Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)
Кафедра “Автотранспортная и техносферная безопасность”

# УЧЕБНОЕ ПОСОБИЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ОСНОВЫ АТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ И ПРОЕКТИРОВАНИЯ»

Составитель:
П.С. Сабуров

Владимир 2014

# 1 ВВЕДЕНИЕ. ОСНОВНЫЕ ТЕРМИНЫ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

## 1.1 Основные понятия

Системы управления современными химико-технологическими процессами характеризуются большим количеством технологических параметров, число которых может достигать нескольких тысяч [1]. Для поддержания требуемого режима работы, а в конечном итоге – качества выпускаемой продукции, все эти величины необходимо поддерживать постоянными или изменять по определенному закону.

Физические величины, определяющие ход технологического процесса, называются параметрами технологического процесса. Например, параметрами технологического процесса могут быть: температура, давление, расход, напряжение и т.д.

Параметр технологического процесса, который необходимо поддерживать постоянным или изменять по определенному закону, называется регулируемой величиной или регулируемым параметром.

Значение регулируемой величины в рассматриваемый момент времени называется мгновенным значением.

Значение регулируемой величины, полученное в рассматриваемый момент времени на основании данных некоторого измерительного прибора называется ее измеренным значением.

Пример 1. Схема ручного регулирования температуры сушильного шкафа.

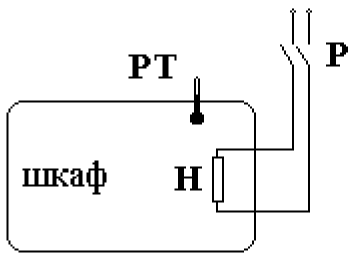



Рис.1.1. Схема ручного регулирования температуры сушильного шкафа

Требуется вручную поддерживать температуру в сушильном шкафу на уровне $T_{зад.}$

Человек-оператор в зависимости от показаний ртутного термометра РТ включает или выключает нагревательный элемент Н с помощью рубильника Р.

На основе данного примера можно ввести следующие определения.

Объект управления (объект регулирования, ОУ) – устройство, требуемый режим работы которого должен поддерживаться извне специально организованными управляющими воздействиями.

Управление – формирование управляющих воздействий, обеспечивающих требуемый режим работы ОУ.

Регулирование – частный вид управления, когда задачей является обеспечение постоянства какой-либо выходной величины ОУ.

Автоматическое управление – управление, осуществляемое без непосредственного участия человека.

Входное воздействие (X) – воздействие, подаваемое на вход системы или устройства.

Выходное воздействие (Y) – воздействие, выдаваемое на выходе системы или устройства.

Внешнее воздействие – воздействие внешней среды на систему.

Структурная схема системы регулирования к примеру 1 изображена на рис. 1.2.

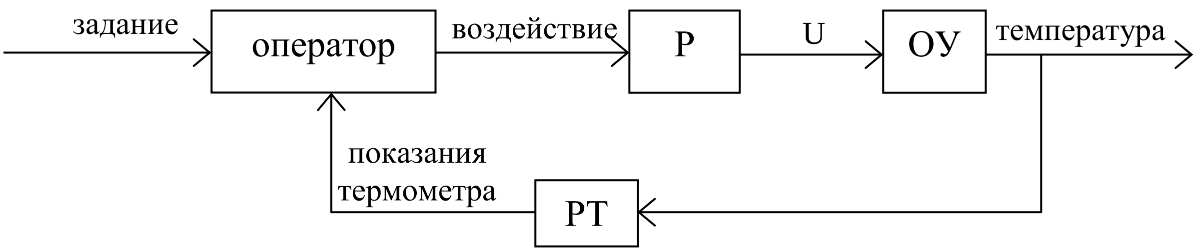



Рис.1.2. Структурная схема системы регулирования

Пример 2. Схема автоматического регулирования температуры сушильного шкафа.

В схеме используется ртутный термометр с контактами РТК. При повышении температуры до заданной контакты замыкаются столбиком ртути, катушка релейного элемента РЭ возбуждается и цепь нагревателя Н размыкается контактом РЭ. При понижении температуры контакты термометра размыкаются, реле обесточивается, возобновляя подачу энергии на объект как показано на рисунке 1.3.

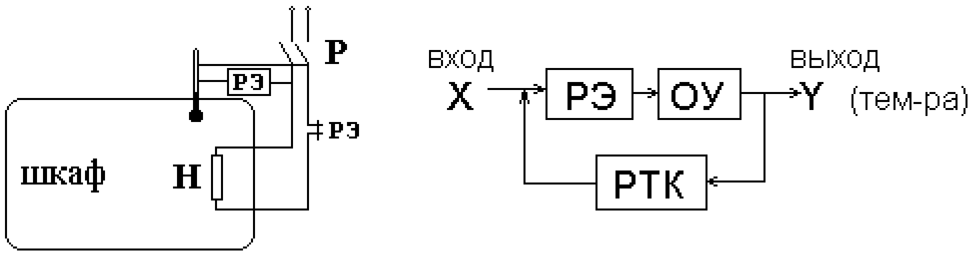



Рис.1.3. Схема автоматического регулирования температуры сушильного шкафа

Пример 3. Схема АСР температуры с измерительным мостом.

При температуре объекта, равной заданной, измерительный мост М как изображено на рисунке 1.4, уравновешен, на вход электронного усилителя ЭУ сигнал не поступает и система находится в равновесии. При отклонении температуры изменяется сопротивление терморезистора $R_T$ и равновесие моста нарушается. На входе ЭУ появляется напряжение, фаза которого зависит от знака отклонения температуры от заданной. Напряжение, усиленное в ЭУ, поступает на двигатель Д, который перемещает движок автотрансформатора АТ в соответствующую сторону. При достижении температуры, равной заданной, мост сбалансируется и двигатель отключится.

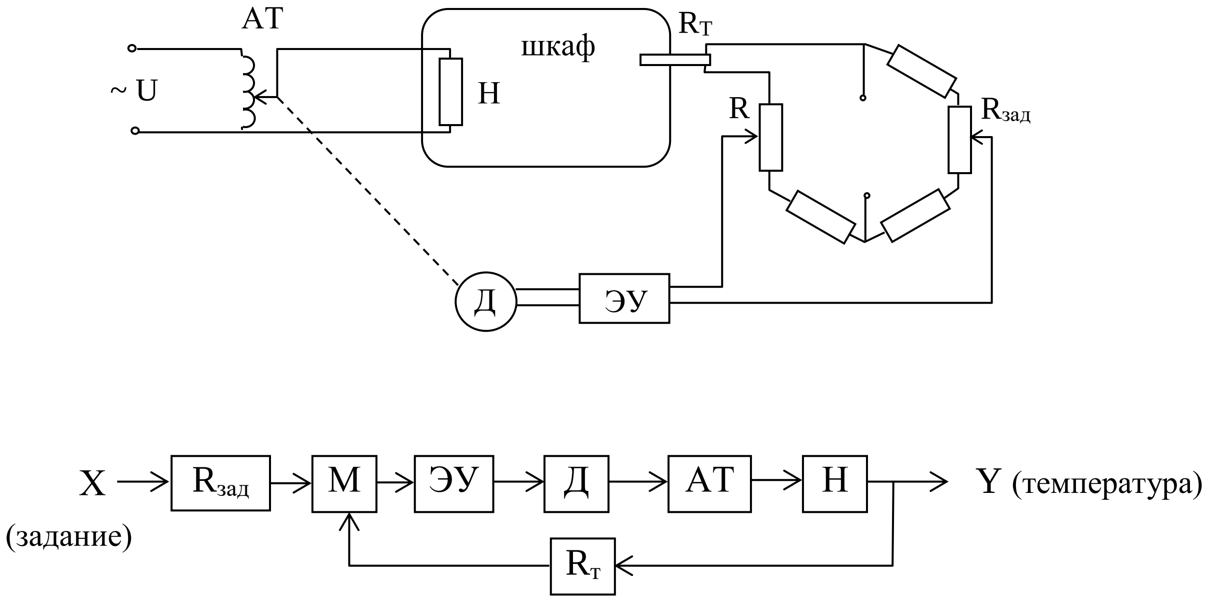



Рис.1.4. Схема АСР температуры с измерительным мостом

Величина заданного значения температуры устанавливается с помощью резистора $R_{зад.}$

Исходя из описанных примеров, можно определить типовую структурную схему одноконтурной АСР, показанную на рисунке 1.5. Принятые обозначения, используемые в структурной схеме:

x - задающее воздействие (задание);

e = x - y - ошибка регулирования;

u - управляющее воздействие;

f - возмущающее воздействие (возмущение).

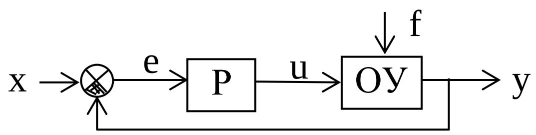



Рис.1.5. Типовая структурная схема одноконтурной АСР

Введем следующие определения.

<u>Задающее воздействие</u> (то же, что входное воздействие X) - воздействие на систему, определяющее требуемый закон изменения регулируемой величины.

<u>Управляющее воздействие</u> (u) - воздействие управляющего устройства на объект управления.

<u>Управляющее устройство</u> (УУ) - устройство, осуществляющее воздействие на объект управления с целью обеспечения требуемого режима работы.

<u>Возмущающее воздействие</u> (f) - воздействие, стремящееся нарушить требуемую функциональную связь между задающим воздействием и регулируемой величиной.

<u>Ошибка управления</u> (e = x - y) - разность между предписанным (x) и действительным (y) значениями регулируемой величины.

<u>Регулятор</u> (Р) - комплекс устройств, присоединяемых к регулируемому объекту и обеспечивающих автоматическое поддержание заданного значения его регулируемой величины или автоматическое изменение ее по определенному закону.

<u>Автоматическая система регулирования</u> (АСР) - автоматическая система с замкнутой цепью воздействия, в котором управление (u) вырабатывается в результате сравнения истинного значения (y) с заданным значением (x).

Дополнительная связь в структурной схеме АСР, направленная от выхода к входу рассматриваемого участка цепи воздействий, называется обратной связью (ОС). Обратная связь может быть отрицательной или положительной.

## 1.2 Принципы регулирования

Первый промышленный регулятор [3], был изобретен в 1765 г. И. Ползуновым для созданной им паровой машины. Принципиальная схема регулятора приведена на рисунке 1.6.

Задачей регулирования является поддержание в паровом котле постоянного уровня. Регулятор представляет собой поплавок 1, связанный системой рычагов с регулирующей заслонкой 2. При увеличении уровня поплавок поднимается вверх, в результате чего заслонка опускается, перекрывая трубопровод и уменьшая подачу воды в котел. При уменьшении уровня поплавок опускается, что приводит к увеличению подачи воды и, следовательно, к повышению уровня.

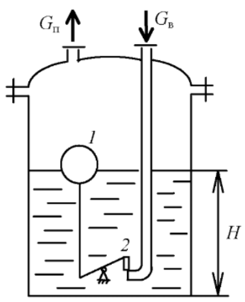



Рис.1.6. Регулятор Ползунова

Практически одновременно с И. Ползуновым в 1784 г. Джеймс Уатт сконструировал центробежный регулятор числа оборотов вала паровой машины (рис. 1.7.)

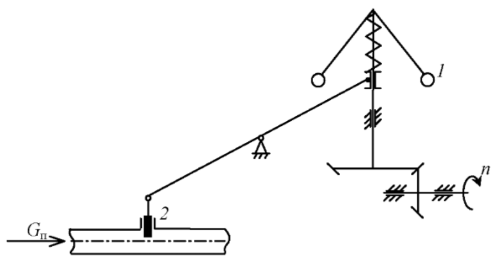



Рис.1.7. Регулятор Уатта

При изменении числа оборотов вала грузы *1* под действием центробежной силы изменяют свое положение, что приводит к перемещению регулирующего органа *2* и изменению подачи пара. Это в свою очередь вызывает изменение числа оборотов вала, но в направлении, противоположном исходному.

Сравнительный анализ рассмотренных регуляторов показывает, что оба они построены по единому принципу, который наглядно проявляется на структурной схеме, представленной на рисунке 1.8.

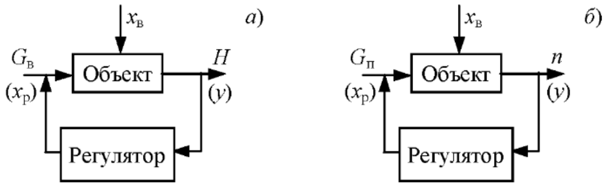



Рис.1.8. Структурные схемы систем регулирования: *а* - Ползунова; *б* - Уатта

В рассматриваемых примерах основными элементами системы автоматического регулирования являются: объект - паровой котел и паровая машина; регулирующее устройство - поплавок и центробежная муфта с регулирующими заслонками, соответственно, в регуляторах Ползунова и Уатта.

Выходные координаты, они же и регулируемые переменные - уровень *H* и число оборотов n; регулирующие переменные - подача воды в паровой котел - $G_в$ и расход пара в паровую машину – $G_п$ возмущающие воздействия - давление пара в котле, расход топлива, его теплотворная способность в первом случае и во втором - нагрузка на валу паровой машины, давление пара в трубопроводе.

Принцип, по которому построены регуляторы Ползунова и Уатта, состоит в том, что регулятор изменяет регулирующее воздействие при отклонении регулируемой переменной от заданного значения независимо от причин, вызвавших это отклонение. Таким образом, в зависимости от значения выходного сигнала объекта регулятор изменяет его входной сигнал. Для реализации алгоритма регулирования в конструкцию системы вводится связь, получившая название обратной связи, потому что по ней происходит передача сигнала с выхода объекта на его вход по направлению, обратному направлению передачи основного воздействия на объект. Объект и регулятор образуют замкнутую систему, называемую автоматической системой регулирования (АСР). Если сигнал обратной связи складывается с основным сигналом, то связь называется *положительной,* если вычитается - *отрицательной.* В автоматических системах управления связь всегда отрицательна.

Схемы с обратной связью осуществляют *управление по отклонению* (рис. 1.9) показателя процесса - выходной координаты y(t) от заданного значения $y_{зад}$; $\Delta y = y(t) - y_{зад}$ - называется *отклонением* или *ошибкой* управления.

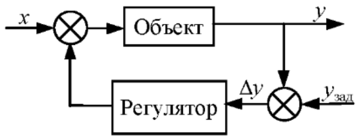



Рис.1.9. Структурная схема регулирования по отклонению

Рассмотренная система управления с обратной связью относится к классу систем *автоматического регулирования по отклонению*.

Таким образом, автоматической системой регулирования по отклонению называют систему, в которой измеряется отклонение регулируемой величины от заданного значения и в зависимости от измеренного отклонения подается такое воздействие на регулирующий орган, которое уменьшает величину отклонения так, что $\Delta y \to 0$ при $t \to \infty$.

Кроме регулирования по отклонению возможен другой способ регулирования - это регулирование по возмущению или компенсация возмущений. В этом случае регулирующее воздействие вырабатывается регулятором в зависимости от величины возмущения. Системы регулирования по возмущению являются разомкнутыми системами, так как в них отсутствует обратная связь. Идея этого способа заключается в том, что, если мы сможем компенсировать все возмущения в системе, то регулируемая величина не будет отклоняться от заданного значения. Следует заметить, что компенсация достигается только по измеряемым возмущениям.

Рассматриваемый принцип регулирования впервые был предложен в 1830 г. французским инженером Ж. Понселе при разработке теории центробежных регуляторов хода машин по нагрузке на валу машины, являющейся одним из основных возмущений в объекте, но реализовать свое предложение на практике ему не удалось, так как динамические свойства машины не допускали непосредственного использования принципа компенсации.

В 1940 г. был предложен принцип инвариантности - достижение независимости управляемой координаты от возмущений, практическая реализация которого была получена только в 50-е годы.

Недостаток систем, построенных по принципу компенсации возмущений, очевиден. Компенсировать все возможные возмущения в объекте удается крайне редко, а наличие таких возмущений, как колебание состояния атмосферы, старение катализатора, отложение солей в аппарате, т.е. произвольное изменение свойств объекта, вообще не подлежит компенсации. Например, опасность использования принципа Понселе при регулировании уровня жидкости в емкости, когда приток жидкости соотносится с ее расходом, заключается в том, что вследствие изменения расходных характеристик вентилей на притоке и расходе, испарения жидкости, ее дренажа и т. п., емкость может переполниться, либо опустеть.

Регулирование по отклонению лишено этого недостатка, здесь компенсация отклонения регулируемой координаты от заданной происходит независимо от того, какими причинами вызвано это отклонение, но выполнить одновременно условия точности и быстродействия трудно. Часто повышение точности и быстродействия системы приводит к ее неработоспособности.

Наиболее эффективными системами регулирования являются комбинированные АСР, сочетающие оба рассматриваемых принципа. В этих системах наиболее сильные возмущения компенсируются специальным регулятором, а контур регулирования по обратной связи устраняет отклонения регулируемой координаты, вызванные другими возмущениями.

Таким образом, в основе построения системы автоматического регулирования лежат общие фундаментальные принципы регулирования, определяющие, каким образом осуществляется поддержание регулируемой величины на заданном уровне в соответствии с причинами, вызывающими ее отклонение от этого уровня. В настоящее время известно и используют два фундаментальных принципа регулирования: *принцип регулирования по отклонению* и *принцип регулирования по возмущению.*

## 1.3 Классификация систем автоматического управления

Все системы автоматического управления и регулирования делятся по различным признакам на следующие основные классы [3].

1. По основным видам уравнений динамики процессов управления:

а) линейные системы;

б) нелинейные системы.

2. В зависимости от коэффициентов уравнений и вида уравнений как линейные, так и нелинейные системы подразделяются на:

а) системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами;

б) системы, описываемые обыкновенными дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами;

в) системы, описываемые уравнениями в частных производных;

г) системы с запаздыванием, описываемые уравнениями с запаздывающим аргументом.

3. По характеру представления сигналов различают:

а) непрерывные системы;

б) дискретные системы, среди которых выделяют импульсные, релейные, цифровые.

4. По характеру процессов управления:

а) детерминированные системы - системы с определенными переменными и процессами;

б) стохастические системы - системы со случайными переменными и процессами.

5. По характеру функционирования.

В зависимости от того, по какому закону изменяется заданное значение регулируемой величины, системы автоматического управления подразделяются на:

а) системы стабилизации, поддерживающие постоянство регулируемой величины, т.е. $y_{зад}(t) = const$;

б) системы программного регулирования, в которых заданное значение регулируемой величины изменяется по определенной заранее временной программе;

в) следящие системы, в которых заданное значение регулируемой величины изменяется в соответствии с состоянием некоторого заданного вектора переменных во времени;

г) системы оптимального управления, в которых показатель эффективности зависит не только от текущих значений координат, как в экстремальном регулировании, но также от характера их изменения в прошлом, настоящем и будущем, и выражается некоторым функционалом. Нахождение оптимального управления предполагает решение достаточно сложной математической задачи соответствующими методами, кроме того органической составной частью системы является компьютер;

д) адаптивные системы, в которых автоматически изменяются значения $y_{\text{зад}}$, собственные параметры или структура при непредвиденных изменениях внешних условий на основании анализа состояния или поведения системы так, чтобы сохранялось заданное качество ее работы. Системы с изменением заданного значения регулируемой величины называют экстремальными, с изменением параметров - самонастраивающимися, с изменением структуры - самоорганизующимися.

6. По количеству контуров:

а) одноконтурные - содержащие один контур;

б) многоконтурные - содержащие несколько контуров.

7. По числу регулируемых величин:

а) одномерные - системы с 1 регулируемой величиной;

б) многомерные - системы с несколькими регулируемыми величинами.

Многомерные АСР в свою очередь подразделяются на системы:

а) несвязанного регулирования, в которых регуляторы непосредственно не связаны и могут взаимодействовать только через общий для них объект управления;

б) связанного регулирования, в которых регуляторы различных параметров одного и того же технологического процесса связаны между собой вне объекта регулирования.

8. По функциональному назначению:

а) АСР температуры;

б) давления;

в) расхода;

г) уровня;

д) напряжения и т.д.

7. По виду используемой для регулирования энергии:

а) пневматические;

б) гидравлические;

в) электрические;

г) механические и др.

8. По принципу регулирования:

а) по отклонению;

б) по возмущению;

в) комбинированные - сочетают в себе особенности предыдущих АСР.

### 1.4 Классификация элементов автоматических систем

1. По функциональному назначению:

- измерительные,
- усилительно-преобразовательные,
- исполнительные,
- корректирующие.

2. По виду энергии, используемой для работы:

- электрические,
- гидравлические,
- пневматические,
- механические,
- комбинированные.

3. По наличию или отсутствию вспомогательного источника энергии:

- активные (с источником энергии),
- пассивные (без источника).

4. По характеру математических соотношений:

- линейные
- нелинейные.

5. По поведению в статическом режиме:

- статические, у которых имеется однозначная зависимость между входным и выходным воздействиями (состояние статики). Примером является любой тепловой объект.

- астатические - у которых эта зависимость отсутствует. Пример: Зависимость угла поворота ротора электродвигателя от приложенного напряжения. При подаче напряжения угол поворота будет постоянно возрастать, поэтому однозначной зависимости у него нет.

# 2 ХАРАКТЕРИСТИКИ И МОДЕЛИ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ

## 2.1 Основные модели

Работу системы регулирования можно описать словесно [1]. Так, в п. 1.1 описана система регулирования температуры сушильного шкафа. Словесное описание помогает понять принцип действия системы, ее назначение, особенности функционирования и т.д. Однако, что самое главное, оно не дает количественных оценок качества регулирования, поэтому не пригодно для изучения характеристик систем и построения систем автоматизированного управления. Вместо него в ТАУ используются более точные математические методы описания свойств систем:

- статические характеристики,
- динамические характеристики,
- дифференциальные уравнения,
- передаточные функции,
- частотные характеристики.

В любой из этих моделей система может быть представлена в виде звена, имеющего входные воздействия *X*, возмущения *F* и выходные воздействия *Y*.

Под влиянием этих воздействий выходная величина может изменяться. При этом при поступлении на вход системы нового задания она должна обеспечить с заданной степенью точности новое значение регулируемой величины в установившемся режиме.

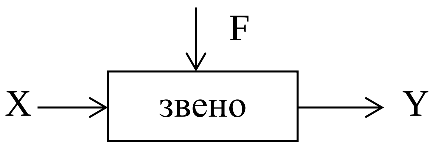


Рис.2.1. Типовое звено

<u>Установившийся режим</u> - это режим, при котором расхождение между истинным значением регулируемой величины и ее заданным значением будет постоянным во времени.

## 2.2 Статические характеристики

<u>Статической характеристикой</u> элемента называется зависимость установившихся значений выходной величины от значения величины на входе системы, т.е. $y_{уст} = \varphi(x)$.

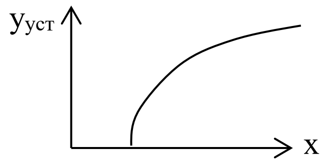



Рис.2.2. Статическая характеристика

Статическую характеристику (рис.2.2) часто изображают графически в виде кривой $y(x)$.

Статическим называется элемент, у которого при постоянном входном воздействии с течением времени устанавливается постоянная выходная величина. Например, при подаче на вход нагревателя различных значений напряжения он будет нагреваться до соответствующих этим напряжениям значений температуры.

Астатическим называется элемент, у которого при постоянном входном воздействии сигнал на выходе непрерывно растет с постоянной скоростью, ускорением и т.д.

Линейным статическим элементом называется безинерционный элемент, обладающий линейной статической характеристикой:

$$y_{уст} = K*x + a_0.$$

Как видно, статическая характеристика элемента в данном случае имеет вид прямой с коэффициентом наклона К.

Линейные статические характеристики, в отличие от нелинейных, более удобны для изучения благодаря своей простоте. Если модель объекта нелинейна, то обычно ее преобразуют к линейному виду путем линеаризации.

САУ называется статической, если при постоянном входном воздействии ошибка управления $e$ стремится к постоянному значению, зависящему от величины воздействия.

САУ называется астатической, если при постоянном входном воздействии ошибка управления стремится к нулю вне зависимости от величины воздействия.

## 2.3 Динамические характеристики

Переход системы от одного установившегося режима к другому при каких-либо входных воздействиях называется переходным процессом. Переходные процессы могут изображаться графически в виде кривой $y$(t).

Например, процесс нагрева сушильного шкафа до установившегося значения может иметь вид, представленный на рисунке 2.3.

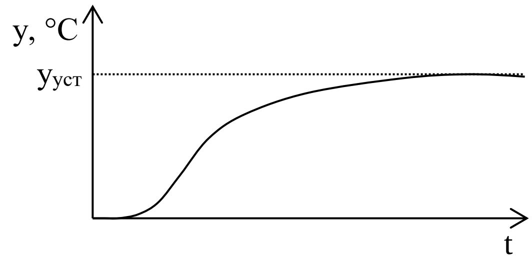
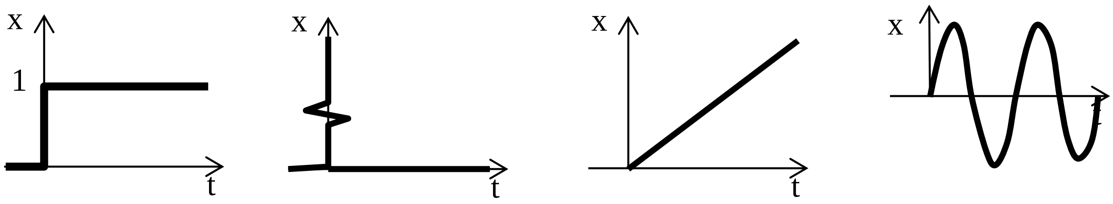


Рис.2.3. Динамические характеристики

То есть, переходный процесс характеризует динамические свойства системы, ее поведение.

Поскольку входные воздействия могут изменяться во времени, то и переходные характеристики будут каждый раз разные. Для простоты анализа систем входные воздействия приводят к одному из типовых видов (рис.2.4).



а) единичное ступенчатое

б) δ-функция (дельта-функция, импульс)

в) линейное

г) синусоидальное (гармоническое)

Рис.2.4. Типовые входные воздействия

В зависимости от вида входного воздействия функция $y(t)$ может иметь разное обозначение:

Переходной характеристикой $h(t)$ называется реакция объекта на единичное ступенчатое воздействие при нулевых начальных условиях, т.е. при $x(0) = 0$ и $y(0) = 0$.

Импульсной характеристикой $\omega(t)$ называется реакция объекта на $\delta$-функцию при нулевых начальных условиях.

При подаче на вход объекта синусоидального сигнала на выходе, как правило, в установившемся режиме получается также синусоидальный сигнал, но с другой амплитудой и фазой: $y = A_{вых}*sin(\omega*t + \varphi)$, где $A_{вых}$ - амплитуда, $\omega$ - частота сигнала, $\varphi$ - фаза.

Частотной характеристикой (ЧХ, АФХ и др.) называется зависимость амплитуды и фазы выходного сигнала системы в установившемся режиме при приложении на входе гармонического воздействия.

## 2.4 Дифференциальные уравнения. Линеаризация

Известно, что любое движение, процессы передачи, обмена, преобразования энергии и вещества математически можно описать в виде дифференциальных уравнений (ДУ). Любые процессы в АСР также принято описывать дифференциальными уравнениями, которые определяют сущность происходящих в системе процессов независимо от ее конструкции и т.д. Решив ДУ, можно найти характер изменения регулируемой переменной в переходных и установившихся режимах при различных воздействиях на систему.

Для упрощения задачи нахождения ДУ, описывающего работу АСР в целом, систему разбивают на ее отдельные элементы, переходные процессы в которых описываются достаточно простыми ДУ. Так как ДУ описывают работу системы независимо от физической сущности протекающих в ней процессов, то при разбивке системы нет необходимости учитывать их физическую целостность. Для каждого элемента структурной схемы необходимо составить ДУ, определяющее зависимость изменения выходной величины от входной.

Так как выходная величина предыдущего элемента является входной для последующего, то, определив ДУ отдельных элементов, можно найти ДУ системы.

Однако, такой метод применим только в частных случаях. Дело в том, что в большинстве случаев в реальных элементах системы связь между входной и выходной величинами является нелинейной и часто задается в графической форме. Поэтому, даже если ДУ системы и будет получено, оно будет нелинейным. А аналитическое решение нелинейных ДУ возможно далеко не всегда.

Для решения этой проблемы учитывают, что в процессе регулирования отклонения всех изменяющихся величин от их установившихся значений малы, и поэтому возможна замена нелинейных ДУ приближенными линейными ДУ, то есть возможна линеаризация дифференциальных уравнений.

Рассмотрим сущность процесса линеаризации на примере сушильного шкафа. Зависимость температуры объекта от подаваемого напряжения в большинстве случаев нелинейна и имеет вид, представленный на рисунке.

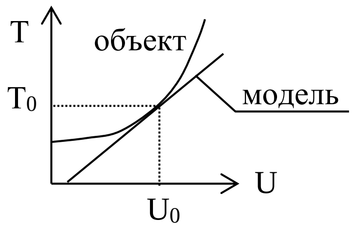



Рис.2.5. Линеаризация

Графически линеаризацию некоторого уравнения от двух переменных $F(x,y) = 0$ в окрестности некоторой точки ($x_0, y_0$) можно представить как замену рассматриваемого участка кривой на касательную (рис.2.5), уравнение которой определяется по формуле:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial F}{\partial y}\Delta y = 0,$$

где $\frac{\partial F}{\partial x}$ и $\frac{\partial F}{\partial y}$ - частные производные от $F$ по $x$ и $y$. Данное уравнение называется уравнением в приращениях, поскольку значения $x$ и $y$ здесь заменены на приращения $\Delta x = x - x_0$ и $\Delta y = y - y_0$.

Линеаризация ДУ происходит аналогично, отличие состоит только в том, что необходимо искать частные производные по производным ($\frac{\partial F}{\partial x'}$, $\frac{\partial F}{\partial x''}$, $\frac{\partial F}{\partial x'''}$ и т.д.).

Пример. Линеаризация нелинейного ДУ.

$$3xy - 4x^2 + 1{,}5\frac{dx}{dt}y = 5\frac{dy}{dt} + y$$

Данное ДУ является нелинейным из-за наличия произведений переменных x и y. Линеаризируем его в окрестности точки с координатами $x_0 = 1$, $x_o' = 0$, $y_o' = 0$. Для определения недостающего начального условия $y_0$ подставим данные значения в ДУ:

$$3y_0 - 4 + 0 = 0 + y_0 \quad \text{откуда} \quad y_0 = 2.$$

Введем в рассмотрение функцию

$$F = 3xy - 4x^2 + 1{,}5x'y - 5y' - y$$

и определим все ее производные при заданных начальных условиях:

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x}\right|_0 = (3y - 8x)|_0 = 3*2 - 8*1 = -2,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_0 = (3x + 1{,}5x' - 1)|_0 = 3*1 + 1{,}5*0 - 1 = 2,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial x'}\right|_0 = (1{,}5y)|_0 = 1{,}5*2 = 3,$$

$$\left.\frac{\partial F}{\partial y'}\right|_0 = -5.$$

Теперь, используя полученные коэффициенты, можно записать окончательное линейное ДУ:

$$-5\cdot\Delta y' + 2\cdot\Delta y + 3\cdot\Delta x' - 2\cdot\Delta x = 0.$$

## 2.5 Преобразования Лапласа

Исследование АСР существенно упрощается при использовании прикладных математических методов операционного исчисления. Например, функционирование некоторой системы описывается ДУ вида

$$a_2 \frac{d^2 y}{dt^2} + a_1 \frac{dy}{dt} + a_0 y = b_1 \frac{dx}{dt} + b_0 x, \qquad (2.1)$$

где $x$ и $y$ - входная и выходная величины. Если в данное уравнение вместо $x(t)$ и $y(t)$ подставить функции $X(s)$ и $Y(s)$ комплексного переменного s такие, что

$$X(s) = \int_0^\infty x(t) e^{-st} dt \quad \text{и} \quad Y(s) = \int_0^\infty y(t) e^{-st} dt, \qquad (2.2)$$

то исходное ДУ при нулевых начальных условиях равносильно линейному алгебраическому уравнению

$$a_2 s^2 Y(s) + a_1 s Y(s) + a_0 Y(s) = b_1 X(s) + b_0 X(s).$$

Такой переход от ДУ к алгебраическому уравнению называется преобразованием Лапласа, формулы (2.2) соответственно формулами преобразования Лапласа, а полученное уравнение - операторным уравнением.

Новые функции $X(s)$ и $Y(s)$ называются изображениями $x(t)$ и $y(t)$ по Лапласу, тогда как $x(t)$ и $y(t)$ являются оригиналами по отношению к $X(s)$ и $Y(s)$.

Переход от одной модели к другой достаточно прост и заключается в замене знаков дифференциалов $\frac{d^n}{dt^n}$ на операторы $s^n$, знаков интегралов $\int ...dt$ на множители $\frac{1}{s}$, а самих $x(t)$ и $y(t)$ - изображениями $X(s)$ и $Y(s)$.

Для обратного перехода от операторного уравнения к функциям от времени используется метод обратного преобразования Лапласа. Общая формула обратного преобразования Лапласа:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(j\omega) e^{j\omega t} d\omega, \qquad (2.3)$$

где $f(t)$ - оригинал, $F(j\omega)$ - изображение при $s = j\omega$, $j$ - мнимая единица, $\omega$ - частота.

Эта формула достаточно сложна, поэтому были разработаны специальные таблицы (табл. 1.1 и 1.2), в которые сведены наиболее часто встречающиеся функции $F(s)$ и их оригиналы $f(t)$. Они позволяют отказаться от прямого использования формулы (2.3).

Таблица 1.2 - Преобразования Лапласа

| Оригинал x(t) | Изображение X(s) |
|---|---|
| δ-функция | 1 |
| 1 | $\frac{1}{s}$ |
| $t$ | $\frac{1}{s^2}$ |
| $t^2$ | $\frac{2}{s^3}$ |
| $t^n$ | $\frac{n!}{s^{n+1}}$ |
| $e^{-\alpha t}$ | $\frac{1}{s+\alpha}$ |
| $\alpha x(t)$ | $\alpha X(s)$ |
| $\sum_{i=1}^{n} x_i(t)$ | $\sum_{i=1}^{n} X_i(s)$ |
| $x(t - \alpha)$ | $X(s) \cdot e^{-\alpha s}$ |
| $\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ | $s^n \cdot X(s)$ |
| $\int_0^t x(\tau) d\tau$ | $\frac{X(s)}{s}$ |

Таблица 1.2 - Формулы обратного преобразования Лапласа (дополнение)

| Изображение X(s) | | Оригинал x(t) |
|---|---|---|
| $\frac{M}{s+\alpha}$ | $\alpha \in R$, $M \in R$<br>(α и М - действительные числа) | $M \cdot e^{-\alpha t}$ |
| | $\alpha = \alpha_1 + j \cdot \alpha_2$<br>$M = M_1 + j \cdot M_2$<br>(α и М - комплекные) | $2 \cdot e^{-\alpha_1 t} \cdot [M_1 \cdot \cos(\alpha_2 \cdot t) - M_2 \cdot \sin(\alpha_2 \cdot t)]$ |

Закон изменения выходного сигнала обычно является функцией, которую необходимо найти, а входной сигнал, как правило, известен. Некоторые типовые входные сигналы были рассмотрены в п. 2.3. Здесь приводятся их изображения:

– единичное ступенчатое воздействие имеет изображение $X(s) = \frac{1}{s}$,

– дельта-функция $X(s) = 1$,

– линейное воздействие $X(s) = \frac{1}{s^2}$.

Пример. Решение ДУ с использованием преобразований Лапласа.

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 5\frac{dy}{dt} + 6y = 2\frac{dx}{dt} + 12x.$$

Допустим, входной сигнал имеет форму единичного ступенчатого воздействия, т.е. $x(t) = 1$. Тогда изображение входного сигнала $X(s) = \frac{1}{s}$.

Производим преобразование исходного ДУ по Лапласу и подставляем $X(s)$:

$$s^2Y + 5sY + 6Y = 2sX + 12X,$$

$$s^2Y + 5sY + 6Y = 2s\frac{1}{s} + 12\frac{1}{s},$$

$$Y(s^3 + 5s^2 + 6s) = 2s + 12.$$

Определяется выражение для $Y$:

$$Y = \frac{2s+12}{s^3+5s^2+6s}.$$

Оригинал полученной функции отсутствует в таблице оригиналов и изображений. Для решения задачи его поиска дробь разбивается на сумму простых дробей с учетом того, что знаменатель может быть представлен в виде $s(s + 2)(s + 3)$:

$$Y = \frac{2s+12}{s^3+5s^2+6s} = \frac{2s+12}{s(s+2)(s+3)} = \frac{M_1}{s} + \frac{M_2}{s+2} + \frac{M_3}{s+3} =$$

$$= \frac{(M_1+M_2+M_3)s^2 + (5M_1+3M_2+2M_3)s + 6M_1}{s(s+2)(s+3)}.$$

Сравнивая получившуюся дробь с исходной, можно составить систему из трех уравнений с тремя неизвестными:

$$\begin{cases} M_1 + M_2 + M_3 = 0 \\ 5 \cdot M_1 + 3 \cdot M_2 + 2 \cdot M_3 = 2 \\ 6 \cdot M_1 = 12 \end{cases} \rightarrow \quad \begin{cases} M_1 = 2 \\ M_2 = -4 \\ M_3 = 2 \end{cases}$$

Следовательно, дробь можно представить как сумму трех дробей:

$$Y = \frac{2s+12}{s^3+5s^2+6s} = \frac{2}{s} - \frac{4}{s+2} + \frac{2}{s+3}.$$

Теперь, используя табличные функции, определяется оригинал выходной функции:

$$y(t) = 2 - 4 \cdot e^{-2t} + 2 \cdot e^{-3t}.$$

## 2.6 Передаточные функции

### 2.6.1 Определение передаточной функции

Преобразование ДУ по Лапласу дает возможность ввести удобное понятие передаточной функции, характеризующей динамические свойства системы.

Например, операторное уравнение

$$3s^2Y(s) + 4sY(s) + Y(s) = 2sX(s) + 4X(s),$$

можно преобразовать, вынеся $X(s)$ и $Y(s)$ за скобки и поделив друг на друга:

$$Y(s)*(3s^2 + 4s + 1) = X(s)*(2s + 4)$$

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{2s+4}{3s^2+4s+1}.$$

Полученное выражение называется передаточной функцией.

Передаточной функцией называется отношение изображения выходного воздействия $Y(s)$ к изображению входного $X(s)$ при нулевых начальных условиях.

$$W(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \qquad (2.4)$$

Передаточная функция является дробно-рациональной функцией комплексной переменной:

$$W(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 + b_1s + b_2s^2 + \ldots + b_ms^m}{a_0 + a_1s + a_2s^2 + \ldots + a_ns^n},$$

где $B(s) = b_0 + b_1s + b_2 s^2 + \ldots + b_m s^m$ - полином числителя,

$A(s) = a_0 + a_1s + a_2 s^2 + \ldots + a_n s^n$ - полином знаменателя.

Передаточная функция имеет порядок, который определяется порядком полинома знаменателя ($n$).

Из (2.4) следует, что изображение выходного сигнала можно найти как:

$$Y(s) = W(s)*X(s).$$

Так как передаточная функция системы полностью определяет ее динамические свойства, то первоначальная задача расчета АСР сводится к определению ее передаточной функции.

### 2.6.2 Примеры типовых звеньев

Звеном системы называется ее элемент, обладающий определенными свойствами в динамическом отношении. Звенья систем регулирования могут иметь разную физическую основу (электрические, пневматические, механические и др. звенья), но относится к одной группе. Соотношение входных и выходных сигналов в звеньях одной группы описываются одинаковыми передаточными функциями.

Простейшие типовые звенья:

- усилительное,
- интегрирующее,
- дифференцирующее,
- апериодическое,
- колебательное,
- запаздывающее.

**Усилительное звено**.

Звено усиливает входной сигнал в $K$ раз. Уравнение звена $y = K*x$, передаточная функция $W(s) = K$. Параметр $K$ называется коэффициентом усиления.

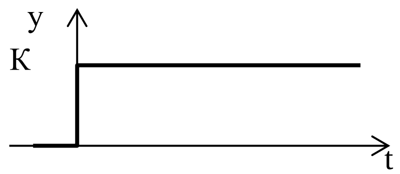



Рис.2.6. Переходная характеристика усилительного звена

Выходной сигнал такого звена в точности повторяет входной сигнал, усиленный в $K$ раз (рис.2.6).

Примерами таких звеньев являются: механические передачи, датчики, безынерционные усилители и др.

**Интегрирующее.**

Идеальное интегрирующее.

Выходная величина идеального интегрирующего звена пропорциональна интегралу входной величины.

$$y = K\int_0^t x(t)dt;\ \mathrm{W(s)} = \frac{\mathrm{K}}{\mathrm{s}}$$

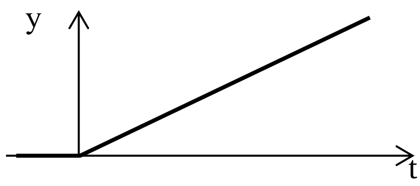



Рис.2.7. Переходная характеристика идеального интегрирующего звена

При подаче на вход звена воздействия выходной сигнал постоянно возрастает (см. рис. 1.16).

Это звено астатическое, т.е. не имеет установившегося режима.

Реальное интегрирующее.

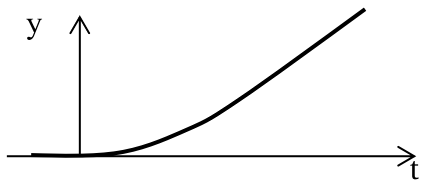



Рис.2.8. Переходная характеристика реального интегрирующего звена

Передаточная функция этого звена имеет вид:

$$W(s) = \frac{K}{s(Ts+1)}.$$

Переходная характеристика в отличие от идеального звена является кривой (рис.2.8).

Примером интегрирующего звена является двигатель постоянного тока с независимым возбуждением, если в качестве входного воздействия принять напряжение питания статора, а выходного - угол поворота ротора.

**Дифференцирующее**.

Идеальное дифференцирующее.

Выходная величина пропорциональна производной по времени от входной:

$$y = K\frac{dx(t)}{dt}; \qquad W(s) = K{*}s.$$

При ступенчатом входном сигнале выходной сигнал представляет собой импульс (δ-функцию).

3.2) Реальное дифференцирующее.

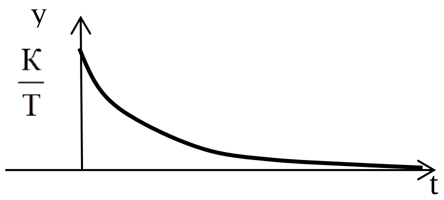



Рис.2.9. Переходная характеристика реального дифференцирующего звена

Идеальные дифференцирующие звенья физически не реализуемы. Большинство объектов, которые представляют собой дифференцирующие звенья, относятся к реальным дифференцирующим звеньям. Переходная характеристика и передаточная функция этого звена имеют вид:

$$W(s) = \frac{Ks}{Ts+1}.$$

**Апериодическое (инерционное).**

Этому звену соответствуют ДУ и ПФ вида:

$$T\frac{dy}{dt} + y = Kx; \qquad W(s) = \frac{K}{Ts+1}.$$

Определим характер изменения выходной величины этого звена при подаче на вход ступенчатого воздействия величины $x_0$.

Изображение ступенчатого воздействия: $X(s) = \frac{x_0}{s}$. Тогда изображение выходной величины:

$$Y(s) = W(s)\,X(s) = \frac{K}{Ts+1}\,\frac{x_0}{s} = K\,x_0\,\frac{1}{s(Ts+1)}.$$

Разложим дробь на простые:

$$\frac{1}{s(Ts+1)} = \frac{A}{Ts+1} + \frac{B}{s} = \frac{As+BTs+B}{s(Ts+1)} = \frac{1}{s} - \frac{T}{Ts+1} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+\frac{1}{T}}$$

Оригинал первой дроби по таблице: $L^{-1}\{\frac{1}{s}\} = 1$, второй:

$$L^{-1}\{\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\} = e^{-\frac{t}{T}}.$$

Тогда окончательно получаем: $y(t) = K\,x_0\,(1 - e^{-\frac{t}{T}})$.

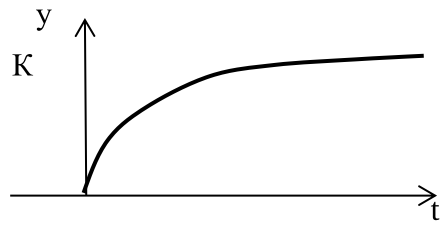



Рис.2.10. Переходная характеристика апериодического звена

Постоянная $T$ называется постоянной времени.

Большинство тепловых объектов являются апериодическими звеньями. Например, при подаче на вход электрической печи напряжения ее температура будет изменяться по аналогичному закону (рис. 2.10).

**Колебательное звено**.

Колебательное звено имеет ДУ и ПФ вида:

$$T_2^2 \frac{d^2 y}{dt^2} + T_1 \frac{dy}{dt} + y = Kx \, , \; W(s) = \frac{K}{T_2^2 s^2 + T_1 s + 1} .$$

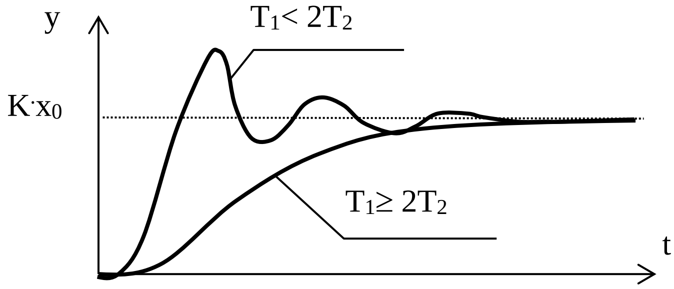



Рис.2.11. Переходная характеристика колебательного звена

При подаче на вход ступенчатого воздействия амплитудой $x_0$ на переходная кривая будет иметь один из двух видов: апериодический (при $T_1 \geq 2T_2$) или колебательный (при $T_1 < 2T_2$).

**Запаздывающее.**

$$y(t) = x(t - \tau), \qquad W(s) = e^{-\tau s}.$$

Выходная величина $y$ в точности повторяет входную величину $x$ с некоторым запаздыванием $\tau$. Примеры: движение груза по конвейеру, движение жидкости по трубопроводу.

2.6.3 Соединения звеньев.

Поскольку исследуемый объект в целях упрощения анализа функционирования разбит нами на звенья, то после определения передаточных функций для каждого звена встает задача объединения их в одну передаточную функцию объекта. Вид передаточной функции объекта зависит от последовательности соединения звеньев:

1. Последовательное соединение.

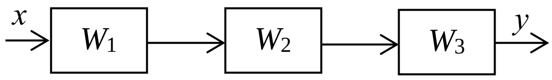



Рис. 2.12. Последовательное соединение звеньев

$W_{об} = W_1 \cdot W_2 \cdot W_3 \ldots$

При последовательном соединении звеньев их передаточные функции перемножаются.

2. Параллельное соединение.

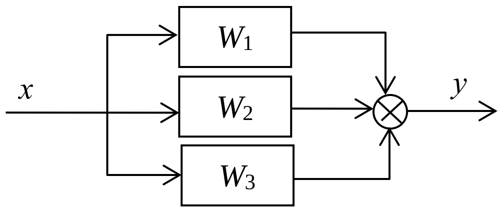



Рис. 2.13. Параллельное соединение звеньев

$W_{об} = W_1 + W_2 + W_3 + \ldots$

При параллельном соединении звеньев их передаточные функции складываются.

3. Обратная связь

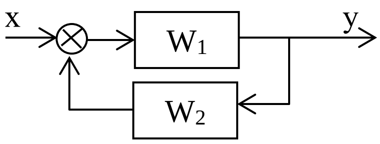



Рис. 2.14. Соединение звеньев с обратной связью

Передаточная функция по заданию (x):

$$W_з(s) = \frac{W_1}{1 \pm W_1 W_2},$$

где: «+» соответствует отрицательной ОС,

«-» - положительной.

Для определения передаточных функций объектов, имеющих более сложные соединения звеньев, используют либо последовательное укрупнение схемы, либо преобразуют по формуле Мезона.

### 2.6.4 Передаточные функции АСР

Для исследования и расчета структурную схему АСР путем эквивалентных преобразований приводят к простейшему стандартному виду «объект - регулятор».

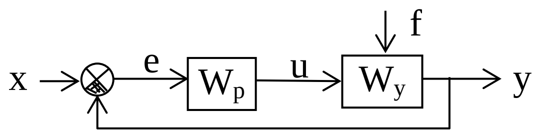



Рис. 2.15. Структурная схема АСР.

Это необходимо, во-первых, для того, чтобы определить математические зависимости в системе, и, во-вторых, как правило, все инженерные методы расчета и определения параметров настройки регуляторов применены для такой стандартной структуры.

В общем случае любая одномерная АСР с главной обратной связью путем постепенного укрупнения звеньев может быть приведена к такому виду.

Если выход системы $y$ не подавать на ее вход, то мы получим разомкнутую систему регулирования, передаточная функция которой определяется как произведение:

$$W_\infty = W_р \cdot W_у$$

($W_р$ - ПФ регулятора, $W_у$ - ПФ объекта управления).

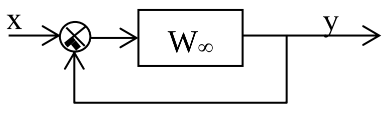



Рис. 2.16. АСР, охваченная обратной связью

То есть последовательность звеньев $W_р$ и $W_у$ может быть заменена одним звеном с $W_\infty$. Передаточную функцию замкнутой системы принято обозначать как $\Phi(s)$. Она может быть выражена через $W_\infty$:

$$\Phi_з(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{W_\infty(s)}{1+W_\infty(s)}.$$

Далее будем рассматривать только системы с обратной отрицательной связью, поскольку они используются в подавляющем большинстве АСР).

Данная передаточная функция $\Phi_з(s)$ определяет зависимость $y$ от $x$ и называется передаточной функцией замкнутой системы по каналу задающего воздействия (по заданию).

Для АСР существуют также передаточные функции по другим каналам:

$$\Phi_е(s) = \frac{E(s)}{X(s)} = \frac{1}{1+W_\infty(s)} \text{ - по ошибке,}$$

$$\Phi_в(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{Wy(s)}{1+W_\infty(s)} \text{ - по возмущению.}$$

Поскольку передаточная функция разомкнутой системы является в общем случае дробно-рациональной функцией вида $W_\infty = \dfrac{B(s)}{A(s)}$, то передаточные функции замкнутой системы могут быть преобразованы:

$$\Phi_з(s) = \frac{\frac{B}{A}}{1+\frac{B}{A}} = \frac{B}{A+B}, \qquad \Phi_е(s) = \frac{1}{1+\frac{B}{A}} = \frac{A}{A+B}.$$

Как видно, эти передаточные функции отличаются только выражениями числителей. Выражение знаменателя называется характеристическим выражением замкнутой системы и обозначается как $D_з(s) = A(s) + B(s)$, в то время как выражение, находящееся в числителе передаточной функции разомкнутой системы $W_\infty$, называется характеристическим выражением разомкнутой системы $B(s)$.

### 2.6.5 Определение параметров передаточной функции объекта по переходной кривой

Процесс получения передаточной функции объекта, исходя из данных о переходном процессе, называется идентификацией объекта.

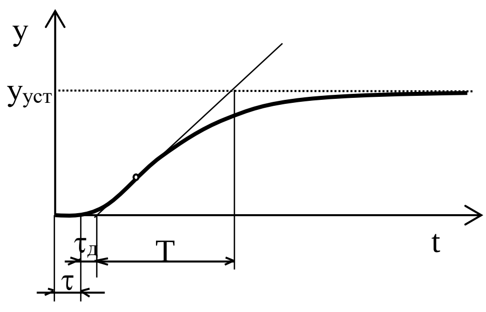



Рис. 2.17. Переходная характеристика при подачи ступенчатого воздействия на вход некоторого объекта

Предположим, что при подаче на вход некоторого объекта ступенчатого воздействия была получена переходная характеристика (рис. 2.17). Требуется определить вид и параметры передаточной функции.

Предположим, что передаточная функция имеет вид (инерционной звено с запаздыванием):

$$W(s) = \frac{K}{Ts+1} e^{-\tau s},$$

Параметры передаточной функции:

*K* - коэффициент усиления,

*T* - постоянная времени,

$\tau$ - запаздывание.

Коэффициентом усиления называется величина, показывающая, во сколько раз данное звено усиливает входной сигнал (в установившемся режиме), и равна отношению выходной величины *y* в установившемся режиме ко входной величине *x*:

$$K = \frac{y_{уст}}{x},$$

Установившееся значение выходной величины $y_{уст}$ - это значение *y* при $t \to \infty$.

Запаздыванием $\tau$ называется промежуток времени от момента изменения входной величины *x* до начала изменения выходной величины *y*.

Постоянная времени *T* может быть определена несколькими методами в зависимости от вида передаточной функции. Для рассматриваемой передаточной функции 1-го порядка *T* определяется наиболее просто: сначала проводится касательная к точке перегиба, затем находятся точки пересечения с осью времени и асимптотой $y_{уст}$; время *T* определяется как интервал времени между этими точками.

В случае, если на графике между точкой перегиба имеется вогнутость, определяется дополнительное запаздывание $\tau_{доп}$, которое прибавляется к основному: $\tau = \tau + \tau_{доп}$.

## 2.7 Частотные характеристики

### **Определение частотных характеристик.**

Известно, что динамические процессы могут быть представлены частотными характеристиками (ЧХ) путем разложения функции в ряд Фурье.

Предположим, имеется некоторый объект и требуется определить его ЧХ. При экспериментальном снятии ЧХ на вход объекта подается синусоидальный сигнал с амплитудой $A_{вх} = 1$ и некоторой частотой ω, т.е.

$$x(t) = A_{вх} sin(\omega t) = sin(\omega t).$$

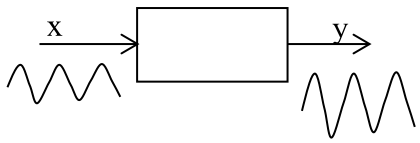


Рис. 2.18. Получение частотных характеристик

Тогда после прохождения переходных процессов на выходе мы будем также иметь синусоидальный сигнал той же частоты $\omega$, но другой амплитуды $A_{вых}$ и фазы $\varphi$:

$$y(t) = A_{вых} sin(\omega t + \varphi).$$

При разных значениях $\omega$ величины $A_{вых}$ и $\varphi$, как правило, также будут различными. Эта зависимость амплитуды и фазы от частоты называется частотной характеристикой. Виды ЧХ:

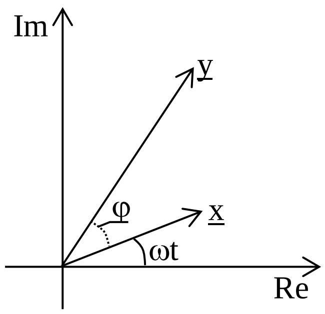


Рис. 2.19. Комплексная плоскость

- АФХ - зависимость амплитуды и фазы от частоты (изображается на комплексной плоскости);
- АЧХ - зависимость амплитуды от частоты;
- ФЧХ - зависимость фазы от частоты;
- ЛАХ, ЛАЧХ - логарифмические АЧХ.

На комплексной плоскости входная величина $x = A_{вх} \cdot sin(\omega t)$ для каждого момента времени $t_i$ определяется вектором $\underline{x}$ на комплексной плоскости. Этот вектор имеет длину, равную $A_{вх}$, и отложен под углом $\omega t_i$ к действительной оси. (*Re* - действительная ось, *Im* - мнимая ось)

Тогда величину x можно записать в комплексной форме

$$\underline{x}(t) = A_{вх}(cos(\omega t) + j \cdot sin(\omega t)),$$

где $j = \sqrt{-1}$ - мнимая единица.

Или, если использовать формулу Эйлера $e^{j\alpha} = cos\alpha + j \cdot sin\alpha$, то можно записать

$$\underline{x}(t) = A_{вх} \cdot e^{j\omega t}.$$

Выходной сигнал $y(t)$ можно аналогично представить как вектор

$$\underline{y}(t) = A_{вых} \cdot e^{j(\omega t+\varphi)}.$$

Рассмотрим связь передаточной функции и частотной характеристики.

Определим производные по Лапласу:

$$y \to Y$$

$y' \rightarrow sY$

$y'' \rightarrow s^2Y$ и т.д.

Определим производные ЧХ:

$y'(t) = j\omega A_{вых} e^{j(\omega t + \varphi)} = j\omega y,$

$y''(t) = (j\omega)^2 A_{вых} e^{j(\omega t + \varphi)} = (j\omega)^2 y$ и т.д.

Отсюда видно соответствие $s = j\omega$. Вывод: частотные характеристики могут быть построены по передаточным функциям путем замены $s = j\omega$.

Пример: $W(s) = \dfrac{K}{Ts+1}$.

При $s = j\omega$ имеем:

$$W(j\omega) = \frac{K}{Tj\omega+1} = \frac{K}{1+jT\omega} = \frac{K(1-jT\omega)}{(1+jT\omega)(1-jT\omega)} = \frac{K-j\omega KT}{1+\omega^2T^2} =$$

$$= \frac{K}{1+\omega^2T^2} - j\frac{j\omega KT}{1+\omega^2T^2} = Re(\omega) + j\,Im(\omega).$$

Изменяя $\omega$ от 0 до $\infty$, можно построить АФХ (рис. 2.20).

Для построения АЧХ и ФЧХ используются формулы:

$$A(\omega) = \sqrt{\mathrm{Re}^2(\omega) + \mathrm{Im}^2(\omega)},$$

$$\varphi(\omega) = arctg\,\frac{\mathrm{Im}(\omega)}{\mathrm{Re}(\omega)}.$$

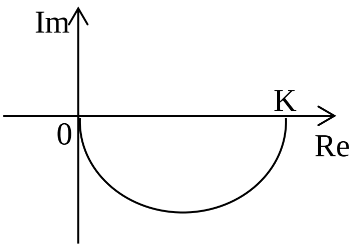



Рис. 2.20. АФХ

Формулы получения АФХ по АЧХ и ФЧХ:

$Re(\omega) = A(\omega)\cos\varphi(\omega),$

$Im(\omega) = A(\omega)\sin\varphi(\omega).$

**Логарифмические частотные характеристики**

Логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ) используются довольно часто для описания динамических параметров различных устройств. Существуют два основных вида ЛЧХ, которые, как правило, используются совместно и изображаются в виде графиков:

1. ЛАЧХ - логарифмическая АЧХ.

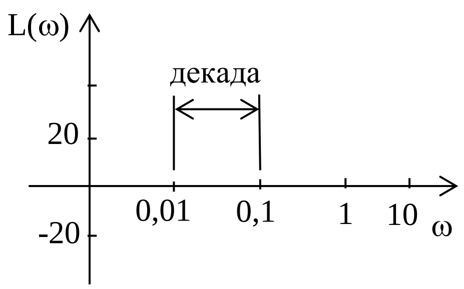



Рис. 2.21. ЛАЧХ

Формула для построения ЛАЧХ: L(ω) = 20·lg $A_{вых}$(ω).

Единица измерения - децибел (дБ).

На графике ЛАЧХ по оси абсцисс откладывается частота в логарифмическом масштабе. Это означает, что равным величинам отрезков по оси ω соответствуют кратные значения частоты. Для ЛЧХ кратность = 10.

По оси ординат откладываются значения L(ω) в обычном масштабе.

2. ЛФЧХ - логарифмическая ФЧХ. Представляет из себя ФЧХ, у которой ось частоты $\omega$ проградуирована в логарифмическом масштабе в соответствии с ЛАЧХ. По оси ординат откладываются фазы $\varphi$.

Примеры ЛЧХ.

1. Фильтр низких частот (ФНЧ)

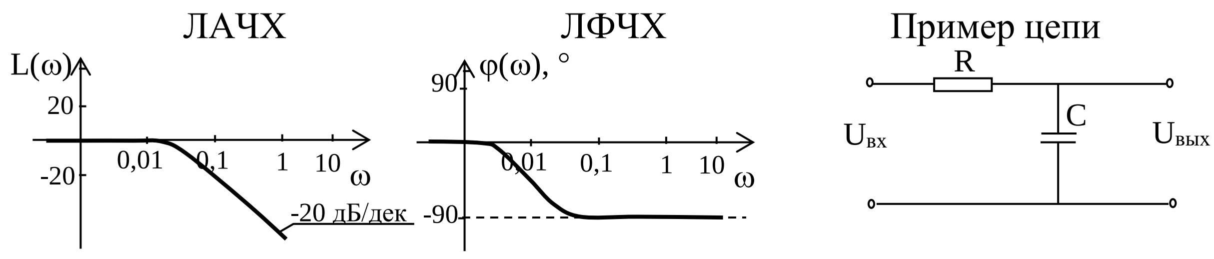



Рис. 2.22. Фильтр низких частот

Фильтр низких частот предназначен для подавления высокочастотных воздействий.

2. Фильтр высоких частот (ФВЧ)

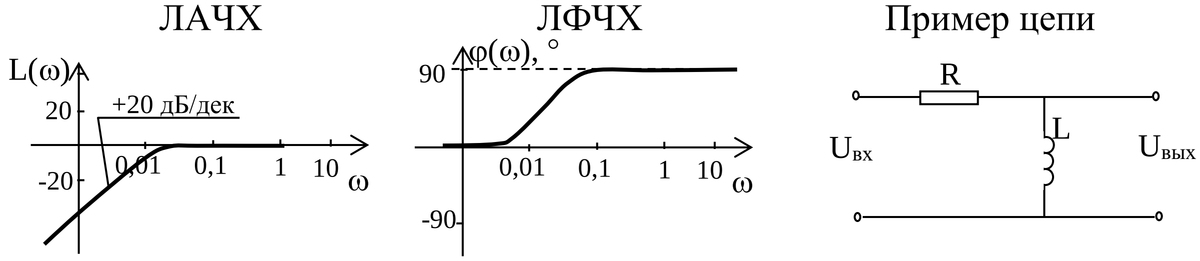



Рис. 2.23. Фильтр высоких частот

Фильтр высоких частот предназначен для подавления низкочастотных воздействий.

3. Заградительный фильтр.

Заградительный фильтр подавляет только определенный диапазон частот.

ЛАЧХ и ЛФЧХ Пример цепи

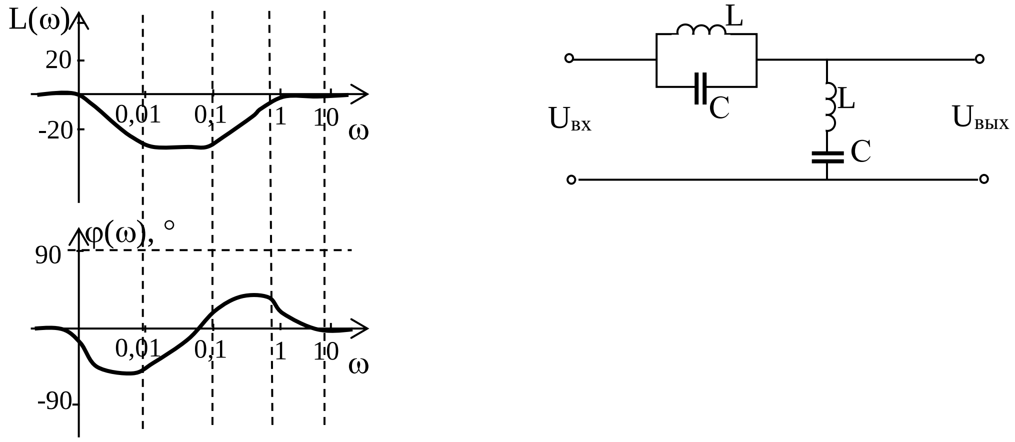



Рис. 2.24. Заградительный фильтр

# 3 КАЧЕСТВО ПРОЦЕССОВ УПРАВЛЕНИЯ

## 3.1 Критерии устойчивости

Устойчивость.

Важным показателем АСР является устойчивость, поскольку основное ее назначение заключается в поддержании заданного постоянного значения регулируемого параметра или изменение его по определенному закону. При отклонении регулируемого параметра от заданной величины (например, под действием возмущения или изменения задания) регулятор воздействует на систему таким образом, чтобы ликвидировать это отклонение. Если система в результате этого воздействия возвращается в исходное состояние или переходит в другое равновесное состояние, то такая система называется устойчивой. Если же возникают колебания со все возрастающей амплитудой или происходит монотонное увеличение ошибки е, то система называется неустойчивой.

Для того, чтобы определить, устойчива система или нет, используются критерии устойчивости:

1) корневой критерий,
2) критерий Стодолы,
3) критерий Гурвица,
4) критерий Найквиста,
5) критерий Михайлова и др.

Первые два критерия являются необходимыми критериями устойчивости отдельных звеньев и разомкнутых систем. Критерий Гурвица является алгебраическим и разработан для определения устойчивости замкнутых систем без запаздывания. Последние два критерия относятся к группе частотных критериев, поскольку определяют устойчивость замкнутых систем по их частотным характеристикам. Их особенностью является возможность применения к замкнутым системам с запаздыванием, которыми является подавляющее большинство систем управления.

### 3.1.2 Корневой критерий

Корневой критерий определяет устойчивость системы по виду передаточной функции. Динамической характеристикой системы, описывающей основные поведенческие свойства, является характеристический полином, находящийся в знаменателе передаточной функции. Путем приравнивания знаменателя к нулю можно получить характеристическое уравнение, по корням которого определить устойчивость.

Корни характеристического уравнения могут быть как действительные, так и комплексные и для определения устойчивости откладываются на комплексной плоскости (рис. 2.25).

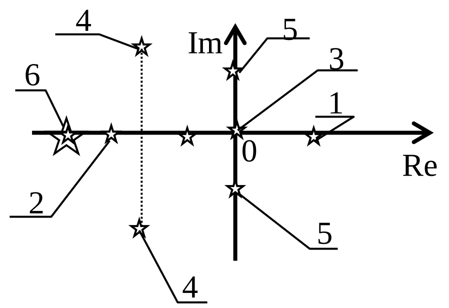



Рис. 3.1. Корни характеристического уравнения на комплексной плоскости

Виды корней характеристического уравнения:

- действительные:

- положительные (корень № 1);
- отрицательные (2);
- нулевые (3);

- комплексные

- комплексные сопряженные (4);
- чисто мнимые (5);

- по кратности корни бывают:

- одиночные (1, 2, 3);
- сопряженные (4, 5): $s_i = \alpha \pm j\omega$;
- кратные (6) $s_i = s_{i+1} = \dots$

Корневой критерий формулируется следующим образом:

Линейная АСР устойчива, если все корни характеристического уравнения лежат в левой полуплоскости. Если хотя бы один корень находится на мнимой оси, которая является границей устойчивости, то говорят, что система находится на границе устойчивости. Если хотя бы один корень находится в правой полуплоскости (не зависимо от числа корней в левой), то система является неустойчивой.

Иными словами, все действительные корни и действительные части комплексных корней должны быть отрицательны. В противном случае система неустойчива.

Пример 3.1. Передаточная функция системы имеет вид:

$$W(s) = \frac{3s+4}{s^3+2s^2+2.25s+1.25}.$$

Характеристическое уравнение: $s^3 + 2s^2 + 2.25s + 1.25 = 0$.

Корни: $s_1 = -1$; $s_2 = -0,5 + j$; $s_3 = -0,5 - j$.

Следовательно, система устойчива.

### 3.1.3 Критерий Стодолы

Этот критерий является следствием из предыдущего и формулируется следующим образом: Линейная система устойчива, если все коэффициенты характеристического полинома положительны.

То есть, передаточная функция из примера 3.1 по критерию Стодола соответствует устойчивой системе.

### 3.1.4 Критерий Гурвица

Критерий Гурвица работает с характеристическим полиномом замкнутой системы. Как известно, структурная схема АСР по ошибке имеет вид (рис. 2.26):

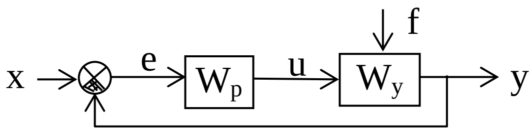



Рис.3.2. Замкнутая САУ

где: $W_р$ - передаточная функция регулятора,

$W_у$ - передаточная функция объекта управления.

Определим передаточную функцию для прямой связи (передаточную функцию разомкнутой системы: $W_\infty = W_р\, W_у$.

Далее с учетом наличия отрицательной обратной связи получаем передаточную функцию замкнутой системы:

$$W_з(s) = \frac{W_\infty}{1 + W_\infty}.$$

Как правило, передаточная функция разомкнутой системы имеет дробно-рациональный вид:

$$W_\infty(s) = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

Тогда после подстановки и преобразования получаем:

$$W_з(s) = \frac{B(s)}{A(s) + B(s)}.$$

Отсюда следует, что характеристический полином замкнутой системы (ХПЗС) можно определить как сумму числителя и знаменателя $W_\infty$:

$$D_з(s) = A(s) + B(s).$$

Для определения устойчивости по Гурвицу строится матрица таким образом, чтобы по главной диагонали были расположены коэффициенты

ХПЗС с $a_{n+1}$ по $a_0$. Справа и слева от нее записываются коэффициенты с индексами через 2 ($a_0$, $a_2$, $a_4$… или $a_1$, $a_3$, $a_5$ …). Тогда для устойчивой системы необходимо и достаточно, чтобы определитель и все главные диагональные миноры матрицы были больше нуля.

Если хотя бы один определитель будет равен нулю, то система будет находится на границе устойчивости.

Если хотя бы один определитель будет отрицателен, то система неустойчива не зависимо от числа положительных или нулевых определителей.

Пример. Дана передаточная функция разомкнутой системы

$$W_{\infty}(s) == \frac{2s^3+9s^2+6s+1}{2s^4+3s^3+s^2} = \frac{B(s)}{A(s)}.$$

Требуется определить устойчивость замкнутой системы по критерию Гурвица.

Для этого определяется ХПЗС:

$$D(s) = A(s) + B(s) = 2s^4 + 3s^3 + s^2 + 2s^3 + 9s^2 + 6s + 1 = 2s^4 + 5s^3 + 10s^2 + 6s + 1.$$

Поскольку степень ХПЗС равна $n = 4$, то матрица будет иметь размер 4x4. Коэффициенты ХПЗС равны $a_4 = 2$, $a_3 = 5$, $a_2 = 10$, $a_1 = 6$, $a_0 = 1$.

Матрица имеет вид:

$$\begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 \\ 2 & 10 & 1 & 0 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 2 & 10 & 1 \end{pmatrix}$$

(обратите внимание на сходство строк матрицы: 1 с 3 и 2 с 4). Определители:

$\Delta_1 = 5 > 0$,

$$\Delta_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 2 & 10 \end{pmatrix} = 5*10 - 2*6 = 38 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 \\ 2 & 10 & 1 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix} = (5*10*6 + 6*1*0 + 2*5*0) -$$

$$-(0*10*0 + 5*5*1 + 2*6*6) = 209 > 0$$

$\Delta_4 = 1* \Delta_3 = 1*209 > 0$.

Поскольку все определители положительны, то АСР устойчива.

### 3.1.5 Критерий Михайлова

Описанные выше критерии устойчивости не работают, если передаточная функция системы имеет запаздывание, то есть может быть записана в виде

$$W_{\infty}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} e^{-\tau s},$$

где $\tau$ - запаздывание.

В этом случае характеристическое выражение замкнутой системы полиномом не является и его корни определить невозможно. Для определения устойчивости в данном случае используются частотные критерии Михайлова и Найквиста.

Порядок применения критерия Михайлова:

1) записывается характеристическое выражение замкнутой системы: $D_{з}(s) = A(s) + B(s) \cdot e^{-\tau s}$.

2) подставляется $s = j\omega$: $D_{з}(j\omega) = Re(\omega) + Im(\omega)$.

3) записывается уравнение годографа Михайлова $D_{з}(j\omega)$ и строится кривая на комплексной плоскости.

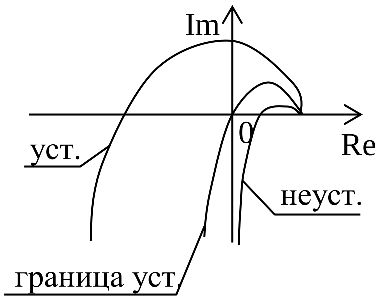



Рис.3.3. Годограф Михайлова

Для устойчивой АСР необходимо и достаточно, чтобы годограф Михайлова (см. рис.), начинаясь при $\omega = 0$ на положительной вещественной полуоси, обходил последовательно в положительном направлении (против часовой стрелки) при возрастании $\omega$ от 0 до $\infty$ $n$ квадрантов, где $n$ - степень характеристического полинома.

Если годограф Михайлова проходит через начало координат, то говорят, что система находится на границе устойчивости.

### 3.1.6 Критерий Найквиста

Данный критерий аналогичен критерию Михайлова, но работает с АФХ системы, поэтому более сложен для расчетов.

Последовательность:

1. Определяется передаточная функция разомкнутой системы $W_\infty(s) = \dfrac{B(s)}{A(s)}$.

2. Определяется число правых корней $m$.

3. Подставляется $s = j\omega$: $W_\infty(j\omega)$.

4. Строится АФХ разомкнутой системы.

Для устойчивости АСР необходимо и достаточно, чтобы при увеличении $\omega$ от 0 до $\infty$ АФХ $W_\infty(j\omega)$ $m$ раз охватывала точку (-1; 0), где $m$ - число правых корней разомкнутой системы.

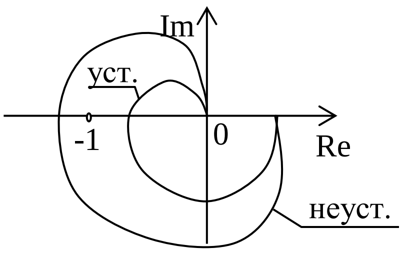



Рис.3.4. Критерий Найквиста

Если АФХ проходит через точку (-1; 0), то замкнутая система находится на границе устойчивости.

В случае, если характеристическое уравнение разомкнутой системы $A(s) = 0$ корней не имеет (т.е. $m = 0$), то критерий, согласно критерию, замкнутая система является устойчивой, если АФХ разомкнутой системы $W_\infty(j\omega)$ не охватывала точку (-1; 0), в противном случае система будет неустойчива (или на границе устойчивости).

3.2. Показатели качества

Если исследуемая АСР устойчива, то может возникнуть вопрос о том, насколько качественно происходит регулирование в этой системе и удовлетворяет ли оно технологическим требованиям. На практике качество регулирования может быть определено визуально по графику переходной кривой, однако, имеются точные методы, дающие конкретные числовые значения.

Показатели качества разбиты на 4 группы:

1) прямые - определяемые непосредственно по кривой переходного процесса,

2) корневые - определяемые по корням характеристического полинома,

3) частотные - по частотным характеристикам,

4) интегральные - получаемые путем интегрирования функций.

**Прямые показатели качества.**

К ним относятся: степень затухания $\psi$, перерегулирование $\sigma$, статическая ошибка $e_{ст}$, время регулирования $t_р$ и др.

Предположим, переходная кривая, снятая на объекте, имеет колебательный вид (рис. 2.29).

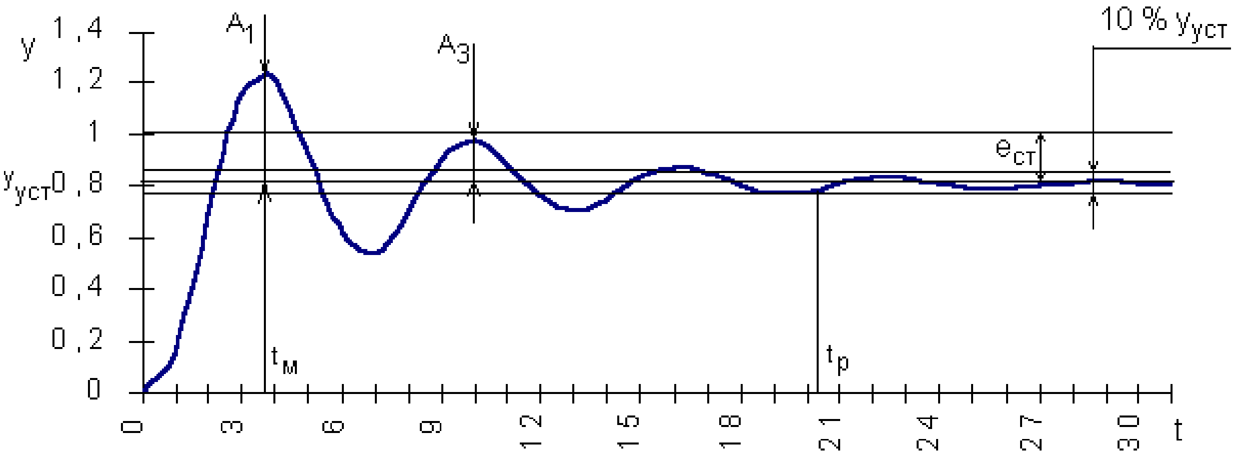



Рис. 3.5. Переходная характеристика некоторого объекта

Сразу по ней определяется установившееся значение выходной величины $y_{уст}$.

Степень затухания ψ определяется по формуле

$$\Psi = 1 - \frac{A_3}{A_1},$$

где $A_1$ и $A_3$ - соответственно 1-я и 3-я амплитуды переходной кривой.

Перерегулирование $\sigma = \dfrac{A_1}{y_{уст}} = \dfrac{y_{\max} - y_{уст}}{y_{уст}}$, где $y_{\max}$ - максимум переходной кривой.

Статическая ошибка $e_{ст} = x - y_{уст}$, где $x$ - входная величина.

Время достижения первого максимума $t_м$ определяется по графику.

Время регулирования $t_р$ определяется следующим образом: Находится допустимое отклонение $\Delta$ = 5% $y_{уст}$ и строится «трубка» толщиной 2Δ. Время $t_р$ соответствует последней точке пересечения $y(t)$ с данной границей. То есть время, когда колебания регулируемой величины перестают превышать 5 % от установившегося значения.

**Корневые показатели качества.**

К ним относятся: степень колебательности $m$, степень устойчивости $\eta$ и др.

Не требуют построения переходных кривых, поскольку определяются по корням характеристического полинома. Для этого корни полинома откладываются на комплексной плоскости и по ним определяются:

Степень устойчивости $\eta$ определяется как граница, правее которой корней нет, т.е.

$$\eta = min\left|\mathrm{Re}(s_i)\right|,$$

где $Re(s_i)$ - действительная часть корня $s_i$.

Степень колебательности $m$ рассчитывается через угол $\gamma$: $m = tg\ \gamma$. Для определения $\gamma$ проводятся два луча, которые ограничивают все корни на комплексной плоскости. $\gamma$ - угол между этими лучами и мнимой осью. Степень колебательности может быть определена также по формуле:

$$m = min\ \left|\frac{\mathrm{Re}(s_i)}{\mathrm{Im}(s_i)}\right|.$$

**Частотные показатели качества.**

Для определения частотных показателей качества требуется построение АФХ разомкнутой системы и АЧХ замкнутой системы.

По АФХ определяются запасы: $\Delta A$ - по амплитуде, $\Delta\varphi$ - по фазе.

Запас $\Delta A$ определяется по точке пересечения АФХ с отрицательной действительной полуосью.

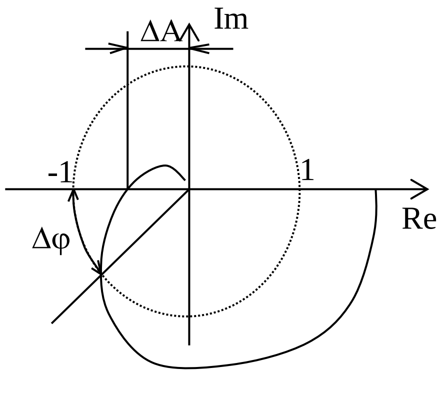



Рис. 3.6. Частотные показатели качества

Для определения $\Delta\varphi$ строится окружность единичного радиуса с центром в начале координат. Запас $\Delta\varphi$ определяется по точке пересечения с этой окружностью.

По АЧХ замкнутой системы определяются показатели колебательности по заданию $M$ и ошибке $M_E$ как максимумы соответственно АЧХ по заданию и АЧХ по ошибке.

**Связи между показателями качества.**

Описанные выше показатели качества связаны между собой определенными соотношениями:

$$\Psi = 1 - e^{-2\pi m}; \quad t_p = \frac{3}{\eta}; \qquad \Psi = 1 - M^{-\frac{\pi}{m}}; M = \frac{m^2+1}{2m}.$$

## 3.3 Типы регуляторов

Для регулирования объектами управления, как правило, используют типовые регуляторы, названия которых соответствуют названиям типовых звеньев:

1) П-регулятор (пропорциональный регулятор)

$$W_{\text{П}}(s) = K_1.$$

Принцип действия заключается в том, что он вырабатывает управляющее воздействие на объект пропорционально величине ошибки (чем больше ошибка $e$, тем больше управляющее воздействие $u$).

2) И-регулятор (интегрирующий регулятор)

$$W_{\text{И}}(\mathrm{s}) = \frac{K_0}{s}.$$

Управляющее воздействие пропорционально интегралу от ошибки.

3) Д-регулятор (дифференцирующий регулятор)

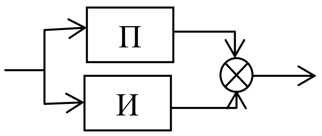
$$W_{\text{Д}}(s) = K_2\, s.$$

Генерирует управляющее воздействие только при изменении регулируемой величины:

$$u = K_2 \frac{de}{dt}.$$

На практике данные простейшие регуляторы комбинируются в регуляторы вида:

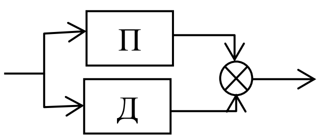
4) ПИ-регулятор (пропорционально-интегральный регулятор)




$$W_{\text{ПИ}}(s) = K_1 + \frac{K_0}{s}.$$

Рис.3.7. ПИ-регулятор

5) ПД-регулятор (пропорционально-дифференциальный регулятор)




$$W_{\text{ПД}}(s) = K_1 + K_2\, s.$$

Рис.3.8. ПД-регулятор

6) ПИД-регулятор.

$$W_{\text{ПИД}}(s) = K_1 + \frac{K_0}{s} + K_2\, s.$$

Наиболее часто используется ПИД-регулятор, поскольку он сочетает в себе достоинства всех трех типовых регуляторов.

### 3.4 Определение оптимальных настроек регуляторов

Регулятор, включенный в АСР, может иметь несколько настроек, каждая из которых может изменяться в достаточно широких пределах. При этом при определенных значениях настроек система будет управлять объектом в соответствии с технологическими требованиями, при других может привести к неустойчивому состоянию.

Поэтому стоит задача определить настройки, соответствующие устойчивой системе, но и выбрать из них оптимальные.

Оптимальными настройками регулятора называются настройки, которые соответствуют минимуму (или максимуму) какого-либо показателя качества. Требования к показателям качества устанавливаются непосредственно, исходя из технологических. Чаще всего накладываются требования на время регулирования (минимум) и степень затухания ($\Psi \geq \Psi_{зад}$).

Однако, изменяя настройки таким образом, чтобы увеличить степень затухания, мы можем прийти к слишком большому времени регулирования, что нецелесообразно. И наоборот, стремясь уменьшить время регулирования, мы получаем более колебательные процессы с большим значением Ψ.

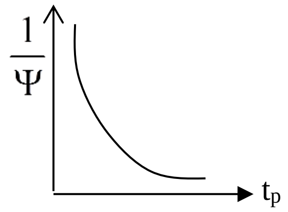


Рис.3.9. Зависимость Ψ от $t_р$

Зависимость Ψ от $t_р$ в общем случае имеет вид, изображенный на графике (рис.2.33).

Поэтому для определения оптимальных настроек разработан ряд математических методов, среди которых метод D-разбиения.

Кривой D-разбиения называется кривая в плоскости настроек регулятора, которая соответствует определенному значению какого-либо показателя качества.

Например, требуется обеспечить степень затухания $\Psi \geq \Psi_{зад}$. Имеется формула, связывающая Ψ со степенью колебательности $m$: $\Psi = 1 - e^{-2\pi m}$. Далее строится кривая D-разбиения равной степени колебательности $m$. Последовательность построения:

1. Определяется ХПЗС $D_з(s)$ с неизвестными настройками.

2. Делается подстановка $s = j\omega - m\omega$ и разделение $D_з(j\omega - m\omega) = Re(\omega) + Im(\omega)$.

3. Полученное выражение приравнивается к нулю и получается система

$$\begin{cases} Re(\omega) = 0 \\ Im(\omega) = 0 \end{cases}$$

Данная система имеет несколько неизвестных: $\omega$ и настройки регулятора.

4. Далее, изменяя $\omega$ от 0 до $\infty$ эта система решается относительно настроек регулятора.

5. По полученным данным строится кривая, по которой определяются оптимальные настройки.

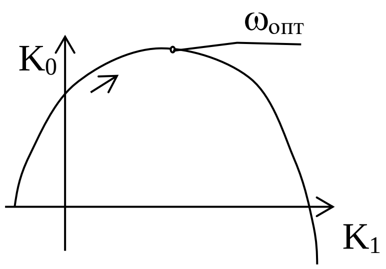


Рис.3.10. Кривая D-разбиения

Например, для ПИ-регулятора кривая D-разбиения может иметь вид представленный на рисунке 2.34.

Оптимальные настройки соответствуют максимальному значению $K_0$ (для ПИ- и ПИД-регуляторов) или $K_1$ (для ПД-регулятора).

## Библиографический список

1. Кирюшин О.В. Управление техническими системами: курс лекций. – Уфа: Изд-во УГНТУ, 2003. – 80 с.

2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория автоматического регулирования. -М.: Наука, 1966.

3. Лазарева Т. Я., Мартемьянов Ю. Ф. Основы теории автоматического управления: Учебное пособие. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн.ун-та, 2003. 308 с. ISBN 5-8265-0149-9.

4. Теория автоматического управления: Учебник. В 2-х частях / Под ред. А.А. Воронова. -М.: Высш.шк., 1986. -Ч.1. - 367 с. - Ч.2. -504 с.

Оглавление