

Министерство образования и науки Российской Федерации  
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего профессионального образования**  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)

Кафедра «Технология машиностроения»

**МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ВЫПОЛНЕНИЮ  
САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ  
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»**

Для студентов обучающихся по специальности «Пожарная безопасность».

Составитель:  
асс. Кириллов А.В.

Владимир

## Введение

Методические указания к самостоятельной работе разработаны для формирования у студента способности к самообучению и повышению своего профессионального уровня.

Цель самостоятельной работы заключается в изучении содержания тем курса по конспектам, учебникам и дополнительной литературе, в подготовке к лабораторным и практическим занятиям, к рубежным контролям, к экзамену, в оформлении лабораторных и выполнении индивидуальных задач по различным темам курса.

Эффективность самостоятельной работы зависит от правильной организации работы студента в аудитории и вне ее. Выполнение заданий должно учить мыслить, анализировать, учитывать условия, ставить задачи, решать возникающие проблемы, т.е. процесс самостоятельной работы постепенно должен превращаться в творческий.

На самостоятельное обучение выносятся следующие темы:

### 1. Статика.

1.1. Сила, система сил, эквивалентные системы сил. Система сходящихся сил.

1.2. Проекция силы на две взаимно-перпендикулярные оси.

1.3. Момент силы относительно точки.

1.4. Классификация нагрузок и виды опор.

1.5. Определение центра тяжести составных плоских фигур.

### 2. Кинематика.

2.1. Касательное и нормальное ускорение.

2.2. Линейные скорости и ускорения вращающегося тела.

### 3. Динамика.

3.1. Две основные задачи динамики материальной точки.

3.2. Принцип Даламбера.

3.3. Коэффициент полезного действия.

3.4. Теорема о кинетической энергии точки.

### 4. Сопротивление материалов

4.1. Метод сечений.

4.2. Диаграммы растяжения и сжатия пластичных и хрупких материалов.

4.3. Смятие, условия расчета, расчетные формулы, условие прочности.

4.4. Полярные моменты инерции круга и кольца.

4.5. Напряжения в поперечном сечении. Рациональное расположение колёс на валу.

4.6. Линейные и угловые перемещения при изгибе, их определение.

4.7. Гипотеза наибольших касательных напряжений.

4.8. Коэффициент запаса.

#### 4.9. Динамическое напряжение, динамический коэффициент.

В конце учебного года студентам необходимо сдать в письменном виде краткий конспект по изученным темам. В процессе семестра осуществляется контроль над ходом выполнения самостоятельной работы.

При подготовке методических указаний к самостоятельной работе, были использованы учебные пособия:

**1. Новожилов А.И.** Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / А.И. Новожилов ; под ред. В.Н. Филимонова. – 2-е изд., перераб. и доп.; Владим. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006. – 240 с. – ISBN 5-89368-643-8.

**2. Новожилов А.И. Задачи по теоретической механике. Методика решения:** учебное пособие по теоретической механике / А.И. Новожилов: Владимирский гос. ун-т. - Владимир: Ред.-издат. комплекс ВлГУ, 2009. – 112 с.

## Содержание

Введение

Теоретическая часть

1. Статика.

1.1. Сила, система сил, эквивалентные системы сил. Система сходящихся сил.

1.2. Проекция силы на две взаимно-перпендикулярные оси.

1.3. Момент силы относительно точки.

1.4. Классификация нагрузок и виды опор.

1.5. Определение центра тяжести составных плоских фигур.

2. Кинематика.

2.1. Касательное и нормальное ускорение.

2.2. Линейные скорости и ускорения вращающегося тела.

3. Динамика.

3.1. Две основные задачи динамики.

3.2. Принцип Даламбера.

3.3. Коэффициент полезного действия.

3.4. Теорема о кинетической энергии точки.

Примеры выполнения задач

Задачи для самостоятельного решения

## Теоретическая часть

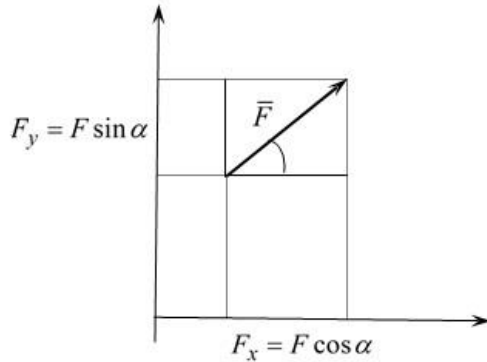
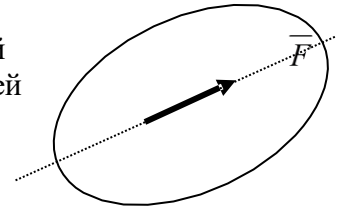
### 1.1. Статика. Сила, система сил, эквивалентные системы сил.

#### Система сходящихся сил.

Сила  $F$  – величина, являющаяся мерой механического взаимодействия тел и определяющей интенсивность и направление этого взаимодействия.

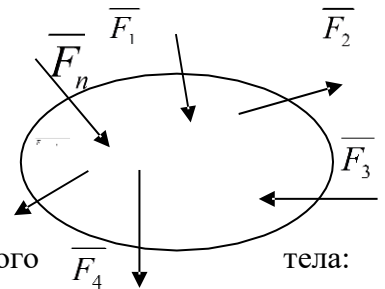
Единицей измерения силы в системе СИ является *ньютон* (1 Н).

Как и для любого вектора, для силы можно найти проекции силы на оси координат.



**Системой сил** называется совокупность сил, действующих на материальное тело или точку  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  или  $\{F_n\}$ , где  $n = 1, 2, \dots, k$ .

**Эквивалентными силами** сил называются две системы сил  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$  и  $\{P_1, P_2, \dots, P_k\}$ , каждую из которых можно заменить другой, не изменяя кинематическое состояние твердого тела:  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \sim \{P_1, P_2, \dots, P_k\}$



**Равнодействующей системы сил** называется  $\bar{R}$ , которая эквивалентна системе сил  $\{F_1, F_2, \dots, F_n\}$ .

$$\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \sim R.$$

**Уравновешивающей силой** называется сила  $F$ , равная по модулю равнодействующей, и направленная вдоль линии ее действия в противоположную сторону:  $F = -R$



**Уравновешенная система сил** – система сил, под действием которой тело находится в равновесии. Уравновешенная система сил эквивалентна нулю.

$$\{F_1, F_2, \dots, F_n\} \sim R \sim 0$$

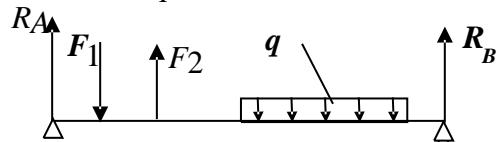
#### Виды сил

**Внутренними силами** называют силы взаимодействия между точками (телами) данной системы

**Внешними силами** называются силы, действующие на материальные точки (тела) данной системы со стороны материальных точек (тел), не принадлежащих этой системе. Внешние силы (нагрузка) – это активные силы и реакции связи.

Нагрузки разделяются на:

**объемные** – распределенные по объему тела и приложенные к каждой ее

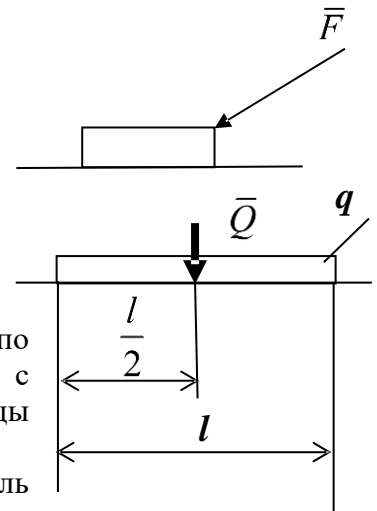


частице (собственный вес конструкции, силы магнитного притягивания, силы инерции).

**поверхностные** – приложенные к участкам поверхности и характеризующие непосредственное контактное взаимодействие объекта с окружающими телами:

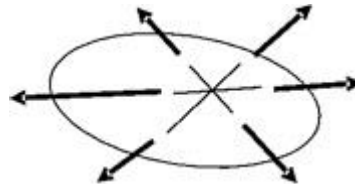
**сосредоточенные** – нагрузки, действующие по площадке, размеры которой малы сравнительно с размерами самого элемента конструкции (давление обода колеса на рельс) ( $R_A, R_B, F_1, F_2$ ) [Н];

**распределенные** – нагрузки, действующие по площадке, размеры которой не малы сравнительно с размерами самого элемента конструкции (гусеницы трактора давят на балку моста); интенсивность нагрузки, распределенной вдоль длины элемента,  $q$  [Н/м].



$$q = \text{const}, Q = l q$$

### Система сходящихся сил



### Определение равнодействующей системы сходящихся сил.

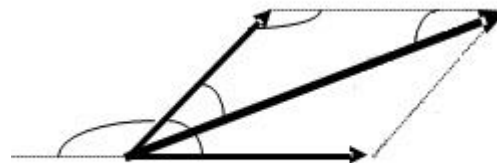
**Система сходящихся сил** – это система сил, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Система сходящихся сил эквивалентна одной силе – **равнодействующей**, которая равняется векторной сумме сил и приложена в точке сечения линий их действия:

$$\bar{R} = \bar{F}_1 + \bar{F}_2 + \dots + \bar{F}_k = \sum_{n=1}^k \bar{F}_n$$

### Методы определения равнодействующей системы сходящихся сил.

1) **Метод параллелограмма сил.** На основании аксиомы параллелограмма сил, каждые две силы данной системы, последовательно, приводятся к одной силе – равнодействующей.



Модуль равнодействующей:

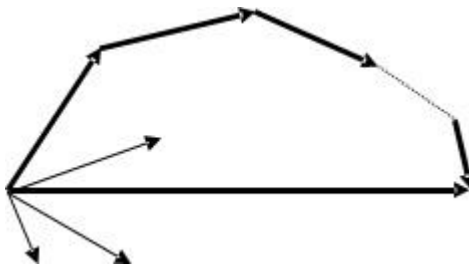
$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2 \cos(\alpha)}$$

Направление вектора равнодействующей:

$$\frac{F_1}{\sin \gamma} = \frac{F_2}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin(180 - \alpha)} = \frac{R}{\sin \alpha}$$

## 2) Построение векторного силового многоугольника.

Последовательно, параллельным переносом каждого вектора силы в конечную точку предыдущего вектора, составляется многоугольник, сторонами которого являются векторы сил системы, а замыкающей стороной – вектор равнодействующей системы сходящихся сил.



### Условия равновесия системы сходящихся сил.

**Геометрическое условие равновесия сходящейся системы сил:** для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы векторный силовой многоугольник, построенный на этих силах, был замкнутым.

$$\bar{R} = \sum_{n=1}^k \bar{F}_n = 0.$$

**Аналитические условия равновесия системы сходящихся сил:** для равновесия системы сходящихся сил необходимо и достаточно, чтобы алгебраические суммы проекций всех сил на координатные оси равнялись нулю.

Условие равновесия системы сходящихся сил расположенных в пространстве:

$$\sum_{n=1}^k \bar{F}_{nx} = 0, \quad \sum_{n=1}^k \bar{F}_{ny} = 0, \quad \sum_{n=1}^k \bar{F}_{nz} = 0.$$

### 1.2. Проекция силы на две взаимно-перпендикулярные оси.

Кроме графического и графоаналитического методов решения задач, в статике широко распространен аналитический метод их решения, или метод проекций.

Проекцией силы на ось (рис.) является отрезок оси, заключенный между проекциями на эту ось начала и конца вектора силы. Проекцию обычно обозначают той же буквой, что и силу, но с индексом. Например,  $F_x$  – проекция силы  $F$  на ось  $x$ .

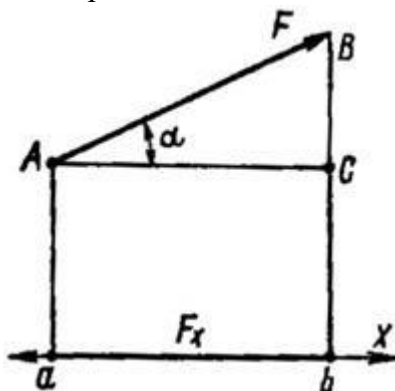


Рис.

Проекция силы на ось есть величина скалярная. Она может быть положительной, отрицательной или равной нулю в зависимости от величины угла  $\alpha$  между направлением силы и положительным направлением оси. Из прямоугольного треугольника ABC следует, что  $F_x = F \cos \alpha$ , т. е. проекция силы на ось равна произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси.

Если угол  $\alpha$  острый, то проекция положительна, если угол  $\alpha$  – тупой, то проекция отрицательна.

Нетрудно убедиться, что проекция силы на ось будет равна нулю, если  $\alpha = 90^\circ$  или  $270^\circ$  и равна модулю силы, если  $\alpha = 0$  или  $\alpha = 180^\circ$ .

Модуль и направление силы можно определить по ее проекциям на две взаимно перпендикулярные оси.

Из треугольника ABC, поскольку  $AC = F_x$  и  $BC = F_y$ , следует, что модуль силы  $F$  равен

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

Направление силы определяют косинусы углов

$$\cos \alpha = \frac{F_x}{F}; \cos \beta = \frac{F_y}{F}.$$

### 1.3. Момент силы относительно точки.

Какое-либо кинематическое состояние тел, имеющих точку или ось вращения, можно описать моментом силы, характеризующим вращательный эффект действия силы.

Момент силы относительно точки - это векторное произведение плеча  $h$  точки приложения силы на вектор силы  $F$ .

$$\vec{M}_o(\vec{F}) = \vec{F} \times h;$$

Модуль момента силы, определяется векторным произведением  $h$  и  $F$ , и углом  $\alpha$  между плечом и вектором силы:

$$M_o(F) = F \cdot h \cdot \sin \alpha;$$

Плечо силы  $h$  – кратчайшее расстояние от центра до линии действия силы (перпендикуляр из центра на линию действия силы).

Вектор  $\vec{M}_o(\vec{F})$  направляется по правилу векторного произведения: момент силы относительно центра (точки) как вектор направлен перпендикулярно плоскости, в которой расположены сила и центр так, чтобы с его конца было видно, что сила пытается вращать тело вокруг центра против хода часовой стрелки.

Единицей измерения момента силы есть 1 [Нм].

#### Алгебраическая величина момента силы.

Момент силы относительно центра в плоскости – алгебраическая величина, которая равняется произведению модуля силы  $F$  на плечо  $h$  относительно того же центра с учетом знака.

$$M_o(\vec{F}) = \pm F \cdot h$$

Знак момента силы зависит от направления, в котором сила пытается вращать вокруг центра:

- 1) против хода часовой стрелки - „+” (положительный);
- 2) по часовой стрелке - „-” (отрицательный).

#### Свойства момента силы относительно центра (точки).

1) Модуль момента силы относительно точки равняется удвоенной площади треугольника построенного на векторах  $h$  и  $F$ .

$$M_o(\vec{F}) = F \cdot h = AB \cdot h = 2S_{\Delta OAB},$$

где  $S = \frac{AB \cdot h}{2}$ .

2) Момент силы относительно точки не изменяется при перенесении силы вдоль ее линии действия, поскольку неизменным остается плечо силы.



- 3) Момент силы относительно центра (точки) равняется нулю  $M_o(\bar{F}) = 0$ , если:
- сила равняется нулю  $F = 0$ ;
  - плечо силы  $h=0$ , т.е. линия действия силы проходит через центр.

### 1.4. Классификация нагрузок и виды опор.

#### Виды нагрузок

По способу приложения нагрузки делятся на

- сосредоточенные
- распределенные.

В задачах статики для абсолютно твердых тел распределенную нагрузку можно заменить равнодействующей сосредоточенной силой (рис. 6.1).

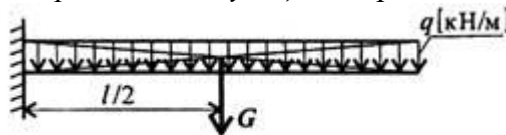


Рис. 6.1

$q$  — интенсивность нагрузки;  $l$  — длина стержня;  
 $G = ql$  — равнодействующая распределенной нагрузки.

#### Разновидности опор балочных систем

Балка — конструктивная деталь в виде прямого бруса, закрепленная на опорах и изгибаемая приложенными к ней силами.

Высота сечения балки незначительна по сравнению с длиной.

**Жесткая заделка (защемление)** (рис. 6.2)

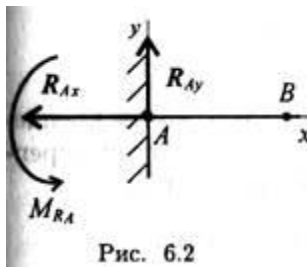


Рис. 6.2

Опора не допускает перемещений и поворотов. Заделку заменяют двумя составляющими силы  $R_{Ax}$  и  $R_{Ay}$  и парой с моментом  $M_r$ .

Для определения этих неизвестных удобно использовать систему уравнений в виде

$$\sum_0^n F_{kx} = 0; \quad \sum_0^n F_{ky} = 0; \quad \sum_0^n m_{kA} = 0.$$

Каждое уравнение имеет одну неизвестную величину и решается без подстановок.

Для контроля правильности решений используют дополнительное уравнение моментов относительно любой точки на балке, например

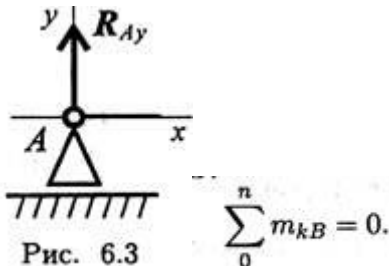


Рис. 6.3

**Шарнирно-подвижная опора** (рис. 6.3)

Опора допускает поворот вокруг шарнира и перемещение вдоль опорной поверхности. Реакция направлена перпендикулярно опорной поверхности.

**Шарнирно-неподвижная опора** (рис. 6.4)

Опора допускает поворот вокруг шарнира и может быть заменена двумя составляющими силы вдоль осей координат.

Балка на двух шарнирных опорах (рис. 6.5)

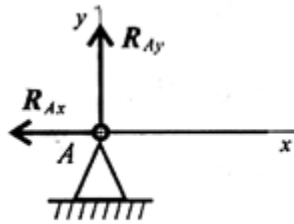


Рис. 6.4

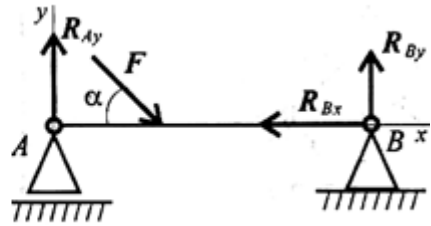


Рис. 6.5

Не известны три силы, две из них — вертикальные, следовательно, удобнее для определения неизвестных использовать систему уравнений во второй форме:

$$\sum_0^n m_{kA}(F_k) = 0; \quad \sum_0^n m_{kB}(F_k) = 0; \quad \sum_0^n F_{kx} = 0.$$

Составляются уравнения моментов относительно точек крепления балки. Поскольку момент силы, проходящей через точку крепления, равен 0, в уравнении останется одна неизвестная сила.

Из уравнения  $\sum_0^n F_{kx} = 0$  определяется реакция  $R_{Bx}$ .

Из уравнения  $\sum_0^n m_{kA}(F_k) = 0$  определяется реакция  $R_{By}$ .

Из уравнения  $\sum_0^n m_{kB}(F_k) = 0$  определяется реакция  $R_{Ay}$ .

Для контроля правильности решения используется дополнительное уравнение

$$\sum_0^n F_{ky} = 0.$$

При равновесии твердого тела, где можно выбрать три точки, не лежащие на одной прямой, удобно использовать систему уравнений в третьей форме (рис. 6.6):

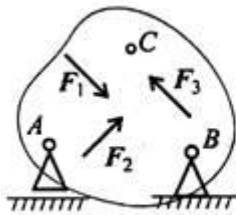


Рис. 6.6

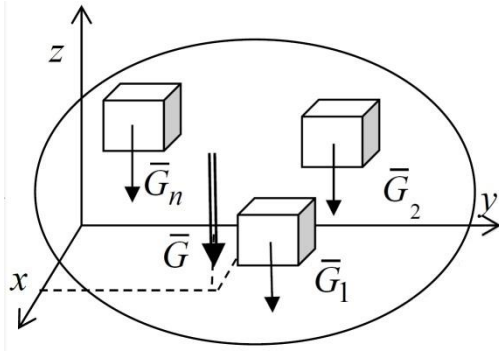
$$\begin{cases} \sum_0^n m_A(F_k) = 0; \\ \sum_0^n m_B(F_k) = 0; \\ \sum_0^n m_C(F_k) = 0. \end{cases}$$

## 1.5. Определение центра тяжести составных плоских фигур.

### Центр тяжести твердого тела и его координаты.

Вес тела это равнодействующая сил тяжести отдельных частиц тела, которое равняется их сумме:

$$\bar{G} = \sum_{n=1}^k \Delta \bar{G}_n$$



Каждая отдельная из  $n$  - частиц тела находится под действием собственных сил тяжести  $\Delta \bar{G}_n$ , представляющих систему параллельных, однонаправленных сил  $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, \Delta \bar{G}_n$ , приложенных в точках  $A_1, A_2, \dots, A_n$ , соответственно.

**Центр тяжести тела** – неизменно связанная с этим телом геометрическая точка, в которой приложена равнодействующая сил тяжести отдельных частиц тела, т.е. вес тела в пространстве.

**Координаты центра тяжести** определяются аналогично координатам центра параллельных сил  $C(x_C, y_C, z_C)$ , составленных силами тяжести частиц тела  $\bar{G}_1, \bar{G}_2, \dots, \Delta \bar{G}_n$ :

$$x_C = \frac{\sum_{n=1}^k (\Delta G_n \cdot x_n)}{G}; \quad y_C = \frac{\sum_{n=1}^k (\Delta G_n \cdot y_n)}{G}; \quad z_C = \frac{\sum_{n=1}^k (\Delta G_n \cdot z_n)}{G},$$

где  $G = \sum_{n=1}^k \Delta G_n$  – вес тела,

$x_n, y_n, z_n$  – соответствующие координаты точек приложения  $A_1, A_2, \dots, A_n$  сил тяжести частиц тела.

**Центр тяжести плоской фигуры ( $G \sim A$ ).**

$$x_C = \frac{\sum_{n=1}^k (\Delta G_n \cdot x_n)}{G}; \quad y_C = \frac{\sum_{n=1}^k (\Delta G_n \cdot y_n)}{G},$$

Сумма произведений элементарных площадей, входящих в состав плоской фигуры, на алгебраические значения их расстояний до некоторой оси, называется **статическим моментом площади плоской фигуры**.

$$S_x = \sum_{n=1}^k (\Delta A_n \cdot y_n) = Ax_C; \quad S_y = \sum_{n=1}^k (\Delta A_n \cdot x_n) = Ay_C.$$

Статический момент площади плоской фигуры равняется произведению площади фигуры на алгебраическое расстояние от центра тяжести до этой оси. Единица измерения статического момента [см<sup>3</sup>].

Координаты центра тяжести через статические моменты площади плоской фигуры

$$x_C = \frac{S_y}{A}; \quad y_C = \frac{S_x}{A}.$$

Вывод: статический момент площади плоской фигуры относительно оси, которая проходит через центр тяжести фигуры, равняется нулю.

## 2. Кинематика.

### 2.1. Касательное и нормальное ускорение.

**Ускорение** – векторная величина, характеризующая быстроту изменения скорости движущегося тела по величине и направлению.

**Средним ускорением** точки в интервале времени  $\Delta t$  называется вектор  $\bar{a}_{cp}$ , равный отношению приращения вектора скорости  $\Delta \bar{V}$  к промежутку  $\Delta t$ .

$$\bar{a}_{cp} = \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t}.$$

**Ускорением (мгновенным ускорением)** точки называется векторная величина  $\bar{a}$ , равная первой производной скорости  $\bar{v}$  по времени (или вторая производная радиус-вектора  $\bar{r}$  по времени):

$$\bar{a} = \frac{d\bar{V}}{dt} = \frac{d^2\bar{r}}{dt^2} \quad [a] = \frac{m}{c^2}$$

Ускорение точки в момент времени  $t$  равно пределу среднего ускорения  $\bar{a}_{cp}$  при  $\Delta t \rightarrow 0$ .

$$a = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \bar{V}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \bar{a}_{cp}.$$

В декартовой системе координат вектор  $\bar{a}$  можно записать через его координаты:

$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$ , где

$$a_x = \frac{dV_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \quad a_y = \frac{dV_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2} \quad a_z = \frac{dV_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}$$

Модуль вектора ускорения

$$a = |\bar{a}| = \sqrt{\left(\frac{dV_x}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_y}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dV_z}{dt}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2}.$$

Вектор  $\bar{a}$  можно представить в виде суммы двух составляющих:

$\bar{a}_\tau$  - тангенциальная составляющая ускорения направлена по касательной к траектории точки и равна

$$\bar{a}_\tau = \frac{dV}{dt} \bar{\tau}; \quad a_\tau = \frac{dV}{dt}.$$

где вектор  $\bar{\tau}$  – единичный вектор касательной, проведенной в точке траектории и направлении скорости  $\bar{V}$

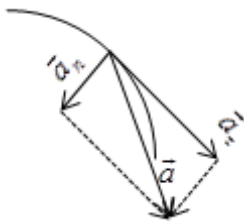
Векторы  $\bar{a}_\tau$  и  $\bar{V}$  сонаправлены при равноускоренном движении;  $\bar{a}_\tau \uparrow \downarrow \bar{V}$  при  $a_\tau < 0$  т.е. при равнозамедленном движении.

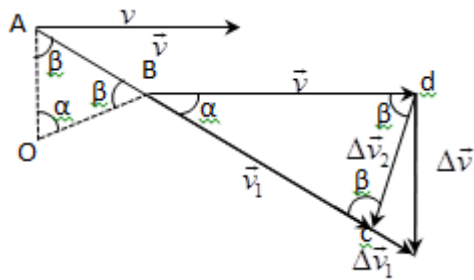
Касательное ускорение  $\bar{a}_\tau$  - характеризует быстроту изменения модуля вектора скорости точки (характеризует изменение скорости

по величине).

Для равномерного движения:

$$\bar{a}_\tau = const \neq 0, \quad \bar{V} = \bar{V}_0 + \bar{a}_\tau t, \quad S = S_0 + V_0 t + \frac{a_\tau t^2}{2}.$$





$\bar{a}_n$  – нормальная составляющая ускорения (нормальное ускорение) направлена по нормали к траектории и рассматриваемой точке в сторону к центру кривизны траектории.

Криволинейную траекторию можно представить как совокупность элементарных участков, каждый из которых может рассматриваться как дуга окружности некоторого радиуса  $R$  (называемого радиусом кривизны кривой в окружности данной точки траектории)

$$\Delta \bar{V} = \Delta \bar{V}_1 + \Delta \bar{V}_2, \Delta AOB \sim \Delta dbc \Rightarrow \frac{AB}{R} = \frac{\Delta V_2}{V}, V = \frac{AB}{\Delta t}.$$

$$|Bd| = |BC|, a_n = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta V_2}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{AB}{t} \cdot \frac{V}{R} = \frac{V^2}{R}.$$

$$a_n = \frac{V^2}{R}.$$

Нормальное ускорение характеризует быстроту изменения направления вектора скорости (характеризует изменение скорости по направлению).

Модуль полного ускорения:

$$a = \sqrt{a_\tau^2 + a_n^2} = \sqrt{\left(\frac{dV}{dt}\right)^2 + \frac{V^2}{R}}.$$

Классификация движений зависит от тангенциальных и нормальных составляющих:

- 1)  $a_\tau = 0$  и  $a_n = 0$  – равномерное прямолинейное движение  $V = const, S = Vt$ .
- 2)  $a_\tau = +const$  и  $a_n = 0$  – равноускоренное  $V_2 > V_1, S = S_0 + V_0t + \frac{at^2}{2}$ .
- $a_\tau = -const$  и  $a_n = 0$  – равнозамедленное  $V_2 < V_1, S = S_0 + V_0t - \frac{at^2}{2}$ .
- 3)  $a_\tau = f(t)$  и  $a_n = 0$  – прямолинейное движение с переменным ускорением.
- 4)  $a_\tau = 0$  и  $a_n = const$  – равномерное движение по окружности  $a_n = \frac{V^2}{R}$ .
- 5)  $a_\tau = 0$  и  $a_n = f(t)$  – равномерное криволинейное движение.
- 6)  $a_\tau = +const$  и  $a_n \neq 0$  – криволинейно равноускоренное  $V_2 > V_1$ .
- $a_\tau = -const$  и  $a_n \neq 0$  – криволинейно равнозамедленное  $V_2 < V_1$ .
- 7)  $a_\tau = f(t)$  и  $a_n \neq 0$  – криволинейное движение с переменным ускорением.

## 2.2. Линейные скорости и ускорения вращающегося тела.

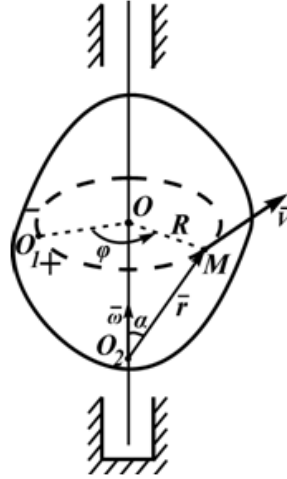


Рисунок 2.2

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси каждая точка тела движется по окружности. Радиус окружности  $R$  равен расстоянию от точки до оси вращения.

Закон движения точки может быть задан естественным способом (рисунок 2.2): траектория – окружность; начало отсчета точка  $O_1$  и положительное направление движения выбраны, длина дуги (дуговая координата) определяется по формуле

$$S(t) = \cup O_1 M = \varphi \cdot R.$$

Скорость точки

$$V = dS/dt = d\varphi \cdot R/dt = \omega R$$

Скорость направлена по касательной к траектории, поэтому можно написать

$$\vec{V} = \vec{\tau} \cdot V.$$

Вектор скорости можно получить векторным произведением:

$$V = \omega \otimes r, \quad V = \omega \cdot r \sin \alpha = \omega R.$$

Ускорение при естественном способе задания движения определяется как сумма касательного и нормального ускорений:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n, \quad a_\tau = \vec{\tau} \frac{dV}{dt}, \quad a_\tau = \frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega R) = \varepsilon R, \quad a_n = \vec{n} \frac{V^2}{R}, \quad a_n = \frac{V^2}{R} = \frac{(\omega R)^2}{R} = \omega^2 R.$$

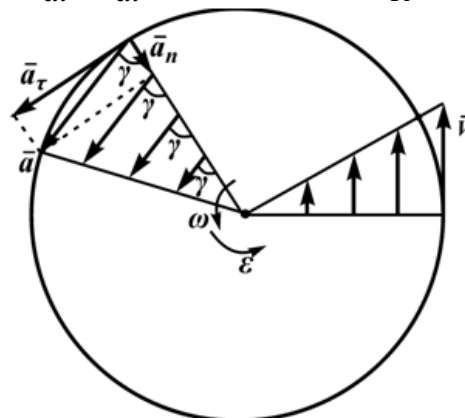


Рисунок 2.2.1

Эти же выражения можно получить, взяв производную от векторного произведения  $V = \omega \otimes r$ .

Угол, который составляет полное ускорение с радиусом, может быть определен из соотношения (рисунок 2.2.1)

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{a_{\tau}}{a_n} = \frac{\varepsilon R}{\omega^2 R} = \frac{\varepsilon}{\omega^2}.$$

То есть эти углы для всех точек тела одинаковы и не зависят от их расположения на теле. На этом же рисунке представлены законы распределения скоростей и ускорений точек во вращающемся теле в зависимости от расстояния их до оси вращения. Эти законы распределения соответствуют формулам:

$$V = \omega R; a = R\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}.$$

### 3. Динамика.

#### 3.1. Две основные задачи динамики материальной точки.

Используя дифференциальные уравнения движения материальной точки, можно решить две основные задачи динамики точки, которые формулируют следующим образом.

**Первая задача.** Определить силы, действующие на точку, если известны масса точки и закон ее движения.

Решение этой задачи заключается, в основном, в определении ускорения точки по заданным уравнениям ее движения, т.е. в их дифференцировании.

Можно предложить такую последовательность решения задачи:

- 1) выбрать систему координат, в которой удобно решать данную задачу (декартовую или естественную);
- 2) изобразить в выбранной системе координат материальную точку в текущем положении;
- 3) приложить к точке активные силы и реакции связей;
- 4) записать основное уравнение динамики в проекциях на оси выбранной системы координат;
- 5) найти проекции ускорения точки на оси выбранной системы координат путем дифференцирования уравнений ее движения;
- б) определить искомые параметры с помощью системы составленных уравнений.

**Вторая задача.** Определить закон движения точки, если заданы масса точки и действующие на нее силы.

Решение этой задачи требует интегрирования дифференциальных уравнений движения точки.

Методика решения второй задачи на примере декартовой системы координат состоит в следующем. Чтобы определить уравнения движения точки  $x = x(t)$ ;  $y = y(t)$ ;  $z = z(t)$ , необходимо дважды проинтегрировать систему трех дифференциальных уравнений 2-го порядка. В результате получим уравнения движения точки, содержащие, кроме времени, шесть произвольных постоянных. Уравнения движения точки и проекции ее скорости на оси координат имеют вид:

$$x = x(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6);$$

$$y = y(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6);$$

$$z = z(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6);$$

$$\dot{x} = \dot{x}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6);$$

$$\dot{y} = \dot{y}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6);$$

$$\dot{z} = \dot{z}(t, C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6),$$

где  $C_1, \dots, C_6$  – это так называемые постоянные интегрирования, которые находят из начальных условий. *Начальные условия* – значение скорости (проекций скорости) и положения (координат) точки в момент времени, обычно принимаемый равным нулю, которые должны быть предварительно заданы:

$$t = 0; \quad x = x_0; \quad y = y_0; \quad z = z_0;$$

$$\dot{x} = \dot{x}_0; \quad \dot{y} = \dot{y}_0; \quad \dot{z} = \dot{z}_0.$$

После определения постоянных интегрирования уравнения действительного движения точки окончательно получим в виде:

$$x = f_1 = (t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$

$$y = f_2 = (t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0);$$

$$z = f_3 = (t, x_0, y_0, z_0, \dot{x}_0, \dot{y}_0, \dot{z}_0).$$

Решение второй задачи динамики можно выполнить в такой последовательности:

- 1) выбрать систему координат (декартовую или естественную), в которой удобно решать данную задачу;
- 2) изобразить в выбранной системе координат материальную точку в текущем положении;
- 3) приложить к точке активные силы и реакции отброшенных связей (если точка несвободна);
- 4) записать основное уравнение динамики в проекциях на оси выбранной системы координат;
- 5) проинтегрировать полученную систему дифференциальных уравнений и найти их общие решения;
- 6) определить, используя заданные начальные условия, постоянные интегрирования;
- 7) подставить постоянные интегрирования в общие решения и получить действительные уравнения движения точки.

### 3.2. Принцип Даламбера.

Все методы решения задач динамики, которые мы до сих пор рассматривали, основываются на уравнениях, вытекающих или непосредственно из законов Ньютона, или же из общих теорем, являющихся следствиями этих законов. Однако, этот путь не является единственным. Оказывается, что уравнения движения или условия равновесия механической системы можно получить, положив в основу вместо законов Ньютона другие общие положения, называемые принципами механики. В ряде случаев применение этих принципов позволяет, как мы увидим, найти более эффективные методы решения соответствующих задач. В этой главе будет рассмотрен один из общих принципов механики, называемый принципом Даламбера.

Пусть мы имеем систему, состоящую из  $n$  материальных точек. Выделим какую-нибудь из точек системы с массой  $m_k$ . Под действием приложенных к ней внешних и внутренних сил  $\bar{F}_k^e$  и  $\bar{F}_k^i$  (в которые входят и активные силы, и реакции связи) точка получает по отношению к инерционной системе отсчета некоторое ускорение  $\bar{a}_k$ .

Введем в рассмотрение величину

$$\bar{F}_k^u = -m_k \cdot \bar{a}_k,$$

имеющую размерность силы. Векторную величину, равную по модулю произведению массы точки на ее ускорение и направленную противоположно этому ускорению, называют силой инерции точки (иногда даламберовой силой инерции).

Тогда оказывается, что движение точки обладает следующим общим свойством: если в каждый момент времени к фактически действующим на точку силам  $\bar{F}_k^e$  и  $\bar{F}_k^i$  прибавить силу инерции  $\bar{F}_k^u$ , то полученная система сил будет уравновешенной, т.е. будет

$$\bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i + \bar{F}_k^u = 0.$$

Это выражение выражает принцип Даламбера для одной материальной точки. Нетрудно убедиться, что оно эквивалентно второму закону Ньютона и наоборот. В самом



деле, второй закон Ньютона для рассматриваемой точки дает  $m_k \bar{a}_k = \bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i$ . Переносим здесь член  $m_k \bar{a}_k$  в правую часть равенства и приходим к последнему соотношению.

Повторяя проделанные выше рассуждения по отношению к каждой из точек системы, приходим к следующему результату, выражающему принцип Даламбера для системы: *если в любой момент времени к каждой из точек системы, кроме фактически действующих на ней внешних и внутренних сил, приложить соответствующие силы инерции, то полученная система сил будет находиться в равновесии и к ней можно будет применять все уравнения статики.*

Значение принципа Даламбера состоит в том, что при непосредственном его применении к задачам динамики уравнения движения системы составляются в форме хорошо известных уравнений равновесия; что делает единообразный подход к решению задач и обычно намного упрощает соответствующие расчёты. Кроме того, в соединении с принципом возможных перемещений, который будет рассмотрен в следующей главе, принцип Даламбера позволяет получить новый общий метод решения задач динамики.

Применяя принцип Даламбера, следует иметь в виду, что на точку механической системы, движение которой изучается, действуют только внешние и внутренние силы  $\bar{F}_k^e$  и  $\bar{F}_k^i$ , возникающие в результате взаимодействия точек системы друг с другом и с телами, не входящими в систему; под действием этих сил точки системы и движутся с соответствующими ускорениями  $\bar{a}_k$ . Силы же инерции, о которых говорится в принципе Даламбера, на движущиеся точки не действуют (иначе, эти точки находились бы в покое или двигались без ускорений и тогда не было бы и самих сил инерции). Введение сил инерции - это лишь приём, позволяющий составлять уравнения динамики с помощью более простых методов статики.

Из статики известно, что геометрическая сумма сил, находящихся в равновесии, и сумма их моментов относительно любого центра  $O$  равны нулю, причём по принципу отвердевания это справедливо для сил, действующих не только на твёрдое тело, но и на любую изменяемую систему. Тогда на основании принципа Даламбера должно быть:

$$\begin{cases} \sum (\bar{F}_k^e + \bar{F}_k^i + \bar{F}_k^u) = 0; \\ \sum [\bar{m}_0 (\bar{F}_k^e) + \bar{m}_0 (\bar{F}_k^u)] = 0. \end{cases}$$

Введём обозначения:

$$\bar{R}^u = \sum \bar{F}_k^u, \quad \bar{M}_0^u = \sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k^u).$$

Величины  $\bar{R}^u$  и  $\bar{M}_0^u$  представляют собой главный вектор и главный момент относительно центра  $O$  системы сил инерции. В результате, учитывая, что геометрическая сумма внутренних сил и сумма их моментов равны нулю, получим из равенств:

$$\bar{R}^u + \sum \bar{F}_k^e = 0, \quad \bar{M}_0^u + \sum \bar{m}_0 (\bar{F}_k^e) = 0.$$

Применение этих уравнений, вытекающих из принципа Даламбера, упрощает процесс решения задач, т.к. эти уравнения не содержат внутренних сил.

В проекциях на оси координат эти равенства дают уравнения, аналогичные соответствующим уравнениям статики. Чтобы пользоваться этими уравнениями при решении задач, надо знать выражение главного вектора и главного момента сил инерций.

### 3.3. Коэффициент полезного действия.

В технике работа сил обычно связана с преодолением различных сопротивлений. Для выполнения этой работы создается множество разнообразных машин и механизмов. Силы сопротивления  $F_c$ , которые преодолевает любая машина (механизм), можно разделить на две группы: сопротивления, для преодоления которых машина или механизм и предназначены, и которые условно назовем *полезными сопротивлениями*  $F_{п.с.}$ , и так называемые *вредные сопротивления*  $F_{в.с.}$ , которые машине (механизму) приходится вынужденно преодолевать попутно с полезными. Работу по преодолению полезных

сопротивлений назовем полезной и обозначим  $A_{н.с.}$ . Работу по преодолению вредных сопротивлений обозначим  $A_{в.с.}$ .

Тогда вся работа, совершаемая машиной или механизмом,  $A = A_{н.с.} + A_{в.с.}$ , отсюда  $A_{н.с.} = A - A_{в.с.}$ .

Отношение полезной работы ко всей совершенной работе называется механическим коэффициентом полезного действия (к. п. д.) и обозначается  $\eta$ . Таким образом,

$$\eta = \frac{A_{н.с.}}{A} \text{ или } \eta = \left(\frac{A_{н.с.}}{A}\right) \cdot 100\%.$$

Подставив в первую из этих формул вместо полезной работы ее значение  $A_{н.с.} = A - A_{в.с.}$ , получим

$$\eta = \frac{A - A_{в.с.}}{A} = \frac{1 - A_{в.с.}}{A}.$$

Из формулы видно, что к. п. д. тем ближе к единице, чем меньше дробь  $\frac{A_{в.с.}}{A}$ , т. е. чем меньше работа по преодолению вредных сопротивлений.

Если в формуле  $\eta = \frac{A_{н.с.}}{A}$  числитель и знаменатель разделить на  $t$  — время, в течение которого работает машина (механизм), то получим формулу к. п. д., выраженную через отношение мощностей:

$$\eta = \frac{P_{н.}}{P}.$$

В технике распространены случаи работы машин или механизмов при их *последовательном соединении* друг с другом. В таких случаях важно знать зависимость их общего к. п. д. от коэффициентов полезного действия отдельных машин (механизмов). Допустим, имеем совокупность трех механизмов с коэффициентами полезного действия  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  и  $\eta_3$ . Если работа, совершаемая механизмами,  $A$ , а их полезная работа  $A_{н.с.}$ , то к. п. д. всей цепочки механизмов

$$\eta = \frac{A_{н.с.}}{A}$$

Некоторую часть всей работы  $A$  составляет работа по преодолению вредных сопротивлений в самих механизмах. Поэтому полезная работа, совершаемая первым механизмом  $A_1 = A\eta_1$ , совершаемая вторым механизмом —  $A_2 = A_1\eta_2$  и третьим —  $A_3 = A_2\eta_3$ , исходя из того, что к. п. д. первого механизма  $\eta_1 = \frac{A_1}{A}$ , к. п. д. второго механизма  $\eta_2 = \frac{A_2}{A_1}$

$$\text{и к. п. д. третьего механизма } \eta_3 = \frac{A_{н.с.}}{A_2}.$$

Перемножив левые и правые части этих равенств, получим

$$\eta_1\eta_2\eta_3 = \left(\frac{A_1}{A}\right)\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\left(\frac{A_{н.с.}}{A_2}\right) = \frac{A_{н.с.}}{A}.$$

Из этого следует:

$$\eta = \eta_1\eta_2\eta_3.$$

Ясно, что эта зависимость справедлива для любого конечного числа последовательно соединенных механизмов, т. е.

$$\eta = \eta_1\eta_2\cdots\eta_k\cdots\eta_n.$$

— при последовательном соединении механизмов (машин) их общий к. п. д. равен произведению отдельных к. п. д.

В частном случае, если  $\eta_1 = \eta_2 = \dots = \eta_k = \dots = \eta_n$ , общий к. п. д. —  $\eta = \eta_k^n$ .

Из формул следует: чем длиннее «цепочка» совместно работающих механизмов, тем меньше ее общий к. п. д., причем общий к. п. д. всегда меньше самого низкого из числа перемножаемых к. п. д.

### 3.4. Теорема о кинетической энергии точки.

Кинетическая энергия материальной точки выражается половиной произведения массы этой точки на квадрат ее скорости.

Теорему о кинетической энергии материальной точки можно выразить в трех видах:

$$1) \quad d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = F \cos(\alpha) ds = dA,$$

т. е. дифференциал кинетической энергии материальной точки равен элементарной работе силы, действующей на эту точку;

$$2) \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{mV^2}{2}\right) = \frac{dA}{dt} = N,$$

т. е. производная по времени от кинетической энергии материальной точки равна мощности силы, действующей на эту точку:

$$3) \quad \frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{M_0}^M F \cos(\alpha) ds,$$

т. е. изменение кинетической энергии материальной точки на конечном пути  $M_0M$  равно работе силы, действующей на точку на том же пути.

Если на точку действует несколько сил, то в правые части уравнений входит работа или мощность равнодействующей этих сил, которая равна сумме работ или мощностей всех составляющих сил.

В случае прямолинейного движения точки, направляя ось  $x$  по прямой, по которой движется точка, имеем:

$$d\left(\frac{mV^2}{2}\right) = X dx$$

и

$$\frac{mV^2}{2} - \frac{mV_0^2}{2} = \int_{x_0}^x X dx,$$

где  $X = \pm F$ , так как в этом случае равнодействующая всех приложенных к точке сил направлена по оси  $x$ .

Применяя теорему о кинетической энергии в случае несвободного движения материальной точки, нужно иметь в виду следующее: если на точку наложена совершенная стационарная связь (точка движется по абсолютно гладкой неподвижной поверхности или линии), то реакция связи в уравнения не входит, ибо эта реакция направлена по нормали к траектории точки и, следовательно, ее работа равна нулю. Если же приходится учитывать трение, то в уравнение кинетической энергии войдет работа или мощность силы трения.

Задачи, относящиеся к этому параграфу, можно разделить на два основных типа.

I. Задачи на применение теоремы о кинетической энергии при прямолинейном движении точки.

II. Задачи на применение теоремы о кинетической энергии при криволинейном движении точки.

Кроме того, задачи, относящиеся к типу I, можно разделить на три группы:

1) сила, действующая на точку (или равнодействующая нескольких сил), постоянна, т. е.  $X = const$ , где  $X$  — проекция силы (или равнодействующей) на ось  $x$ , направленную по прямолинейной траектории точки;

2) сила, действующая на точку (или равнодействующая), является функцией расстояния (абсциссы этой точки), т. е.

$$X = f(x);$$

3) сила, действующая на точку (или равнодействующая), есть функция скорости этой точки, т. е.

$$X = f(V).$$

Задачи, относящиеся к типу II, можно разделить на три группы:

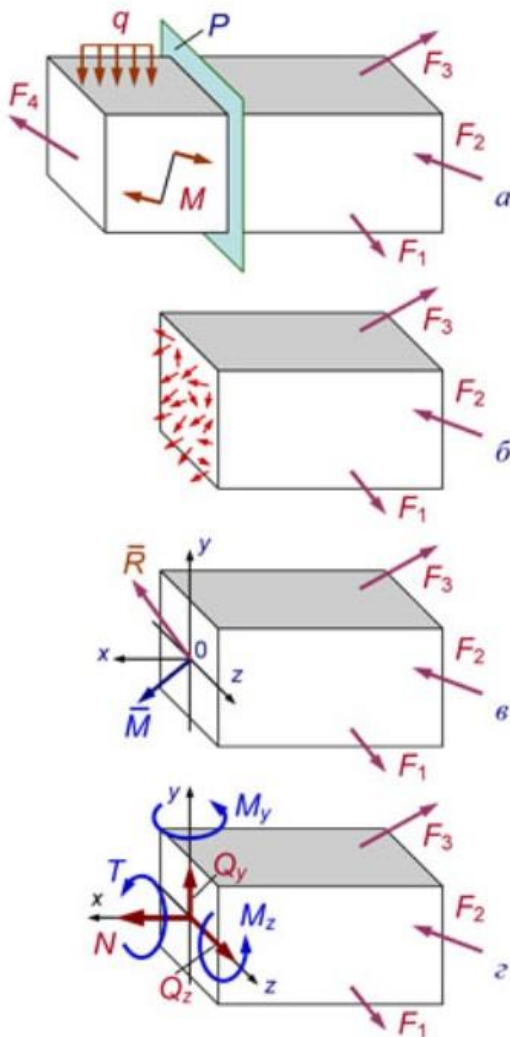
- 1) сила, действующая на точку (или равнодействующая), постоянна и по модулю и по направлению (например, сила веса);
- 2) сила, действующая на точку (или равнодействующая), есть функция положения этой точки (функция координат точки);
- 3) движение точки при наличии сил сопротивления.

## 4. Сопротивление материалов

### 4.1. Метод сечений.

Величиной внутренних усилий определяется степень деформации элемента конструкции и возможность разрушения в том или ином опасном сечении элемента конструкции.

**Внутренние усилия** – силы взаимодействия между частицами тела (кристаллами, молекулами, атомами), возникающие внутри элемента конструкции, как противодействие внешним нагрузкам.



Для выявления внутренних усилий пользуются **методом сечений**.

1. Рассечь нагруженное тело плоскостью P на две части.

2. Отбросить одну из частей. Реальное тело представляет собой совокупность различно ориентированных зерен, от граней которых в разных направлениях действуют элементарные внутренние усилия.

3. Заменить действие отброшенной части внутренними усилиями. При этом используется аппарат теоретической механики: определение равнодействующей системы сходящихся сил, параллельных сил, перенос сил в заданную точку – центр тяжести сечения O. Полученные в результате приведения главный вектор R и главный момент M спроецировать на главные оси инерции z, y и геометрическую ось x.

4. Уравнения равновесия позволяют определить внутренние усилия. Всего их шесть: три силы – проекции главного вектора R:

$\Sigma x = 0$ ; N = ... Продольное усилие от англ. normal

$\Sigma y = 0$ ;  $Q_y = \dots$  Поперечное усилие

$\Sigma z = 0$ ;  $Q_z = \dots$  Поперечное усилие от нем. querlaufend

и три момента – проекции главного

момента M:

$\Sigma M_x = 0$ ; T = ... Крутящий момент от англ. torsional, torque

$\Sigma M_y = 0$ ;  $M_y = \dots$  Изгибающий момент

$\Sigma M_z = 0$ ;  $M_z = \dots$  Изгибающий момент от англ. moment

Таким образом, можно сформулировать **правило определения внутренних силовых факторов**: внутренние силы  $N$ ,  $Q_y$ ,  $Q_z$  численно равны алгебраической сумме проекций всех внешних сил (в том числе и реакций), приложенных к брусу по одну сторону от рассматриваемого сечения. Аналогично: внутренние моменты  $T$ ,  $M_y$ ,  $M_z$  численно равны алгебраической сумме моментов от внешних сил, действующих по одну сторону от рассматриваемого сечения. Какую именно сторону, правую или левую, верхнюю или нижнюю следует рассматривать, зависит от схемы нагружения. Предпочтение следует отдавать более простому варианту.

Принимая во внимание важность описанных выше процедур, запишем кратко последовательность основных этапов метода сечения:

- Р – рассечь тело на две части плоскостью;
- О – отбросить одну из частей тела;
- З – заменить действие отброшенной части внутренними усилиями;
- У – уравнения равновесия составить.

Единица измерения усилий – ньютон (обозначение: Н). Это производная единица. Исходя из второго закона Ньютона ( $F = m \cdot a$ ) она определяется как сила, изменяющая за 1 с скорость тела массой 1 кг на 1 м/с в направлении действия силы. Таким образом,  $1 \text{ Н} = 1 \text{ кг} \cdot \text{м}/\text{с}^2$ . Измерять силу в ньютонах стали спустя два века после смерти великого ученого, когда была принята система СИ.  $1 \text{ Н} = 0,10197162 \text{ кгс}$ ;  $1 \text{ кгс} = 9,80665 \text{ Н}$ .

Каждая компонента внутренних усилий характеризует сопротивление тела какому-либо одному виду деформации – простому сопротивлению. Например, при  $N \neq 0$ , будет растяжение или сжатие. При  $Q \neq 0$  имеет место сдвиг, при  $T \neq 0$  – кручение, а при  $M \neq 0$  – изгиб. При наличии двух и более компонентов будет сложное сопротивление тела.

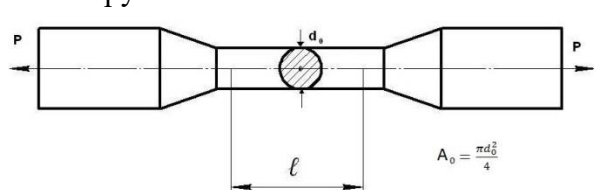
#### 4.2. Диаграммы растяжения и сжатия пластичных и хрупких материалов.

Для расчетов на прочность стержней, при растяжении и сжатии, необходимо знать механические свойства материалов.

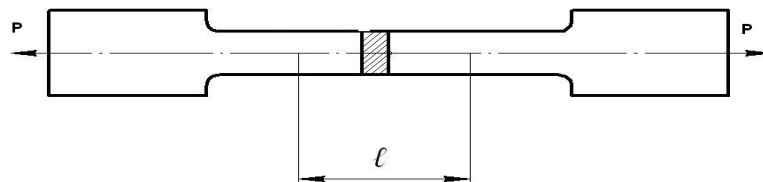
Все конструкционные материалы при комнатной температуре условно делятся на пластичные и хрупкие. Пластичные материалы: сталь, медь, алюминий, разрушаются при больших остаточных деформациях.

Для определения механических характеристик материала производят испытания стандартных образцов на растяжение-сжатие на специальных машинах. Существуют два типа образцов:

1 тип круглый



2 тип плоский



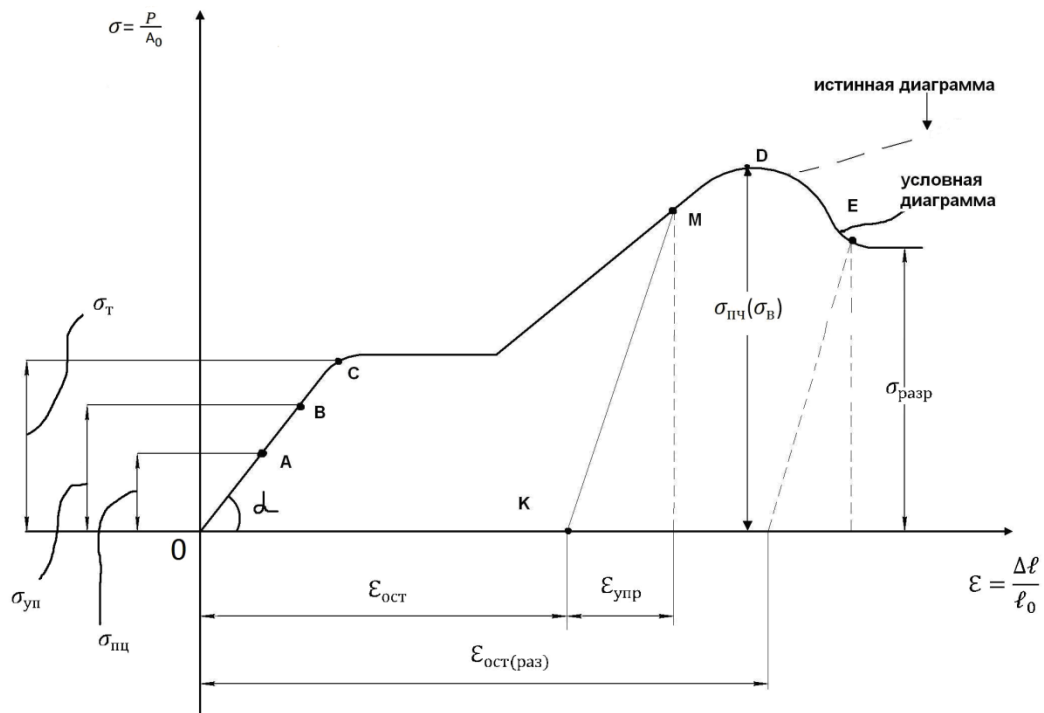
Такие образцы устанавливают в захваты испытательной машины. При испытании автоматически вычерчивается диаграмма в координатах нагрузка (P)- удлинение ( $\Delta l$ ).

$$\sigma = \frac{P}{A_0} \quad \epsilon = \frac{\Delta l}{l_0}$$

Эту машинную диаграмму перестраивают в координатах

Где  $A_0$  - первоначальная площадь сечения рабочей части образца,  $l_0$  - первоначальная длина рабочей части образца.

#### Диаграмма растяжения для малоуглеродистой стали (Ст. 3)



Данная диаграмма называется условной, так как нагрузка  $P$  делится на первоначальную площадь  $A_0$ , а  $\Delta l$  на первоначальную длину  $l_0$ .

### Механические характеристики материалов

На прямолинейном наклонном участке  $OA$  соблюдается закон Гука, до предела пропорциональности  $\sigma_{пц}$ , то есть до точки  $A$ .

$$\sigma_{пц} = \frac{P_{пц}}{A_0}$$

предел пропорциональности материала, то есть, то наибольшее напряжение, до которого соблюдается закон Гука (прямая пропорциональность между напряжением и деформацией, т.е. между  $\sigma$  и  $\epsilon$ ).

Следовательно, модуль продольной упругости, можно определить по диаграмме как  $tg \alpha = \frac{\sigma}{\epsilon} = E$ .

Точки  $A$  и  $B$  почти сливаются.

$$\sigma_{уп} = \frac{P_{уп}}{A_0}$$

предел упругости материала, то есть то наибольшее напряжение, до которого остаточные деформации отсутствуют после разгрузки.

$\sigma_{уп}$  – определить трудно, по ГОСТу принимается условный предел упругости, то наибольшее напряжение, при котором остаточные деформации не превышают 0,05%. За

пределом упругости полная деформация состоит из двух частей  $\epsilon = \epsilon_{упр} + \epsilon_{ост}$ .

Горизонтальный участок диаграммы называется площадкой текучести.

$$\sigma_T = \frac{P_T}{A_0}$$

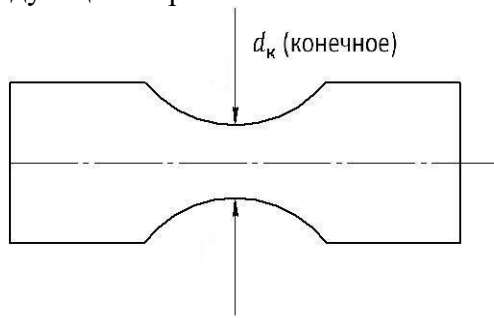
предел текучести это такое напряжение, при котором деформации растут без увеличения нагрузки.

Участок  $CD$  называется – участком упрочнения.

$$\sigma_{пч}(\sigma_B) = \frac{P_{max}}{A_0}$$

– предел прочности материала (временное сопротивление).

В точке D разрушение не происходит. До точки D образец деформируется равномерно по длине. За точкой D имеет место местная деформация образца с последующим образованием шейки.



В момент разрушения:

$$A_k = \frac{\pi d_k^2}{4}$$

$$\sigma_{ист(раз)} = \frac{P_{раз}}{A_k}$$

В точке E разрушение по шейке:

$\sigma_{пц}$ ,  $\sigma_{уп}$ ,  $\sigma_T$ ,  $\sigma_{пч}$  — называются механическими характеристиками **прочности материала**.

После испытания можно определить две механические характеристики **пластичности материала**:

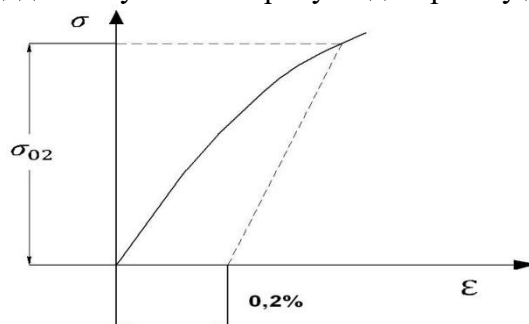
1.  $\delta = \frac{\ell_k - \ell_0}{\ell_0} * 100\%$  — относительное остаточное удлинение, где  $\ell_k$  — расстояние между рисками после разрушения образца.

2.  $\psi = \frac{A_0 - A_k}{A_0} * 100\%$  — относительное остаточное поперечное сужение.

Для стали Ст. 3 эти характеристики:  $\sigma_{пц} = 200$  МПа,  $\sigma_T = 240$  МПа,  $\sigma_{пч} = 380-420$  МПа,  $\delta = 25-27\%$ ,  $\psi = 55-60\%$ .

Участок МК при разгрузке и повторной нагрузке почти точно совпадает. При нагрузке образца выше предела текучести, разгрузке и повторной нагрузке (т.М) площадка текучести отсутствует, и предел пропорциональности возрастает. Это явление носит название **наклёпа**.

ГОСТом установлен условный предел текучести для материалов, не имеющих площадки текучести. Нарисуем диаграмму для высоколегированной стали.

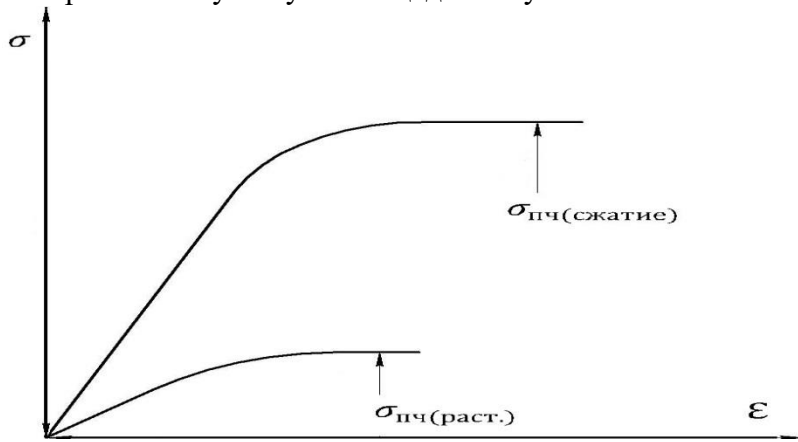


$\sigma_{0.2}$  — то напряжение, при котором остаточные деформации составляют 0,2%.

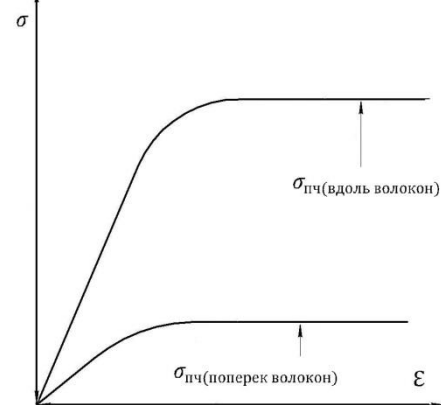
При сжатии за пределом текучести имеет место смятие. Под смятием понимают пластическую деформацию, возникающую на поверхности контакта при расчёте болтовых или заклёпочных соединений. Можно принять:  $[\sigma_{см}] = (2 \div 2,5) [\sigma_B]$ . Считается, что механические характеристики при растяжении и сжатии для пластичных материалов одинаковы.

## Хрупкие материалы

Хрупкостью, называется, способность материала разрушаться без образования заметных остаточных деформаций. Хрупкие материалы, например чугун, неодинаково сопротивляются растяжению и сжатию. Лучше работают на сжатие. Для хрупких материалов отсутствует площадка текучести.



$\sigma_{пч}$  (сжатия) в 3÷4 выше  
 $\sigma_{пч}$  (раст.)  
Анизотропный материал, например дерево, неодинаково сопротивляется сжатию вдоль и поперёк волокон.



Какой материал считать хрупким, а какой пластичным? Считается, что:

для пластичных материалов  $\delta > 5\%$ ;

для хрупких материалов  $\delta < 5\%$ .

Деление это условное, так как при изменении условий испытаний: температуры,

скорости деформирования, характер диаграммы  $\sigma - \epsilon$  меняется. Влияние температуры и фактора времени на механические характеристики материала в общем виде выявить не удастся. Эти факторы можно обнаружить только в конкретных задачах.

### **4.3. Смятие, условности расчета, расчетные формулы, условие прочности.**

Если детали конструкции, передающие значительную сжимающую нагрузку, имеют небольшую площадь контакта, то может произойти смятие поверхностей деталей.

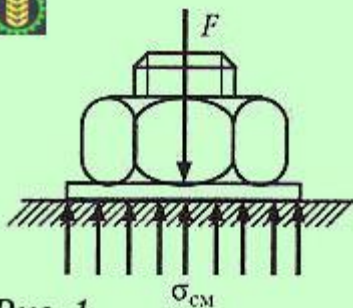


Рис. 1

Смятие стараются предотвратить различными способами, например, подкладывая различные шайбы и подкладки под контактирующие детали.

Для простоты расчетов напряжений, возникающих при смятии, полагают, что по плоскости контакта возникают только нормальные напряжения, равномерно распределенные по площади контакта. Расчетное уравнение на смятие имеет вид:

$$\sigma_{см} = F / A_{см} \leq [\sigma_{см}],$$

где:  $F$  – сжимающая сила,  $A_{см}$  – площадь контакта,

$[\sigma_{см}]$  – допускаемое напряжение на смятие.

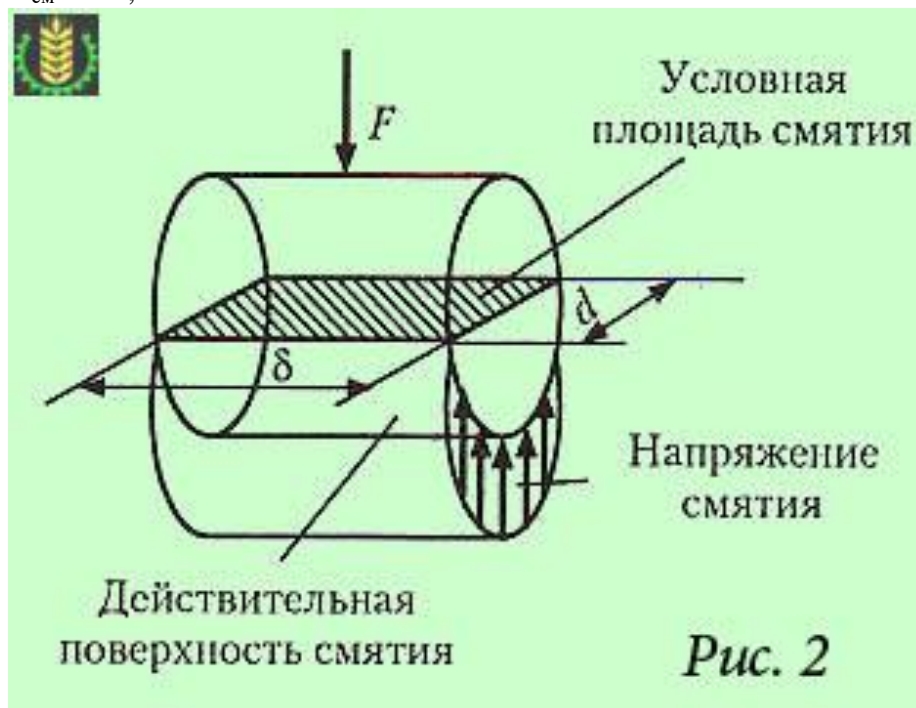
Если соприкасающиеся детали сделаны из разных материалов, то на смятие проверяют деталь из более мягкого материала.

При контакте двух деталей цилиндрической поверхности (например, заклепочное соединение) закон распределения напряжений смятия по поверхности контакта сложнее,



чем по плоскости, поэтому при расчете на смятие цилиндрических отверстий в расчетную формулу подставляют не площадь боковой поверхности полуцилиндра, по которой происходит контакт, а значительно меньшую площадь диаметрального сечения отверстия (условная площадь смятия, (см. рис. 2), тогда:

$$A_{см} = d \delta,$$



где  $d$  - диаметр цилиндра,  $\delta$  - толщина соединяемой детали (высота цилиндра).

При различной толщине соединяемых деталей, в расчетную формулу подставляют меньшую толщину.

Допустимые напряжения на смятие для разных материалов определяются опытным путем, их значение можно найти в справочниках. Так, для низкоуглеродистой стали допускаемое напряжение смятия принимается в пределах 100...120 МПа, для клепаных соединений: 240...320 МПа, для древесины: 2,4...11 МПа и т. д.

#### 4.4. Полярные моменты инерции круга и кольца.

Геометрические характеристики плоских сечений

При некоторых видах деформаций прочность и жесткость (способность противостоять деформации) элементов конструкций зависит не только от величины поперечного сечения, но и от формы этого сечения.

Характеристики плоских сечений. Самый простой пример - обыкновенную школьную линейку можно легко изогнуть относительно широкой стороны поперечного сечения и совершенно невозможно изогнуть относительно его короткой стороны. При этом общая площадь сечения в обоих случаях одинакова. На основании этого примера становится очевидным, что на сопротивление некоторым видам деформации оказывает влияние (иногда - решающее) не только величина площади сечения бруса, но и его геометрическая форма.

При изучении деформаций изгиба и кручения нам потребуется знание некоторых геометрических характеристик плоских сечений, которые оказывают влияние на способность конструкций сопротивляться деформациям относительно той или иной оси либо полюса (точки).

Чтобы понять суть явления и влияния этих геометрических характеристик на сопротивление бруса, например, изгибу, следует обратиться к основополагающим постулатам сопромата. Как известно из установленного в 1660 году английским физиком

Робертом Гуком закона, напряжение в сечениях бруса прямо пропорционально его относительному удлинению. Очевидно, что волокна, расположенные дальше от оси изгиба, растягиваются (или сжимаются) сильнее, чем расположенные вблизи оси. Следовательно, и напряжения возникающие в них будут большими.

Можно привести условную сравнительную аналогию между напряжением в разных точках сечения бруса с моментом силы - чем больше плечо силы - тем больше ее момент (относительно оси или точки). Аналогично - чем дальше от какого-либо полюса (оси) отстоит точка в сечении, тем большее напряжение в ней возникает при попытке изогнуть или скрутить брус относительно этого полюса (оси).

#### Статический момент площади

Статическим моментом площади плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений элементарных площадок на расстояния от них до этой оси.

Статический момент площади плоской фигуры обозначают  $S$  с индексом оси, относительно которой он рассматривается:  $S_x, S_y, S_z$ .

$$S_x = \sum y \, dA; \quad S_y = \sum x \, dA.$$

Анализ этих формул позволяет сделать вывод, что статический момент площади фигуры относительно оси, лежащей в этой же плоскости, равен произведению площади фигуры на расстояние от ее центра тяжести до этой оси.

Единица измерения статического момента площади - метр кубический (м<sup>3</sup>).

При определении статического момента площади сложной фигуры можно применять метод разбиения, т. е. определять статический момент всей фигуры, как алгебраическую сумму статических моментов отдельных ее частей. При этом сложная геометрическая фигура разбивается на простые по форме составные части - прямоугольники, треугольники, окружности, дуги и т. п., затем для каждой из этих простых фигур подсчитывается статический момент площади, и определяется алгебраическая сумма этих моментов.

#### Полярный момент инерции

Полярным моментом инерции плоской фигуры относительно полюса (точки), лежащего в той же плоскости, называется сумма произведений элементарных площадок этой фигуры на квадрат их расстояний до полюса.

Полярный момент инерции обозначают  $I_p$ , а формула для его определения записывается так:

$$I_p = \sum \rho^2 \, dA.$$

Единица измерений полярного момента инерции - м<sup>4</sup>, из чего следует, что он не может быть отрицательным.

Понятие полярного момента инерции понадобится при изучении деформаций кручения круглых валов, поэтому приведем формулы для определения полярного момента квадратного, круглого и кольцевого сечения.

Для квадрата со стороной  $a$ :

$$I_x = a^4 / 12$$

Для круга диаметром  $d$ :

$$I_p \approx 0,1 \, d^4$$

Для кольцевого сечения размером  $D \times d$ :

$$I_p \approx 0,1 \, (D^4 - d^4)$$

Очевидно, что полярный момент инерции кольцевого сечения равен разности полярных моментов инерции большого и малого кругов, ограничивающих это сечение.

#### Осевой момент инерции

Осевым моментом инерции плоской фигуры относительно оси, лежащей в той же плоскости, называется взятая по всей площади сумма произведений площадей элементарных площадок на квадрат расстояний от них до этой оси (рис).

полярный и осевой момент инерции сечения

Осевой момент инерции обозначается  $I$  с индексом, соответствующим оси:

$$I_x = \sum y^2 dA; \quad I_y = \sum x^2 dA.$$

Если при этом площадь элементарных площадок принять стремящимися к минимуму, то можно использовать методы интегрального исчисления, заменив знак суммы  $\Sigma$  на знак интеграла  $\int$ .

Очевидно, что осевой и полярный момент инерции выражаются в одинаковых единицах -  $m^4$ . Осевой момент инерции величина всегда положительная и не равна нулю ( $m^4$  не может быть отрицательным, а площадь не может быть равной нулю, иначе пропадает и сама фигура, как площадка).

Если сложить осевые моменты инерции плоской фигуры относительно перпендикулярных осей, то получим полярный момент инерции этой фигуры относительно точки пересечения этих осей (начала координат), т. е. :

$$I_x + I_y = I_p.$$

Так как интеграл суммы равен сумме интегралов, то момент инерции сложной фигуры можно вычислить как сумму моментов инерции простых фигур, на которые разбивают сложную фигуру.

Понятие осевого момента инерции понадобится при изучении теории изгиба.

Приведем формулы для определения осевых моментов инерции наиболее часто встречающихся при расчетах форм сечений:

Для прямоугольника размером  $b \times h$ :

$$I_x = bh^3 / 12$$

Для квадрата со стороной  $a$ :

$$I_x = a^4 / 12$$

Для круга диаметром  $d$ :

$$I_x = I_y \approx 0,05 d^4$$

Для кольцевого сечения размером  $D \times d$ :

$$I_x = I_y \approx 0,05 (D^4 - d^4)$$

#### **4.5. Напряжения в поперечном сечении. Рациональное расположение колёс на валу.**

Напряжения в поперечном сечении

Опыты показывают, что если на поверхности бруса круглого сечения нанести прямоугольную сетку, а на торцевой поверхности нанести радиальные линии (рис.5.5), то после деформации кручение окажется что:

- все образующие поворачиваются на один и тот же угол  $\gamma$ , а прямоугольники, нанесенные на поверхности, превращаются в параллелограммы;

- торцевые сечения остаются круглыми, плоскими, расстояния между ними не меняются;

- каждое сечение поворачивается относительно другого на некоторый угол  $\phi$ , называемый углом закручивания;

- радиальные линии на торцевой поверхности остаются прямыми.

На основании этих наблюдений можно заключить, что может быть принята гипотеза Бернулли (гипотеза плоских сечений), а в вале возникают условия чистого сдвига, в поперечных сечениях действуют только касательные напряжения, нормальные напряжения равны нулю.

Рассмотрим поперечное сечение вала, расположенное на некотором расстоянии  $z$  от торцевого, где  $M_k = T$  (рис.5.5). На элементарной площадке  $dF$  будет действовать элементарная сила  $tdF$ , момент который относительно оси вала равен  $(tdF)r$ . Крутящий момент  $M_k$ , в сечении равен

$$M_x = \int_F \rho \tau dF$$

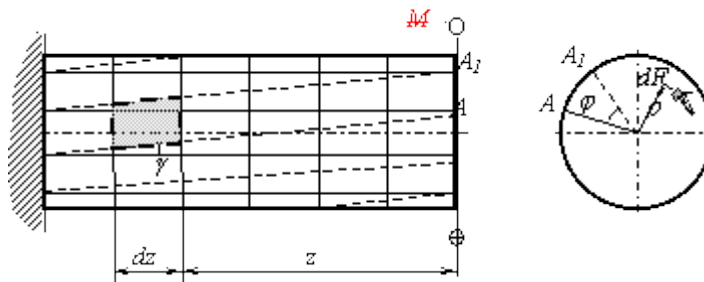


Рис.5.5

Для того чтобы проинтегрировать это выражение необходимо знать закон распределения напряжений в сечении. Выделим из вала элементарное кольцо длиной  $dz$  и толщиной  $d\rho$  (рис.5.6).

Правый торец элемента повернется относительно левого на угол  $d\varphi$ , образующая  $CB$  повернется на угол  $\gamma$  и займет положение  $CB_1$ . Угол  $\gamma$  - относительный сдвиг. Из треугольника  $OBV_1$  найдем:

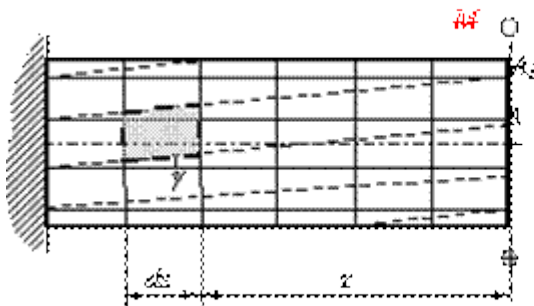


Рис.5.6

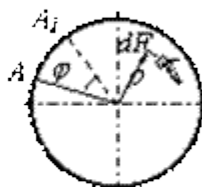


Рис.5.7

$$BV_1 = (\rho + d\rho)d\varphi \cong \rho d\varphi.$$

Из треугольника  $CBV_1: BV_1:CB = \gamma dz$ . Откуда, приравняв правые части, получим

$$\gamma = \rho \frac{d\varphi}{dz}.$$

На основании закона Гука при сдвиге:

$$\tau = G\gamma = G\rho \frac{d\varphi}{dz}.$$

Подставим выражение (5.2) в (5.1):

$$M_k = \int_F \rho G \rho \frac{d\varphi}{dz} dF = G \frac{d\varphi}{dz} \int_F \rho^2 dF = GJ_p \frac{d\varphi}{dz}.$$

Откуда

$$\frac{d\varphi}{dz} = \frac{M_k}{GJ_p}.$$

Подставим значение  $\frac{d\varphi}{dz}$  в выражение (5.4) получим:

$$\tau = \frac{M_k}{J_p} \rho.$$

Таким образом, касательные напряжения при кручении прямо пропорциональны расстоянию от центра тяжести сечения до рассматриваемой точки и одинаковы в точках, одинаково удаленных от центра тяжести сечения (рис. 5.7). При  $\rho = 0$  получим  $\tau = 0$ . Наибольшие напряжения возникают в точках контура сечения при  $\rho = R$ :

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{J_p} R.$$

Величина отношения полярного момента инерции к радиусу вала называется моментом сопротивления сечения при кручении или полярным моментом сопротивления

$$W_p = \frac{J_p}{R}.$$

Для сплошного круглого сечения

$$W_p = \frac{\pi R^3}{2} = \frac{\pi D^3}{16} \approx 0,2d^3.$$

Для кольцевого сечения

$$W_p = \frac{\pi R^3}{2} (1 - c^4) = \frac{\pi D^3}{16} (1 - c^4),$$

где

$$c = \frac{d}{D}.$$

Тогда максимальные касательные напряжения равны

$$\tau_{\max} = \frac{M_k}{W_p}.$$

### Основные положения расчетов при кручении

#### Распределение касательных напряжений по сечению при кручении (рис. П8.1)

Касательное напряжение в точке А:

$$\tau_A = \frac{M_k \rho_A}{J_p},$$

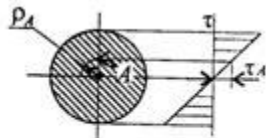


Рис. П8.1

где  $\rho_A$  - расстояние от точки А до центра сечения.

#### Условие прочности при кручении

$$\tau_k = \frac{M_k}{W_p} \leq [\tau_k]; \quad W_p = \frac{\pi d^3}{16} \approx 0,2d^3 \quad (\text{круг}),$$

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4) \quad (\text{кольцо}),$$

$M_k$  - крутящий момент в сечении, Н м, Н мм;

$W_p$  - момент сопротивления при кручении, м<sup>3</sup>, мм<sup>3</sup>

$[\tau_k]$  - допускаемое напряжение при кручении, Н/м<sup>2</sup>, Н/мм<sup>2</sup>.

#### Проектировочный расчет, определение размеров поперечного сечения

Сечение - круг:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_k}{0,2[\tau_k]}}$$

Сечение - кольцо:

$$d \geq \sqrt[3]{\frac{M_k}{0,2(1 - c^4)[\tau_k]}}$$

где  $d$  - наружный диаметр круглого сечения;

$d_{\text{вн}}$  - внутренний диаметр кольцевого сечения;  $c = d_{\text{вн}}/d$ .

#### Определение рационального расположения колес на валу

Рациональное расположение колес - расположение, при котором максимальное значение крутящего момента на валу - наименьшее из возможных.

Для экономии металла сечение бруса рекомендуется, выполнить кольцевым.

#### Условие жесткости при кручении

$$\varphi_0 = \frac{M_k}{GJ_p} \leq [\varphi_0]; \quad G \approx 0,4E,$$

$G$  - модуль упругости при сдвиге, Н/М<sup>2</sup>, Н/мм<sup>2</sup>;

$E$  - модуль упругости при растяжении, Н/м<sup>2</sup>, Н/мм<sup>2</sup>.

$\varphi_0$  - допускаемый угол закручивания,  $[\varphi_0] \cong 0,5 \div 1$  град/м;

$J_p$  - полярный момент инерции в сечении, м<sup>4</sup>, мм<sup>4</sup>.

#### Проектировочный расчет, определение наружного диаметра сечения

$$J_p \geq \frac{M_k}{G[\varphi_0]}; \quad J_p = \frac{\pi d^4}{32} \approx 0,1d^4 \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{32J_p}{\pi}}.$$

круг;

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}(1 - c^4) \quad d \geq \sqrt[4]{\frac{32J_p}{\pi(1 - c^4)}}.$$

кольцо;

#### 4.6. Линейные и угловые перемещения при изгибе, их определение.

Под действием поперечных нагрузок продольная ось искривляется. Если материал подчиняется закону Гука, после снятия нагрузок брус выпрямляется, поэтому изогнутую ось бруса называют упругой линией. По форме упругой линии балки можно судить о перемещениях при изгибе.

При прямом поперечном изгибе бруса его ось, искривляясь, остается в силовой плоскости. В результате деформации бруса каждое из его поперечных сечений получает вертикальное и горизонтальное перемещение, а само сечение поворачивается на некоторый угол  $\Theta$ .

Деформации должны иметь упругий характер, они достаточно малы. В этом случае горизонтальные перемещения сечений ничтожно малы и не учитываются. Рассматривают вертикальные перемещения центра тяжести сечения, называемые прогибами ( $y$ ). Максимальные прогибы обозначают  $f = y_{\text{max}}$ . Для обеспечения нормальной работы устанавливаемого на балках оборудования проводят расчет на жесткость.

Условие жесткости выражается неравенством

$$f \leq [f],$$

где  $f$  — максимальный расчетный прогиб балки;  $[f]$  — допускаемый прогиб. Иногда проверяется угол поворота сечения  $\Theta < [\Theta]$ . Допускаемый прогиб невелик: от 1/200 до 1/1000 пролета балки; допускаемый угол поворота  $1 \cdot 10^{-3}$  рад.

Существует несколько методов определения перемещений сечений при изгибе. Один из них основан на дифференцировании уравнения упругой линии, более рациональный способ — использование интегралов Мора. Метод Мора — универсальный способ определения линейных и угловых перемещений в любых системах.

Для облегчения расчетов на жесткость можно использовать формулы прогибов и углов поворота сечений балок для простейших случаев нагружений. Наиболее распространенные случаи нагружения и расчетные формулы приведены в таблице.

При решении используем принцип независимости действия сил. Заданный случай нагружения делится на составляющие, для которых прогибы рассчитываются по известным табличным формулам, результаты расчетов суммируются.

Ограничение угла поворота вводится для обеспечения нормальной работы подшипников скольжения и роликовых подшипников.

В этом случае проверяется дополнительное условие жесткости:

$$\theta_{\max} \leq [\theta].$$

Схема нагружения балки	Максимальный прогиб $f$ и прогиб $v_K$ в сечении $K$	Угол поворота $\theta$ указанного сечения
	$f = \frac{Ml^2}{2EJ_x}$	$\theta_B = \frac{Ml}{EJ_x}$
	$f = \frac{Fl^3}{3EJ_x}$	$\theta_B = \frac{Fl^2}{2EJ_x}$
	$f = \frac{Fa^2}{2EJ_x} \left(1 - \frac{a}{3}\right)$	$\theta_B = \frac{Fa^2}{2EJ_x}$
	$f = \frac{ql^4}{8EJ_x}$	$\theta_B = \frac{ql^3}{6EJ_x}$
	$v_K = \frac{Ml^2}{16EJ_x}$	$\theta_A = \frac{Ml}{3EJ_x}$ $\theta_B = \frac{Ml}{6EJ_x}$
	$f = \frac{Fl^3}{48EJ_x}$	$\theta_A = \theta_B = \frac{Fl^2}{16EJ_x}$
	$f = \frac{5ql^4}{384EJ_x}$	$\theta_A = \theta_B = \frac{ql^3}{24EJ_x}$
	$v_K = \frac{Fa}{48EJ_x} \times$ $\times (3l^2 - 4a^2)$	$\theta_A = \frac{Fab(l+b)}{6EJ_x l}$ $\theta_B = \frac{Fab(l+a)}{6EJ_x l}$
	$v_K = \frac{5ql^4}{768EJ_x}$	$\theta_A = \frac{3ql^3}{128EJ_x}$ $\theta_B = \frac{7ql^3}{348EJ_x}$

Таблица 33.1. Формулы для определения прогибов и углов поворота сечений балок

#### 4.7. Гипотеза наибольших касательных напряжений.

Согласно этой гипотезе, предложенной в конце XVIII в., опасное состояние материала наступает тогда, когда наибольшие касательные напряжения достигают предельной величины.

Если рассмотреть элементарную площадку в наклонном сечении продольно растягиваемого бруса, то при помощи простых геометрических выкладок можно убедиться, что касательное напряжение в такой площадке достигает максимальной величины, когда сечение располагается под углом  $45^\circ$  к оси бруса. При этом величина

касательного напряжения будет равна половине разности между максимальным и минимальным нормальным напряжением:

$$\tau = \tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 \quad (1)$$

В частном случае, если  $\sigma_{\min} = 0$ , то  $\tau_{\max} = \sigma_{\max}/2$ .

Чтобы вывести формулу для вычисления эквивалентных напряжений по третьей теории прочности, рассмотрим брус, у которого в поперечном сечении действуют нормальные  $\sigma$  и касательные  $\tau$  напряжения (см. рисунок).

гипотезы прочности в сопрягате

Внутри бруса вблизи от произвольной точки В вырежем бесконечно малую призму abc, у которой грань ab совпадает с поперечным, грань ac – с продольным сечениями, а грань bc является главной площадкой, на которой действует главное напряжение  $\sigma_0$ .

Согласно закону парности касательных напряжений в грани ac призмы также будут действовать касательные напряжения  $\tau$ .

Поскольку в продольном сечении бруса нормальных напряжений нет, то здесь мы имеем дело со случаем плоского напряженного состояния, который называют упрощенным.

Рассмотрим равновесие призмы abc, для чего спроецируем все действующие на нее силы на оси z и y. Площадь грани bc обозначим dA (элементарная площадка). Тогда:

$$\begin{aligned} \Sigma Z = 0; & \quad \sigma_0 dA \sin\varphi - \tau dA \cos\varphi - \sigma dA \sin\varphi = 0 \\ \Sigma Y = 0; & \quad \sigma_0 dA \cos\varphi - \tau dA \sin\varphi = 0. \end{aligned}$$

Разделив обе части равенства на dA, получим:

$$(\sigma_0 - \sigma) \sin\varphi = \tau \cos\varphi; \quad \sigma_0 \cos\varphi = \tau \sin\varphi.$$

Оба равенства разделим на  $\cos\varphi$  и, исключив из них  $\operatorname{tg}\varphi$ , получим выражение:

$$\tau / (\sigma_0 - \sigma) = \sigma_0 / \tau, \quad \text{что равнозначно квадратному уравнению} \quad \sigma_0^2 - \sigma_0\sigma - \tau^2 = 0.$$

Решая это уравнение, получим:

$$\sigma_0 = \sigma/2 \pm 1/2 \sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)}.$$

(Здесь и далее знак  $\sqrt{\quad}$  обозначает квадратный корень).

Таким образом, главные напряжения в наклонных площадках в зонах точки А бруса определяют по формулам:

$$\sigma_{\max} = \sigma/2 + 1/2 \sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)} \quad \sigma_{\min} = \sigma/2 - 1/2 \sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)}.$$

Следовательно, исходя из формулы (1), максимальные касательные напряжения можно найти по формуле:

$$\tau_{\max} = (\sigma_{\max} - \sigma_{\min})/2 = 1/2 \sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)}.$$



Поскольку  $\tau_{пред} = \sigma_{пред}/2$ , а эквивалентное напряжение не должно превышать предельного, то, применяя гипотезу наибольших касательных напряжений, имеем:

$$\tau_{max} = \tau_{пред} = \sigma_{пред}/2 = \sigma_{экв}/2 = 1/2 \sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)}.$$

В результате мы получили формулу для вычисления эквивалентных напряжений:

$$\sigma_{экв} = \sqrt{(\sigma^2 + 4\tau^2)}.$$

Гипотеза наибольших касательных напряжений хорошо подтверждается опытами, в особенности для пластичных материалов.

#### 4.8. Коэффициент запаса.

При расчетах на усталость коэффициент запаса прочности определяют по следующим формулам, полученным в предположении подобия рабочих и предельных циклов напряжений:

в случае нормальных напряжений

$$S_{\sigma} = \frac{\sigma_{-1}}{K_{\sigma d} \sigma_{\alpha} + \psi_{\sigma} \sigma_m} \geq [S]$$

в случае касательных напряжений

$$S_{\tau} = \frac{\tau_{-1}}{K_{\tau d} \tau_{\alpha} + \psi_{\tau} \tau_m} \geq [S]$$

Коэффициенты чувствительности к асимметрии цикла напряжений определяют по формулам

$$\psi_{\sigma} = \frac{2\sigma_{-1} - \sigma_0}{\sigma_0}, \quad \psi_{\tau} = \frac{2\tau_{-1} - \tau_0}{\tau_0}.$$

Если в опасной точке детали возникают и нормальные, и касательные напряжения, то

$$S = \frac{S_{\sigma} S_{\tau}}{\sqrt{S_{\sigma}^2 + S_{\tau}^2}} \geq [S]$$

Вопрос, связанный с выбором значения  $[S]$ , является очень ответственным. Значение  $[S]$  оказывает большое влияние на габариты и массу проектируемых изделий и, следовательно, на их стоимость и эксплуатационные расходы. С уменьшением  $[S]$  снижается масса изделий, но увеличивается возможность отказов — снижается надежность. В качестве ориентировочных можно рекомендовать для стальных деталей  $[S] \approx 1,5 \dots 2,1$  и для чугуна  $[S] \approx 2,0 \dots 2,4$ .

#### 4.9. Динамическое напряжение, динамический коэффициент.

##### Прочность при динамических нагрузках

В предыдущих разделах рассматривалось такое нагружение конструкций, когда прикладываемые усилия изменялись настолько медленно, что возможно было считать их *статическими*. В инженерной практике же часто встречаются случаи, когда нагрузка достаточно быстро изменяет свое направление или величину, т.е. зависят от времени. Такое нагружение называется *динамическим* и вызывает значительные силы инерции в сооружении, которые приводят к появлению дополнительных (к статическим) напряжений и деформаций.

Известны случаи, когда инженерные конструкции, рассчитанные с большим запасом прочности на статическую нагрузку, разрушались под действием сравнительно небольших динамических сил. С целью избежания этих нежелательных явлений необходимо с особой тщательностью подходить к расчетам элементов конструкций, которые в данном случае более сложны, чем при статических нагрузках. Они требуют привлечения более сложных методов определения внутренних сил, учитывающих

разнообразные воздействия динамической нагрузки, особенности сопротивляемости последним многих материалов. Так, при действии ударной нагрузки, характеризующейся чрезвычайно малой продолжительностью, многие материалы, которые при наличии статических сил проявляли себя пластичными, работают как хрупкие. В случае колебаний упругой системы многократно повторяющиеся нагрузки приводят к резкому снижению прочности материалов, связанному с усталостными явлениями.

Динамическое действие нагрузок, вызванное движением деталей машин или механизмов, а также элементов конструкций, учитывается при использовании расчетов, основанных на известном в механике твердого тела принципе Даламбера. Исходя из этого, если силы инерции известны, то расчет можно вести по методу сечений, а для вычисления внутренних сил использовать уравнения статики твердого тела. Если же определение сил инерции затруднительно или вообще невозможно, как, например, при ударном действии нагрузок, для вычисления динамических напряжений и деформаций используется закон сохранения энергии с привлечением основных положений из курса сопротивления материалов о потенциальной энергии деформируемого тела. В ряде случаев динамические напряжения во много раз превышают статические.

Задача соударения твердых деформируемых тел в механике, как правило, относится к классу *динамических контактных задач со смешанными граничными условиями*, содержащими в себе многие трудности математического порядка при их решении, которые не всегда могут быть преодолены простыми инженерными способами. Эти трудности в первую очередь связаны с определением с определением характера изменения функции напряжения в зоне контакта соударяемых тел по пространственным координатам и во времени. Большие сложности возникают и при учете волновых процессов, возникающих, как в зоне контакта, так и внутри соударяемых тел. Например, *дифракционных* волновых процессов по контуру в зоне контакта, и *интерференционных* явлений внутри соударяемых тел. Здесь существенное значение приобретает и учет фактора *рассеяния энергии*, трудно поддающийся анализу в данном случае.

Исходя из вышеизложенного, ниже при решении задач, применяется упрощенный инженерный подход, основанный на следующих упрощающих предпосылках: при взаимодействии соударяемых тел они принимаются или идеально упругими, или абсолютно твердыми. Деформации в упругих соударяемых телах происходят мгновенно.

Установлено, что практически во всех случаях силы динамического воздействия пропорциональны статическим, в связи с чем расчеты на прочность и жесткость при динамических нагрузках выполняются по методам, разработанным для статических, но с введением соответствующих значений динамических коэффициентов. Таким образом, учитывая это, имеем

$$F_d = F_{st} K_d;$$

$$\sigma_d = \sigma_{st} K_d;$$

$$\delta_d = \delta_{st} K_d,$$

где  $K_d$  - динамический коэффициент.

Условия прочности и жесткости применительно к расчету по методу допускаемых напряжений имеют соответственно вид

$$\sigma_{d \max} = \sigma_{st \max} K_d \leq [\sigma];$$

$$\delta_{d \max} = \delta_{st \max} K_d \leq [\delta].$$

При изучении динамики упругих систем последние принято классифицировать, прежде всего, по числу их степеней свободы. Под *числом степеней свободы* понимается число независимых координат, определяющих положение материальных точек системы в произвольный момент времени.

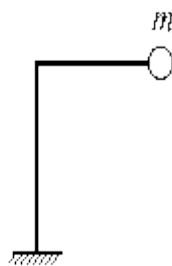


Рис. 15.1

Так для системы, изображенной на рис. 15.1, если пренебречь массой стержней, положение сосредоточенной массы  $m$  в плоскости чертежа полностью будет определяться двумя независимыми координатами – линейными перемещениями в вертикальном и горизонтальном направлениях. То есть рассматриваемая система будет иметь две степени свободы. Заметим что, так как во всех реальных системах масса конструкции распределена по их объему, поэтому любая произвольно взятая точка является материальной. Следовательно, для определения положения системы в произвольный момент времени, строго говоря, необходимо знать перемещения всех точек рассматриваемой системы. Откуда следует, что все реальные системы в точной постановке задачи, имеют бесконечное число степеней свободы, так как число материальных точек, принадлежащей любой реальной системе, равно бесконечности.

Из различных задач динамики конструкций здесь рассматриваются задачи на действие *инерционных* и *ударных* нагрузок, а также задачи на *упругие свободные колебания* систем с одной степенью свободы.

Соударение твердого тела и системы с одной степенью свободы

Задача соударения различных механических систем часто встречается в инженерной деятельности в различных сферах, поэтому имеет большое практическое значение.

Взаимодействие тел, при котором за очень малый промежуток времени скачкообразно изменяются скорости взаимодействующих тел, называется *ударом*. В период взаимодействия соударяемых тел между ними развивается результирующая *контактная сила*. Хотя время действия контактной силы обычно очень мало и измеряется микро– или миллисекундами, она развивается очень быстро и принимает большие значения.

При забивке свай тяжелый груз падает с некоторой высоты на верхний торец сваи и погружает ее в грунт; баба останавливается почти мгновенно, вызывая удар. Аналогичные явления происходят при ковке; удар испытывают и проковываемое изделие и шток молота с бойком, так как последний очень быстро останавливается при соприкосновении с изделием. Во время удара между обеими ударяющимися деталями возникают весьма большие взаимные давления. Скорость ударяющего тела за очень короткий промежуток времени изменяется и в частном случае падает до нуля; тело останавливается. Значит, на него от ударяемой детали передаются очень большие ускорения, направленные в сторону, обратную его движению, т. е. передается реакция  $R_d$ , равная произведению массы ударяющего тела на это ускорение.

Обозначая это ускорение через  $a$ , можно написать, что реакция  $P_d = \frac{Qa}{g}$ , где  $Q$  —

вес ударяющего тела. По закону равенства действия и противодействия на ударяемую. часть конструкции передается такая же сила, но обратно направленная (рис.15.2). Эти силы и вызывают напряжения в обоих телах.

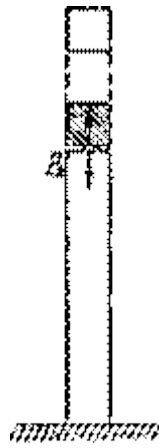


Рис.15.2

Таким образом, в ударяемой части конструкции возникают такие напряжения, как будто к ней была приложена сила инерции ударяющего тела; мы можем вычислить эти напряжения, рассматривая силу инерции  $P_d$  как статическую нагрузку нашей конструкции. Затруднение заключается в вычислении этой силы инерции. Продолжительности удара, т. е. величины того промежутка времени, в течении которого происходит падение скорости до нуля, мы не знаем. Поэтому остается неизвестной величина ускорения  $a$ , а стало быть, и силы  $P_d$ . Таким образом, хотя вычисление напряжений при ударе представляет собой частный случай задачи учета сил инерции, однако для вычисления силы  $P_d$  и связанных с ней напряжений и деформаций здесь приходится применять иной прием и пользоваться законом сохранения энергии.

При ударе происходит очень быстрое превращение одного вида энергии в другой: кинетическая энергия ударяющего тела превращается в потенциальную энергию деформации. Выражая эту энергию в функции силы  $P_d$  или напряжений, или деформаций получаем возможность вычислить эти величины.

В зависимости от скорости приложения контактной силы, ударное нагружение может рассматриваться как квазистатическое или ударное. В случае ударного нагружения необходимо учитывать не только величину нагрузки, но и время, в течение которого она достигает конечного значения, и импульс, представляющий собой площадь под кривой зависимости нагрузки от времени. При действии ударных нагрузок не только повышаются напряжения по сравнению с квазистатическим нагружением, но и могут значительно меняться свойства материала – возрастают предел текучести и предел прочности материала и снижается его пластичность, т.е. происходит *охрупчивание* материала.

Теория удара опирается на некоторые допущения: форма изогнутой оси балки при ударе подобна изогнутой оси балки при статическом ее нагружении; считают, что удар является неупругим, то есть ударяющее тело не отскакивает от конструкции, а продолжает двигаться вместе с ней; считают, что деформации, вызванные ударом, являются упругими, то есть  $\sigma_{max} < \sigma_{nc}$ ; массой балки пренебрегают, то есть считают балку невесомой.

### Механические испытания на удар

Обычные ударные испытания образцов, осуществляемые на маятниковых копрах, призваны оценить склонность материала к хрупкому разрушению и относятся по своим скоростным показателям (скорость удара 5-7 м/с) к квазистатическому нагружению. Ниже будет рассмотрено поведение металлических материалов при квазистатическом ударном нагружении. Метод основан на разрушении при изгибе образца с концентратором в виде надреза одним ударом маятника копра. Надрез в стандартных образцах облегчает хрупкое разрушение материалов. В результате испытания определяют полную работу, затраченную при ударе на разрушение образца (работу удара)  $K$ , и ударную вязкость  $KC$ . Под *ударной вязкостью* следует понимать работу удара, отнесенную к начальной

площади поперечного сечения образца в месте концентратора. Единицей измерения ударной вязкости является Дж/см<sup>2</sup>.

В зависимости от вида концентратора (U-, V или T-образный надрез) ударная вязкость обозначается как KCU, KCV или KCT. Выбор вида концентратора осуществляется в зависимости от требований к изделию: U - при обычных испытаниях металлов и сплавов; V - для конструкций повышенной степени надежности (летательные аппараты, транспортные средства, трубопроводы, сосуды давления); T - для особо ответственных конструкций.

Для определения вязкости хрупких материалов (инструментальных сталей с твердостью более 50 HRC) применяют гладкие образцы и ударная вязкость обозначается КС.

Обычно испытывается призматический образец квадратного сечения 10x10 мм и длиной 55 мм с краевым надрезом глубиной 2 мм в середине образца. На рис.15.3 представлена схема нагружения образца при испытании его на удар.

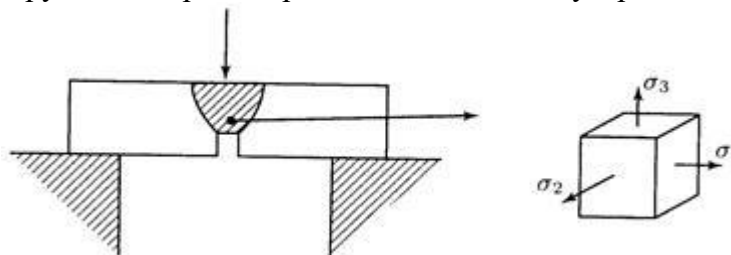


Рис.15.3

В зоне концентрации напряжений происходит локализация деформации, и возникает объемное растяжение, вследствие стеснения деформации в поперечном направлении. Это в сочетании с высокой скоростью деформирования (порядка 10<sup>2</sup> 1/с) способствует проявлению хрупкости материала. Хотя ударная вязкость как свойство материала носит условный характер, она оказалась весьма чувствительной к особенностям структуры материала и механического его поведения. Например, различие в комплексе свойств при деформировании и разрушении мелкозернистого и крупнозернистого железа четко выявляется ударной вязкостью, тогда как статические характеристики этого не отражают (табл.15.1).

Таблица 15.1

Структура железа	$\sigma_T$ , МПа	$\sigma_B$ , МПа	$\delta$ ,%	$\Psi$ ,%	KCV, Дж/см <sup>2</sup>
Мелкозернистая	268	375	35,3	72,2	13,1
Крупнозернистая	185	345	36,9	66,7	2,6

Испытанию на удар подвергаются практически все материалы. При поставках металла ударная вязкость является настолько же обязательной характеристикой металла, как  $\sigma_T$ ,  $\sigma_B$  и  $\delta$ . Она характеризует способность материала сопротивляться хрупкому разрушению (поглощать энергию удара за счет пластического деформирования) при заданной температуре испытания. В таблице 15.2 приведены значения ударной вязкости для углеродистых сталей.

Таблица 15.2 Ударная вязкость некоторых сталей

Содержание в стали углерода	Термообработка			
	отжиг		закалка и отпуск	
	$\sigma_B$ , МПа	KCV, Дж/см <sup>2</sup>	$\sigma_B$ , МПа	KCV, Дж/см <sup>2</sup>
0,15	350-450	2,5	360-500	2,5

0,15-0,20	400-500	2,2	450-650	2,0
0,20-0,30	500-600	2,0	550-750	1,5
0,30-0,40	600-700	1,6	700-850	1,2
0,40-0,50	700-800	1,2	800-950	0,9
0,50-0,60	800-900	1,0	900-1050	0,5
0,60-0,70	850-950	0,8	1000	0,3
0,70	950	0,6	1050	0,2

Ударная вязкость металла существенно зависит от температуры испытания. Это особенно относится к металлам и сплавам с о.ц.к. решеткой, состояние которых изменяется с понижением температуры от вязкого к хрупкому. Испытания показывают, что при понижении температуры сначала наблюдается постепенное снижение ударной вязкости, при определенной температуре она достигает своего наименьшего значения, которое при дальнейшем понижении температуры не изменяется.

Температуры  $t_1$  и  $t_2$  называют соответственно верхней и нижней температурами хрупкости, а само явление *хладноломкостью*. Порог хладноломкости определяется типом кристаллической решетки, количеством примесей внедрения, при этом зависимость наблюдается обратная – чем ниже порог хладноломкости, тем выше ударная вязкость, т.е. ударная вязкость есть функция порога хладноломкости.

Для металла в хрупком состоянии характерны низкие значения ударной вязкости, мало изменяющиеся в широком диапазоне изменения температуры (так называемое «нижнее плато» значений ударной вязкости). При вязком состоянии характерны высокие значения ударной вязкости («верхнее плато»). Переход из одного состояния в другое происходит в определенном температурном интервале – температурном интервале хрупко-вязкого перехода.

Для объяснения перехода металлов из хрупкого состояния в вязко-пластичное привлекается известная схема А.Ф.Иоффе, которая учитывает особенности деформирования и разрушения металлических материалов: возможность разрушения путем отрыва (хрупкий характер разрушения) и путем среза (вязкий характер разрушения). Отмечается слабая зависимость сопротивления отрыву  $\sigma_{отр}$  от температуры при значительном разбросе этой характеристики и существенное снижение сопротивления течению  $\sigma_T$  и сопротивления срезу  $\sigma_{ср}$  с повышением температуры (рис.15.4).

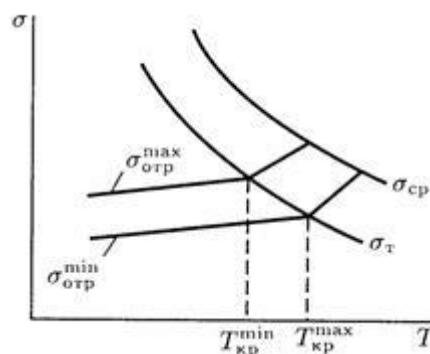


Рис.15.4

Указанное изменение характеристик прочности и пластичности определяют суммарное изменение ударной вязкости, например KCV, в зависимости от температуры в весьма жестких условиях нагружения, когда довольно четко выявляется так называемая критическая температура хрупкости, или температура хрупко-вязкого перехода  $T_{кр}$ . У разных материалов проявляются свои особенности хрупко-вязкого перехода: скачкообразный переход при определенной температуре  $T_{кр}$  (рис.15.5, а); наличие области

разброса KCV в пределах экстремальных значений, определяющей интервал хрупко-вязкого перехода  $T_{кр}^{min} - T_{кр}^{max}$  (рис. 15.5, б); суженная область разброса KCV в определенном интервале температур (рис. 15.5, в).

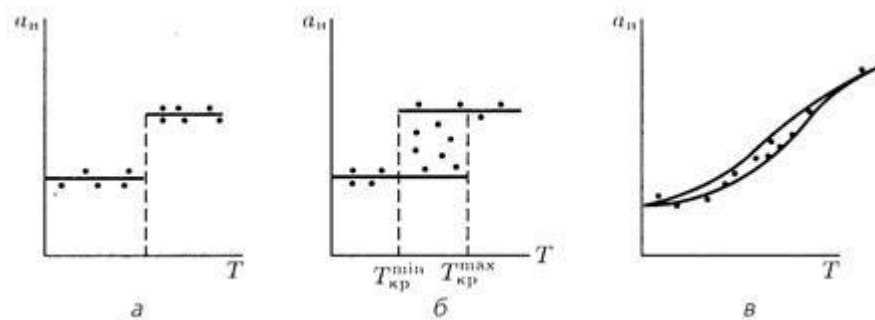


Рис.15.5

Хрупко-вязкий переход проявляется в изменении характера излома от хрупкого к вязкому, который также происходит в определенном температурном интервале. В качестве критерия для определения  $T_{кр}$  обычно используются сразу два показателя: уровень ударной вязкости KCV в зависимости от предела текучести материала и процент вязкой фазы в изломе. Например, для материалов энергетического оборудования  $T_{кр}$  обусловлена определенным уровнем KCV для конкретного  $\sigma_T$  материала и не менее 50% вязкой фазы в изломе при температуре  $T_{кр} + 30$  °С. Следует отметить, что критическая температура хрупко-вязкого перехода – одна из основных комплексных механических характеристик малоуглеродистых и низколегированных сталей. Следует добиваться использования материала в температурной области, где проявляется вязкий характер его разрушения.

#### Расчет динамического коэффициента при ударной нагрузке

Предположим, что очень жесткое тело  $A$  весом  $Q$ , деформацией которого можно пренебречь, падая с некоторой высоты  $H$ , ударяет по другому телу  $B$ , опирающемуся на упругую систему  $C$  (рис.15.6). В частном случае это может быть падение груза на конец призматического стержня, другой конец которого закреплен (продольный удар), падение груза на балку, лежащую на опорах (изгибающий удар), и т. п.

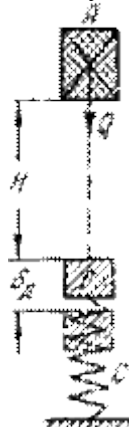


Рис.15.6

В течение очень короткого промежутка времени упругая система  $C$  испытывает некоторую деформацию. Обозначим через  $\delta_d$  перемещение тела  $B$  (местной деформацией которого пренебрежем) в направлении удара. В упомянутых частных случаях при продольном ударе за перемещение  $\delta_d$  соответственно нужно считать продольную деформацию стержня  $\Delta l_d$ , при изгибающем ударе — прогиб балки  $f_d$  в ударяемом сечении и т. п. В результате удара в системе  $C$  возникнут напряжения  $p_d$  ( $\sigma_d$  или  $\tau_d$  — в зависимости от вида деформации).

Полагая, что кинетическая энергия  $T$  ударяющего тела полностью переходит в потенциальную энергию  $U_d$  деформации упругой системы, можем написать:

$$T = U_d.$$

Так как к моменту окончания деформации ударяющее тело пройдет путь  $H + \delta_d$ , то его запас энергии будет измеряться произведенной им работой  $A_d$  и будет равен:

$$T = A_d = Q(H + \delta_d).$$

Вычислим теперь  $U_d$ . При статической деформации потенциальная энергия  $U_c$  численно равна половине произведения действующей силы на соответствующую деформацию:

$$U_c = \frac{1}{2} Q \delta_c.$$

Статическая деформация  $\delta_c$  в ударяемом сечении может быть вычислена по закону Гука, который в общем виде можно записать так:

$$c = \frac{Q}{\delta_c} \text{ или } Q = \delta_c c$$

Здесь  $c$  — некоторый коэффициент пропорциональности (называемый иногда жесткостью системы); он зависит от свойств материала, формы и размеров тела, вида деформации и положения ударяемого сечения. Так, при простом растяжении или сжатии  $\delta_c = \Delta l_c$ , и  $c = \frac{EF}{l}$ ; при изгибе балки, шарнирно закрепленной по концам,

сосредоточенной силой  $Q$  посередине пролета  $\delta_c = f_{c_{\max}} = \frac{Ql^3}{48Ej}$  и  $c = \frac{48Ej}{l^3}$ ; и т.д.

Таким образом, выражение для энергии может быть переписано так:

$$U_c = \frac{1}{2} Q \delta_c = \frac{c}{2} \delta_c^2.$$

В основу этой формулы положены две предпосылки: а) справедливость закона Гука и б) постепенный — от нуля до окончательного значения — рост силы  $Q$ , напряжений  $P_c$  и пропорциональных им деформаций  $\delta_c$ .

Опыты с определением модуля упругости по наблюдениям над упругими колебаниями стержней показывают, что и при динамическом действии нагрузок закон Гука остается в силе, и модуль упругости сохраняет свою величину. Что касается характера нарастания напряжений и деформаций, то и при ударе деформация происходит, хотя и быстро, но не мгновенно;  $\delta_d$  постепенно растет в течение очень короткого промежутка времени от нуля до окончательного значения; параллельно росту деформаций возрастают и напряжения  $P_d$ .

Реакция системы  $C$  на действие упавшего груза  $Q$  (назовем ее  $P_d$ ) является следствием развития деформации  $\delta_d$ ; она растет параллельно  $\delta_d$  от нуля до окончательной, максимальной величины и, если напряжения  $P_d$  не превосходят предела пропорциональности материала, связана с ней законом Гука:

$$\delta_d = \frac{P_d}{c},$$

где  $c$  — упомянутый выше коэффициент пропорциональности, сохраняющий свое значение и при ударе.

Таким образом, обе предпосылки для правильности формулы (15.6) принимаются и при ударе. Поэтому можно считать, что вид формулы для  $U_d$  при ударе будет тот же, что и при статическом нагружении системы  $C$  силой инерции  $P_d$ , т. е.



$$U_d = \frac{1}{2} P_d \delta_d = \frac{c}{2} \delta_d^2 = \frac{Q}{2\delta_c} \delta_d^2.$$

(Здесь учтено, что по предыдущему  $c = \frac{Q}{\delta_c}$ ) Подставляя значения  $T$  и  $U_d$  в уравнение (15.4), получаем:

$$Q(H + \delta_d) = \frac{Q}{2\delta_c} \delta_d^2$$

или

$$\delta_d^2 - 2\delta_c \delta_d - 2H\delta_c = 0.$$

Отсюда

$$\delta_d = \delta_c \pm \sqrt{\delta_c^2 + 2H\delta_c}$$

или, удерживая перед радикалом для определения наибольшей величины деформации системы в направлении удара знак плюс, получаем:

$$\delta_d = \delta_c \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}\right) = K_d \delta_c.$$

Так как напряжения и усилия по закону Гука пропорциональны деформации, то

$$P_d = P_c \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}\right) = K_d P_c.$$

$$P_d = Q \left(1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}\right) = K_d Q.$$

Из этих формул видно, что величина динамических деформаций, напряжений и усилий зависит от величины статической деформации, т.е. от жесткости и продольных размеров ударяемого тела; ниже это дополнительно будет показано на отдельных примерах. Величина

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}}$$

в данном случае представляет собой *динамический коэффициент*.

В случае внезапного приложения груза, когда  $H=0$  получаем  $K_d = 2$ .

Формула получения  $K_d$  используется в случаях, когда масса упругого тела, испытывающего удар, мала и ею в расчете пренебрегают.

При необходимости учета массы тела, испытывающего удар, формула для расчета динамического коэффициента принимает вид

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2P}{\delta_c \left(1 + \frac{m_{np}}{m_\Gamma}\right)}}$$

где  $m_\Gamma$  – масса падающего груза,  $m_{np}$  – приведенная масса тела, испытывающего удар, причем

$$m_{np} = \alpha m,$$

где  $m$  – истинная (распределенная) масса тела;  $\alpha$  – коэффициент приведения распределенной массы к точечной. Он определяется путем сравнения кинетической энергии тела с распределенной и с точечной массами. Коэффициент  $\alpha$  зависит от вида удара (продольный, изгибный и т.п.) и от характера закрепления концов стержня.

Так, для консольной балки, испытывающей продольный удар (рис. 15.7, а),  $\alpha = 0,33$ ; для шарнирно опертой балки на двух опорах, испытывающей удар посередине

(рис. 15.7, б),  $\alpha = \frac{17}{35} \approx 0,5$ ; для консольной балки, испытывающей изгибный удар (рис. 15.8, в),  $\alpha = \frac{33}{140} \approx 0,235$  и т.д.

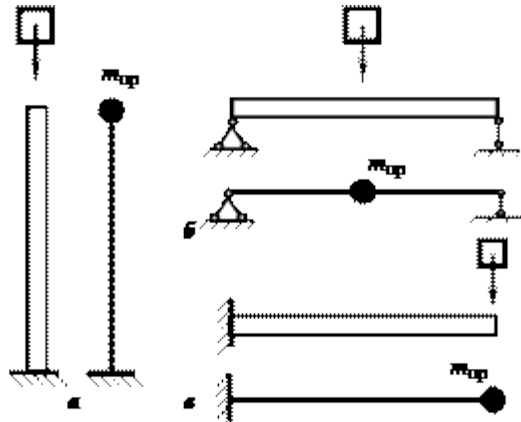


Рис.15.7

Заменяя в этой формуле  $H$  на  $v^2/2g$ , где  $v$  — скорость ударяющего тела в начальный момент удара, получаем:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{v^2}{\delta_c g}}.$$

Кроме того, так как

$$\frac{2H}{\delta_c} = \frac{QH}{\frac{1}{2}Q\delta_c} = \frac{T_0}{U_c},$$

где  $T_0 = QH$  — энергия ударяющего тела к моменту начала удара, то выражение для динамического коэффициента может быть представлено еще и в таком виде:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{T_0}{U_c}}.$$

Если мы в формулах положим  $H=0$ , т.е. просто сразу приложим груз  $Q$ , то  $\delta_d = 2\delta_c$  и  $p_d = 2p_c$ ; при внезапном приложении силы  $Q$  деформации и напряжения вдвое больше, чем при статическом действии той же силы.

Наоборот, если высота падения груза  $H$  (или скорость  $v$ ) велика по сравнению с деформацией  $\delta_c$ , то в подкоренном выражении формул можно пренебречь единицей по сравнению с величиной отношения  $\frac{2H}{\delta_c}$ . Тогда для  $\delta_d$  и  $p_d$  получаются следующие выражения:

$$\delta_d = \delta_c \left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}\right) \text{ и } p_d = p_c \left(1 + \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}\right).$$

При очень большой величине отношения  $\frac{2H}{\delta_c}$  можно пренебречь и единицей, стоящей перед корнем, т.е. написать:

$$\delta_d = \delta_c \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} \text{ и } p_d = p_c \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}}$$

Динамический коэффициент в этом случае определяется по формуле

$$K_d = \sqrt{\frac{2H}{\delta_c}} = \sqrt{\frac{T_0}{U_c}}.$$

Необходимо отметить, что в то время как пренебрежение единицей  $2H$  в подкоренном выражении допустимо уже при  $\frac{2H}{\delta_c} \geq 10$  (неточность приближенных формул будет не больше 5%). Пренебрежение единицей, стоящей перед корнем, допустимо лишь при очень большой величине отношения  $\frac{2H}{\delta_c}$ .

Так, например, для того чтобы приближенные формулы (15.16) и (15.17) давали погрешность не более 10%, отношение  $\frac{2H}{\delta_c}$  должно быть больше 110.

Формулы  $\delta_d = K_d \delta_c$  и  $P_d = K_d P_c$ , в которых  $K_d$  выражается через  $\frac{T_0}{U_c}$ , могут быть использованы также для решения задачи о встречном ударе тел, двигающихся с некоторой скоростью, при определении напряжений в цилиндре двигателя внутреннего сгорания, вызванных резким повышением давления газа при вспышке горючей смеси и др. На этом основании их можно считать общими формулами для расчета на удар.

Обобщая сказанное выше, можем наметить следующий общий прием решения задач на определение напряжений при ударе. Применяя закон сохранения энергии, надо:

- 1) вычислить кинетическую энергию ударяющего тела  $T$ ;
- 2) вычислить потенциальную энергию  $U_d$  тел, воспринимающих удар, под нагрузкой их силами инерции при ударе; потенциальная энергия должна быть выражена через напряжение ( $\sigma_d, \tau_d$ ) в каком-либо сечении, через деформацию (удлинение, прогиб) или через силу инерции  $P_d$  ударяющего тела;

- 3) приравнять величины  $U_d$  и  $T$  и из полученного уравнения найти или непосредственно динамическое напряжение, или деформацию, а по ней, пользуясь законом Гука, напряжение или силу  $p_d$  и соответствующие ей динамические напряжения и деформации.

Описанный общий прием расчета на удар предполагает, что вся кинетическая энергия ударяющего тела целиком переходит в потенциальную энергию деформации упругой системы. Это предположение не точно. Кинетическая энергия падающего груза частично превращается в тепловую энергию и энергию неупругой деформации основания, на которое опирается система.

Вместе с тем при высоких скоростях удара деформация за время удара не успевает распространиться на весь объем ударяемого тела и в месте удара возникают значительные местные напряжения, иногда превосходящие предел текучести материала. Так, например, при ударе свинцовым молотком по стальной балке большая часть кинетической энергии превращается в энергию местных деформаций. Подобное же явление может иметь место даже и в том случае, когда скорость удара мала, но жесткость или масса ударяемой конструкции велика.

Указанный случай соответствует большим величинам дроби  $\frac{2H}{\delta_c}$ . Поэтому можно сказать, что описанный выше метод расчета применим, пока дробь  $\frac{2H}{\delta_c}$  не превышает определенной величины. Более точные исследования показывают, что ошибка не

превышает 10% если  $\frac{2H}{\delta_c} \leq 100$ . Так как эта дробь может быть представлена в виде

отношения  $\frac{T_0}{U_c}$ , то можно сказать, что изложенный метод применим, пока энергия удара

превышает не более чем в 100 раз потенциальную энергию деформации, соответствующую статической нагрузке конструкции весом ударяющего груза. Учет массы ударяемого тела при ударе позволяет несколько расширить пределы применимости этого метода в тех случаях, когда масса ударяемого тела велика.

Более точная теория удара излагается в курсах теории упругости.

### Оценка прочности при ударной нагрузке

Вид формул, полученных для динамического коэффициента, показывает, какие большие качественные различия ведет за собой количественное изменение периода действия силы на тело.

Рассмотрим некоторые случаи удара при простейших деформациях. При этом для нахождения коэффициента динамичности применим основные полученные формулы для динамического коэффициента.

Для определения  $\delta_d$ ,  $p_d$  и  $P_d$  используем зависимости:

$$\delta_d = K_d \delta_c, \quad p_d = K_d p_c \quad \text{и} \quad P_d = K_d Q.$$

В случае продольного растягивающего или сжимающего удара (рис.15.8)

$$\delta_c = \Delta l_c = \frac{Ql}{EF},$$

$$p_c = \sigma_c = \frac{Q}{F}.$$

$$U_c = \frac{Q^2 l}{2EF} = \frac{\sigma_c^2 l}{2E} = \frac{\Delta l_c^2 EF}{2l}.$$

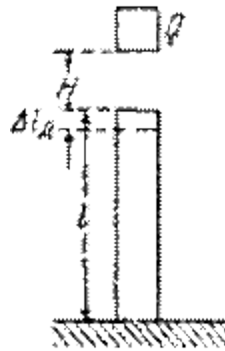


Рис.15.8

Для вычисления динамического коэффициента  $K_d$  может быть выбрано одно из следующих выражений:

$$K_d = 1 + \sqrt{1 + \frac{2H}{\delta_c}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 EF}{Q^2 l}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 E}{\sigma_c^2 Fl}} = 1 + \sqrt{1 + \frac{2T_0 l}{\Delta l_c^2 EF}}.$$

После этого без затруднений вычисляются  $\Delta l_d$ ,  $\sigma_d$  и  $P_d$ .

Приближенная формула для вычисления напряжений в данном частном случае получает такой вид:

$$K_d = \frac{1}{\sigma_c} \sqrt{\frac{2T_0 E}{Fl}} \quad \text{и} \quad \sigma_d = \sigma_c K_d = \sqrt{\frac{2T_0 E}{Fl}}.$$

Замечаем, что как при статической, так и при динамической нагрузке напряжение в сжатом стержне зависит от величины сжимающей силы и от площади поперечного сечения стержня.

Но при статическом действии груза  $Q$  передающаяся на стержень сила равна  $Q$  и не зависит от размеров и материала стержня, при ударе же величина силы  $P_d$ , вызывающей напряжения в стержне, зависит от ускорения, передающегося от ударяемого тела на ударяющее, т.е. от величины промежутка времени, в течение которого изменяется скорость ударяющего тела. В свою очередь этот промежуток времени зависит от величины динамической продольной деформации  $\Delta l_d$ , от податливости стержня. Чем эта величина больше, т. е. чем меньше модуль  $E$  и чем больше длина стержня  $l$ , тем больше продолжительность удара, меньше ускорение и меньше давление  $P_d$ .

Таким образом, при равномерном распределении напряжений, одинаковом во всех сечениях стержня, динамическое напряжение будет уменьшаться с увеличением площади поперечного сечения стержня и с увеличением его податливости (т. е. с увеличением длины и уменьшением модуля упругости  $E$ ); именно поэтому смягчают удар всякие рессоры и пружины, расположенные между ударяющимися деталями. Все это и отражают приведенные выше формулы. В частности, с известным приближением можно считать, что при продольном ударе величина напряжений зависит уже не от площади, а от объема стержня.

Вычислив величину динамического напряжения, мы можем теперь написать условие прочности в виде

$$\sigma_d \leq [\sigma_d]$$

где  $[\sigma_d]$  - допускаемая величина нормальных напряжений при ударе, равная для пластичного материала  $[\sigma_d] = \frac{\sigma_T}{k_d}$ .

Величину коэффициента запаса  $k_d$  можно было бы выбрать равной величине основного коэффициента запаса  $k_0$  при статическом действии нагрузок, так как динамичность нагрузки уже отражена. Однако, ввиду некоторой упрощенности изложенного метода расчета, этот коэффициент принимают несколько повышенным — до 2. Кроме того, обычно в этих случаях применяют материал более высокого качества (в отношении однородности и пластических свойств).

При изгибе величина статической деформации  $\delta_c$ , представляющей собой статический прогиб балки с  $f_c$  в месте удара, зависит от схемы нагружения и условий опирания балки.

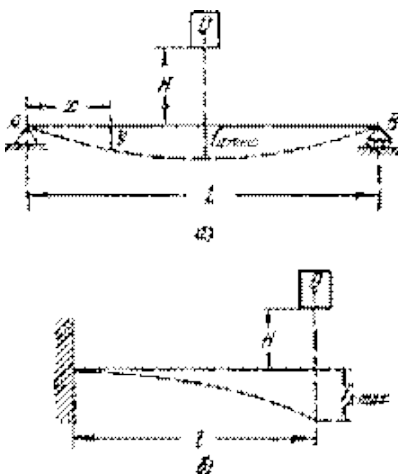


Рис.15.9

Так например, для балки пролетом  $l$ , шарнирно закрепленной по концам и испытывающей посредине пролета удар от падающего с высоты  $H$  груза  $Q$  (рис.15.9, а), получаем:

$$\delta_C = f_{C_{\max}} = \frac{Ql^3}{48Ej},$$

$$p_C = \sigma_{C_{\max}} = \frac{Ql}{4W},$$

$$U_C = \frac{Qf_{C_{\max}}}{2} = \frac{Q^2l^3}{96Ej};$$

для консоли, испытывающей удар от груза  $Q$ , падающего на свободный конец консоли (рис. 15.9, б):

$$\delta_C = f_{C_{\max}} = \frac{Ql^3}{3Ej},$$

$$p_C = \sigma_{C_{\max}} = \frac{Ql}{W},$$

$$U_C = \frac{Qf_{C_{\max}}}{2} = \frac{Q^2l^3}{6Ej}.$$

Подставляя в формулу для коэффициента динамичности  $K_D$  значения  $\delta_C = f_{C_{\max}}$  или  $U_C$ , находим  $K_D$ , а затем и величину динамических напряжений и деформаций. Так например, в случае балки на двух опорах при вычислении динамического напряжения  $\sigma_{D_{\max}}$  имеем такую формулу:

$$\sigma_{D_{\max}} = K_D \sigma_{C_{\max}} = \frac{Ql}{4W} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0Ej}{Q^2l^3}} \right].$$

Условие прочности в этом случае напишется:

$$\sigma_{D_{\max}} = \frac{Ql}{4W} \left[ 1 + \sqrt{1 + \frac{96T_0Ej}{Q^2l^3}} \right] \leq [\sigma_D] = \frac{\sigma_T}{k_D}.$$

Приближенные формулы для вычисления  $f_{D_{\max}}$  и  $\sigma_{D_{\max}}$  в случае удара по балке на двух опорах получают такой вид:

$$f_{D_{\max}} = K_D f_{C_{\max}} \sqrt{\frac{T_0}{U_C}} = \frac{Ql^3}{48Ej} \sqrt{\frac{96T_0Ej}{Q^2l^3}} = \sqrt{\frac{T_0l^3}{24Ej}},$$

$$\sigma_{D_{\max}} = K_D \sigma_{C_{\max}} = \frac{Ql}{4W} \sqrt{\frac{96T_0Ej}{Q^2l^3}} = \sqrt{\frac{6T_0Ej}{W^2l}}.$$

Аналогичные выражения для  $f_{D_{\max}}$  и  $\sigma_{D_{\max}}$  получаются и в случае удара по консоли. Имея в виду, что

$$j = i^2 F, \quad W = \frac{j}{z_{\max}}$$

и

$$\frac{j}{W^2} = \left( \frac{z_{\max}}{i} \right)^2 \frac{1}{F},$$

можем представить выражение для  $\sigma_{D_{\max}}$  еще и в таком виде:

$$\sigma_{D \max} = \frac{z_{\max}}{i} \sqrt{\frac{6T_0 E}{Fl}}.$$

Из последней приближенной формулы видно, что динамические напряжения при изгибе балки зависят от модуля упругости материала, объема балки, формы ее поперечного сечения (отношение  $\frac{z_{\max}}{i}$ ), а также от схемы нагружения и условий опирания балки (в данном случае в подкоренном выражении стоит  $6T_0$ ; для балок, иначе нагруженных и закрепленных, числовой коэффициент у  $T_0$  будет другим). Таким образом, в балке прямоугольного сечения высотой  $h$  и шириной  $b$ , поставленной на ребро или положенной плашмя, наибольшие напряжения при ударе будут одинаковы и равны (по приближенной формуле):

$$\sigma_{D \max} = \sqrt{\frac{18T_0 E}{Fl}},$$

так как в обоих случаях

$$\frac{z_{\max}}{i} = \frac{\frac{h}{2}}{\sqrt{\frac{bh^3}{12bn}}} = \frac{\frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{bh^3}{12bn}}} = \sqrt{3}.$$

Как известно, при одинаковой статической нагрузке наибольшие напряжения в балке, положенной плашмя, будут в отношении  $h/b$  больше, чем напряжения в балке, поставленной на ребро. Сказанное выше, разумеется, справедливо лишь до тех пор, пока явление удара происходит в пределах упругости.

Сопротивление балок ударным нагрузкам зависит и от момента сопротивления и от жесткости балки. Чем больше податливость, деформируемость балки, тем большую живую силу удара она может принять при одних и тех же допускаемых напряжениях. Наибольший прогиб балка дает в том случае, когда во всех ее сечениях наибольшие напряжения будут одинаковыми, т. е. если это будет балка разного сопротивления; такие балки при одном и том же допускаемом напряжении дают большие прогибы, чем балки постоянного сечения, и значит, могут поглощать большую энергию удара. Поэтому рессоры обычно и делают в форме балок равного сопротивления.

Динамические напряжения не должны превышать предел пропорциональности. Если все же динамические напряжения оказались больше предела пропорциональности, необходимо предусмотреть конструктивные меры по увеличению статического перемещения, например, сделать опорные крепления балки (рамы) податливыми, поставив специальные прокладки. Увеличение  $\sigma_c$  приведет к уменьшению динамического коэффициента (Попытки уменьшить динамические напряжения, увеличив размер сечения, не проносят нужного эффекта, т.к. при увеличении размера сечения увеличивается жесткость, статический прогиб уменьшается, а динамический коэффициент увеличивается).