 256 = x$

1.14 $\dfrac{\log_3 27 - \log_3 1}{\log_3 4.5 + \log_3 \frac{2}{3}}$

1.15 $\log_4 100 + \log_2 12 - 2\log_2 \sqrt{30} + 3^{\log_3 4}$

1.16 $\log_4 36 + \log_2 10 - 2\log_2 \sqrt{15} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 5}$

1.17 $\left(81^{\frac{1}{4}} - \frac{1}{2}\log_2 4 + 25^{\log_{125} 8}\right) \cdot 49^{\log_7 2}$

1.18 $49^{1-\log_7 2} - 5^{-\log_5 4}$

1.19 $\sqrt{3}^{1+\log_3 4} + 13^{\log_{13} 4}$

1.20 $0.04^{1+\log_5 0.02} - \sqrt{2}^{\log_2 25}$

1.21 $\log_{0.84}\left(\dfrac{16.7^{0.53} \cdot e^{0.3}}{\sqrt[4]{5.12}}\right)^{-2.7}$

1.22 $\log_{0.46}\left(\dfrac{2.78^{0.812} \cdot e^{-0.74}}{\sqrt[3]{5.12}}\right)^{1.82}$

1.23 $\log_{1.29}\left(\dfrac{0.817^{-0.32} \cdot \sqrt{11.7}}{e^{0.46}}\right)^{0.34}$

1.24 $\log_{0.48}\left(\dfrac{0.778^{-1.2} \cdot \sqrt{52.7}}{10^{-0.38} \cdot e^{1.7}}\right)^{-2.7}$

1.25 $\log_{13.4}\left(\dfrac{10^{0.847} \cdot \sqrt[5]{11.76}}{4.2^{-1.2}}\right)^{0.81}$

1.26 $\log_{1.6} \sqrt[5]{17.56^{0.23}}$

1.27 $\ln\left(\dfrac{4.17}{0.27}\right)^{-0.23}$

1.28 $\log_{0.93}\left(\dfrac{\sqrt[3]{5.12}}{4.86^{-1.2}}\right)^{1.2}$

1.29 $\log_{2.3} \sqrt[4]{5.12^{-0.7} \cdot 0.36^{0.98}}$

2. Прологарифмировать выражения.

2.1 $x = \dfrac{a^3 \sqrt[4]{b} c^2}{a+b}$

2.2 $x = \dfrac{(a+b)^3 \cdot \sqrt[5]{a^2}}{b^{-2} c^2 m^3}$

2.3 $z = \dfrac{3a^{-1} b^2 \sqrt[3]{a^2 - b^2}}{4\cos 25^\circ}$

2.5 $y = \sqrt[5]{\dfrac{a^2 \sqrt[3]{b+c}}{(a+b)^3 b^{-2}}}$

2.6 $z = \dfrac{\sqrt[3]{a^2 4b^{-1}}}{5\sqrt{a-b} \cdot (a+b)^2}$

2.7 $x = \dfrac{a^{-\frac{2}{3}} b^2 \sqrt{a^2 - b^2}}{2\cos^2 \lambda}$

2.4 $x = \dfrac{2a^{-5} b^{\frac{2}{3}} \sqrt[5]{(a-b)^2}}{3(a-b)^4}$

2.8 $x = \dfrac{5m^{-2}\sqrt{n}\cdot \sin 3\lambda}{3\sin^2\lambda \cdot \sqrt{\cos\lambda}}$

3. Найти x, если:

3.1 $\log x = \log a + 2\log(a+b) - \frac{1}{3}\log(a-b)$

3.2 $\log x = \frac{1}{2}\log a + \frac{1}{4}(\log b - \frac{2}{3}\log a + \log(a+b))$

3.3 $\log x = -\log(a+b) + \frac{2}{5}(2\log a + \frac{1}{2}\log b - \frac{2}{3}\log(a-b))$

3.4 $\log x = \frac{1}{2}(\log(a+b) - \frac{1}{2}\log(a-b)) - 2\log a$

3.5 $\log x = \frac{2}{3}(\log a - 2\log b) + \frac{1}{2}\log(a^2 + b^2)$

3.6 $\log x = \log 2 + \log 3 + \frac{1}{2}(\log a - \frac{1}{2}\log b) - \frac{7}{8}\log c$

3.7 $\log x = 3\log(a-b) - 2\log 2 - \log 3 - \frac{1}{2}(\log a + \frac{1}{2}\log b)$

3.8 $\log_{5.2} x = 0.38$

3.9 $\lg x = 1.24$

3.10 $\lg x = -0.276$

3.11 $\log_{0.76} x = -5.2$

3.12 $\ln x = 0.607$

3.13 $\ln x = -2.36$

3.14 $\ln x = -0.112$

4. Найти область определения функций:

4.1 $y = \lg(3x^2 + 7x + 2)$

4.2 $y = (\frac{1}{10})^{\sqrt{x^2-1}}$

4.3 $y = \dfrac{1}{\log_2(x+3)}$

4.4 $y = \dfrac{1}{3^{x^2}}$

4.5 $y = \log_3(x+4)$

4.6 $y = 2^{\frac{1}{x}}$

4.7 $y = \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$

4.8 $y = \log_{0.4}(5x - x^2 - 6)$

4.9 $y = \log_2(x+6) + \log_3(6-x)$

4.10 $y = \log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x+1}$

5. Построить графики функций:

5.1 $y = \log_3(x-1)$

5.2 $y = \log_{0.3}(9 - x^2)$

5.3 $y = \log_4(1-x)$

5.4 $y = \log_{0.4}|x|$

5.5 $y = -2^x$

5.6 $y = 3^{x+2}$

5.7 $y = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{x-3}$

5.8 $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x+2}$

5.9 $y = 2^{x-1}$

5.10 $y = 3^{-x}$

Показательные уравнения и неравенства.

1. Решить уравнения:

1.1 $\left(\frac{3}{7}\right)^{x}=\left(\frac{49}{9}\right)^{1-2x}$

1.2 $\left(\frac{2}{5}\right)^{x}=\frac{25}{4}$

1.3 $0{,}5^{5x-1}=2.5^{x-11}$

1.4 $\sqrt{3^{x}}=\frac{1}{\sqrt{27}}$

1.5 $4.7^{x^2-x-6}=1$

1.6 $\left(\frac{2}{3}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{27}{8}\right)^{2-x}=\frac{243}{32}$

1.7 $\sqrt[x]{9^{2x-1}}=3$

1.8 $\sqrt[x]{16}=\sqrt{4^{x}}$

1.9 $2^{x}\cdot5^{x}=1000$

1.10 $5^{\frac{7x+1}{5}}=0.04$

1.11 $\left(\frac{1}{3}\right)^{3x-2}=81^{4x+1}$

1.12 $\frac{2^{x+4}}{\sqrt[3]{4^{x-1}}}=0.25^{2-3x}$

1.13 $81^{\frac{1}{2}x+4}=\left(\frac{1}{3}\right)^{2x-2}\cdot\sqrt[5]{27^{x-3}}$

1.14 $32^{\frac{x+5}{x-7}}=0.25\cdot128^{\frac{x+17}{x-3}}$

1.15 $\sqrt[3]{5^{2x-3}}=\frac{25}{\sqrt[4]{5}}$

1.16 $2^{x^2-x-1}=0.5\cdot8^{2x-4}$

1.17 $2^{x}\cdot5^{x-3}=0.2\cdot10^{2-x}$

1.18 $13.2^{x}=8$

1.19 $0.096^{4-2x}=5.17$

1.20 $19^{x-3}=17$

1.21 $3^{x+1}+3^{x}=108$

1.22 $33\cdot2^{x-1}-2^{x+1}=29$

1.23 $2^{x+2}=\sqrt{0.5}$

1.24 $3^{\sqrt{2x+1}}=243$

1.25 $0.125^{x}=128$

1.26 $9^{-3x}=\left(\frac{1}{27}\right)^{x+3}$

1.27 $\left(\frac{5}{12}\right)^{2x-3}=2.4^{3x-2}$

1.28 $0.01\cdot2^{x}\cdot5^{x}=0.01^{2}\cdot10^{3x+3}$

1.29 $9^{x+1}+3^{x+2}-18=0$

1.30 $5^{2x}=155\cdot5^{x-1}+50$

1.31 $4^{x^2}-3\cdot2^{x^2}+2=0$

1.32 $2^{x}+2^{-x}=\frac{5}{2}$

1.33 $2^{x+1}-11+\frac{15}{2^{x}+1}=0$

1.34 $25^{x}+13\cdot10^{x}-7\cdot2^{2x+1}=0$

1.35 $9^{x-1}+3^{x+2}=90$

1.36 $3^{4\sqrt{x}}-4\cdot3^{2\sqrt{x}}+3=0$

1.37 $4^{2x-3}-3\cdot4^{x-2}-1=0$

1.38 $3^{x}+3^{x+1}+3^{x+2}=7^{x}+7^{x+1}+7^{x+2}$

1.39 $4\cdot3^{x}-9\cdot2^{x}=5\cdot3^{\frac{x}{2}}\cdot2^{\frac{x}{2}}$

1.40 $3^{x+1}-2\cdot3^{x-1}-4\cdot3^{x-2}=17$

1.41 $3^{x+2}+3^{x+1}-3^{x}=99$

1.42 $2\cdot16^{x}-7\cdot4^{x}-4=0$

1.43 $2\cdot4^{2x}+8=17\cdot4^{x}$

1.44 $9^{x}-8\cdot3^{x+1}-81=0$

1.45 $4+2^{x}=2^{2x-1}$

1.46 $2^{2x+1}-9\cdot2^{x}+4=0$

1.47 $5^{x-1}+5\cdot0.2^{x-2}=26$

1.48 $\left(\frac{1}{3}\right)^{2-x}-6\cdot9^{\frac{x-4}{2}}+2\cdot3^{x-6}=29$

1.49 $3^{3x+1}-4\cdot27^{x-1}+9^{1.5x-1}-80=0$

1.50 $5^{2x}-7^{x}-5^{2x}\cdot17+7^{x}\cdot17=0$

1.51 $6\cdot\sqrt[2x]{2}-\sqrt[x]{2}=8$

1.52 $3\cdot4^{x}-5\cdot6^{x}+2\cdot9^{x}=0$

1.53 $3^{2x+4}+45\cdot6^{x}-9\cdot2^{2x+2}=0$

1.54 $5^{2x+1}-7^{x-1}=5^{2x}+7^{x}$

1.55 $2^{2x}-14^{x}-2\cdot 7^{2x}=0$

1.56 $9^{x^2-1}+2\cdot 21^{x^2-1}+49^{x^2-1}=0$

2. Решить неравенства:

2.1 $2^{7-3x}<\left(\frac{1}{2}\right)^{x-4}$

2.2 $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3}>4.5^{x-2}$

2.3 $9^{0.5x^2-3}<27$

2.4 $0.5^{4x}<\left(\frac{1}{8}\right)^{2x-3}$

2.5 $\left(\frac{2}{5}\right)^{x-4}<\left(\frac{5}{2}\right)^{3x-1}$

2.6 $\frac{1}{125}<\sqrt[3]{5^{x+2}}$

2.7 $2.5^{4-x}<\frac{8}{125}$

2.8 $\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{4}(2x+3)-2}<1$

2.9 $2^{\frac{x-1}{x+1}}>1$

2.10 $0.5^{4x^2-15x+13}<2^{-4+3x}$

2.11 $\left(\frac{3}{7}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{49}{6}\right)^{x-1}>\frac{4}{49}$

2.12 $0.3^{3x-7}<\left(\frac{100}{9}\right)^{-1}$

2.13 $\left(\frac{1}{2}\right)^{-x}+2^{3+x}<9$

2.14 $3^{x-2}-\left(\frac{1}{3}\right)^{-x}+8>0$

2.15 $3+2\cdot 3^{x}-9^{x}>0$

2.16 $2^{x}\cdot 5^{1+x}+2^{x+2}\cdot 5^{x}>2.8$

2.17 $3^{1+x}\cdot 2^{1-x}+3^{x}\cdot 2^{-x}<10.5$

2.18 $\frac{x^2+6x+9}{2^{x}-4}>0$

2.19 $4^{x}-3\cdot 2^{x}-4<0$

2.20 $\frac{0.2^{x}-0.008}{x^2-10x+25}<0$

2.21 $3^{2x+2}-3^{2x}<24$

2.22 $5^{2x+1}>5^{x}+4$

<u>Логарифмические уравнения и неравенства.</u>

1. Решить уравнения:

1.1 $\log_{\sqrt{2}}(x^2-3x)=4$

1.2 $\log_{2x}64-\log_{2x}8=3$

1.3 $\log_{x}(x+2)=2$

1.4 $\log_{\frac{1}{4}}(x^2+6)=-2$

1.5 $\log_{5}(6-5^{x})=1-x$

1.6 $\log_{3}(4\cdot 3^{x-1}-1)=2x-1$

1.7 $\lg(3x-2)+\lg 2=2-\lg(x+1)$

1.8 $\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)+2=-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$

1.9 $\log_{2}(2x-6)=4-\log_{2}(x-6)$

1.10 $\log_{\frac{1}{3}}(2x-1)+\log_{\frac{1}{3}}(x-2)=-3$

1.11 $\log_{5}\frac{25}{x}+\log_{5}\sqrt{5x}=2$

1.12 $\log_{3}\frac{1}{x}+\log_{3}\sqrt{x}=-1$

1.13 $0.5\ln(3x-2)=\ln(4-x)$

1.14 $0.5\ln x^2+2\ln\sqrt{x}=4$

1.15 $0.5\ln(8-x)=\ln(1+\sqrt{x+5})$

1.16 $4-\lg x=3\sqrt{\lg x}$

1.17 $\log_{3}\log_{4}\log_{2}x=0$

1.18 $x^{\lg x}=10$

1.19 $x^{\log_3 x-4}=\frac{1}{27}$

1.20 $x^{2\lg x-1.5}=\sqrt{10}$

1.21 $\frac{1}{5-\ln x}+\frac{2}{1+\ln x}=1$

1.22 $3^{\log_3 2}+\frac{1}{3}\lg(3^{\sqrt{2x-1}}+991)=\lg 1000$

1.23 $\lg 9^{-1} + x\lg \sqrt[3]{3^{5x-7}} = 0$

1.24 $\frac{1}{2}\lg(3^{\sqrt{0.5x}} + 73) + \lg 10 = 2$

1.25 $2\log_x 25 - 3\log_{25} x = 1$

1.26 $1 + 2\log_{x+2} 5 = \log_5(x+2)$

1.27 $\log_x(2x^2 - 3x - 4) = 2$

1.28 $\log_{x+1}(x^2 - 3x + 11) = 2$

1.29 $\log_{x-3}(2x^2 - 11x - 5) = 2$

1.30 $\log_2(6 - 4^x) = x$

1.31 $\log_2(9 - 2^x) = 10^{\lg(3-x)}$

1.32 $\log_{0.5}(2^x - 1) = x - 1$

1.33 $\log_2(4\cdot 3^x - 6) - \log_2(9^x - 6) = 1$

1.34 $x^{\lg x - 3} = 0.01$

1.35 $x^{\frac{\lg x + 7}{4}} = 10^{\lg x + 1}$

1.36 $\sqrt{x}^{\lg x} = \sqrt{100x}$

1.37 $\frac{2\lg(x+1)}{\lg(7x+1)} = 1$

1.38 $1 + \log_{\sqrt{3}} x = \log_3(6 - 7x)$

1.39 $\lg x + \frac{4}{\lg x} = 2\lg 100$

1.40 $\frac{1 + \log_2(3x+5)}{1 + \log_2(x+2)} = 2$

1.41 $\log_5 x - \log_x 5 = \frac{3}{2}$

1.42 $\log_2 x - 2\log_x 32 + 3 = 0$

1.43 $\log_3(2x-5)^{\sqrt{x-2}} = \sqrt{x-2}$

1.44 $3^{\log_2^2 x - \log_2 x} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\log_2 \frac{1}{x}}$

1.45 $5^{\log_3^2 x - \log_3 x^3} = \frac{1}{25}$

1.46 $\log_{x+1}(x - 0.5) = \log_{x-0.5}(x+1)$

1.47 $\frac{3}{\lg x - 2} + \frac{2}{\lg x - 3} = -4$

1.48 $x^{\lg x} = 1000x^2$

1.49 $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^2 - 3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 + \log_{\frac{1}{4}}(x+6)^3$

1.50 $\left(1 + \frac{x}{2}\right)\log_2 3 - \log_2(3^x - 13) = \log_{\frac{\sqrt{5}}{25}} 5 + 4$

1.51 $\log_2(5^x + 35) - \log_2(5^x - 19) = 1 + \log_2 5$

1.52 $2\log_4(2^x - 1) + x + \log_{\frac{1}{2}} 3 + \log_{\frac{\sqrt{6}}{6}} 36 = 0$

1.53 $\frac{1}{2}\log_2(2^{\sqrt[3]{6x}} - 10\cdot 2^{-\sqrt[3]{6x}} + 1) = 3(\log_{7\sqrt{7}} 49 - 1)$

1.54 $\log_2(2-x) + \log_{\frac{1}{2}}(x-1) = \log_{\sqrt{2}} 3$

1.55 $\log_{\sqrt{2}} \log_{\frac{1}{2}}\left(2 - \frac{x}{4}\right) = -2$

1.56 $(\log_2 x)^2 + 4\log_{\frac{1}{3}} x + 3 = 0$

1.57 $5^{\lg x} - 3^{\lg x - 1} = 3^{\lg x + 1} - 5^{\lg x - 1}$

1.58 $10x^{2+\lg x} = (0.01)^{-2}$

1.59 $\log_7\left(x + \log_2\left(9 - 2^x\right) + 4\right) = 1$

2. Решить неравенства:

2.1 $\log_2(2x-9) < 4$

2.2 $\log_2(x^2 + 2x) > 3$

2.3 $\log_{\frac{1}{3}}(2x+5) > \log_{\frac{1}{3}}(x-4)$

2.4 $\log_{\frac{1}{5}}(x+2) < \log_{\frac{1}{5}}(3x-7)$

2.5 $\lg \frac{6}{x} > \lg(x+5)$

2.6 $\log_{\frac{1}{2}}(2x-5) < -2$

2.7 $\log_4(x+1) < 0.5$

2.8 $\log_{0.5}(1-x) > -1$

2.9 $\log_{0.5}(x^2 + x) < -1$

2.10 $\log_{\frac{1}{3}}(2x+1) > -1$

2.11 $\log_4 \frac{5-x}{x-2} > 1$

2.12 $\log_{\frac{1}{5}} \frac{3-x}{x+2} < -1$

2.13 $\log_{1.7}(1-3x) < 0$

2.14 $\log_2(x^2 - 1)\cdot \lg 0.5 \le 0$

2.15 $\dfrac{\log_{0.5}(x^2-3)}{\lg 3} \le 0$

2.16 $\log_{\frac{1}{3}}\left(\dfrac{10}{3}-x^2\right)<1$

2.17 $\log_{\frac{\sqrt{10}}{3}}(1-3x)<2$

2.18 $\log_{\frac{\sqrt{6}}{3}}(2x-2)>2$

2.19 $\log_2(x^2-9)\cdot \lg 3 \le 0$

2.20 $(2-\log_2 x)\cdot\sqrt{x^2-1}>0$

2.21 $(\log_3 x-2)\cdot\sqrt{x^2-4}<0$

2.22 $\lg^2 x+\lg x-2<0$

2.23 $\log_4{}^2 x+\log_4\sqrt{x}>1.5$

2.24 $\lg(2x-1)+\lg(2x-3)>\lg(3x-3)$

2.25 $\log_2{}^2 x-2\log_2 x^2>-3$

2.26 $3\log_2{}^2 x-2\log_2 x<5$

2.27 $\log_x(16-6x-x^2)>1$

2.28 $\lg(x-1)+\lg(x-3)<\lg(\dfrac{3}{2}x-3)$

2.29 $\log_{0.4}(3.5-5x)>2\log_{0.4}0.2-1$

2.30 $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-3)}{\lg 0.3}>0$

2.31 $\log_3(x^2-4)\cdot\lg 2>0$

2.32 $\log_{\frac{1}{2}}\dfrac{x-4}{x+3}>-2$

2.33 $\log_{16}\dfrac{2x+1}{3x}<0$

2.34 $\log_{\frac{1}{\sqrt{5}}}(-x^2+6x+3)>-2$

2.35 $\log_{0.2}(\dfrac{8x+3}{3x-2}+2.5)>-1$

2.36 $\log_{\frac{1}{4}}(3x+8)-\log_{\frac{1}{4}}(x+2)<0$

2.37 $\log_{\frac{1}{5}}(3x-1)-\log_{0.2}(x-2)>\log_{0,2}(x+1)$

2.38 $0.1^{\log_{0.7}(2-x)}>1$

2.39 $\dfrac{\log_{\frac{1}{2}}(x^2-1)}{\lg 5}>0$

2.40 $0.6^{\log_{\frac{1}{9}}(x^2-3x+1)}>1$

2.41 $3^{\log_2\frac{x-1}{x+2}}<\dfrac{1}{9}$

2.42 $\log_2\dfrac{x-1}{2-x}>-1$

<u>Системы уравнений</u>.

1. Решить системы уравнений:

1.1 $\begin{cases} 2x-y=19 \\ \log_9(2x-1)-2\log_9 y=-0.5 \end{cases}$

1.2 $\begin{cases} 3^y+2x=10 \\ y-2=\log_3(2x) \end{cases}$

1.3 $\begin{cases} \lg(x^2+y^2)-1=\lg 13 \\ \lg(x+y)-\lg(x-y)=3\lg 2 \end{cases}$

1.4 $\begin{cases} 2x^2+y=75 \\ 2\lg x-\lg y=2\lg 2-\lg 3 \end{cases}$

1.5 $\begin{cases} x^{\lg y}=100 \\ xy=1000 \end{cases}$

1.6 $\begin{cases} \log_4 x+\log_4 y=1 \\ y-2x=7 \end{cases}$

1.7 $\begin{cases} \log_2(x-y)=1 \\ 2^x\cdot 3^{y+1}=72 \end{cases}$

1.8 $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=576 \\ \log_{\sqrt{2}}(y-x)=4 \end{cases}$

1.9 $\begin{cases} \log_3(y-x)=1 \\ 3^{x+1}\cdot 2^y=24 \end{cases}$

1.10 $\begin{cases} \log_{\frac{1}{2}}x+\log_{\frac{1}{2}}y=-1 \\ x-2y=3 \end{cases}$

1.11 $\begin{cases} x+y=6 \\ \log_2 x+\log_2 y=3 \end{cases}$

1.12 $\begin{cases} \log_4 x-\log_4 y=1 \\ x-3y=16 \end{cases}$

1.13 $\begin{cases} x^3+y^3=9 \\ \log_2 x+\log_2 y=1 \end{cases}$

1.14 $\begin{cases} x^2=1+6\log_4 y \\ y^2=y\cdot 2^x+2^{2x+1} \end{cases}$

1.15 $\begin{cases} \log_{\sqrt{2}}(x+y)=2 \\ 3^{6-x}\cdot 4^{y+3}=36 \end{cases}$

1.16 $\begin{cases} \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2 \\ 2^{x-2}\cdot 5^{y-1}=40 \end{cases}$

1.17 $\begin{cases} 3^x\cdot 2^y=972 \\ \log_{\sqrt{3}}(x-y)=2 \end{cases}$

1.18 $\begin{cases} \log_3 x+\log_3 y=1-\log_3 2 \\ \log_3(x+y)=2 \end{cases}$

1.19 $\begin{cases} 2^x+y=5 \\ x-\log_2 y=2 \end{cases}$

1.20 $\begin{cases} 3^y+x=10 \\ y-\log_3 x=2 \end{cases}$

1.21 $\begin{cases} \log_2(x+y)=3 \\ \log_{15} x=1-\log_{15} y \end{cases}$

1.22 $\begin{cases} x^{\lg y}=100 \\ xy=1000 \end{cases}$

1.23 $\begin{cases} 3\cdot 2^x+y=13 \\ 2^{2x+1}+3y=35 \end{cases}$

1.24 $\begin{cases} 2^x+2y=1 \\ 3y-6y^2=2^{x-1} \end{cases}$

1.25 $\begin{cases} 3^{y-1}-2^{x+2}=7 \\ 2^{-x}+3^{4-y}=5 \end{cases}$

1.26 $\begin{cases} 2^x+2^y=12 \\ x+y=5 \end{cases}$

1.27 $\begin{cases} xy=81 \\ 2\log_{x^2} y-3\log_y x-2=0 \end{cases}$

1.28 $\begin{cases} \sqrt{y}+\lg x^2=2 \\ y+4\lg x=28 \end{cases}$

1.29 $\begin{cases} \log_3(x+y)+\log_3(x-y)=1 \\ \log_3(2x-y)+\log_3(2x+3y)=\log_3 5 \end{cases}$

1.30 $\begin{cases} xy=40 \\ x^{\lg y}=4 \end{cases}$

1.31 $\begin{cases} 4^{0.25x^2-3y-8}=\sqrt{2} \\ x-y=10^{\frac{1}{3}+\lg 0.5}\cdot\sqrt[3]{100} \end{cases}$

1.32 $\begin{cases} \dfrac{1}{2}\lg x+\dfrac{1}{2}\lg y-\lg(4-\sqrt{x})=0 \\ (25^{\sqrt{x}})^{\sqrt{y}}=125\cdot 5^{\sqrt{x}} \end{cases}$

1.33 $\begin{cases} \log_2 x-\log_2\left(y-\dfrac{1}{2}\right)=0 \\ \log_2(x+1)=\log_2\left(y+\dfrac{1}{4}\right) \end{cases}$

1.34 $\begin{cases} \log_y x=2 \\ y^2+x^2=272 \end{cases}$

1.35 $\begin{cases} x^2+y^2=25 \\ \log_{\frac{1}{2}}(y-x)+\log_2\dfrac{1}{y}=-2 \end{cases}$

1.36 $\begin{cases} 3^{\frac{1}{x}}\cdot 1.5^{\frac{1}{y}}=0.25 \\ 5^{\frac{1}{x}}:0.2^{\frac{1}{y}}=1 \end{cases}$

1.37 $\begin{cases} 3^x-5\cdot 2^y=4001 \\ 3\cdot 2^y+3^x=8097 \end{cases}$

1.38 $\begin{cases} 2^{\log_2(3x-4)}=8 \\ \log_9(x^2-y^2)-\log_9(x+y)=0.5 \end{cases}$

1.39 $\begin{cases} 0.5^{x-2}\cdot 4^{y+1}=16^{0.75} \\ \log_2(2x-y)^2=2 \end{cases}$

1.40 $\begin{cases} 3^{\log_2(3y-x+24)}=27 \\ \log_2(2x+2y)-\log_2(5-y^2)=1 \end{cases}$

1.41 $\begin{cases} x^{\lg y}=100 \\ \lg_y x=2 \end{cases}$

Контрольная работа. Корни и степени. Показательные и логарифмические уравнения и неравенства.

Раздел 5. Уравнения и неравенства

Тема 5.1.Уравнения и неравенства. (6 часов)

<u>Уравнения с одной переменной.</u>

1. Решить уравнения.

1.1 $\frac{3x-1}{7}-\frac{2x+1}{2}=\frac{x}{14}-1$

1.2 $\frac{2x-1}{5}-\frac{x}{15}=\frac{3x+1}{3}+1$

1.3 $(1-2x)(4x^2+2x+1)=8(1-x^2)(x+2)$

1.4 $3x-|5x-7|=2$

1.5 $||2x-3|-1|=x$

1.6 $(3x+1)^2+(4x-1)^2=(5x-2)^2$

1.7 $\frac{(2x-1)^2-4(x-3)(x+3)-41}{0{,}2x^2+5}=0$

1.8 $\frac{x-3}{x}-\frac{x+5}{3}=3$

1.9 $\frac{x}{x-2}-\frac{7}{x+2}=\frac{8}{x^2-4}$

1.10 $\frac{16}{x^2-16}+\frac{x}{x+4}=\frac{2}{x-4}$

1.11 $(x-1)(2+\frac{1}{x}-\frac{1}{x+2})=0$

1.12 $\frac{x}{2+3x}-\frac{5}{3x-2}=\frac{15x+10}{4-9x^2}$

1.13 $\frac{6}{x^2-2x}-\frac{12}{x^2+2x}=\frac{1}{x}$

1.14 $\frac{6}{x^2-4x+3}+\frac{13-7x}{1-x}=\frac{3}{x-3}$

1.15 $\frac{x}{x-1}+\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{x^2+2x-3}$

1.16 $\frac{1}{x^2+2x+4}+\frac{1}{x-2}=\frac{x^2-2x+4}{x^3-8}$

1.17 $x(1+\frac{5}{x-2}+\frac{1}{(x+1)(x-2)})=0$

1.18 $\frac{x^2+3x+9}{x^3+27}-\frac{1}{x+3}=\frac{2}{x^2-3x+9}$

1.19 $\frac{2(x^2-2x+7)}{4x^2-25}=\frac{1-7x}{(5-2x)(2x+5)}$

1.20 $\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{3(3x-7)}=\frac{1}{x}$

1.21 $(x^2+4x)\sqrt{x-3}=0$

1.22 $(x^2-x)\sqrt[3]{x-2}=0$

1.23 $(9-x^2)\sqrt[4]{(2+x)}=0$

1.24 $x^3-3x^2-4x+12=0$

1.25 $2x^4-5x^3-18x^2+45x=0$

1.26 $3x^3-x=0$

1.27 $2x^4-x^2=0$

1.28 $\frac{27}{x^2+3x}-\frac{2}{x}=\frac{3}{x^2-3x}$

1.29 $1+\frac{6}{x-1}=\frac{5-2x}{x-7}+\frac{6(2x-5)}{x^2-8x+7}$

1.30 $x(1+\frac{5}{x-2}+\frac{1}{(x+1)(x-2)})=0$

1.31 $\frac{2}{2x-1}+\frac{3}{x-3}=\frac{x+1}{x-3}+\frac{x}{2x-1}$

1.32 $\frac{1}{2(x-2)}-\frac{1}{3(3x-7)}=\frac{1}{x}$

1.33 $1+\frac{6}{x-1}=\frac{5-2x}{x-7}+\frac{6(2x-5)}{x^2-8x+7}$

1.34 $1-\frac{10}{x+3}=\frac{50}{x^2+x-6}-\frac{2}{x-2}$

1.35 $\frac{1}{x-3}-\frac{x+8}{2x^2-18}=\frac{1}{3-x}-1$

1.36 $\frac{4x-6}{x+2}-\frac{x}{x+1}=\frac{9}{x^2+3x+2}$

1.37 $\frac{1}{x+2}-\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}$

1.38 $\frac{1}{x-2}-\frac{1}{x-1}=\frac{1}{x-4}-\frac{1}{x-3}$

1.39 $x+\frac{1}{x}=a+\frac{1}{a}$

1.40 $\frac{2a+1}{a+x}-\frac{2a-1}{a-x}=2a$

2. Решить биквадратные уравнения.

2.1 $4x^4-5x^2+1=0$

2.2 $2x^4-19x^2+9=0$

2.3 $x^4-11x^2+18=0$

2.4 $36x^4-25x^2+4=0$

2.5 $3x^4-13x^2+4=0$

2.6 $a^2x^4-2ax^2-a^2+1=0$

3. Решить уравнения методом введения новой переменной.

3.1 $(x^2+2x)^2-14(x^2+2x)-15=0$

3.2 $(6x^2-7x)^2-2(6x^2-7x)-3=0$

3.3 $(\frac{x-1}{x})^2-3(\frac{x-1}{x})-4=0$

3.4 $(x^2+3x)^2+2(x^2+3x)=24$

3.5 $\sqrt[3]{x^2}+2\sqrt[3]{x}-3=0$

3.6 $(\frac{x-1}{1+x})^2-\frac{x-1}{1+x}-20=0$

4. Сократить дробь:

4.1 $\frac{6x^2-7x-3}{2x^2-x-3}$ и вычислить при $x=-2$

4.2 $\frac{5x-10}{2x^2+3x-2}$ и вычислить при $x=5{,}5$

4.3 $\frac{4x^2-8x}{2x^2-3x-2}$ и вычислить при $x=0{,}5$

4.4 $\frac{2x^4-7x^2+6}{3x^4-3x^2-6}$ и вычислить при $x=1$

4.5 $\frac{5x^4+5x^2-3x^2t-3t}{x^4+3x^2+26}$ и вычислить при $x=0$; $t=1$

5. Найти все корни уравнения:

5.1 $x^4 - 16 = 0$

5.2 $x^2 - x + 2 = 0$

5.3 $x^3 + 27 = 0$

5.4 $2x^2 + 3x + 7 = 0$

5.5 $8x^3 - 1 = 0$

5.6 $2x^2 - x + 4 = 0$

5.7 $x^3 - 64 = 0$

5.8 $x^6 + 64 = 0$

5.9 $x^6 - 1 = 0$

5.10 $16x^4 - 81 = 0$

5.11 $x^3 + x^2 + 4x + 4 = 0$

5.12 $x^3 - x^2 + 9x - 9 = 0$

5.13 $x^4 + 5x^2 + 4 = 0$

5.14 $x^4 - 5x^2 - 36 = 0$

5.15 $x^3 + 5x^2 + x + 5 = 0$

5.16 $x^4 + 12x^2 - 64 = 0$

5.17 $8x^3 - 27 = 0$

5.18 $16x^4 - 1 = 0$

5.19 $x^6 - 1 = 0$

5.20 $x^8 - 1 = 0$

6. Решить иррациональные уравнения.

6.1 $\sqrt{3 - x\sqrt{x^2 - 3}} = \sqrt{5}$

6.2 $\sqrt{3x^2 - 2} - 2 = x$

6.3 $\sqrt{2x - 1 - \sqrt{x - 20}} = 2$

6.4 $\sqrt{2x + 3} + \sqrt{3x + 3} = 1$

6.5 $\sqrt{6 - 2x} + \sqrt{4x - 3} = 3$

6.6 $\sqrt[3]{x - 2} + 1 = 0$

6.7 $\sqrt{2x + 2\sqrt{x}} = 2$

6.8 $2\sqrt{3 - x} + \sqrt{2x} = 4$

6.9 $x + \sqrt{x^2 - 13x + 31} = 5$

6.10 $\sqrt{3 + \sqrt{5 - x}} = \sqrt{x}$

6.11 $\sqrt{95 + \sqrt{3x + 1}} = 100$

6.12 $\sqrt{3 + \sqrt{x}} - \sqrt{9 - 5\sqrt{x}} = 0$

6.13 $\sqrt{x + 3} + \sqrt{22 - x} = 7$

6.14 $2\sqrt{x - 1} + \sqrt{x + 1} = 1$

6.15 $\sqrt{3x + 1} - 2\sqrt{x - 1} = 2$

6.16 $\sqrt{5x - 6} - \sqrt{x - 2} = 2$

6.17 $\sqrt{2x + 3} + \dfrac{5}{\sqrt{2x + 3}} = 6$

6.18 $\sqrt{5 - x} + \sqrt{3x + 1} = 2\sqrt{x + 3}$

6.19 $\sqrt{4x + 5} - \dfrac{3}{\sqrt{4x + 5}} = \sqrt{x + 3}$

6.20 $2\sqrt{x + 1} - \dfrac{4}{\sqrt{x + 1}} = \sqrt{2x - 2}$

6.21 $\sqrt[3]{x^3 + 7} = x + 1$

6.22 $\sqrt{x + 1} - 1 = \sqrt{x - \sqrt{x + 8}}$

6.23 $\sqrt{x^2 - \sqrt{2x^2 + 3x - 2}} = x - 1$

6.24 $\sqrt{\dfrac{x+1}{x-1}}-\sqrt{\dfrac{x-1}{x+1}}=\dfrac{3}{2}$

6.25 $\sqrt{x}+\sqrt{x-\sqrt{1-x}}=1$

6.26 $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{3x-2}$

<u>Неравенства I степени.</u>

1. Решить неравенства:

1.1 $(5x-3)-(4x+11)>17-2(8-2x)$

1.2 $(5x^2-6x-67)-(5x^2-10-81)>2$

1.3 $(7x-6)-(4x-18)x>26-(3-2x)^2$

1.4 $x-\dfrac{2x-3}{5}<2+\dfrac{2x-3}{3}$

1.5 $5x-\dfrac{7x-1}{2}+\dfrac{2x-5}{5}>\dfrac{7}{10}$

1.6 $(x+4)(x-4)+13x>(x-5)^2+15x-1$

1.7 $3x-15-(x+2)(x-2)>-(x-1)^2$

1.8 $11-\dfrac{2x+5}{2}>3\dfrac{1}{4}-\dfrac{3x-1}{3}+1\dfrac{11}{12}x$

1.9 $5+(x-\dfrac{1}{2})(x+\dfrac{1}{2})>(2-x)^2$

1.10 $(2x+3)^2-\dfrac{x-1}{2}\geq(2x+1)(2x-1)$

1.11 $(4-x)(4+x)-\dfrac{5-x}{3}<-(x+1)^2$

1.12 $25\left(x-\dfrac{1}{5}\right)\left(x+\dfrac{1}{5}\right)+3x-1>(5x-2)^2+\dfrac{43x-2}{2}$

1.13 $4(x+1)^2-\dfrac{4x-2}{3}>(2x+1)(2x-1)$

1.14 $(2x-1)(2x+1)-\dfrac{7x-1}{2}>4x^2+1$

1.15 $|5-2x|<3$

1.16 $|4x-2|\geq 5$

1.17 $|3x-7|\leq 5$

1.18 $|4-3x|\geq 3$

1.19 $|3x-7|\leq 4$

1.20 $|2x+5|\geq 3$

1.21 $\dfrac{4x-1}{2+3x}\leq 2$

1.22 $\dfrac{3x-1}{5+2x}\leq 2$

1.23 $\dfrac{5-2x}{3x-1}\geq 2$

1.24 $\dfrac{4x-3}{7+2x}\leq 3$

1.25 $\dfrac{4+x}{2x-3}<\dfrac{5+3x}{3-2x}$

1.26 $\dfrac{3x+7}{x-2}>\dfrac{x-4}{2-x}$

1.27 $\dfrac{3}{3x-2}<\dfrac{5x-2}{2(3x-2)}$

1.28 $\dfrac{2x+4}{7-5x}>\dfrac{3-2x}{5x-7}$

<u>Неравенства II степени.</u>

2. Решить неравенства:

2.1 $2x^2+7x-4<0$

2.2 $3x^2-7x-6\geq 0$

2.3 $-x^2+7x-10<0$

2.4 $-2x^2+x+3>0$

2.5 $-2x^2-x+3<0$

2.6 $5x-2-3x^2>0$

2.7 $3x+4-x^2<0$

2.8 $-2+x-3x^2\geq 0$

2.9 $4x-12x^2-3>0$

2.10 $x(x+5)\leq 2(x^2+2)$

2.11 $\frac{x-2}{x+2} > \frac{2x-3}{4x-1}$

2.12 $\frac{x^2+6x+15}{x-4} > 0$

2.13 $\frac{x^2-2x+3}{x^2-4x+3} > -3$

2.14 $\frac{x-10}{5+x^2} < \frac{1}{2}$

2.15 $\frac{x+1}{1-x} - 2 < \frac{1-x}{x}$

2.16 $\frac{5-7x}{x+1} < x$

2.17 $2(x+3)(x-3) < 5x-6$

2.18 $\frac{x^2+4x+3}{x^2+2x+8} > 0$

2.19 $3 - \frac{2x-17}{x-5} > \frac{x-5}{x+2}$

2.20 $(3x-1)(4-x)(2x-3)^2 > 0$

2.21 $\frac{x^2+2x-3}{x^2-2x+8} > 0$

2.22 $\frac{(x-3)(x-5)(8-x)^3}{(x-2)(5x-7)^2} < 0$

3. Решить системы неравенств:

3.1 $\begin{cases} \frac{x-3}{4} - x < \frac{x-1}{2} - \frac{x-2}{3} \\ 2-x > 2x-8 \end{cases}$

3.2 $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{7}{8} < \frac{1}{4}x + \frac{5}{2} \\ \frac{x+1}{4} - \frac{2x-1}{3} < 2 \end{cases}$

3.3 $\begin{cases} -2 < x < 1 \\ x > 0 \\ x > -1 \end{cases}$

3.4 $\begin{cases} x^2-2x-3 > 0 \\ x^2-11x+28 \geq 0 \end{cases}$

3.5 $\begin{cases} x^2 - \frac{1}{4} > 0 \\ -2x^2+5x-3 > 0 \end{cases}$

3.6 $\begin{cases} 3x^2-4x+1 > 0 \\ 3x^2-5x+2 < 0 \end{cases}$

3.7 $\begin{cases} x^2-14x+45 < 0 \\ x^2-11x+30 > 0 \\ 2x-3 > 0 \end{cases}$

3.8 $\begin{cases} 3x^2-2x > 3x+2 \\ 2x^2-6 < 7x-x^2 \\ -\frac{2}{3} \leq x \leq 2{,}5 \end{cases}$

4. Решить неравенство методом интервалов:

4.1 $\frac{(2-x)(x+4)^2x^3}{x+1} < 0$

4.2 $\frac{x(x-1)(x+3)^2}{2-x} < 0$

4.3 $\frac{(2-x)(3x-4)^2x^3}{x+1} > 0$

4.4 $\frac{(4-x)(3x-1)(x+2)^2}{x+1} < 0$

4.5 $\frac{(4+x^2)(x-5)^2x^3}{x+2} < 0$

4.6 $\frac{(x^2-4)(x+1)^4x}{2x+5} \geq 0$

4.7 $\frac{(2-x)^3(4x^2+1)}{x(x+3)} > 0$

4.8 $\dfrac{(4-x)^4 x^3 (x-1)}{2x+1} > 0$

4.9 $\dfrac{(2x^2+3)(x+3)^2}{x(x-2)} \le 0$

4.10 $\dfrac{x^4 (2x-7)^2}{x^2-3x+2} > 0$

4.11 $\dfrac{(2x^2+5)(x-2)^3 (5-x)}{(x-1)(x+2)} > 0$

4.12 $\dfrac{x^2 (x^2+5)(4x-3)}{(x+2)(x-1)} < 0$

4.13 $\dfrac{(2x-3)^3 x^2 (5-x)}{(x-3)^3} > 0$

4.14 $\dfrac{(x-2)^3 x^4 (x^2+5)}{(3+x)(1-x)} \ge 0$

4.15 $\dfrac{(2x+5)^2 x^5 (x^2+4)}{(x+2)^3} > 0$

4.16 $\dfrac{(x^2-4x+3)(x^2+9)x^2}{(x+5)(3x+4)} > 0$

4.17 $\dfrac{(2x-5)^2 (x-4)(x+1)^3}{(x-1)(x^2+4)} < 0$

4.18 $\dfrac{(x^2+4)x^2 (x-1)^3}{x^2-5x+6} < 0$

4.19 $\dfrac{(5x-1)^2 x^2 (5-x)}{(x+2)(3x-1)} < 0$

4.20 $\dfrac{x^3 (2x-1)^2 (5+x^2)}{(3x+5)(x-2)} \ge 0$

4.21 $\dfrac{(x-3)^2 x^3 (2x+5)^4}{(x-1)(x+3)} < 0$

4.22 $\dfrac{(3-x)^2 (x+4)^3 (x+1)}{x^3 (3x-4)} > 0$

4.23 $\dfrac{x^4-81}{x^2 (x^2-25)} \ge 0$

4.24 $\dfrac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-5} > 0$

4.25 $\dfrac{1}{x+1} + \dfrac{2}{x+3} > \dfrac{3}{x+2}$

4.26 $\dfrac{6}{x-1} - \dfrac{3}{x+1} - \dfrac{7}{x+2} < 0$

Раздел 6. Элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики

Тема 6.1.Элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики. (6 часов)

1. В магазине оптики при покупке фотоаппарата в качестве подарка к нему дарится чехол, который случайным образом выбирается из ящика. В ящике находятся чехлы разного цвета: 5 - черных, 7 – бежевых, 8 красных. Найдите вероятность того, что покупательница вынет из этого ящика чехол **не** черного цвета.

2. На школьном концерте от 1 «А» выступают семь гномов и Белоснежка – поют песню; от 1 «Б» выступают три медведя – танцуют; от 1 «В» выступает Буратино со стихом. Дед Мороз попросил каждого выступающего бросить в его варежку букву своего класса. Первая вытянутая буква определит, какой класс будет открывать концерт. Найдите вероятность того, что первыми будут выступать медведи. (Ответ округлите до сотых).

3. Елочная гирлянда состоит из 60-ти лампочек разного цвета: 25 желтых, 10 зеленых, 5 красных, остальные - синие. Каждая лампочка перегорает с одинаковой частотой. Для их смены необходимо закупить запасные. Найдите вероятность того, что в какой-то момент времени перегорит синяя лампочка. (Ответ округлите до сотых).
4. В барабане лотереи шары с номерами от 1 до 20. Какова вероятность того, что номер первого вытащенного шара будит делиться на 6?

5. Крупье вытаскивает наугад из 36-ти карточной колоды 6 карт пиковой масти подряд и кладет их на стол. Какова вероятность, что седьмая вытащенная им карта будет бубновой масти? (Колода игральных карт содержит по 9 карт каждой из четырех мастей).

6. В урне находится 5 шаров: 2 белых и 3 черных. Наугад вытаскивают 2 шара. Какова вероятность того, что вытащенные шары будут одного цвета?
7. Перед началом первого тура соревнований по бадминтону участников соревнований разбивают на игровые пары случайным образом (по жребию). Всего в соревнованиях участвует 36 спортсменов, среди которых 8 участников из Украины, в том числе Николай Колоденко. Найдите вероятность того, что в первом туре Николай Колоденко будет играть со своим соотечественником.

8. Научная конференция проводится в течение 3 дней и включает 75 докладов. В первый день запланировано 27 докладов, остальные распределены поровну между вторым и третьим днями. Порядок докладов определяется жребием. Какова вероятность, что доклад профессора П состоится в третий день конференции?

9. В кармане у Пети было 3 монеты по 1 рублю и 2 монеты по 2 рубля. Петя, не глядя, переложил какие-то 2 монеты в другой карман. Найдите вероятность того, что обе двухрублевые монеты лежат в одном кармане.

10. Почти одновременно 5 человек, в том числе Петя, заказали по телефону пиццу, все разных видов. Оператор перепутал 3 и 4 заказы. С какой вероятностью Пете привезут его пиццу?

11. В пассажирском поезде 9 вагонов. Сколькими способами можно рассадить в поезде 4 человека, при условии, что все они должны ехать в различных вагонах?
12. Для участия в команде тренер отбирает 5 мальчиков из 10. Сколькими способами он может сформировать команду, если 2 определенных мальчика должны войти в команду?
13. Порядок выступления 7 участников конкурса определяется жребием. Сколько различных вариантов жеребьевки при этом возможно?
14. В ящике 5 апельсинов и 4 яблока. Наудачу выбираются 3 фрукта. Какова вероятность, что все три фрукта – апельсины?

Контрольная работа. Уравнения и неравенства. Комбинаторные задачи. Вероятность события.

Раздел 7. Прямые и плоскости в пространстве

Тема 7.1. Параллельность и перпендикулярность прямых и плоскостей в пространстве. (6 часов)

Прямая линия и её уравнения

1. Проверить, принадлежат ли точки А (3;14); В(4;13); С(-3;0) D(0;7) прямой 7x - 3y + 21 = 0
2. Прямая, параллельная оси Ох, проходит через точку (-2;2) Составить уравнение этой прямой.
3. Составить уравнение прямой, проходящей через точку М(3;-5) и перпендикулярной вектору **n** = (4;2)
4. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и точку А(2;-3)
5. Составить уравнение прямой, проходящей через начало координат и образующей с положительным направлениям оси угол: а) 0°; б) 30° ; в) 135°
6. Найти угол, образуемый с положительным направлением оси Ох прямой:
   а) y = x ; б) $y = \sqrt{3}\,x$; в) y = -2x
7. Вычислить длину отрезка прямой 3x + 4y - 24 = 0, заключённого между осями координат.
8. Сторона квадрата равна $4\sqrt{2}$, одна из его вершин совпадает с началом координат, а диагональ лежит на положительной полуоси Оу. Составьте уравнения сторон квадрата.
9. Преобразуйте уравнения следующих прямых к уравнениям в отрезках на осях:
   а) x + y - 3 = 0. б) 2x + 3y + 1 = 0 в) 2x + 3y -6 = 0
10. Составить параметрическое уравнение прямой, проходящей через точку М(4;-7) параллельно вектору **a** = (6, 2)
11. Даны точки M_1(10;-5) и M_2(20,25) Составьте уравнение прямой, которая проходит через точку M_1 перпендикулярно M_1M_2
12. Составьте уравнение прямой, проходящей через точки А(6;7) и В(-2;3)
13. Вершины σABC A(3;1); B(5;5); C(5;-5). Составьте уравнение прямой, проходящей через вершину С перпендикулярно АВ.
14. Точки А(-6;1); В(3;6); С(6;-5) - вершины треугольника. Составьте параметрические уравнения его сторон.
15. Вычислите углы наклона к оси Ох для прямых: а) y = x; б) y = -x; в) y = 3x г) y = -2x

16. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку (2; 6) и образующей с осью Ох угол: а) arctg5 б) $\alpha = 120°$; в) $\alpha = 45°$
17. Найдите угловые коэффициенты прямых: 4х - 2у +9 = 0; 2) 5х + 2у +10 = 0
18. Найдите угол наклона прямой 5х + 6у =15 к положительному направлению оси Ох и начальную ординату.
19. Найдите острый угол между прямыми х + 3у -2 = 0 и 2у = х +5
20. Уравнения сторон треугольника имеют вид: у = х; х + 2у + 3=0 и $y = -\frac{2}{3}x + \frac{5}{3}$ Найдите координаты вершин треугольника.
21. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку (-2; 3) и параллельной прямой 2,5у = 1,5х + 3
22. Докажите, что прямые 7х - 2у + 14 = 0 и 2х + 7у -20 = 0 перпендикулярны.
23. Уравнения сторон σАВС имеют вид: х - 2у + 8 = 0; у = 0 ; 2х - у -4 = 0 Найдите внутренние углы треугольника.
24. Точки А(3;2); В(-2;1); С(1;-4) служат вершинами параллелограмма, причём А и С - противоположные вершины. Найдите четвёртую вершину D
25. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку M_o(-2;-3) и перпендикулярной вектору **АВ**, если А(-5;2); В(-1;4);
26. Вычислите длину отрезка прямой 4х +3у -36 = 0, заключённого между осями координат.
27. Составьте уравнения сторон треугольника, вершинами которого служат точки А(-3;-2); В(1;5); С(8;-4)
28. Треугольник задан вершинами А(-3;4); В(-4;-3); С(8;1) Составьте уравнения: медианы АD; высоты ВК
29. Даны уравнения сторон треугольника: х + 3у -3 = 0, 3х - 11у - 29 = 0 и 3х - у +11 = 0 Найти вершины этого треугольника и один из его углов.
30. Составьте уравнение прямой, перпендикулярно вектору **n** = (4; -3) и проходящей через точку пересечения прямых х + 11у -27 = 0 и 6х - 7у -16 = 0
31. Найти острый угол между прямыми 5х - 12у - 16 = 0 и 3х + 4у -12 = 0
32. Дан треугольник с вершинами А(-6;-1); В(4;6); С(2;1) Найти внутренние углы треугольника.
33. Треугольник задан вершинами А(2;-1); В(-7;3); С(-1;-5) Составить уравнение биссектрисы угла С
34. Найти внутренние углы треугольника, если его стороны заданы уравнениями: 7х + 4у +9 = 0, х - 8у +27 = 0 и 2х - у -6 = 0
35. Дан треугольник с вершинами А(6;8); В(2;-4); С(-6;4). Найдите угол между стороной АВ и медианой, проведённой из вершины А.
36. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку М(-3;-1) параллельно прямой АВ, если А(-2;6); В(3;-1);
37. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых х + у –

    – 4 = 0 и х - у = 0 параллельно прямой х - 4у + 4 = 0
38. Прямая проходит через точки (-4;1) и (2;-5). Через точку её пересечения с осью Оу перпендикулярно данной проходит другая прямая. Составьте уравнение этих прямых.
39. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку пересечения прямых х + 2у +

    + 4 = 0 и 3х - у - 9 = 0 перпендикулярно прямой х + у -7 = 0
40. Прямая проходит через середину отрезка АВ перпендикулярно ему. Составьте уравнение этой прямой, если А(-2;1); В(4;4);
41. Составьте уравнения высот треугольника, вершинами которого служат точки (-4;2); (6;5); (1;-4)

42. Составьте уравнения высот треугольника по уравнениям его сторон $11x + 2y - 21=0$, $8x - 3y +7 = 0$ и $3x + 5y + 21 = 0$
43. Даны уравнения сторон треугольника $6x - 5y +8 = 0$, $4x + y - 38 = 0$, $x - 3y - 3 = 0$ Найти уравнения его медиан.
44. Составьте уравнение прямых, проходящих через вершины треугольника, параллельно противолежащим их сторонам, если A(6;2); B(-1;-5); C(1;4)
45. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку (8;5) и образующей с осью Ox угол, в два раза больший угла, образуемого с осью Ox прямой $x - 4y + 4 = 0$
46. Найдите уравнения перпендикуляров к прямой $5x - 4y -20 = 0$, восставленных в точках пересечения её с осями координат.
47. Даны уравнения двух сторон ромба $3x - 2y -19 = 0$ и $9x + 2y -17 = 0$ и уравнение одной из его диагоналей $3x - 2y - 19 = 0$. Найдите уравнения двух других сторон ромба и второй его диагонали.
48. Даны уравнения двух сторон параллелограмма $3x - 2y + 12 = 0$ и $x - 3y +11 = 0$ и точка пересечения его диагоналей (2;2) Составьте уравнения двух других сторон параллелограмма и его диагоналей.
49. Две противоположные вершины квадрата находятся в точках если A(-1;1); C(5;3) Составьте уравнения сторон и диагоналей квадрата.
50. Вершины треугольника A(6;2); B(2;-4); C(-2;-7) Найдите: длину медианы AM; уравнение медианы AM; уравнение высоты BK; уравнение прямой CN, параллельной стороне AB; угол A; площадь треугольника ABC; периметр треугольника ABC; центр тяжести O_1; уравнение биссектрисы AD.

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ И ПЛОСКОСТИ

1. Концы отрезка длиной 50 см отстоят от плоскости на 30 и 44 см. Найти проекцию этого отрезка на плоскость.

2. Отрезок длиной 15 см пересекает плоскость, концы его отстоят от плоскости на 3 и 6 см. Найти проекцию этого отрезка на плоскость.

3. Отрезок пересекает плоскость, концы его отстоят от плоскости на 3 и 12 см. Найти расстояние середины этого отрезка до плоскости.

4. AB и CD – параллельные отрезки, лежащие в двух пересекающихся плоскостях; AE и BF – перпендикуляры на линию пересечения плоскостей. Расстояние AD = 5 см. и отрезок EF = 4 см. Найти расстояние между прямыми AB и CD.

5. Основание трапеции DA находится на плоскости α, а основание CB отстоит от нее на 5см. Найти расстояние от плоскости α точки M пересечения диагоналей этой трапеции, если DA : CB = 7 : 3.

6. Через вершину прямого угла ΔABC проведена плоскость параллельно гипотенузе на расстоянии 1 дм. от нее. Проекции катетов на эту плоскость равны 3 дм. и 5 дм. Определить проекцию гипотенузы на эту плоскость.

7. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Постройте сечения параллелепипеда плоскостью (MKN), если точки M,N,K лежат на ребрах параллелепипеда и делят их в следующих отношениях:

1) $|AM|=|A_1M|$; $|A_1N|=|B_1N|$; $|C_1K|:|CK| = 3:1$
2) $|AM|=|DM|$; $|DN|=|CN|$; $|C_1K|:|B_1K| = 1:2$
3) $|B_1M|:|BM| = 1:4$; $|AN|=|A_1N|$; $|C_1K| =|CK|$
4) $|A_1M|=|MB_1|$; $|AN| = |A_1N|$; $|DK|:|KC| = 1:4$
5) $|C_1M|:|MB_1| =3 :1$; $|AK|=|KD|$; $|A_1N|: |NB| = 1:3$
6) $|B_1K|:|KC_1|=2:1$; $|C_1N| :|NC| = 2:1$; $|AM|=|A_1M|$

8. Проекция прямоугольного треугольника на плоскость α, проведенную через вершину прямого угла параллельно гипотенузе, представляет собой треугольник, у которого один

из углов равен 120°, а стороны этого угла равны 3см. и 24см. Определить расстояние от плоскости α до гипотенузы заданного треугольника.

9. В параллелограмме ABCD вершины A и D лежат на данной плоскости, а две другие – вне этой плоскости. Известно, что AB = 15см, BC = 19см, а проекции диагоналей на эту плоскость равны 20 см и 22 см. Определить проекции сторон параллелограмма на эту плоскость.

10. Через одну из сторон ромба проведена плоскость на расстоянии 4 см от противоположной стороны. Проекции диагоналей ромба на эту плоскость равны 8 см и 12 см. Найти проекции сторон ромба на данную плоскость.

11. Даны две параллельные плоскости. Наклонная упирается своими концами в эти плоскости. Найдите проекцию наклонной на эти плоскости, если расстояние между плоскостями 30 см , а длина наклонной 50 см.

12. Два отрезка заключены между параллельными плоскостями. Сумма этих отрезков 12 дм. Проекции отрезков на плоскость равны 1 дм и 7 дм. Найти расстояние между плоскостями.

13. Отрезки двух прямых, заключенных между двумя параллельными плоскостями, равны 51см и 53 см, а их проекции на одну из этих плоскостей относятся, как 6:7. Определить расстояние между данными плоскостями.

14. Между двумя параллельными плоскостями заключены перпендикуляр длиной 4 м и наклонная, равная 6 м. Расстояния между их концами в каждой плоскости равны по 3 м. Найти расстояние между серединами перпендикуляра и наклонной.

15.Плоскости α и β параллельны. Из точек A и B плоскости α проведены к плоскости β наклонные: AC = 37 см и BD = 125 см. Проекция наклонной AC на одну из плоскостей равна 12 см. Чему равна проекция наклонной BD?

16. Через середины смежных сторон нижнего основания куба и противоположную вершину проведено сечение. Найдите площадь сечения, если сторона куба равна 4 дм.

17. Дана правильная шестиугольная призма, высота которой 26 дм, а сторона основания 6 дм. Найдите площадь сечения, проведенного через две противоположные стороны нижнего и верхнего основания призмы.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ И ПЛОСКОСТЕЙ. ДВУГРАННЫЕ УГЛЫ.

1. Из точки M под углом в 30° проведена к некоторой плоскости наклонная, равная 8 дм. Определить расстояние от точки M до плоскости.

2. Наклонная проведена под углом в 45° к плоскости P и равна 0.8 дм. Найти проекцию этой наклонной на плоскость P.

3. Из вершины B прямоугольника ABCD со сторонами AB, равной 6 дм. и AD, равной 10 дм, восстановлен к плоскости прямоугольника перпендикуляр BF, равный 8 дм. Определить расстояние точки F от вершины прямоугольника.

4. Прямая линия, пересекая две параллельные плоскости, образует с ними угол 30°. Расстояние между плоскостями равно 20 дм. Определить отрезок прямой, заключенный между этими плоскостями.

5. Из точки, отстоящей от плоскости α на расстоянии 9 дм, проведены три наклонные под углами 30°, 45°,60° к плоскости α. Определить длину каждой наклонной.

6. Три прямые OA, OB, OC, выходящие из одной точки, образуют друг с другом углы:
AOB = 104°, BOC = 72°, COA= 125°. В одной или разных плоскостях лежат названные прямые?

7. Из точки, лежащей вне плоскости, проведены к этой плоскости наклонная, равная 4 дм и перпендикуляр 32 см. Найти проекцию перпендикуляра на наклонную.

8. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 60 и 80 см. Из вершины прямого угла к плоскости этого треугольника восставлен перпендикуляр CD длиной 36 см. Определить расстояние от точки D до гипотенузы AB.

9. Через вершину C прямоугольного треугольника ABC проходит отрезок CD, перпендикулярный к плоскости треугольника и равный 7 см. Точка D равноудалена от концов гипотенузы, причем DA = DB = 11 см. Определить длину гипотенузы.
10. Катеты прямоугольного треугольника 18 и 32 см. Из точки K, делящей гипотенузу пополам, к плоскости треугольника восставлен перпендикуляр KM = 12 см. Найти расстояние от точки M до каждого катета.
11. Катеты прямоугольного треугольника равны 30 и 40 см. Из вершины прямого угла к плоскости треугольника восставлен перпендикуляр, равный 7 см. Найти расстояние от концов перпендикуляра до гипотенузы.
12. Из точки, отстоящей от плоскости на расстоянии c, проведены две наклонные под углом 30° к плоскости. Определить расстояние между концами наклонных, если угол между их проекциями равен 120°.
13. Два отрезка, сумма которых равна n, упираются своими концами в две параллельные плоскости, проекции их равны a и b. Определить длины отрезков.
14. В равнобедренный треугольник с основанием AC = 6 м и боковой стороной AB = 5 м вписан круг, из центра которого к его плоскости проведен перпендикуляр, равный 2 м. Найти расстояние от верхнего конца перпендикуляра до сторон треугольника.
15. Из вершины A треугольника ABC проведена вне его плоскости прямая AD, образующая со сторонами AB и AC острые углы. На какие части делит сторону BC проекция прямой AD на плоскость треугольника, если AB = 51 см, AC = 34 см и BC = 30 см?
16. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 12 и 16 дм. Из вершины прямого угла C восставлен перпендикуляр CM = 28 дм к плоскости треугольника ABC. Найти расстояние от точки M до гипотенузы.
17. Стороны треугольника 15, 37 и 44 см. Из вершины большого угла восставлен к его плоскости перпендикуляр, равный 16 см. Найти расстояние от его концов до большей стороны треугольника.
18. Диагонали ромба 60 и 80 см. Из точки пересечения диагоналей к плоскости ромба восставлен перпендикуляр длиной 45 см. Найти расстояние от его концов до сторон ромба.
19. Из точки, отстоящей от плоскости на расстоянии a, проведены две наклонные под углом 45° к плоскости, а их проекции составляют между собой угол 120°. Вычислите расстояние между концами наклонных.
20. Из середины гипотенузы прямоугольного треугольника, катеты которого 6.8 см и 20.2 см, восставлен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 4.5 см. Найти расстояние от верхней точки перпендикуляра до катетов.
21. Стороны треугольника 16.4 см; 11.2 см и 5.3 см. Из вершины большего угла проведен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 9.7 см. Найти расстояние от верхней точки перпендикуляра до противоположной стороны и угол, образованный этой прямой с плоскостью треугольника.
22. Из вершины среднего угла треугольника, стороны которого 8.2 см, 15.4 см и 19.5 см проведен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 16.4 см. Найти расстояние от концов перпендикуляра до противолежащей стороны
23. Стороны треугольника 9.2 см; 10.8 см и 11.7 см. Из вершины меньшего угла треугольника проведен перпендикуляр к плоскости треугольника длиной 4.3 см. Найти расстояние от верхней точки перпендикуляра до противолежащей стороны и угол, образованный этой прямой с плоскостью треугольника.
24. Двугранный угол равен 60°. Точка, взятая внутри него, удалена от каждой из граней на 6 см. Найти расстояние между основаниями перпендикуляров, опущенными из данной точки на каждую грань.

25. В одной грани двугранного угла проведена прямая под углом 30° к другой грани и под углом 45° к ребру. Доказать, что двугранный угол равен 45°.
26. Концы отрезка AB лежат на гранях двугранного угла, равного 60°. Из точек A и B опущены перпендикуляры AC и BD на ребро двугранного угла. Найти AC, если CD = 24 см, BD = 8 см, AB = 25 см.
27. Из точки K, лежащей внутри двугранного угла, опущен перпендикуляр KM на ребро этого угла. Расстояние от точки K до одной из граней равно проекции перпендикуляра KM на эту грань. Отрезок KM в два раза больше, чем его проекция на вторую грань. Определить величину двугранного угла.
28. Найти расстояние от вершины A треугольника ABC к плоскости, проходящей через сторону BC под углом 30° к плоскости треугольника, если AB, AC и BC соответственно равны 13 см, 37 см, и 30 см.
29. Найти расстояние от вершины K треугольника MKN до плоскости, проходящей через сторону MN под углом 45° к плоскости треугольника, если MN = 17 см, NK=21 см и MK=10 см.
30. Концы отрезка AB лежат на гранях прямого двугранного угла. Из точек A и B опущены перпендикуляры AC и BD на ребро двугранного угла. Найти BD, если AB = 7 см, DC = 3 см и AC=2 см.
31. Найти расстояние от вершины A треугольника ABC до плоскости, проходящей через сторону BC под углом 60° к плоскости треугольника, если AB = 7 см, AC = 13 см, BC = 10 см.
32. Через основание равнобедренного треугольника проведена плоскость под углом в 45° к плоскости треугольника. Расстояние от вершины треугольника до плоскости равно $5\sqrt{2}$ см. Определить периметр треугольника, если его основание равно 48 см.
33. Треугольник с основание 10 и высотой 4 наклонен к плоскости его проекции под углом в 60°. Найти площадь проекции треугольника.
34. Ромб с диагоналями 8 и $\sqrt{2}$ наклонен к плоскости его проекции под углом в 45°. Найти площадь проекции ромба.
35. Два равнобедренных треугольника имеют общее основание, а плоскости их отклонены на 60°. Общее основание равно 16 см, боковая сторона одного треугольника равна 17 см, а боковые стороны другого взаимно перпендикулярны. Определить расстояние между вершинами треугольников.
36. Катеты прямоугольного треугольника 10.2 см и 18.6 см. Определить расстояние от вершины прямого угла до плоскости, которая проходит через гипотенузу и составляет угол 30° с плоскостью треугольника. Вычислить площадь проекции треугольника на плоскость.
37. Дан треугольник ABC со сторонами AB = 9.2 см; BC = 6.3 см и AC = 5.8 см. Через сторону AC проходит плоскость α, составляющая с плоскостью треугольника угол 45°. Найти расстояние между плоскостью α и вершиной B, и площадь проекции треугольника на плоскость.
38. AB – прямая пересечения двух взаимно перпендикулярных плоскостей α и β; CD-отрезок в плоскости α, проведенный параллельно AB на расстоянии 60 см от нее; E – точка в плоскости β на расстоянии 91 см от AB. Найти расстояние от E до CD.
39. Концы отрезка AB = 6.8 дм находятся на двух гранях прямого двугранного угла и отстоят от его ребра на расстоянии AC = 40см и BD = 28 см. Найти длину проекции отрезка AB на ребро двугранного угла.
40. На ребре прямого двугранного угла дан отрезок AB = 8 см. Из его концов в гранях двугранного угла восставлены к отрезку AB перпендикуляры AC = 5 см и BD = 3 см. Найти расстояние CD.

МНОГОГРАННЫЕ УГЛЫ

1. Можно ли составить трехгранный угол с такими плоскими углами 100°, 70° и 40°?
2. Можно ли составить выпуклый четырехгранный угол из таких плоских углов 40°, 70°, 100° и 150°?
3. Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60°; на одном из ребер отложен от вершины отрезок и с конца его опущен перпендикуляр на противоположную грань. Доказать, что длины перпендикуляра и этого отрезка относятся, как $\sqrt{6}:3$.
4. Плоские углы трехгранного угла равны 45°, 45°и 60°. Доказать, что двугранный угол, образованный плоскостями плоских углов в 45°, равен 90°.
5. У трехгранного угла два двугранных угла равны между собой. Доказать, что плоские углы, противолежащие этим двугранным углам, также равны.
6. Возможен ли многогранный угол, плоские углы которого равны 10°, 110°, 80°, 20° и 150°?
7. Возможен ли многогранный угол, плоские углы которого равны 40°, 50°, 60° и 120° ?
8. У трехгранного угла два плоских угла по 60°, а третий – прямой. Доказать что угол между плоскостью прямого угла и противолежащим ребром равен 45°.
9. Каждый плоский угол трехгранного угла равен 60°; на одном из ребер отложен от вершины отрезок, равный 3, и из конца его опущен перпендикуляр на противолежащую грань. Найти длину перпендикуляра.
10. В трехгранном угле два плоских угла по 60°, третий прямой. Найти угол между плоскостью прямого угла и противолежащим ребром.
11. В трехгранном угле все плоские углы прямые. Внутри него дана точка на расстоянии 1 дм, 2 дм и 2 дм от его граней. Найти расстояние данной точки от вершины угла.
12. В трехгранном угле два плоских угла по 45°, двугранный угол между ними прямой. Найти третий плоский угол.

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ

1. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведите сечение через середины ребер A_1D_1 и D_1C_1 и вершину А. Вычислите площадь этого сечения, если ребро куба равно *a*.
2. Два отрезка заключены между параллельными плоскостями. Сумма этих отрезков 12 дм. Проекции этих отрезков на плоскости равны 1 и 7 дм. Найти расстояние между этими плоскостями.
3. Через гипотенузу прямоугольного треугольника проведена плоскость под углом 30° к плоскости треугольника. Определить расстояние от вершины прямого угла треугольника до плоскости, если катеты треугольника 3 и 4 дм.
4. Из точки, лежащей вне плоскости, проведены к этой две наклонные, разность которых 4 см. Проекции этих наклонных на плоскость 1 и 7 см. Найти длину каждой наклонной.
5. Катеты прямоугольного треугольника ABC равны 30 и 40 см. Из вершины прямого угла C восставлен к плоскости треугольника перпендикуляр CM, равный 10 см; точка M соединена с вершинами A и B. Определить площадь треугольника AMB.
6. Из центра круга, площадь которого 200,96 см^2, восставлен к его плоскости перпендикуляр, длина которого 12 см. Найти расстояние от конца этого перпендикуляра до точек окружности.
7. Через гипотенузу прямоугольного треугольника проведена плоскость под углом 30° к плоскости треугольника. Расстояние от вершины прямого угла до плоскости 6дм. Определить гипотенузу, если один из катетов равен 20 дм.
8. Из точки пересечения диагоналей квадрата восставлен перпендикуляр к его плоскости, равный 10 дм. Площадь квадрата равна 1152 дм^2. Найти расстояние от верхнего конца перпендикуляра до вершины квадрата.
9. Отрезок длиной в 2 дм пересекает плоскость. Расстояния от концов отрезка до плоскости равны 0.4 и 0.6 дм. Определить угол между отрезком и плоскостью.

10. Меньшее основание трапеции лежит в плоскости α, которая отстоит от большего основания трапеции на расстоянии 10 см; основания трапеции относятся как 3:5. Найдите расстояние точки пересечения диагоналей трапеции от плоскости α.
11. Через сторону ромба проведена плоскость, образующая с диагоналями углы α и 2α. Вычислить острый угол ромба.
12. В трехгранном угле два плоских угла равны 45°, а третий плоский угол содержит 60°. Вычислить двугранный угол, противолежащий плоскому углу.
13. На плоскости дан прямоугольный треугольник, гипотенуза которого 12 см. В пространстве дана точка, удаленная от каждой вершины треугольника на 10 см. Вычислите расстояние данной точки от плоскости.
14. Два равнобедренных треугольника ABC и ACD имеют общее основание AC, двугранный угол AC равен 60°, а угол, образованный стороной BC с плоскостью ADC, равен 45°. Сторона BC равна 6см. Вычислите площадь треугольника ABC.
15. Основание AC равнобедренного треугольника ABC лежит в плоскости α, а вершина B удалена от плоскости α на 32 см. Вычислите площадь треугольника ABC, если AC = 18 см и плоскость треугольника ABC наклонена к плоскости α под углом 45°.

Тема 7.2. Координаты и векторы. (6 часов)

Векторы на плоскости и в пространстве.

1.Дано: $|\vec{a}|=3; |\vec{b}|=5$ $\quad (\vec{a};\vec{b})=50^\circ$ Найти: $\vec{a}\circ\vec{b}$; $\quad |\vec{a}-3\vec{b}|$; $\quad |2\vec{a}+\vec{b}|$

2. Найти модуль равнодействующей **R** двух сил **F1** и **F2**, и углы образуемые равнодействующей с силами **F1** и **F2**, , если | **F1** | = 4Н | **F2** | = 6Н, а (**F1**;**F2**) = 60°

3. Дан тетраэдр ABCD. Найдите сумму векторов: **BC** + **CD** + **DA** ; 2) **AD** + **DC** + **CB**

4. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$
Найдите сумму векторов: $\mathbf{BC} + \mathbf{CC_1} + \mathbf{C_1B_1}$; 2) $\mathbf{CB} + \mathbf{B_1A_1} + \mathbf{AD} + \mathbf{D_1C_1}$

5. Дано: $|\vec{a}|=5; |\vec{b}|=7; (\vec{a}\vec{b})=73^\circ$ а) Определить длины векторов:

$|\vec{a}+\vec{b}|$; $\quad |\vec{a}-\vec{b}|$; $\quad |2\vec{a}+3\vec{b}|$; $\quad |4\vec{b}-\vec{a}|$; $\quad |2\vec{a}-5\vec{b}|$.

б) Определить скалярные произведения векторов:
a(**a** + **b**); (**a** + **b**)(**a** - **b**); (2**a** - **b**)(**a** + 2**b**); **b**(2**b** - **a**); (**a** + 2**b**) (5**a** - **b**)
в) Определить углы между векторами **m** и **n**, если 1) **m** = **a** и **n** = 2**a** + **b**;
2) **m** = **a** + **b** и **n** = **b** - **a** 3) **n** = **b** - **a**; **m** = 3**a** + **b**

6. Векторы **AC** = **m** и **BD** = **n** служат диагоналями параллелограмма ABCD
Выразите векторы **AB; BC; CD**; **DA** через **m** и **n**.

7. Дан правильный шестиугольник ABCDEF, O - его центр. **OA** = **a**; **OB** = **b**;
Выразить векторы **OC; OD; OE** и **OF**

8. Дан тетраэдр ABCD. Докажите, что **AD** + **BC** = **BD** + **AC**

9. Дан параллелограмм ABCD и вне его произвольная точка O. Докажите, что **OA** +**OC** = **OB** + **OD**

10. Пусть M - середина отрезка AB и O - произвольная точка пространства. Докажите, что выполняется равенство $\overline{OM}=\frac{1}{2}(\overline{OA}+\overline{OB})$.

11. Точка M - середина стороны AB σABC. Выразите **CM** через **AB** и **BC**

12. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Разложите по векторам **p** = **AB**, **q** = **AD** и **r** = $\mathbf{AA_1}$ векторы: $\mathbf{AD_1}$; $\mathbf{AC_1}$; **AM;** , где M - середина BB_1

13. Дано: | **a** | = 2; | **b** | = 7 (**a** ; **b**) = 60° Найти: **ab**; (3**b** - **a**) **a** **b** (**b** - 3**a**)

14. Векторы **a, b, c, m**, модули которых | **a** | = 2 | **b** | = 3; | **c** | = 7; | **m** | = 5 образуют с осью соответственно углы 60°; 180°; 150°; 30°. Найдите проекцию суммы этих векторов на ось L (аналитически и графически)

15. Векторы **m**; **n**; **c**; **k**, модули которых | **m** | = 6; | **n** | = 2; | **c** | = 10; | **k** | = 4 образуют с осью соответственно углы 0°; 120°; 60°; 180°. Найти проекцию суммы этих векторов на ось "ℓ" аналитически и графически.

16. Дано: $пр_l$ **a** = -2 $пр_l$ **b** = 1 Вычислить: пр (2**a**+**b**); пр (3**a**-2**b**)

17. Найти проекцию а на ось ℓ, образующую с вектором угол 60°, если | **a** | = 6.

18. Используя векторный метод докажите:

а) Диагонали ромба перпендикулярны

б) В любом параллелограмме сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех его сторон;

в) $\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\circ\cos\beta+\sin\alpha\circ\sin\beta$ г)Теорема Пифагора д)Теорема косинусов

19. В параллелограмме ABCD O - точка пересечения диагоналей, точки M и N такие, что | BM | : | MC | = 1 : 3 | DN | : | NC |=2 : 1 **AD** = **a**; **AB** = **b**

Выразите через **a** и **b** векторы: **CO; BD; OD; AN; NB; AM; DM; ON; MO; MN**

20. В правильном шестиугольнике ABCDFK задан базис **AK** = **a**; **AB** = **b**; Выразите через **a** и **b** векторы **BF; CK; AD; KF; KB; CF; AF; CA; DK; BD; KD**

21. В тетраэдре ABCD DL, CF, BK - медианы треугольника CBD, M - точка их пересечения **AC** = **a**; **AB** = **b**; **AD** = **c**. Выразите через **a**, **b**, **c** векторы: **DC**; **BC**; **BD**; **AK**; **AL**; **AF**; **CF**; **BK**; **DL**; **AM**

22. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$; M – точка пересечения диагоналей параллелограмма CDD_1C_1, точка K такая, что $|B_1K|:|KC_1|=4:1$. Задан базис **AD** = **a** ; **AB** = **b** ; **AA₁** = **c**. Выразите через **a**, **b**, **c** следующие векторы :

BD; A_1C_1; DC_1; B_1C_1; BA_1; AC_1; B_1D; AM; B_1M; BM; AK; DK; KM; A_1M.

23.В треугольной призме ABCA1B1C1 M – точка пересечения диагоналей параллелограмма BCB_1C_1 F такая, что $|MF|=|FB_1|$ **AC** = **a** ; **AB** = **b** ; **AA_1** = **c**

Выразите через **a**; **b**; **c** векторы : **BC; BC_1; B_1C; AM; A_1M; MF; AF; A_1F**

24. Выведите формулу для квадрата суммы трёх чисел (векторов). С её использованием решите задачи: а)Найти угол между диагоналями куба. б)В правильной треугольной призме длина стороны основания 1, длина высоты 2.Найти: расстояние от вершины призмы до центра боковой грани, угол между диагоналями боковых граней.

25. Найти координаты **AB**, если A(-1;-2); B(4;5) и длину этого вектора.

26. Найти угол между вектором **CD** и осью Oy, если C(-3;4) и D(1;-2)

27. Даны точки A(-2;-3), B(2;4) и C(5;1). Разложите векторы **AB; BC; CA** по единичным векторам **i** и **j** .

28. Проверьте коллинеарны ли векторы **AB** и **CD**, если:

а) A(-3;6); B(1;2); C(4;-6); D(-2;0) б) A(-3;1); B(3;3); C(-2;-3); D(6;-1)

29. Дано: **a** = 2**i**-3**j** **b** = (-3;-4) Найти: **ab**; | 2**b**-3**a** |, угол между векторами **a** и **b**

30. Дано: **a** = (-2;-3); **b** = (5,0); **c** = (3;-5) Найти: **a** + **b**; **a** - **c**; **a** + **b** - **c**; 3**a** - **c**; **a** - 2**b** + 2**c**;

30. Дан ΔABC A(4;0); B(7;4); C(-4;6) Найдите периметр ΔABC

31. Найти углы ΔABC, если A(6;2); B(-1;4); C(1;-5)

32. Найдите точку, равноудалённую от точек A(7;-1); B(-2;2); C(-1;-5)
33. Расстояние от точки M, лежащей на оси Ox, до точки N(10,5) равно 13. Найдите точку M
34. Постройте векторы: а) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ б) $\mathbf{b} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
35. Постройте векторы **AB**, если: а) A(2;-3;4) и B(-3;2;-5) б) A(0;-2;3) и B(5;0;-4)
36. Дано: $\mathbf{a} = -\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ Найти: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$; $(\mathbf{a}\ ;\ \mathbf{b})$; $|\mathbf{b} - \mathbf{a}|$
37. Даны вершины ΔABC A(-1;4;1); B(3;4;-2); C(5;2;-1). Найти углы треугольника.
38. Найти угол между векторами $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$ и $\mathbf{b} = 5\mathbf{j} - 12\mathbf{k}$; их скалярное и векторное произведения.
39. Дано: $\mathbf{a} = (-2;y;-1)$ и $\mathbf{b} = (3;-2;1)$. Найдите координату y, если известно, что $\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$
40. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах:
а) $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ $\mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ б) $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
41. Даны два вектора: $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
Вычислите координаты векторов: $\mathbf{a} + \mathbf{b}$; $\mathbf{a} - \mathbf{b}$; угол между векторами $(\mathbf{a}\ ;\ \mathbf{b})$
42. Дано: $\mathbf{a} = (2;2;-1)$ и $\mathbf{b} = (-3;6;-6)$ Найти: $\mathbf{ab}$; $[\mathbf{a}\ \mathbf{b}]$; $|2\mathbf{b} - \mathbf{a}|$
43. Вектор $\mathbf{AB} = \mathbf{a}$ задан координатами своих концов A(2;4;-3); B(6; –3;1); Вычислите его длину и углы, которые образует вектор с базисными векторами.
44. Даны векторы $\mathbf{a} = 12\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$; $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ и $\mathbf{c} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$. Вычислите проекцию вектора $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ на вектор $\mathbf{a}$
45. Докажите, что четырёхугольник с вершинами A (3;-1;2); B(1;2-1); C(-1;1-3); D(3;-5;3) - трапеция.
46. Даны: сила $\mathbf{F_1} = (2;3;-1)$ и точка её приложения A (-1;-1;3); Найти момент силы, относительно начала координат и углы, составляемые моментом с координатными осями.

Тема 7.3. Многогранники. (4 часа)

ПРИЗМА

1.Определить диагональ прямоугольного параллелепипеда по трем его измерениям: 4, 3 и 12 дм.

2. Диагональ куба равна 6 м. Определить площадь диагонального сечения.

3.Определить большую диагональ прямого параллелепипеда, каждое ребро которого равно 5м, а угол основания равен 60^o.

4 Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда равны 6, 3 и 2 м. Вычислить его диагональ.

5 Диагональ правильной четырехугольной призмы равна 7см. Диагональ боковой грани 5см. Найти высоту призмы.

6 Дана прямая треугольная призма, стороны которой равны 13, 18, 19 дм, а высота призмы равна 19 дм. Найдите площадь сечения, проведенного через боковое ребро и меньшую высоту основания.

7 Основанием прямой призмы служит ромб; диагонали призмы равны 20 и 18 дм., высота призмы 16 дм. Найдите сторону основания призмы.

8 В прямом параллелепипеде стороны оснований 3 см и 5 см, одна из диагоналей основания 4 см. Меньшая диагональ параллелепипеда с плоскостью основания составляет угол 60^o. Определить диагонали параллелепипеда.

9 В прямоугольном параллелепипеде боковое ребро равно 5 см., площадь диагонального сечения 205 см^2.Определить стороны основания, если площадь основания 360 см^2.

10 В прямом параллелепипеде боковое ребро 1 м, стороны основания равны 23 дм и 11 дм., а диагонали основания относятся, как 2 : 3 . Определить площади диагональных сечений.

11 В правильной четырехугольной призме площадь основания равна 144 $см^2$. , а высота равна 14 см. Определить диагональ этой призмы.

12 Каждое ребро правильной треугольной призмы a = 3м. Через сторону основания и середину оси проведена плоскость. Найти площадь сечения.

13 В прямой треугольной призме через одну из сторон основания проведена плоскость, пересекающая противоположное боковое ребро и отклонённая от плоскости основания на 45°. Площадь основания равна Q. Определить площадь сечения.

14 Основанием прямой призмы служит ромб; диагонали призмы равны 8 см. и 5 см; высота 2 см. Найти сторону основания.

15 Боковое ребро l = 15 см. Наклонной призмы наклонено к плоскости основания под углом 30° Определить высоту призмы.

16 В правильной четырёхугольной призме площадь боковой грани равна Q. Найдите площадь диагонального сечения.

17 Вычислите угол между диагональю куба и его основанием.

18 Ребро куба равно a. Найдите кратчайшее расстояние от диагонали до непересекающего её ребра.

19 Грани параллелепипеда – равные ромбы со стороной a и углом 60°. Вычислить площади его диагональных сечений.

20 Диагональ правильной четырехугольной призмы наклонена к боковой грани под углом 30°. Определить наклон ее к основанию.

21 Ребро куба равно a. Найдите площадь сечения куба плоскостью перпендикулярной его диагонали и проходящей через ее середину.

22 Вычислите периметр и площадь сечения, проходящего через концы трех ребер, выходящих из вершины куба. Ребро куба равно a.

23 В треугольной наклонной призме расстояния между боковыми ребрами равны 20 см, 34 см, 42 см. Найдите расстояние между большей боковой гранью и противоположным ей боковым ребром.

24.Основанием наклонного параллелепипеда служит ромб ABCD, в котором угол α = 60°; боковые ребра наклонены к плоскости основания под углом 60° и плоскость AA_1 CC_1перпендикулярна плоскости основания. Докажите, что площади сечений BB_1 DD_1 и AA_1 C_1C относятся как 2 : 3.

25.В прямом параллелепипеде диагонали образуют с плоскостью основания углы 45° и 60°. Стороны оснований равны 17 см и 31 см. Вычислить диагонали этого параллелепипеда.

26.Вычислите площади диагональных сечений прямоугольного параллелепипеда, стороны основания которого равны a и b, а высота равна h.

27.В кубе через концы ребер, выходящих из одной вершины, проведено сечение. Найдите площадь этого сечения, если ребро куба равно а.

28.Определить длину диагонали прямоугольного параллелепипеда, если она составляет с основанием угол α. Диагональ основания составляет со стороной основания угол β. Вычислить длину диагонали параллелепипеда при а = 15,6 см, α = 38°15’; β = 58°24’.

29.В правильной четырехугольной призме диагональ равна L и образует с плоскостью основания угол α. Определить сторону основания и боковое ребро и вычислить их при L = 28.5 см.; α = 58°35’.

30.В наклонной призме, в основании которой лежит ромб с острым углом α, одна из вершин верхнего основания проектируется в точку пересечения диагоналей нижнего основания. Определить сторону основания, если боковое ребро b наклонено к плоскости основания под углом β. Вычислить высоту при $b = 12{,}3$ см, $\alpha = 53°36'$, $\beta = 48°56'$.

31. Основанием прямой треугольной призмы служит равнобедренный треугольник, в котором угол при вершине $\alpha = 15°10'$ и каждая из равных сторон $a = 8{,}5$ см. Через основание этого треугольника проведена плоскость, образующая с плоскостью угол 70°. Определить площадь сечения треугольника.

32.Основанием треугольной призмы служит прямоугольный треугольник с гипотенузой а и острым углом α. Через гипотенузу проведена плоскость под углом β к плоскости основания. Определить площадь сечения и вычислить ее, если $a = 8.9$ см. и $\alpha = 47°$, $\beta = 52°40'$.

ПИРАМИДА

1. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны основания 3 см и 7 см, а одна из диагоналей 6 см, высота пирамиды, проходящая через точку пересечения диагоналей основания равна 4 см. Определить боковые ребра пирамиды.
2. Высота правильной четырехугольной пирамиды 7 см., а сторона основания равна 8 см. Определить боковое ребро.
3. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание 6 см и высота 9 см., боковые ребра равны между собой и каждое содержит 13 см. Определить высоту этой пирамиды.
4. Основанием пирамиды служит равнобедренный треугольник, у которого основание равно 12 см, а боковая сторона 10 см. Боковые грани образуют с основанием равные двугранные углы, содержащие по 45°. Определить высоту этой пирамиды.
5. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 6 см и 8 см; каждое боковое ребро пирамиды равно 13 см. Вычислить высоту пирамиды.
6. В правильной четырехугольной пирамиде сторона основания равна 14 см. Длина бокового ребра 10 см. Определить площадь диагонального сечения.
7. В пирамиде с высотой $H = 5$ см и площадью основания 200 см^2. проведена параллельно основанию плоскость на расстоянии 3,5 см. от него. Вычислить площадь полученного сечения.
8. Определить высоту пирамиды, если площадь ее основания равна 900 см^2, площадь параллельного ему сечения 108 см^2, а расстояние между ними равно 14 см.
9. Определить, на каком расстоянии от основания пирамиды находится параллельное ему сечение, площадь которого равна 100 дм^2, если высота пирамиды 16 дм, а площадь ее основания 1024 дм^2?
10. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 2 см, а стороны оснований 3 см и 5 см. Определить диагональ этой усеченной пирамиды.
11. Определить стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды, если ее высота равна 7 см., боковое ребро 9 см и диагональ 11 см.
12. Высота правильной четырехугольной усеченной пирамиды равна 4 см, диагональ 5 см. Найти площадь диагонального сечения.
13. Площадь оснований усеченной пирамиды 9 см^2. и 25 см^2. Найти площадь среднего сечения.
14. Соответствующие стороны оснований усеченной пирамиды относятся, как 13 : 17, а периметр среднего сечения равен 45 м. Определить периметры оснований.
15. Основанием пирамиды служит параллелограмм, у которого стороны равны 3 см и 7 см, а одна из диагоналей 6 см. Высота пирамиды равна 4 см и проходит через точку пересечения диагоналей основания. Найдите боковые ребра пирамиды.
16. Основание пирамиды – ромб, у которого сторона и одна из диагоналей равны 4 см. Высота пирамиды равна большей диагонали основания и проходит через вершину

острого угла ромба. Вычислите площадь сечения, проходящего через меньшую диагональ основания перпендикулярно к большему боковому ребру пирамиды.
17. Три последовательных угла основания четырехугольной пирамиды относятся, как 2:3:4; боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания равные углы. Найдите плоские углы в основании.
18. Докажите, что все диагональные сечения параллелепипеда имеют общую точку.
19. Через середину высоты пирамиды проведено сечение, параллельное основанию. Найдите площадь сечения, если площадь основания равна S.
20. В каком отношении сечение, параллельное основанию, делит высоту пирамиды, если площадь сечения равна: 1) 1/2 площади основания; 2) 1/4 площади основания; 3) m/n площади основания?
21. Высота пирамиды разделена на четыре равные части и через точки деления проведены плоскости, параллельные основанию. Площадь основания равна 100 $см^2$. Вычислите площади полученных сечений.
22. Докажите, что если в правильной треугольной пирамиде высота равна стороне основания, то боковые ребра составляют с плоскостью основания угол 60°.
23. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 12 см, 16 см; каждое боковое ребро пирамиды равно 25 см. Найдите высоту пирамиды.
24. Основание пирамиды – треугольник со сторонами 20 см, 21 см, 29 см. Боковые грани пирамиды образуют с плоскостью основания углы в 45°. Найдите высоту пирамиды.
25. В основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник. Две боковые грани, проходящие через один из катетов и гипотенузу треугольника, перпендикулярны плоскости основания. Докажите, что все боковые грани этой пирамиды являются прямоугольными треугольниками.
26. Стороны оснований правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны 10 дм и 2 дм, а ее высота 2 дм. Найдите боковое ребро пирамиды.
27. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 36 см, апофема равна 45 см, а стороны оснований относятся, как 1 : 4. Найдите эти стороны.
28. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде высота равна 7 см, а стороны оснований 3 см и 5 см. Найдите диагональ этой усеченной пирамиды.
29. Площадь основания пирамиды равна 605 $дм^2$; площадь параллельного ему сечения 245 $дм^2$, а расстояние между ними равно 12 дм. Определить высоту пирамиды.
30. В правильной треугольной пирамиде сторона основания $a = 28.8$ м, боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом 48°32’. Вычислить площадь сечения, проведенного через сторону основания перпендикулярно к боковому ребру.
31. В правильной треугольной пирамиде боковое ребро наклонено к плоскости основания под углом α, Через сторону основания a проведена плоскость под углом β к плоскости основания. Определить площадь сечения и вычислить ее при $a = 4{,}35$ см, $\alpha = 33°16'$, $\beta = 63°$.
32. В правильной четырехугольной пирамиде с плоским углом при вершине 53°43’ проведена плоскость через середину двух смежных сторон основания и вершину пирамиды. Определить угол наклона этой плоскости к плоскости основания пирамиды.
33. В правильной треугольной пирамиде плоский угол при вершине равен α. Определить наклон бокового ребра к плоскости основания.
34. Боковая грань правильной четырехугольной пирамиды наклонена к плоскости основания под углом β. Определить плоский угол при вершине пирамиды.

ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ и точки K, L, M, причем K лежит на ребре AA_1, L – на ребре CC_1 и M – на ребре DC. Постройте сечение куба плоскостью, проходящей через точки K, L, M.
2. В тетраэдре SABC постройте сечение плоскостью, проходящей через три точки, лежащие на ребрах SA, AC и BC .
3. В правильной треугольной пирамиде SABC сторона основания а и боковое ребро равно в. Провести в этой пирамиде плоскость через середины ребер AB и BC параллельно ребру SB. Определить площадь полученного сечения.
4. Постройте сечение тетраэдра SABC плоскостью, проходящей через вершину A и середины ребер BS и CS. Найдите площадь сечения, если каждое ребро тетраэдра равно a.
5. На модели куба укажите его ребра, лежащие на скрещивающихся прямых.
6. Найдите расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней куба с ребром a.

Тема 7.4. Тела и поверхности вращения. (4 часа)

Цилиндр

1. Радиус основания цилиндра 3 см, высота 8 см. Найдите длину диагонали осевого сечения и острый угол ее наклона к плоскости основания.
2. Диагональ осевого сечения цилиндра равна 26 см, высота цилиндра 24 см. Найдите площадь основания цилиндра.
3. Радиус основания цилиндра 13 см. его высота 20 см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси цилиндра на расстоянии 5 см. от нее.
4. В цилиндре проведена, параллельно оси плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 60°. Высота цилиндра равна 15 см, расстояние секущей плоскости от оси цилиндра равно 3см. Вычислите площадь сечения.
5. В цилиндре проведена параллельно оси плоскость, отсекающая от окружности основания дугу в 120°. Длина оси $h = 10$ см; ее расстояние от секущей плоскости а = 2 см. Определить площадь сечения.
6. Площадь основания цилиндра относится к площади осевого сечения, как 3 : 4 . Найти угол между диагоналями сечения.
7. Высота цилиндра 6 дм, радиус основания 5 дм. Концы данного отрезка лежат на окружностях обеих оснований; длина его 10 дм. Найти его кратчайшее расстояние от оси.
8. Площадь основания равностороннего цилиндра равно 4 ед^2. Найти площадь его осевого сечения.
9. Диагональ осевого сечения цилиндра 22,5 дм и образует с плоскостью основания угол 30°. Найти площадь сечения, площадь основания цилиндра.
10. Квадрат свернут в цилиндр так, что сторона квадрата свернута в окружность основания цилиндра. Определить угол наклона диагонали осевого сечения цилиндра к плоскости его основания.
11. В цилиндре, высота которого 20 см, параллельно его оси на расстоянии 3см от нее проведена плоскость, которая отсекает от окружности основания дугу в 120°. Вычислите площадь этого сечения.

Конус

1. Площадь основания равностороннего конуса равна 54π см^2. Определить площадь осевого сечения конуса.
2. Радиус основания конуса 5 см, его высота 12 см. Найдите площадь осевого сечения, длину образующей и угол ее наклона к плоскости основания.

3. Площадь осевого сечения конуса равна 48 см^2, его образующая составляет с плоскостью основания угол α. Найдите площадь основания конуса.
4. Радиус основания конуса 6 см, его высота 12см. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно оси конуса на расстоянии 2 см от нее.
5. В конусе проведена плоскость, параллельная оси и отсекающая от окружности основания дугу в 120°. Высота конуса равна 12 см, расстояние секущей плоскости от оси конуса равно 3 см. Вычислите площадь сечения.
6. Радиус основания конуса равен R. Вычислите площадь параллельного сечения, делящего высоту конуса в отношении m : n (от вершины к основанию).
7. В равностороннем конусе (в осевом сечении – правильный треугольник) радиус основания равен R. Найдите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 60°.
8. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r ; образующая наклонена к основанию под углом α. Найдите высоту.
9. Радиусы оснований усеченного конуса равны 18 см и 30 см, образующая равна 20 см. Найдите расстояние от центра меньшего основания до окружности большего.
10. Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r , образующая равна L. Найдите площадь осевого сечения.
11. Через вершину конуса под углом 60° к плоскости основания проведена плоскость, отсекающая дугу в 90°. Высота конуса равна *H*. Вычислите площадь сечения.
12. Высота конуса равна *H*. Угол между высотой и образующей равен 30°. Вычислите площадь сечения, проведенного через две образующие, угол между которыми равен 60°.
13. Дан усеченный конус, площади оснований которого равны 16 и 4 дм^2. Найдите площадь сечения, проведенного параллельно основаниям через середину высоты.

Сфера, шар и части шара

1. Найдите центр и радиус сферы:
a) $x^2 + y^2 + z^2 = 16$; b) $(x - 1)^2 + (y + 3)^2 + (z - 5)^2 = 36$; c) $x^2 - 6x + y^2 + 8y + z^2 - 4z + 4 = 0$; d) $x^2 + 10x + y^2 + 2y + z^2 + 6z - 1 = 0$
2. Сфера имеет центр в точке O (2; –1; 3) и проходит через начало координат. Составьте уравнение сферы.
3. Точка A (4; – 2; 3) лежит на сфере с центром C (2; – 3; – 1). Составить уравнение сферы.
4. Радиус сферы равен 70 см. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 24 см от точки касания. Найти ее кратчайшее расстояние от поверхности сферы.
5. Дана сфера $x^2 + y^2 + z^2 = 200$. Найдите координаты точек пересечения сферы с прямой, проходящей через начало координат и точку A (5; -3; 4).
6. Сфера, радиус которой равен R, пересечена плоскость на расстоянии *a* от центра. Вычислить площадь сечения.
7. Радиус сферы R. Через конец радиуса проведена плоскость под углом α к нему. Вычислить площадь сечения.
8. Радиус шара равен 63 см. Точка находится на касательной плоскости на расстоянии 16 см от точки касания. Найти ее кратчайшее расстояние от поверхности шара.
9. Шар, радиус которого равен 41 дм, пересечен плоскостью на расстоянии 9 дм от центра. Определить площадь сечения.
10. Угол между радиусами, проведенными к двум точкам поверхности шара, равен 60°, а кратчайшее расстояние между этими точками по поверхности шара 5 см. Определить радиус шара.

11. На поверхности шара даны три точки, прямолинейные расстояния, между которыми равны 30, 24, 18 см, а радиус шара равен 39 см. Найти расстояние от центра шара до плоскости, проходящей через эти точки.
12. Диагонали ромба равны 60 см и 45 см. Поверхность шара касается всех его сторон. Найдите расстояние центра шара от плоскости ромба, если радиус шара равен 30 см.
13. Стороны треугольника 60, 56 и 52 см. Найдите расстояние от плоскости треугольника до центра шара, касательного к сторонам треугольника, если радиус шара равен 20 см.

СМЕШАННЫЕ ЗАДАЧИ.

1. Основанием прямой призмы служит ромб; диагонали призмы равны 20 дм. и 18 дм, высота призмы 16 дм. Найдите сторону основания.
2. Основание пирамиды – прямоугольник со сторонами 12 и 16 см, а боковые ребра равны $10\sqrt{2}$ см. Найти высоту пирамиды.
3. В правильной четырехугольной усеченной пирамиде стороны оснований относятся, как 3 : 7 . Найдите эти стороны, если высота пирамиды равна 12,6 дм, апофема равна 13 дм.
4. Диагонали правильной четырехугольной усеченной пирамиды равны $d_1 = d_2 = 25$дм и перпендикулярны. Найдите высоту пирамиды.
5. В основании пирамиды лежит квадрат. Одно из двух противолежащих ребер перпендикулярно плоскости основания, а другое наклонено к ней под углом □ и имеет длину a. Найти длины остальных боковых ребер и углы их наклона к плоскости основания.
6. Дан прямой параллелепипед, у которого стороны основания, равные 16 см и 12см составляют угол 60°, а боковое ребро есть средняя пропорциональная между сторонами основания. Найдите диагонали параллелепипеда.
7. Дана правильная треугольная усеченная пирамида, стороны оснований которой 4 м и 2,5 м, а высота 1,5 м. Найдите площадь сечения и двугранный угол между сечением и нижним основанием, если сечение проходит через сторону нижнего основания и противоположную вершину верхнего основания.
8. Дан цилиндр, радиус основания которого равен высоте цилиндра. В цилиндр вписана правильная шестиугольная призма. Найти угол между диагональю ее боковой грани и осью цилиндра.
9. Конус пересечен плоскостью, проведенной параллельно основанию на расстоянии a от вершины. Найти площадь сечения, если высота конуса h, радиус основания r.
10. Радиус основания конуса r; высота h. Найдите ребро вписанного куба.
11. Дан усеченный конус, площади оснований которого 36 и 16 дм^2. Найдите площадь сечения, проведенного через середину высоты параллельно основаниям.
12. Дан усеченный конус, площади оснований которого равны 25 и 4 дм^2. Высота разделена на три равные части, и через точки деления проведены плоскости параллельно основаниям. Найдите площади сечений.
13. Дан усеченный конус, радиусы оснований которого 18 и 8 дм, а высота 10 дм. На каком расстоянии от большего основания находится параллельное сечение, площадь которого есть средняя пропорциональная площадей оснований.
14. Ромб с большей диагональю d и острым углом α, вращается вокруг оси, лежащей в плоскости ромба, проходящей вне его через вершину ромба и перпендикулярной его большей диагонали. Найдите площадь осевого сечения тела вращения.

15. Два шара, радиусы которых равны 40 см расположены так, что центр одного лежит на поверхности другого. Найдите длину линии, по которой пересекаются их поверхности, и площадь сечения, проведенного через линию пересечения.

16. Расстояния между центрами пересекающихся шаров равно 50 см, а их радиусы равны 30 и 40 см. Найдите длину линии, по которой пересекаются поверхности шаров.

17. Найдите радиус шара, описанного около куба со стороной 26 см.

18. Правильная шестиугольная призма вписана в шар радиуса 50 см. Ребро основания призмы равно 40 см. Найдите высоту призмы.

19. Плоскость, перпендикулярная диаметру шара, делит диаметр на две части: 3 см и 9 см. На какие части делится поверхность шара.

20. Радиус земного шара 6370 км. Найти длину тропика (широта 23°27') и полярного круга (широта 66°33').

21. Радиусы двух шаров равны 16 см и 20 см, а расстояние между их центрами 25 см. Найдите длину окружности, по которой пересекаются их поверхности.

22. Плоскости двух сечений шара взаимно перпендикулярны. Одна из этих плоскостей проходит через центр, а другая удалена от него на 12 см, общая хорда сечений равна 18 см. Найдите площадь сечений.

23. Боковые ребра пирамиды образуют с плоскостью основания угол α. Найдите высоту пирамиды, если ее основания – прямоугольный треугольник с гипотенузой, равной c. Вычислите высоту при $c = 12{,}4$ см и $\alpha = 53°48'$.

24. В правильную четырехугольную пирамиду вписан куб так, что четыре его вершины находятся на боковых ребрах пирамиды, а четыре другие – на плоскости основания. Найти ребро куба, если сторона основания пирамиды равна b, а высота равна h.

25. Дана правильная треугольная пирамида. Постройте сечение пирамиды, проходящее через сторону основания и середину противолежащего ребра.

26. Дана правильная шестиугольная призма, боковые ребра которой равны 2а, стороны основания равны a. Требуется: 1) построить сечение, проходящее через сторону нижнего основания и противолежащую ей сторону верхнего основания; 2) найти площадь построенного сечения.

27. Дана четырехугольная призма и точки А, В, С на боковых ребрах призмы. Постройте сечение, проходящее через эти три точки.

28. Дана правильная четырехугольная пирамида. Постройте сечение пирамиды, проходящее через сторону основания под углом 30° к плоскости основания.

29. Осевым сечением цилиндра является квадрат. Найти площадь основания цилиндра, если площадь осевого сечения равна S.

30. Радиус основания конуса r, высота h. В конус вписана правильная треугольная призма, боковые грани которой квадраты. Найдите ребра призмы.

31. Дан усеченный конус, площади оснований которого S и s. Найдите площадь среднего сечения, параллельного основаниям.

32. Прямоугольник со сторонами a и b ($a > b$) вращается вокруг стороны a. В тело вращения помещен отрезок C, концы которого лежат на окружностях обоих оснований. Найти кратчайшее расстояние отрезка от оси.

33. Найти уравнение сферы, проходящей через точки (0; 0; 0), (0; 0; 4), (0;4;0), (4;0;0).

34. Найдите радиус шара, описанного около куба со стороной a.

35. Дана правильная четырехугольная пирамида, сторона основания которой равна a, плоский угол при вершине 60°. Найдите радиусы вписанного и описанного шаров и вычислите их, если $a = 44$ см.

Тема 7.5. Измерения в геометрии. (6 часов)

Многогранники

1. В прямом параллелепипеде стороны основания равны 10 см и 17 см, одна из диагоналей основания 21 см; большая диагональ параллелепипеда 29 см. Определить площадь полной поверхности параллелепипеда и его объем.
2. Измерения прямоугольного параллелепипеда относятся, как 2:7:26; диагональ параллелепипеда равна 81 см. Найдите объем параллелепипеда и площадь боковой поверхности.
3. Диагонали граней прямоугольного параллелепипеда равны 7 см, 8 см и 9 см. Найдите объем параллелепипеда.
4. Диагональ прямоугольного параллелепипеда равна l и составляет с одной гранью угол α, а с другой – угол β. Вычислите объем параллелепипеда.
5. Основание прямого параллелепипеда – параллелограмм со сторонами 8 см и 32 см и острым углом $\alpha = 60°$. Большая диагональ параллелепипеда равна 40 см. Вычислить объем параллелепипеда.
6. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 25 см и 39 см, а площади его диагональных сечений равны 204 см^2 и 336 см^2. Найдите объем параллелепипеда.
7. Стороны основания прямого параллелепипеда равны 17 см и 25 см, одна из диагоналей основания равна 26 см. Меньшая диагональ параллелепипеда образует с плоскостью основания угол 30°. Вычислить объем параллелепипеда и площадь полной поверхности.
8. Основанием прямого параллелепипеда является ромб, диагонали которого относятся, как 5:16. Диагонали параллелепипеда равны 26 см и 40 см. Вычислите объем параллелепипеда.
9. Вычислите объем прямого параллелепипеда, основание которого - ромб со стороной a и углом α, а диагональ боковой грани составляет с боковым ребром β.
10. Основание прямого параллелепипеда служит ромб со стороной a и острым углом α. Большая диагональ параллелепипеда составляет с плоскостью его основания угол β. Вычислить объем параллелепипеда и площадь боковой поверхности.

Тела вращения

1.Высота цилиндра на 10 см больше радиуса основания, площадь полной поверхности равна 144π см^2. Определить объем цилиндра.

2.В цилиндре радиус основания $r = 2$ см, а высота $h = 7$ см. Определить радиус круга, равновеликого площади полной поверхности этого цилиндра.

3.Один цилиндр имеет высоту 2.4 м и диаметр основания 1 м; другой цилиндр имеет высоту 1.2 м и диаметр основания 0.5 м. Сравнить между собой объемы обоих цилиндров.

4.Площадь боковой поверхности цилиндра S, а длина окружности основания равна C. Найти объем цилиндра.

5.Из равностороннего цилиндра, диаметр основания которого равен 20 см, выточен наибольший шар. Найти объем и площадь поверхности шара.

6.Диагональ d осевого сечения цилиндра наклонена к плоскости основания под углом α. Вычислить объем и площадь боковой поверхности цилиндра, если $d = 6.4$ см, $\alpha = 57°20'$.

7. Диагональ прямоугольника составляет с одной из сторон угол α. Вычислить отношение объемов цилиндров, образованных вращением прямоугольника около каждой из смежных сторон.

8.Образующая конуса, равная 4 дм, составляет с плоскостью его основания угол 30°. Найти объем конуса и площадь боковой поверхности.

9.Через вершину конуса под углом φ к основанию проведена плоскость, отсекающая от окружности основания дугу a. Найти объем конуса, если расстояние от плоскости до центра основания равно a и вычислить его, если $\alpha = 120°$, $a = 4.2$ см.

10.Угол при вершине в осевом сечении конуса равен 120°. Определить полную поверхность и объем конуса, образующая которого равна 12 см.

11.Угол при вершине осевого сечения конуса 2φ, радиус основания r. Найти длины радиусов шаров, вписанного в конус и описанного около него и вычислить их, если $r = 6.2$ см, $\varphi = 38°20'$.

12. Высота и образующая конуса относятся как 4:5; объем конуса равен 96π см^3. Найти площадь полной поверхности конуса.

13.Радиус основания конуса 9 м, его высота 17.1 м. Какое количество краски потребуется для покрытия боковой поверхности конуса, если на 1 м^2 расходуется 0.5 кг.

14.Угол между образующей и осью конуса равен 45°, образующая равна 13 м. Найти объем и площадь боковой поверхности конуса.

15.Радиусы оснований усеченного конуса равны 11 и 7 см, высота его 3 см. Определить площадь боковой поверхности усеченного конуса и его объем.

16.В усеченном конусе радиусы оснований равны 27 см и 11 см; образующая относится к высоте, как 17:15. Найти объем усеченного конуса.

17.Образующая усеченного конуса равна l и наклонена к плоскости основания под углом φ. Определить объем усеченного конуса, если отношение площадей его оснований равно 4.

18.В усеченном конусе отношение площадей оснований равно 4, образующая имеет длину l и наклонена к плоскости основания под углом α. Вычислить объем усеченного конуса при $\alpha = 51°20'$, $l = 8.4$ см.

19.Образующая усеченного конуса равна l и наклонена под углом α. Радиусы оснований относятся, как $m : n$ ($m > n$). Вычислить площадь боковой поверхности конуса.

20.Вокруг сферы радиуса 6 см описан усеченный конус, радиусы оснований которого относятся, как 4 : 9. Вычислить площадь боковой поверхности усеченного конуса.

21.В усеченный конус вписана сфера радиуса r. Из центра сферы диаметр большего основания виден под углом α. Вычислить площадь боковой поверхности усеченного конуса.

22.Вычислите высоту усеченного конуса, если площадь его боковой поверхности равновелика сумме площадей оснований, а радиусы оснований равны R и r.

23.В усеченном конусе диагонали осевого сечения взаимно перпендикулярны, а образующая составляет с плоскостью нижнего основания угол α и равна l. Вычислить площадь полной поверхности усеченного конуса при $l = 12.2$ см, $\alpha = 46°12'$.

24.Радиусы оснований усеченного конуса равны R и r, а образующая наклонена к плоскости основания под углом 60°. Вычислить площадь боковой поверхности конуса.

25.Радиусы оснований усеченного конуса R и r, образующая наклонена к основанию под углом α. Найти объем усеченного конуса, если $R = 12.4$ см, $r = 7.2$ см, $\alpha = 50°18'$.

26.Цилиндр пересечен плоскостью параллельно оси. Эта плоскость отсекает от окружности основания дугу α. Диагональ сечения равна l и составляет с основанием угол φ. Вычислить объем цилиндра, при $l = 18.2$ см, $\varphi = 61°20'$, $\alpha = 90°$.

27.В основание конуса вписан квадрат, сторона которого равна a. Плоскость, проходящая через вершину конуса и одну из сторон этого квадрата, образует в сечении с поверхностью конуса треугольник, угол при вершине которого равен α. Вычислить объем конуса.

28.Осевым сечением конуса является треугольник, угол при вершине которого равен α. Радиус окружности, описанной около этого треугольника, равен R. Вычислить объем конуса, при R = 4.8 см, $\alpha = 69°40'$

29.Усеченный конус, высота которого равна 12 см, а радиусы оснований 6 см и 9 см, пересечен двумя плоскостями, параллельными основаниям и делящими высоту на три равные части. Вычислить объем средней части конуса.

30.Хорда окружности основания конуса, удаленная от центра основания на d, стягивает дугу в 120°. Плоскость, проходящая через эту хорду и вершину конуса, составляет с плоскостью его основания угол β. Найти площадь полной поверхности конуса и вычислить при $\beta = 49°20'$, $d = 2.8$ см.

Контрольная работа. Объемы и площади поверхностей пространственных тел.

Литература

Основные источники:

1. Мордкович А.Г.Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч 1. Учебник для учащихся образовательных учреждений (базовый уровень) – 13-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2012. -. 400 с.: ил.ISBN 978-5-346-01992-3.

2. Мордкович А.Г. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч 2. Задачник для учащихся образовательных учреждений (базовый уровень) под ред. А.Г.Мордковича. – 13-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2012 – 271 с.: ил. ISBN 978-5-346-01993-0.

3. Погорелов А. В. Геометрия: 10 - 11 классы : учебник для общеобразовательных организаций: базовый и профильный уровни / А. В. Погорелов .— 13-е изд. — Москва : Просвещение, 2014 .— 175 с. : ил. — Библиогр.: с. 172-173 .— ISBN 978-5-09-032026-9.

4. Математика : учеб. для учащихся учреждений сред. проф. образования / А. Г. Луканкин. - М. : ГЭОТАР-Медиа, 2014. - 320 с. - ISBN 978-5-9704-3094-1.

Дополнительные источники:

1. Башмаков М.И. Математика: учебник для начального и сред. проф. образования./ М.И. Башмаков. - - 9-е изд. стер. — М.: Академия, 2014 – 251 с. ил.- (Профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины) ISBN 978-5-4468-0742-0.

2. Башмаков, М.И. Математика. Задачник: учебное пособие для начального профессионального и среднего профессионального образования / М. И. Башмаков .— 4-е изд., стер. — Москва : Академия, 2014 .— 414 с. : ил., табл. — (Профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины) .— ISBN 978-5-4468-0722-2.

3. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник для образовательных организаций с приложением на электронном носителе. Под ред. Колмогорова А.Н., 22-е изд. – М.: Просвещение, 2013. – 384 с.,ISBN 978-5-09-031301-8, -. ISBN 978-5-09-031129-8 (CD-ROM).

4. Математика в примерах и задачах для подготовки к ЕГЭ и поступлению в ВУЗ: Уч. пос./Л.Т.Ячменев, 2-е изд., доп. - М.: Вузовский учебник, НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 336 с.: 60x90 1/16 (Переплёт) ISBN 978-5-9558-0401-9

Интернет-ресурсы:

1. www.fcior.edu.ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).
2. www.school-collection.edu.ru (Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов).
3. http://www.studentlibrary.ru/ Электронно-Библиотечная Система «Консультант Студента».
4. http://e.lanbook.com/ Электронная библиотечная система издательства «Лань».
5. http://www.biblio-online.ru/ Электронно-библиотечная система.
6. http://znanium.com/ Электронно-библиотечная система.
7. http://www.iprbookshop.ru/ Электронно-библиотечная система.