Федеральное агентство по образованию Российской Федерации
ГОУ Владимирский государственный университет
Кафедра «Управление качеством и техническое регулирование»

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ
К САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ
«СТАНДАРТИЗАЦИЯ, МЕТРОЛОГИЯ И ПОДТВЕРЖДЕНИЕ СООТВЕТСТВИЯ»

Составитель
. Эйдельман Г.И,

Владимир 2016

МЕТРОЛОГИЯ

ЗАНЯТИЕ 1. Изучение физических величин и их единицы

Основные положения. В науке, технике и повседневной жизни человек имеет дело с разнообразными свойствами окружающих нас физических объектов. Эти свойства отражают процессы взаимодействия объектов между собой. Их описание производится посредством физических величин (ФВ). Для того чтобы можно было установить для каждого объекта различия в количественном содержании свойства, отображаемого ФВ, в метрологии введены понятия ее размера и значения.

Размер физической величины – это количественное содержание в данном объекте свойства, соответствующего понятию «физическая величина». Например, каждое тело обладает определенной массой, вследствие чего тело можно различать по их массе, т.е. по размеру интересующих нас ФВ.

Значение физической величины получают в результате ее измерения или вычисления в соответствии с основным уравнением измерения $Q = q[Q]$, связывающим между собой значение ФВ Q, числовое значение q и выбранную для измерения единицу $[Q]$. В зависимости от размера единицы будет меняться числовое значение ФВ, тогда как размер ее будет оставаться неизменным.

Размер единиц ФВ устанавливается законодательно путем закрепления определения метрологическими органами государства.

Важной характеристикой ФВ является ее *размерность* $\dim Q$ – выражение в форме степенного многочлена, отражающее связь данной величины с основными ФВ. Коэффициент пропорциональности принять равным единице:

$$\dim Q = L^{\alpha} M^{\beta} T^{\gamma} I^{\eta} \ldots,$$

где L, M, T, I – условные обозначения основных величин данной системы; α, β, γ, η - целые или дробные, положительные или отрицательные вещественные числа. Показатель степени, в которую возведена размерность основной величины, называют *показателем размерности.* Если все показатели размерности равны нулю, то такую величину называют *безразмерной.*

Размерность ФВ является более общей характеристикой, чем представляющие ее уравнение связи, поскольку одна и та же размерность может быть присуща величинам, имеющим разную качественную природу и различающмся по форме определяющего уравнения. Например, работа силы F на расстоянии L описывается уравнением $A_1 = FL$.Кинетическая энергия тела массой m, движущегося со скоростью v, равна $A_2 = m v^2 / 2$. Размерности этих качественно различных величин одинаковы.

Над размерностями можно производить действия умножения, деления, возведения в степень и извлечение корня. Понятие размерности широко используется: для перевода единиц из одной системы в другую; для проверки правильности сложных расчетных формул, полученых в результате теоретического вывода; при выяснении зависимости между величинами; в теории физического подобия.

Описание свойства, характеризуемого данной ФВ, осуществляется на языке других, ранее определяемых величин. Эта возможность обусловливается наличием объективно существующих взаимосвязей между свойствами объектов, которые, будучи переведеными на язык величин, становятся моделями, образующими в совокупности систему уравнений, описывающих данной раздел физики. Различают два типа таких уравнний:

Уравнение связи между величинами – уравнения, отражающие законы природы, в которых под буквенными символами понимаются ФВ. Они могут быть записаны в виде, не зависящем от набора единиц измерений входящих в них ФВ:

$$Q = K\, X^{a}\, Y^{b}\, Z^{g}\, \ldots$$

Коэффициент K не зависит от выбора единиц измерений, он определяет связь между величинами. Например, площадь треугольника S равна половине произведения основания L на высоту h : $S = 0{,}5\, Lh$. Коэффициент $K = 0{,}5$ появился в связи с выбором не единиц измерений, а формы самих фигур.

2. *Уравнение связи между числовыми значениями физических величин* – уравнения, в которых под буквенными символами понимают числовые значения величин, соответствующие выбранным единицам. Вид этих уравнений зависит от выбранных единиц измерения. Они могут быть записаны в виде:

$$Q = R_{t}\, K\, X^{a}\, Y^{b} Z^{g}\, \ldots,$$

где K_{e} – числовой коэффициент, зависящий от выбранной стстемы единиц. Например, уравнение связи между числовыми значениями площади треугольника и его геометрическими размерами имеет вид при условии, что площадь измеряется в квадратных метрах, а основание и высота соответственно в метрах и миллиметрах:

$S = 0{,}5\, Lh$,, т.е. $K_{e} = 1$; или $S = 0{,}5 \bullet 10^{-6}\, Lh$, т.е. $K_{t\,=}\, 10^{-6}$ м^{2}/мм^{2}.

Совокупность ФВ, образованная в соответствии с принципами, когда одни величины принимаются за независимые, а другие являются их функциями, называется *системой физических величин*.

Обоснованно, но произвольным образом выбираются несколько ФВ, называемые *основными.*Основные величины, называемые *производными,* выражаются через основные на основе известных уравнений связи между ними. Примерами производных величин могут служить: плотность вещества, определяемая как масса вещества, заключенного в единице объема; ускорение – изменение скорости за единицу времени и др.

Совокупность основных и производных единиц ФВ, образования в соответствии с принятыми принципами, называется *системой единиц физических величин*. Единица основной ФВ является *основной единицей* данной *системы*. В Российской Федерации используется система единиц СИ, введенная ГОСТ 8.417 – 81. В качестве основных единиц приняты метр, килограмм, секунда, ампер, кельвин, моль и канделла (табл. 2.1.1).

Таблица 2.1.1

Величина			Единица		
				Обозначение	
Наименование	Размерность	Рекомендуемое	Наименование	Русское	Международное
	Основные				
Длина	L	l	метр	м	m
Масса	M	m	килограмм	кг	kg
Время	T	t	секунда	с	s
Сила электрического тока	I	I	ампер	А	A
Термодинамическая температура	Q	T	кельвин	К	K
Количество вещества	N	n, v	моль	моль	mol
Сила света	J	J	канделла	кд	cd
	Дополнительные				
Плоский угол	-	-	радиан	рад	rad
Телесный угол	-	-	стерадиан	ср	sr

Наряду с основными единицами физических велмчин в системе СИ по количеству производных ФВ используются производные единицы ФВ.

Производная единица – это единица производной ФВ системы единиц, образованная в соответствии с уравнениями, связующими ее с основными единицами или же с основными и уже определенными производными.

Производные единицы системы СИ образуются на основании законов, устанавливающих связь между ФВ, или на основании определений ФВ. Часть производных единиц СИ имеют специальные наименования, например, ньютон, герц, паскаль и другие. Производные единицы системы СИ, имеющие собственные (специальные) название, приведены в табл. 2.1.2.

Таблица 2.1.2

Величины		Единица		
Наименование	Размер-ность	Наимно-вание	Обозна-чение	Выражение через единицы СИ
Частота	T^{-1}	герц	Гц	$с^{-1}$
Сила, вес	LMT^{-2}	ньютон	Н	м кг $с^{-2}$
Давление, механическое напряжение	$L^{-1}MT^{-2}$	паскаль	Па	$м^{-1}$ кг $с^{-2}$
Энергия, работа, количество теплоты	$L^{2}MT^{-2}$	джоуль	Дж	$м^{2}$ кг $с^{-2}$
Мощность	$L^{2}MT^{-2}$	ватт	Вт	$м^{2}$ кг $с^{-1}$
Количество электричества	TI	кулон	Кл	с А
Электрическое напряжение, потенциал, электродвижущая сила	$L^{2}MT^{3}T^{-1}$	вольт	В	$м^{2}$ кг $с^{-3}$ $А^{-1}$
Электрическая емкость	$L^{-2}M^{-1}T^{4}I^{2}$	фарад	Ф	$м^{-2}$ $кг^{-1}$ $с^{4}$ $А^{2}$
Электрическое сопротивление	$L^{2}MT^{-3}I^{-2}$	ом	Ом	$м^{2}$ кг $с^{-3}$ $А^{2}$
Электрическая проводимость	$L^{-2}M^{-1}T^{3}I^{2}$	сименс	См	$м^{-2}$ $кг^{-1}$ $с^{3}$ $А^{2}$
Поток магнитной индукции	$L^{2}MT^{-2}I^{-1}$	вебер	Вб	$м^{2}$ кг $с^{-2}$ $А^{-1}$
Магнитная индукция	$MT^{-2}I^{-1}$	тесла	Тл	кг $с^{-2}$ $А^{-2}$
Индуктивность	$L^{2}MT^{-2}I^{-2}$	генри	Гн	$м^{2}$ кг $с^{-2}$ $А^{-2}$
Световой поток	J	люмен	лм	кд ср
Освещенность	$L^{-2}J$	люкс	лк	$м^{-2}$ кд ср
Активность радионуклида	T^{-2}	беккерель	Бк	$с^{-1}$
Поглощенная доза ионизирующего излучения	$L^{2}T^{-2}$	грей	Гр	$м^{2}$ $с^{-2}$
Эквивалентная доза излучения	$L^{2}T^{-2}$	зиверт	Зв	$м^{2}$ $с^{-2}$

Для установления производных единиц следует: выбрать ФВ, единицы которых принимаются в качестве основных; установить размер этих единиц; выбрать определяющее уравнение, связывающее величины, измеряемые основными единицами, с величиной, для которой устанавливается производная единица (при этом символы всех величин, входящих в определяющее уравнение, должны рассматриваться не как сами величины, а как их именованные числовые значения); приравнять единице (или другому постоянному числу) коэффициент пропорциональности K_e , входящий в определяющее уравнение (это уравнение следует записать в виде явной фукциональной зависимости производной величины от основных).

В практике часто используются кратные и дольные единицы, в целое число раз большие или меньшие основных или производных ФВ, например, килограмм, мегагерц, микросекунда и др.

Множители и приставки для образования десятичных кратных и дольных единиц и их наименований приведены в табл. 2.1.3.

Таблица 2.1.3

Множитель	Приставка	Обозначение приставки		Множитель	Приставка	Обозначение приставки	
		международное	русское			международное	русское
10^{18}	экса	E	Э	10^{-1}	деци	d	д
10^{15}	пета	H	П	10^{-2}	санти	c	с
10^{12}	тера	T	Т	10^{-3}	милли	m	м
10^{9}	гига	G	Г	10^{-6}	микро	μ	мк
10^{6}	мега	M	М	10^{-9}	нано	n	н
10^{3}	кило	k	к	10^{-12}	пико	p	п
10^{2}	гекто	n	г	10^{-15}	фемто	f	ф
10^{1}	дека	da	да	10^{-18}	атто	a	а

Рассмотрим несколько примеров полного и краткого русского написания единиц ФВ с использованием кратных и дольных приставок:: тераОм (ТОм); гигаГц (ГГц); мегатон (Мт); килограмм (кг); гектар (га); декалитр (дал); дециметр (дм); сантивебр (сВб); миллиампер (мА); микровольт (мкВ); нанофарада (нФ); пикогенри (пГн); фемтоджоуль (фДж); аттоватт (аВт).

При наименовании, соответствующем произведению единиц с кратными или дольными приставками, рекомендуется приставку присоединять к наименованию первой единицы, входящей в произведение. Например, 10^3 единиц момента силы – ньютон-метров – следует именовать «килоньютон-метр», а не «ньютон-километр». Записывается это следующим образом: Кн м, а не Н км.

Рабочее задание. Ответить на вопросы для самопроверки.

1. Дайте определение физической величины. Приведите примеры физических величин, относящихся к механике, оптике, магнетизму и электричеству.

2. Что такое размерности физических величин? Запишите размерность следующих величин: пвскаль, генри, фарады и вольта.

3. Дайте определение системы физических величин и системы единиц физических величин. Приведите примеры основных и производных физических величин и единиц.

4. Сформулируйте основные принципы построения систем единиц физических величин.

5. Назовите производные единицы системы СИ, имеющие специальные названия.

6. Назовите приведенные значения физических величин, используя кратные и дольные приставки: 5,3 10^{12} Ом; 10,4 10^9 Гц; 0,67 м; 0,098 с; 7,65 10^{-3} с; 12,3 10^{-13} Ф.

Контрольные задания.

1. Получить производные единицы СИ для следующих механических величин: площадь, линейная скорость и сила.

Решение. а) Уравнение, определяющее площадь прямоугольника со сторонами длинной l и b,

$$S = I\ b.$$

Определение размерности площади

$$[S] = [I]\ [b] = м \bullet м = м^2$$

Уравнение размерности:

$$\dim S = L^1\ \ L^1 = L^2.$$

б) Уравнение, определяющее линейную скорость тела, которое при равномерном движении прошло расстояние 1 за время t

$$V = I\ /\ t\ .$$

Определение размерности скорости

$$[V] = [I]\ /\ [t] = м/с.$$

Уравнение размерности

$$\dim V = L\ T^{-1}.$$

в) Уравнение, определяющее силу, заставляющую двигаться тело массой m с ускорением a

$$F = m\ \ a.$$

Ускорение – это изменение скорости за единицу времени

$$a = dV/dt.$$

Размерность ускорения – $м/с^2$.

Определение размерности силы

$$[F] = [m]\ [a] = кг \bullet м/с^2 = Н.$$

Уравнение размерности силы

$$\dim F = L\ M\ T^{-2}.$$

2. Получить производные единицы СИ для следующих механических величин: объем V, частота f, ускорение a, угловая скорость ω, плотность ρ, количество движения P, момент инерции J, удельный вес γ, момент силы M, импульс силы J, давление p, работа A и энергия W, мощность P.

3. Получить производные единицы СИ для следующих тепловых величин: количество теплоты Q, теплоемкость C, удельная теплоемкость c, тепловой поток Ф, коэффициент теплообмена α, коэффициент теплопрово дности γ .

4. Получить производные единицы СИ для следующих электрических величин: плотность электрического тока δ, количество электричества Q, электрический потенциал ϕ, напряжение U, ЭДС, напряженность электрического поля E, емкость C, абсолютная $\varepsilon_а$ и относительная ε диэлектрические

проницаемости, сопротивление R., проводимость g, удельное электрическое сопротивление ρ, активная P, реактивная Q и полная S мощности.

5. Получить производные единицы СИ для следующих магнитных величин: магнитный поток Ф, индукция B, магнитодвижущая сила F, напряженность магнитного поля H, индуктивность L, абсолютная μ_a и относительная μ магнитные проницаемости, намагниченность M.

6. Получить производные единицы СИ для следующих акустических величин: звуковое давление P, объемная скорость звука V акустическое сопротивление Z, поток звуковой энергии Ф, интенсивность звука 1, плотность звуковой энергии E.

7. Получить производные единицы СИ для следующих световых и энергетических величин, характеризующих оптическое излучение: световой поток Ф, световая энергия Q, светимость M, освещенность E, яркость L, поток излучения Ф.

8. Получить производные единицы СИ, имеющие специальное назначение.

Решение для единицы магнитной индукции – теслы.

Магнитная индукция B равна отношению силы dF, действующей со стороны магнитного поля на малый элемент проводника с электрическим током, к произведению силы тока 1 на длину этого элемента Di

$$B = Df / (I\ dI).$$

Определение размерности магнитной индукции с учетом того, что ньютон равен м$\bullet$кг / с^2;

$$B = dF / (I\ dI) = Н / (А \bullet м) = м \bullet кг / (А \bullet м \bullet с^2) = кг / (А \bullet с^2).$$

Уравнение размерности

$$\dim B = кг \bullet А^{-1} \bullet с^{-2}.$$

9. Допускаемая угловая скорость в зубчатой передаче равна 1650 об/мин. Выразить это значение в единицах системы СИ.

Решение. В системе СИ угловая скорость измеряется в рад/с.

$$1\ об/с = 2\ \pi\ рад/с = 60\ об/мин.$$

Отсюда 1 об/мин = 2π/60 рад/с = 0,1047 рад/с. Поэтому допустимая угловая скорость в зубчатой передаче равна 173 рад/с.

10. Модуль продольной упругости легированных сталей находится в пределах (19,5…21,2) 10^3 кгс/мм. Выразить граничные и среднее значения модуля упругости в единицах СИ.

11. Измерительное усилие индикатора часового типа с ценой деления 10 мм составляет (60 – 180) гс. Выразить его в единицах СИ.

12. Погрешность мембранного преобразователя давления составляет 5 мм водяного столба. Выразить погрешность в единицах СИ.

Решение. Столб жидкости или газа, находясь в однородном поле тяготения, создает давление, обусловленное весом этого столба, равное

$$\Delta P = \rho\ g\ h$$

где ρ - плотность воды, равная 1000 кг/м^3 ; g – ускорение свободного падения, равное 9,81 м/с^2 ; h – высота столба.

Погрешность в единицах СИ равна

Δ P = 1000 кг/м$^3 \bullet$ 9,81 м/с$^2 \bullet$ 0,005 м = 49,05 кг/ (м$\bullet$с^2) = 49,05 кг$\bullet$м / (с$^2 \bullet$м^2) = = 49,05 Н / м^2 = 49,05 Па.

13. Атмосферное давление составляет 742 мм ртутного столба. Выразить это давление в мм водяного столба, атмосферных и единицах СИ. Плотность ртути равна 13595 кг / м^2.

14. Скорость автомобиля в различные моменты движения составила 5; 11,2; 25,4 м/с. Какие значения показывает спидометр, отградуированный в км/ч.

Решение.

Для нахождения значения скорости автомобиля фактически во внесистемной единице измерения «км/ч», состоящей из кратной множителю 10^3 единицы измерения длины в системе СИ «метр» (это соответствует километру) и внесистемной единице измерения системы СИ времени «час», необходимо производную единицу измерения «м/с» перевести, используя указанные кратную и внесистемную ее составляющие, но внесистемную единицу «км/ч». Зная, что 1 метр равен 1$\bullet$10^{-3} километра и что 1 часу соответствует 3600 чекунд, получим:

$$1 \text{ м/с} = (1 \bullet 10^{-3} \text{ км}) / (1/3600 \text{ ч}) = 3{,}6 \text{ км/ч}.$$

15. Скорость вращения вала трехскоростного асинхронного электродвигателя на холостом ходу составляет на первой скорости 3000 об/мин, на второй – 1500 об/мин, на третьей – 750 об/мин. Найти частоту вращения в рад/с.

16. При испытании автомобиля ВАЗ- 2108 было установлено, что мощность его двигателя составила 62 лошадиных силы. Определить мощность в единицах СИ (1 кВт = 1,36 л.с.).

17. Фирмой израсходовано 17,174 ГДж электрической энергии. Выразить расход энергии в кВт$\bullet$ч, (1 Дж = 1 Вт$\bullet$с).

18. Записать правильно и обосновать необходимые исправления в следующих записях, сделанных при метрологической экспертизе нормативно-технической документации: а) 8,6 кг с$^{-2}$ м$^{-1}$; б) 2,56 Н$\bullet$м; в) 0,15 мкм и 0,3 мкм; г) 97$\pm$5 нФ; д) 5 кг/ (с^{2}м); е) 15 микрокилограмм.

Решение.

а) В записи 8,6 кг с$^{-2}$ м$^{-1}$ не соблюдена последовательность записи основных единиц измерения в соответствии с последовательностью, представленной в системе СИ. *Правильная запись*: 8,6 м$^{-1}$ кг с$^{-2}$.

б) В записи 2,56 Н м соблюдена последовательность записи основных единиц измерения в соответствии с последовательностью, представленной в системе СИ, и использовано сочетание производной единицы измерения (Н) и основной (м). *Правильная запись*: 2,56 м^{2} кг с$^{-2}$ или 2,56 Дж, т.к. джоуль производная единица системы СИ, имеющая специальное название.

в) В записях 0,15 мкм и 0,3 мкм использована дольная приставка (см. табл.2.1.3) мк (микро), которая недопустима в нормативно-технических документах. *Правильная запись*: $15 \bullet 10^{-8}$ м и $3 \bullet 10^{-7}$ м.

г) В записи 97 $\pm$5 нФ использована дольная приставка (см.табл.2.1.3) «н» (нано), которая недопустима в нормативно-технических документах. *Правильная запись*: $(97 \pm 5)\ 10^{-9}$ Ф или 97 ± 5 м$^{-2}$ кг$^{-1}$ с^{4} А^{2} (см.табл. 2.1.2).

д) В записи 5 кг/ (с^{2} м) не соблюдена последовательность, представленной в табл. 2.1.1, а также не использованы знаки математической операции умножения. *Правильная запись*: 5 м$^{-1}$кг с$^{-2}$.

е) В записи 15 микрокилограммов использована запись полного наименования дольной приставки (см.табл. 2.1.3) «микро) и полное наименование основной единицы системы СИ «килограмм» (см.табл.2.1.1). *Правильная запись*: $15 \bullet 10^{-6}$ кг.

19. Записать правильно и обосновать необходимые исправления в следующих записях, сделанных при метрологической экспертизе нормативно-технической документации: 220 В; $18^{0}27^{/}$; $28^{//}$,8; 57 ± 2 К; 118 Н$\pm$3Н; при напряжении 110 В, 127 В и 220 В; от – 5 мм до + 8 мм; 2 м^{2} кг/с/ А; 8,6 кг/ м с.

ЗАНЯТИЕ 2. Изучение погрешностей по форме числового выражения

Основные положения. При анализе результатов измерений и их погрешностей следует четко раз-личать три понятия: истинное и действительное значение измеряемой физиче-ской величины, а так же результат измерения. Истинное значение ФВ – это значение, идеальным образом отражающее свойство данного объекта как в количественном, так и в качественном отношении. Оно не зависит от средств нашего познания и является той абсолютной истиной, к которой мы стремится, пытаясь выразить ее в виде числовых значений.

Результаты измерений представляют собой приближенные оценки значений величин, найденные путем измерения. Разница Δ между результатами измерения $x_{изм}$ и истинным (действительным) $x_{и}$ ($x_{д}$) значением измеряемой величины называется погрешностью измерения

$$\Delta x_{изм} = x - x_и \, (x_д) \, .$$

Поскольку истенное значение измеряемой величины неизвестно, то неизвестна и погрешность. Поэтому для получения хотя бы приближенных сведений о них приходится в эту формулу вместо истинного значения подставлять действительное значение – значение ФВ, найденное экспериментально и настолько приближающееся к истинному, что для данной цели оно может быть использовано вместо него.

В зависимости от формы выражения различают абсолютную, относительную и приведенную погрешности измерения.

Абсолютная погрешность определяется как разность $\Delta = x - x_и$ или $\Delta = x - x_д$, а *относительная – как отношение*

$$\delta = \pm(\Delta / x_и)\, 100\% \quad \text{или} \quad \delta = \pm(\Delta / x_д)\, 100\%.$$

Предельная погрешность $\gamma = \pm(\Delta / x_N)\, 100\%$, где x_N – нормированное значение величины. Например $x_N = x_{max}$, где x_{max} – максимальное значение измеряемой величины.

По зависимости абсолютной погрешности от значений измеряемой величины погрешности разделяются на аддитивные $\Delta_а$, не зависящие от значения *x*, мультипликативные $\Delta_м$, прямо пропорциональные *x*, и нелинейные, обычно пропорциональные x^2.

В зависимости от влияния характера измерения измеряемых величин погрешности делят на статические и динамические. *Статическая* погрешность – погрешность средства измерений, принимаемого для измерения величины, принимаемой за неизменную.

Динамическая погрешность – погрешность, возникающая дополнительно при измерении переменной величины и обусловленная несоответствием его реакции на скорость (частоту) измерения измеряемого сигнала.

Поскольку погрешности измерений определяют лишь зону неопределенности результатов, их не требуется знать очень точно. В окончательной записи погрешность измерения принято выражать числом с одним или двумя значащими цифрами. Эмпирически были установлены следующие правила округления рассчитанного значения погрешности и полученного результата измерения.

1. Погрешность результата измерения указывается двумя значащими цифрами, если первая из них равна 1 или 2, и одной – если первая есть 3 или более.

2. Результат измерения округляется до того же десятичного знака, которым оканчивается округленное значение абсолютной погрешности. Если десятичная дробь в числовом значении результата измерений оканчивается

нулями, то нули отбрасываются до того разряда, который соответствует разряду числового значения погрешности.

3. Если цифра старшего из отбрасываемых разрядов меньше 5, то остальные цифры числа не изменяются. Лишние цифры в целых числах заменяются нулями, а в десятичных дробях отбрасываются.

4. Если цифры старшего из отбрасываемых разрядов больше или равна пяти, но за ней следует отличные от нуля цифры, то последнюю оставляемую цифру увеличивают на единицу.

5. Если отбрасываемая цифра равна 5, а следующие за ней цифра неизвестны или нули, то последнюю сохраняемую цифру числа не изменяют, если она четная, и увеличивают на единицу, если она нечетная.

6. Округление производится лишь в окончательном ответе, а все предварительные вычисления проводят с одним – двумя лишними знаками.

Если руководствоваться этими правилами, то число значащих цифр в числовом значении результата измерений дает возможность ориентировочно судить о точности измерения. Для этого нужно заметить, что предельная погрешность, обусловленная округлением, равна половине единицы последнего разряда числового значения результата измерения.

Рабочее задание. Ответить на вопросы для самопроверки.

1. Дайте определения понятий «истинное» и «действительное» значения измеряемой величины.

2. Объясните термины «точность измерения» и «погешность измерения».

3. Дайте классификацию погрешностям измерения.

4. Что такое абсолютная, относительная и приведенная погрешности

5. Дайте классификацию абсолютной погрешности от зависимости значений и влияния характера измерения измеряемых величин.

6. Почему относительную и приведенную погрешности выражают в процентах.

7. Объясните правила округления рассчитанного значения погрешности и полученного результата измерения.

Контрольные задания.

1. Диаметр цилиндрической детали измерен линейкой, штангенциркулем и микрометром. Соответственно были получены следующие результаты: 8,0; 7,8; и 7,76 мм. Найти абсолютные и относительные погрешности измерения, если действительные значения диаметра 7,750 мм.

2. Напряжение прецизионного источника Э.Д.С., равное 10,00 В, измерено при помощи вольтметров различных классов точности. Полученные результаты: 10,2; 9,9; 10,07; 10,053 В. Определить абсолютную и относительную погрешности.

3. Согласно техническим условиям на изготовление резисторов типа ОМЛТ разброс значений сопротивления в партии относительного номинального значения $R_н$ не должен превышать $\pm 5\%$. При выборочных измерениях значений десяти сопротивлений получены следующие результаты: 96,31; 99,01; 107,34; 100,57; 98,37; 98,54; 104,91; 101,08; 103,01; 95,51 Ом. Определить, попадают ли измеренные сопротивления в разрешающий допуск, если $R_н$ = 100 Ом.

4. При поверке измерителя иммитанса Е7-14 проводились измерения выборочных значений сопротивлений $R_э$ прецизионного магазина сопротивлений: 100; 200; 300; 400; 500; 600; 700; 800; 900; 1000; 1100 Ом. Измеритель Е7-14, работающий в режиме измерения сопротивлений, соответственно показал следующие значения сопротивления : 101,0; 197,7; 294,4; 391,1; 487,8; 584,5; 681,2; 777,9; 874,6; 971,3; 1068,0 Ом. Определить абсолютную и относительную погрешности измерения. Выделить из них аддитивную и мультипликативную составляющие. Получить аппроксимации зависимостей $\delta = f(R_Э)$; $\Delta = f(R_э)$; $\delta_а = f(R_э)$; $\Delta_а = f(R_э)$; $\delta_м = f(R_э)$; $\Delta_м = f(R_э)$.

5. Решить задачу 4, если измеренные значения сопротивления равны: 106,0; 205,5; 305,0; 404,5; 504,0; 603,5; 703,0; 802,5; 902,0; 1001,5; 1101,0 Ом.

6. Решить задачу4, если измеренные значения сопротивления равны: 101,0; 201,5; 302,0; 402,5; 503,0; 603,5; 704,0; 804,5; 905,0; 1005,5; 1106,0 Ом.

7. При поверке измерителя емкости марки Е8-4 проводились измерения выборочных значений емкости С, прецизионного магазина емкостей: 1,0; 2,0; 5,0; 8,0; 10,0; 15,0; 20,0; 25,0; 30,0 Нф. Прибор Е8-4 соответственно показал следующие значения емкости Си: 1,010; 2,022; 5,071; 8,138; 10,193; 15,367; 20,593; 25,871; 31,200 Нф. Определить абсолютную и относительную погреiyjcnb измерения. Выделить из них аддитивную и мультипликативную составляющие. Получить аппроксимации зависимостей $\delta = f(C_э)$; $\Delta = f(C_э)$; $\delta_а = =(Cэ)$; $\Delta_а = f(C_э)$; $\delta_м = f(C_э)$; $\Delta_м = f(C_э)$.

8. Абсолютная погрешность измерения значений x задается уравнением

$$\Delta = \Delta_а + \Delta_м [(x - x_н) / (x_к - x_н)].$$

где $\Delta_а$ – аддитивная составляющая; $\Delta_н$ – значение мультипликативная составляющей при $x = x_к$; $x_н$, $x_к$ – начальное и конечное значения диапазона измерения измеряемой величины x. Проанализировать заданное уравнение и построить зависимости $\Delta(x)$ и $\delta(x)$ при $x_н = 1$; $x_к = 11$ для случаев:

а) $\Delta_а = \pm 1$; $\Delta_м = 5$; б) $\Delta_а = \pm 1$; $\Delta_м = -5$; в) $\Delta_а = \pm 0{,}1$; $\Delta_м = 2$; г) $\Delta_а = \pm 0{,}1$; $\Delta_м = -2$; $\Delta_а = \pm 5$.

9. При измерении напряжения получено значение 85,6362 В. Записать результат измерения, если абсолютная погрешность измерения равна: а) 0,04 В; Б) 0,012 В.

Решение.

а) При погрешности, равной 0,04 В, результат измерения округляется до второго (после запятой) десятичного разряда. При этом цифра 3 увеличивается на единицу, так как после нее стоит цифра, большая 5. Результат измерения равен 85,64 В.

б) При погрешности, равной 0,012 В, результат измерения округляется до третьего (после запятой) знака. Он равен 85,636 В.

10. Действительное значение массы объекта равно 165245,553 кг. Записать результат измерения этой массы, произведенные средствами измерений, имеющими абсолютную погрешность, равную: а) 10 г; б) 0,2 кг; в) 1 кг; г)5 кг; д) 12 кг; е) 35 кг; ж) 200 кг; з)800 кг.

11. Действительное значение длины интервала равно 152,3873 м. Записать значение результата измерений, если погрешность измерения составлсет: а) 1 м; б) 50 см; в) 12 см; г) 5 см; д) 0,1 см; е) 5 мм; ж) 0,2 мм.

12. Действительное значение напряжения источника Э Д С составляет 10,2417 В. Записать значение результата измерений, если относительная погрешность измерения составляет: а) 2%; б) 1%; в)0,5%; г) 0,1%; д) 0,03%; е) 0,01%.

13. Определить предельные, абсолютную и относительную погрешности округления, если получены следующие результаты измерений: а) 1352 м; б) 627 м; в) 13,5 м; г) 37 м; д) 1,5 м; е) 0,27 м; ж) 0,02 м.

ЗАНЯТИЕ 3. Выявление и исключение грубых погрешностей

Основные положения. Грубая погрешность или промах – это погрешность результата отдельного измерения, входящего в ряд измерений, которая для данных условий резко отличается от остальных результатов этого ряда.

Источником грубых погрешностей нередко бывают промахи, допущенные оператором во время измерений. К ним можно отнести:

1. Неправильный отсчет по шкале измерительного прибора, происходящий из-за неверного учета цены малых делений шкалы;

2. Неправильная запись результата наблюдений, неправильная запись значений отдельных мер используемого набора, например гирь.

Грубые погрешности, как правило, возникают при однократных измерений и обычно устанавливаются путем повторных измерений. Их причинами могут быть внезапные и кратковременные изменения условий измерения или оставшиеся незамеченными неисправности в измерительной аппаратуре.

Вопрос о том, содержит ли результат наблюдений грубую погрешность, решается общими методами проверки статистических гипотез. Проверяемая гипотеза состоит в утверждении, что результат наблюдения не содержит грубых промахов, т.е. является одним из значений измеряемой величины. Пользуясь определенными статистическими критериями, пытаются опроверо-вергнуть выдвинутую гипотезу. Если это удается, то результат наблюдений рассматривают, как содержащий грубую погрешность, если нет – то не исключает.

Для выявления грубых погрешностей задаются вероятностью α того, что сомнительный результат действительно мог иметь место в данной совокупности результатов измерений. Эту вероятность называют уровнем значимости: $\alpha = 1 - \text{р}$. Обычно α выбирают равным 0,100; 0,050.

Тае как в подавляющем большинстве случаев действительные значения параметров законов распределения результатов наблюдений и их погрешно-стей неизвестны, то мы рассмотрим здесь лишь критерии, основанные на статистических оценках этих параметров[9; 10]. Рассмотрим некоторые из сущест-вующих критериев.

Критерий Граббса. Он применяется для нормально распределенных результатов измерений. Задавшись уровнем значемости α, по табл.2.2.1 с учетом числа измерений n находят t_r. Его сравнивают с вычислениыми значениями t, которые определяют по формуле:

$$t = [\max (x_i - x_{ср.})] / \sigma$$

где x_i – результаты измерений; $x_{ср.}$ – среднее арифмеимческое значение результатов измерений; σ - среднеее квадратическое отклонение результата измерений. $x_{ср.}$ и σ находят по следующим формулам

$$x_{ср.} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) / \text{n}. \qquad (2.3.1)$$

$$\sigma = \sqrt{} \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{ср.})^2 / (\text{n} - 1). \qquad (2.3.2)$$

Если окажется, что $t<t_r$, то в результатах отсутствует грубая погрешность, в противном случае ($t>t_r$) результат содержит грубую погрешность и его из обработки исключают.

Таблица 2.3.1

Число наблюдений, n	Уровень значимости, α, %				
	0,1	0,5	1	5	10
3	1,414	1,414	1,414	1,414	1,412
4	1,732	1,730	1,728	1,710	1,689
5	1,994	1,982	1,972	1,917	1,869
6	2,212	2,183	1,161	2,067	1,996
7	2,395	2,344	2,310	2,182	2,093

8	2,547	2,476	2,431	2,273	2,172
9	2,677	2,586	2,532	2,349	2,238
10	2,788	2,680	2,616	2,414	2,294
11	2,884	2,760	2,689	2,470	2,343
12	2,969	2,830	2,753	2,519	2,387
13	3,044	2,892	2,809	2,563	2,426
14	3,111	2,947	2,859	2,502	2,461
15	3,171	2,997	2,905	2,538	2,494
16	3,225	2,042	2,946	2,670	2,523
17	3,274	3,083	2983	2,701	2,551
18	3,320	3,120	3,017	2,728	2,577
19	3,361	3,155	3,049	2,754	2,601
20	3,400	3,187	3,079	2,779	2,623
21	3,436	3,217	3,106	2,801	2,644
22	3,469	3,245	3,132	2,823	2,664
23	3,500	3,271	3,156	2,843	2,683
24	3,529	3,295	3,179	2,862	2,701
25	3,556	3,318	3,200	2,880	2,718
26	3,582	3,340	3,220	2,897	2,734
27	3,606	3,360	3,239	2,913	2,749
28	3,629	3,380	3,258	2,929	2,764
29	3,651	3,399	3,275	2,944	2,778
30	3,672	3,416	3,291	2,958	2,792

Критерий 3σ. Он применяется для результатов измерений, распределенных по нормальному закону. В этом случае считается, что результат, возникающий с вероятностью $\alpha \le 0{,}003$, мало вероятен и его можно квалифицировать промахами, т.е. сомнительный результат x_i отбрасывается, если

$$1\, x_{ср.} - x_i\, 1 > 3\sigma.$$

Величины $x_{ср.}$ и σ вычисляют по формулам (2.3.1) и (2.3.2) соответственно, без учета взятого x_i . Данный критерий надежен при числе измерений $n \ge 20 \ldots 50$.

Критерий Романовского. Его применяют, если n<20. При этом вычисляют отношение $(x_{ср.} - x_i)/\sigma \ge \beta$ и вычисленное значение β сравнивают с теоретическим $\beta_г$ – при выбираемом уровне значимости α по табл. 2.3.2.

Таблица 2.3.2

Вероятность, α	Число измерений						
	n = 4	n = 6	n = 8	n = 10	n = 12	n = 15	n = 20
0.01	1.73	2.16	2.43	2.62	2.75	2.90	3.08
0.02	1.72	2.13	2.37	2.54	2.66	2.80	2.96
0.05	1.71	2.10	2.27	2.41	2.52	2.64	2.78
0.10	1.69	2.00	2.17	2.29	2.39	2.49	2.62

Обычно выбирают $\alpha = 0{,}01 - 0{,}05$, если $\beta \geq \beta_{табл.}$ то результат отбрасывается.

Критерий Шарлье. Если число результатов наблюдений в ряде велико (n>20), то по теореме Бернулли число результатов, привышающих по абсолютному значению $К_ш \sigma$ среднее арифметическое значение, будет $n\,[1 - Ф(К_ш)\,]$, где $Ф(К_ш)$ – значение нормированной функции Лапласа для $X = К_ш$.

Если сомнительным в ряду результатов наблюдений является один результат, то $n[1 - Ф(К_ш)] = 1$. Отсюда $Ф(К_ш) = (n - 1)/\,n$. Критические значения критерия Шарлье приведены в табл.2.3.3.

Таблица 2.3.3

n	5	10	20	30	40	50	100
$К_ш$	1,3	1,65	1,36	2,13	2,24	2,32	2,58

Пользуясь критерием Шарлье, мы отбрасываем результат, для значения которого в ряду из n наблюдений выполняется неравномерно

$$1\, x_i - x_{ср.}\, 1 > К_ш\ \sigma.$$

Критерий Шовенэ. При малых n (т.е. n <20) применяют критерий Шовенэ, основанный на тех же предпосылках, что и критерий Шарлье.

Критическая область для этого критерия определяется неравенством

$$Ф(Z_ш) > (2n - 1)\,/\,2n.$$

Результаты, для значений которых в ряду из n наблюдений выполняется неравенство

$$1\, x_i - x_{ср.}\, 1 > Z_ш \sigma$$

отбрасываются как промахи. Исключение результатов выполняются в следующей последовательности. Сначала отбрасывают один результат с наибольшим по модулю отклонением от $x_{ср.}$ и снова подсчитывают σ. Если и в этом случае критерий Шовенэ нарушается, то исключают следующий с наибольшим отклонением результата, снова вычисляют σ и повторяют прежнюю процедуру. Значения критерия Шовенэ приведены в табл.2.3.4

Таблица 2.3.4

n	3	4	5	6	7	8	9
$Z_ш$	1,38	1,53	1,65	1,73	1,80	1,86	1,92

n	10	12	14	16	18	20	25	30
$Z_ш$	1,96	2,03	2,10	2,15	2,20	2,24	2,31	2,39

Вариационный критерий Диксона. Это чрезвычайно удобный и достаточно мощный (с малыми вероятностями ошибок) критерий. Для пользования им полученные результаты наблюдений записывают в вариационный возраста-.ющий ряд $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(x_1 < x_2 < \ldots x_n)$.

Критерий Диксона определяют как $К_д = (x_n – x_{n-1}) / (x_n – x_1)$

Критическая область для этого критерия $P(К_д > Z_q) = \alpha$. Значения Z_q помещены в табл. 2.3 .5.

Применение рассмотренных критериев требует осмотрительности и учета объективных условий измерений. Конечно, оператор должен исключить результат наблюдения с явной грубой погрешностью и выполнить новое измерение. Но он не имеет права отбрасывать более или менее резко отличающиеся от других результатов наблюдений. В сомнительных случаях лучше сделать дополнительные измерения (не взамен сомнительных, а кроме них) и затем привлекать на помощь рассмотренные выше статистические критерии.

Таблица 2.3.5

n	Z_q при α			
	0,10	0,05	0,02	0,01
4	0,68	0,76	0,85	0,89
5	0,56	0,64	0,73	0,78
6	0,48	0,56	0,64	0,70
7	0,43	0,51	0,60	0,64
8	0,40	0,47	0,54	0,59
9	0,87	0,44	0,51	0,56
10	0,35	0,41	0,48	0,53
12	0,32	0,38	0,44	0,48
14	0,29	0,35	0,41	0,45
16	0,28	0,33	0,39	0,43
18	0,26	0,31	0,37	0,41
20	0,24	0,30	0,36	0,39
25	0,23	0,28	0,33	0,36
30	022	0,26	0,31	0,34

Рабочее задание. Изучить основные критерии, используемые для обнаружения наличия в ряде измерений грубых погрешностей и промахов.

Контрольные задания.

1. Определить, содержится ли грубая погрешность в следующих результатах шестикратного взвешивания: 72,361; 72,357; 72,352; 72,346; 72,344; 72,340 г при доверительной вероятности р = 0,90.

Решение: Определяем среднее арифметическое результатов измерений и среднее квадратическое отклонение результата измерений по формулам (2.3.1) и (2.3.2) соответственно. $x_{ср.}$ = 72,350 г , σ = 0,0081 г, вычисляем

$$t = (72,361 – 72,350) / 0,0081 = 1,375.$$

При α = 0,1 и n = 6 из табл.2.3.1 найдем $t_{табл}$ = 2,996. Следовательно, грубых погрешностей в результатах измерений нет.

2. Определение магнитных потерь для разных образцов некоторой партии трансформаторной стали дало следующие результаты: 12,0; 11,7; 11,8; 11,3; 11,9; 11,4; 12,0; 11,8 Вт/кг. Вычислить средние потери данной партии стали и С.К.О. Распределение результатов считать неизвестными. Проверить ряд результатов на отсутствие промахов, пользуясь разными критериями.

3. Измерение индуктивности катушки на высокой частоте дали следующие результаты: 162; 160; 156; 166; 158; 164; 145; 162; 160; 154; 158 мГн. Проверить полученный ряд результатов на отсутствие промахов, пользуясь различными критериями.

4. При измерении напряженности электромагнитного поля радиостанции получены следующие значения: 230; 260; 240; 170; 250; 200; 220; 280; 260; 310 мкВ/м. Проверить ряд на отсутствие промахов, используя различные критерии.

5. Измерения добротности катушки дали следующие результаты: 155; 140; 130; 110; 95; 125; 120; 80; 130; 115. Проверить ряд на отсутствие промахов, используя различные критерии.

6. При диагностировании топливной системы автомобиля результаты пяти измерений расхода топлива составили 22, 24,26,28 и 48 л/100 км. Определить, является ли последний результат промахом используя критерий Рамановского.

7. Измерение силы тока дало следующие результаты: 10,07; 10,08; 10,10; 10,12; 10,13; 10,15; 10,16; 10,07; 10,20; 10,40 А. Необходимо проверить, не является ли промахом значение 10,40 А?

Решение. Оработка данных приводит к значениям: $x_{ср.}$ = 10,16 А; σ = 0,094 А. По критерию Шовенэ 1 10,16 – 10,40 1 = 1 0,24 > 2 0,094. Поэтому результат 10,40 является промахом.

8. Было проведено пять измерений напряжения в электросети. Результаты наблюдений представлены рядом 127,1; 127,2; 126,9; 127,6; 127,2 В. Результат 127,6 В существенно (на первый взгляд) отличается от остальных. Проверить, не является ли он промахом.

Решение. Используем критерий Гибса. Среднее арифметическое значение и среднее квадратическое отклонение для представленного ряда

$$x_{ср.} = 127,20 \text{ В и } \sigma = 0,25 \text{ В}.$$

Тогда значение $К_г$ для x = 127,6 В.

$$К_г = (127,6 – 127,2) / 0,25 = 1,6.$$

Из табл.2.3.1 следует, что при любом уровне значимости рассматриваемый результат не может быть отвергнут как промах.

9. Составим вариационный ряд из приведенных выше результатов измерений напряжения в электросети: 126,9; 127,1; 127,2; 127,2; 127,6 В.

Для крайнего члена этого ряда (127,6 В) критерий Диксона

$$К_д = (127,6 – 127,2) / (127,6 – 126,9) = 0,57.$$

Как следует из табл. 2.3.5, по этому критерию результат 127,6 В может быть отброшен как промах лишь на уровне значимости α = 0,10.

10. Проведен ряд измерений температуры. Получены следующие значения: 20,42; 20,43; 20,40; 20,43; 20,42; 20,43; 20,39; 20,30; 20,40; 20,43; 20,42; 20,41; 20,39; 20,39;20,40 °С. Определить, не содержит ли ряд промахов, используя различные критерии.

11. Приведено 13 измерений величины тока: 3,18; 3,24; 3,17; 3,16; 3,18; 3,30; 3,18; 3,19; 3,25; 3,17; 3,15; 3,16; 3,22 мА. Выбрать критерий исключения грубых погрешностей и определить, содержит ли полученный ряд измерений промахи ?

ЗАНЯТИЕ 4. Выявление и исключение систематических погрешностей

Основные положения. Систематическая погрешность (СП) – составляющая погрешности измерений, остающаяся постоянной или закономерно меняющаяся при повторных измерениях одной и той же величины. При этом предполагается, что СП представляют собой определенную функцию неслучайных факторов, состав которых зависит от физических, конструктивных и технологических особенностей средств измерений, условий их применения, а также индивидуальных качеств наблюдателя. Результаты наблюдений, полученные при наличии СП, называются неисправимыми. Для исправления результатов наблюдений их складывают с поправками, равными выявленным СП по величине и обратным по знаку.

Систематические погрешности классифицируются по ряду признаков (рис. 2.4.2).

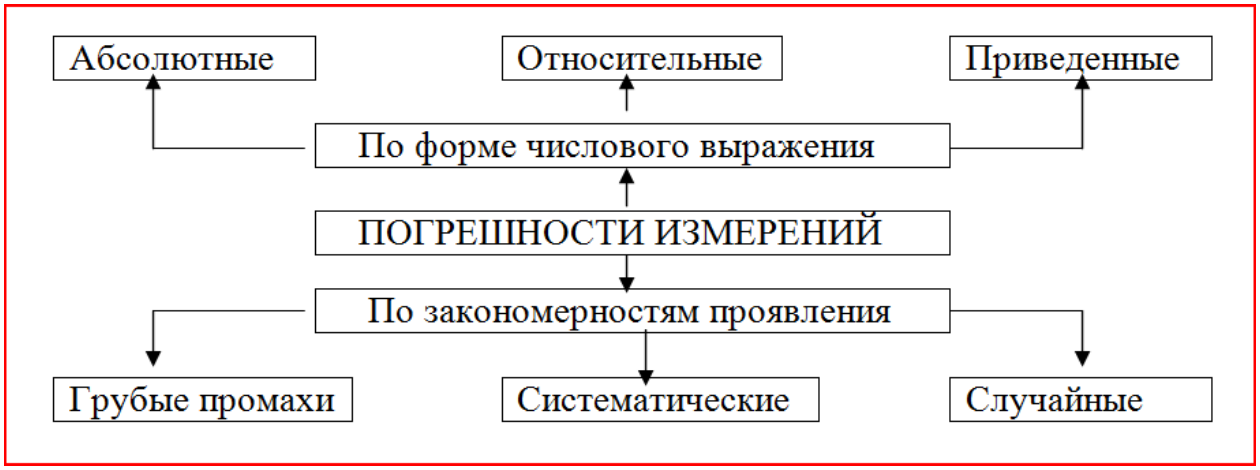


Рис. 2.4.2. Классификация систематических погрешностей измерений

Субъективные систематические погрешности связаны с индивидуальными особенностями оператора. Как правило, эта погрешность возникает из-за ошибок в отсчете показаний (примерно 0,1 деления шкалы) и неопытности оператора. Характеристики личной погрешности определяют на основе нормированной цены деления шкалы измерительного прибора (или диаграммной бумаги регистрирующего прибора) с учетом способности «среднего оператора» к интерполяции в пределах деления шкалы В основном же систематические погрешности возникают из-за методической и инструментальной составляющих.

Методическая погрешность измерения обусловлена:

1. Отличием принятой модели объекта измерения от модели, адекватно описывающей его свойства, которое определяется путем изменения;

2. Влияние способов применения средств измерений. Это имеет место, например, при измерении напряжения вольтметром с конечным значением внутреннего сопротивления. В данном случае вольтметр шунтирует участок цепи, на котором измеряется напряжение, и оно оказывается меньшей, чем было до присоединения вольтметра;

3. Влияние алгоритмов (формул), по которым производятся вычисление результатов измерений;

4. Влиянием других факторов, не связанных со свойствами используемых средств измерений.

Отличительной особенностью методических погрешностей является то, что они не могут быть указаны в нормативно-технической документации на использование средств измерений, поскольку от него не зависят, а должны определяться оператором в каждом конкретном случае. В связи с этим оператор должен четко различать фактически измеряемую им величину и величину, подлежащую измерению.

Инструментальная погрешность возникает из-за собственной погрешности средств измерений, определяемой классом точности, влиянием на результат и ограниченной разрешающей способности средств измерений.

Целесообразность разделения систематической погрешности на методическую и инструментальную составляющие определяется следующими моментами:

1. Для повышения точности измерений можно выделить лимитирующие факторы, а следовательно, принять решение об усовершенствовании методики или выборе более точных средств измерений;
2. Появляется возможность определить составляющую общей погрешности, увеличивающейся со временем или под влиянием внешних факторов, а следовательно, целенаправленно осуществлять периодические поверки и аттестации;
3. Инструментальная составляющая может быть оценена до разработки методики, а потенциальные точностные возможности выбранного метода определит только методическая составляющая.

Постоянные погрешности – погрешности, длительное время сохраняюшие свое значение. Они встречаются наиболее часто. К постоянным относятся погрешности большинства мер (гирь, концевых мер длины), погрешности градуеровки шкал измерительных приборов и др.

Переменными называются погрешности, изменяющиеся в процессе измерения. Они делятся на монотонно изменяющиеся, переодические и изменяющиеся по сложному закону. Если в процессе ихменения систематическая погрешность монотонно возрастает или убывает, ее называют *монотонно изменяющаяся.* Например, она имеет место при постепенном разрядке батареи, питающей средство измерений.

Периодические погрешности – погрешности, периодически изменяющие значение и знак. Обычно эта погрешность встречается в угломерных приборах с круглой шкалой.

Прогрессивные погрешности – непрерывно возрастающие или убывающие погрешности. К ним относятся погрешности от износа контактирующих деталей средств измерений, постепенное падение напряжения источника тока и др.

Динамической называется погрешность средств измерения, возникающая дополнительно при измерении переменной физической величины и обусловленная несоответствием его реакции на скорость (частоту) изменения измеряемого сигнала.

Систематические погрешности искажают результат измерений, поэтому при проведении процесса измерения ФВ стараются в максимальной степени исключить или учесть их влияние. Это возможно:

1. При устранении источников погрешностей до начала измерений;
2. Внесением известных поправок в результат измерения;
3. Путем оценки границ не исключенных СП.

Постоянная составляющая СП не может быть ни выявлена, ни найдена методами совместной обработки результатов измерений. Однако она не может исказить ни показатели точности измерений, характеризующие случайную погрешность, ни результат нахождения переменной составляющей СП.

Постоянные систематические погрешности могут быть обнаружены лишь путем сравнения результатов измерений с другими, полученными с помощью более высокоточных методов и средств. Иногда эти погрешности могут быть устранены специальными приемами проведения процесса измерений.

Наиболее универсальным способом исключения неизвестных постоянных систематических погрешностей является способ их рандомизации. Суть этого способа состоит в том, что одна и та же величина измеряется различными методами (средствами измерений). Систематические погрешности каждого из них для всей совокупности являются разными случайными величинами В следствии этого при увеличении числа используемых методов (средств измерений) систематические погрешности взаимно компенсируются.

Наличие существенной переменной СП искажает оценки характеристик случайной погрешности и аппроксимацию ее распределения. Поэтому она должна обязательно выявляться и исключаться из результатов измерений и учитываться в оценках СП.

Для устранения постоянных систематических погрешностей применяют различные методы.

Метод замещения, представляющий собой разновидность метода сравнения, когда сравнение осуществляется заменой измеряемой величины известной величиной, причем так, что при этом в состоянии и действии всех используемых средств измерений не происходит никаких изменений. Для его реализации необходимо иметь регулируемую меру, величина которой однородна измеряемой. Например, измерение сопротивления посредством моста постоянного тока и мер сопротивления.

Метод противопоставления, являющийся разновидностью метода сравнения, при котором измерение выполняется дважды и проводится так, чтобы в обоих случаях причина постоянной погрешности оказывала разные, но известные по закономерности воздействия на результаты наблюдений. Например, способ взвешивания.

Метод компенсации погрешности по знаку (метод изменения знака систематической погрешности), предусматривающий изменение с двумя наблюдателями, выполняемыми так, чтобы постоянная систематическая погрешность входила в результат каждого из них с разными знаками.

Метод рандомизации – наиболее универсальный способ исключения независимых постоянных систематических погрешностей. Суть его состоит в том, что одна и та же величина измеряется различными методами (средствами измерений). Систематические погрешности каждого из них для всей совокупности являются разными случайными величинами. Вследствие этого при увеличении числа используемых методов (средствами измерений) систематические погрешности взаимно компенсируются.

Для устранения переменных и монотонно изменяющихся систематических погрешностей применяют следующие приемы и способы.

Анализ знаков неисправленных случайных погрешностей. Если знаки неисправленных случайных погрешностей чередуются с какой-либо закономерностью, то наблюдается переменная систематическая погрешность. Если последовательность знаков «+» у случайных погрешностей сменяется последовательностью знаков «-» или на оборот, то присутствует монотонно изменяющаяся систематическая погрешность. Если группа знаков «+» и «–» у случайных погрешностей чередуются, то присутствует периодическая систематическая погрешность.

Графический способ. Одним из наиболее действительных способов обнаружения переменной СП в ряде результатов наблюдений является построение графика последовательности неисправленных значений результатов наблюдений. На графике проводят плавную кривую через построенные точки, которая выражает тенденцию результатов измерения, если она существует. Если тенденция не прослеживается, то считают переменную СП практически отсутствующей.

Способ последовательных разностей (критерий Аббе). Этот способ применим для обнаружения изменяющейся во времени систематической погрешности. Дисперсию результатов наблюдений можно оценить двумя способами: обычным

$$\sigma^2\,[x] = 1\,/\,(n-1)\sum_{\mathrm{i}=1}^{n}\,(x_{\mathrm{i}} - x_{\mathrm{ср.}})^2$$

и вычислением суммы квадратов последовательных (в порядке проведения измерений) разностей $(x_{\mathrm{i-1}} - x_{\mathrm{i}})$

$$Q^2[x] = [1/2(n-1)] \sum_{i=1}^{n-1} (x_{i+1} - x_i)^2.$$

Если в процессе измерений происходило смещение центра групирования результатов наблюдений, т.е. имела место временная систематическая погрешность, то $\sigma^2[x]$ дает преувеличенную оценку дисперсии результатов наблюдений. Это объясняется тем, что на $\sigma^2[x]$ влияют вариации $x_{ср.}$. Вто же вркмя изменения центра группирования $x_{ср.}$ весьма мало влияют на последовательные разности $d_i = x_{i+1} - x_i$, и смещения $x_{ср.}$ почти не отразятся на значении $Q^2[x]$.

Отношение $v = Q^2[x] / \sigma^2[x]$ является критерием для обнаружения систематических смещений центра группирования результатов наблюдений. Критическая область для этого критерия (критерия Аббе) определяется как $P(v < v_q) = q$, где $q = 1 - P$ – уровень значимости, P – доверительная вероятность. Значения v_q для различных уровней значимости q и число наблюдений n приведены в табл. 2.4.6.

Таблица 2.4.6

n	v_q при q, равном			n	v_q при q, равном		
	0,001	0,01	0,05		0,001	0,01	0,05
4	0,295	0,313	0,390	13	0,295	0,431	0,578
5	0,208	0,269	0,410	14	0,311	0,447	0,591
6	0,182	0,281	0,445	15	0,327	0,461	0,603
7	0,185	0,307	0,468	16	0,341	0,474	0,614
8	0,202	0,331	0,491	17	0,355	0,487	0,624
9	0,221	0,354	0,512	18	0,368	0,499	0,633
10	0,241	0,376	0,531	19	0,381	0,510	0,642
11	0,260	0,396	0,548	20	0,393	0,520	0,650
12	0,278	0,414	0,564				

Если полученное значение критерия Аббе меньше v_q при заданных q и n, то гипотеза о постоянстве центра группирования результатов наблюдений отвергается, т.е. обнаруживается переменная систематическая погрешность результатов измерений.

Дисперсионный анализ. Впрактике измерений часто бывает необходимо выяснить наличие систематической погрешности результатов наблюдений, обусловленной влиянием какого-либо постоянно действующего фактора, или определить, вызывают ли изменения этого фактора систематические смещение результатов измерений. В данном случае проводят многократные измерения, состоящие из достаточного числа серий, каждая из которых соответствует определенным (пусть неизвестным, но различным) значениям влияющего фактора. Влияющими факторами, по которым производится объединение результатов наблюдений по сериям, могут быть внешние условия (температура, давление и т.д.), временная последовательность проведения измерений и т.п.

Поале проведения N измерений разбивают на s *серий* (s > 3) по n_j результатов наблюдений ($sn_j = N$) в каждой серии и затем устанавливают, имеется или отсутствует систематическое расхождение между результатами наблюдений в различных сериях. При этом должно быть установлено, что результаты в сериях распределены нормально. Рассеяние результатов наблюдений в пределах каждой серии отражает только случайные величины, характерезует лишь случайные погрешности измерений в пределах этой серии.

Характеристикой совокупности случайных внутрисерийных погрешностей будет средняя сумма дисперсий результатов наблюдений, вычесленных раздельно для каждой серии, т.е.

$$\sigma^2_{\text{вс}} = (1 / N - s) \sum_{j=1}^{s} \sum_{i=1}^{n_j} (x_{ij} - x_{j\text{ср.}})^2 ,$$

где $x_{j\text{ср.}} = (1 / n_j) \sum_{i=1}^{n_j} x_{ji}$; x_{ji} – результат i-го измерения в j-й серии.

Внутрисерийная дисперсия $\sigma^2_{\text{вс}}$ характерезует случайные погрешности измерений, так как только случайные влияния обусловливают те различия (отклонения результатов наблюдений), на которых она основанаю. В то же время рассеяние $x_{j\text{ср}}$ различных серий обусловливается не только случайными погрешностями измерений, но и систематическими различиями (если они существуют) между результатами наблюдений, сгрупированными по сериям. Следовательно, усредненная межсерийная дисперсия

$$\sigma^2_{\text{ьс}} = (1 / s = 1) \sum_{j=1}^{s} n_{j\text{ср.}}(x_{j\text{ср.}} - x_{\text{ср.}})^2 ,$$

где $x_{\text{ср.}} = (1 / \text{N}) \sum_{j=1}^{s} n_j x_{j\text{ср.}}$, выражает силу действия фактора, вызывающего систематические различия между сериями.

Таким образом, характерезует долю дисперсии всех результатов наблюдений, обусловленную наличием случайных погрешностей измерений, а $\sigma^2_{\text{вс}} / (\sigma^2_{\text{вс}} + \sigma^2_{\text{ьс}})$ – долю дисперсии, обусловленную межсерийными различиями результатов наблюдений. Певую из них называют *коэффициентом ошибки*, вторую – *показателем дефференциации*. Чем больше отношение показателя дифференциации к коэффициенту ошибки, тем сильнее действие фактора, по которому групировались серии, и тем больше систематическое различие между ними.

Критерием оценки наличия систематических погрешностей в данном случае является дисперсионный критерий Фишера

$$F = \sigma^2_{\text{мс}} \,/\, \sigma^2_{\text{вс}}.$$

Критическая область для критерия Фишера соответствует $P(F > F_q = q$.

Значение F_q для различных уровней значимости α, числа изменений N и числа серий s приведены в табл.2.2.7, где $k_2 = N - S$, $k_1 = s - 1$. Если полученное значение критерия Фишера больше F_α (при заданных q, N и s), то гипотеза об отсутствии систематических смещений результатов наблюдений по сериям отвергается, т.е. обнаруживается систематическая погрешность, вызываемая тем фактором, по которому группировалися результаты наблюдений.

Из всех рассмотренных методов и способов обнаружения систематических погрешностей дисперсионный анализ является наиболее эффективным и достоверным, так как позволяет не только установить факт наличия погрешности, но и дает возможность проанализировать источноки ее возникновения.

Таблица 2.4.7

k_2	F_α k_1									
	1	2	3	4	5	6	7	12	16	α
α = 0.05										
2	18,5	19,2	19,2	19,3	19,3	19,3	19,4	19,41	19,43	19,50
4	7,7	6,9	6,6	6,4	6,3	6,2	6,1	5,91	5,84	5,63
6	6,0	5,1	4,8	4,5	4,4	4,3	4,2	4,00	3,92	3,67
8	5,3	4,5	4,1	3,8	3,7	3,6	3,5	3,28	3,20	2,93
10	5,0	4,1	3,7	3,5	3,3	3,2	3,1	2,91	2,82	2,54
12	4,8	3,9	3,5	3,3	3,1	3,0	2,9	2,69	2,60	2,30
14	4,6	3,7	3,3	3,1	3,0	2,9	2,8	2,53	2,44	2,12
16	4,5	3,6	3,2	3,0	2,9	2,7	2,7	2,42	2,33	2,01
18	4,4	3,6	3,2	2,9	2,8	2,7	2,6	2,34	2,25	1,92
20	4,4	3,5	3,1	2,9	2,7	2,6	2,5	2,28	2,18	1,64
30	4,2	3,3	2,9	2,7	2,5	2,4	2,3	2,09	1,99	1,62
α	3,84	2,99	2,60	2,37	2,21	2,09	1,90	1,75	1,64	1,00
α = 0,01										
2	98,5	99,0	99,2	99,3	99,3	99,4	99,4	99,42	99,44	99,50
4	21,2	18,0	16,7	16,0	15,5	15,2	15,0	14,37	14,15	13,46
6	13,7	10,9	9,8	9,3	8,8	8,5	8,3	7,42	7,52	6,88
8	11,3	8,7	7,6	7,0	6,6	6,4	6,2	5,67	5,48	4,86
9	10,6	8,0	7,0	6,4	6,1	5,8	5,6	5,11	4,92	4,31

10	10,6	7,6	6,6	6,0	5,6	5,4	5,2	4,71	4,52	3,91
12	9,3	6,8	6,0	5,4	5,1	4,8	4,7	4,16	3,98	3,36
14	8,9	6,5	5,6	5,0	4,7	4,5	4,3	3,80	3,62	3,00
16	8,5	6,2	6,3	4,8	4,4	4,3	4,0	3,55	3,37	2,75
18	8,3	6,0	5,1	4,6	4,3	4,0	3,8	3,37	3,20	2,57
20	8,1	5,9	4,9	4,4	4,1	3,8	3,7	3,23	3,05	2,42
30	7,6	5,4	4,5	4,0	3,7	3,5	3,3	2,84	2,66	2,01
α	6,64	4,60	3,78	3,32	3,02	2,80	2,40	2,18	1,99	1,00

k_1 – число стпеней свободы большей дисперсии; k_2 - число степеней свободы меньшей дисперсии.

Рабочее задание. Ответить на вопросы для самопроверки.

1. Что такое систематическая погрешность? Приведите примеры.
2. Дайте определение исправленного результата измерений.
3. Объясните особенности систематических погрешностей.
4. Каким образом классифицируются систематические погрешности?
5. Назовите методы выявления постоянных систематических погрешностей.
6. Назовите способы выявления переменных систематическиз погрешностей.

В чем состоит суть критерия Аббе?

8. Объясните область применения и особенности методов компенсации погрешностей по знаку и замещения.

9. Объясните область применения, достоинства методов противопоставления и семетричных наблюдений при исключении систематических погрешностей.

10. Что такое дисперсионный анализ и как он применяется для установления систематических погрешностей?

11.Каким образом оценивается целесообразность введения поправки для устранения систематической погрешности?

Контрольные задания.

1. Напряжение источника эдс U_x с внутренним сопротивлением $R_I = 60 \pm 10$ Ом измерено вольтметром класса точности 0,5. Сопротивление вольтметра R_v = 5 кОм и известно с погрешностью $\pm 0{,}5\%$. Показания вольтметра U_v составляет 12,35 В. Найти поправку, которую нужно внести в показания прибора для определения действительного значения напряжения источника ЭДС.

Решение. Показания вольтметра соответствуют падению напряжения на нем:

$$U_v = \frac{R_v}{R_i + R_v} U_x.$$

Относительная систематическая методическая погрешность, обусловленная ограниченным значением сопротивления R_v равна

$$\delta_c = \frac{U_v - U_x}{U_x} 100\% = - \frac{100\ R_I}{R_i + R_v} = - \frac{100 \bullet 60}{5060} = -1.3\%.$$

Поправка равна абсолютной погрешности взятой с обратным знаком

$$\Delta_c = 0{,}012 \bullet 12{,}35 = 0{,}146 \text{ В}.$$

Погрешность полученного значения поправки определяется погрешностью, с которой известно сопротивление R_i. Ее предельное значение равно 10 / 60 = 0,167. Погрешность из-за неточности оценки R_v , равной 0,005, можно пренебречь. Следовательно, погрешность определеной поправки

$$\Delta = \pm 0{,}167 \bullet 0{,}146 \approx 0{,}03 \text{ В}.$$

Поэтому поправка, которую необходимо ввести в показания вольтметра с учетом округления, равна Δ_u = + 0,15 В. Таким образом, исправлениое значение U'_X = 12.35 + 0.15 = 12.50 В. Этот результат имеет определенную погрешность, в том числе неисключенный остаток систематической погрешности из-за потребления некоторой мощности вольтметром, лежащий в пределах $\Delta = \pm 0{,}03$ В или $\delta = \pm 0{,}24\%$.

2. Используя способ последовательных разностей, определить, присутствует ли систематическая погрешность в ряду результатов наблюдений, приведенных в первом столбце табллице.

Результаты наблюдений

N	x_i	$d_i = x_{i+1} - x_i$	d_i^2	$v_i = x_i - x_{ch.}$	v_i^2
1	13,4	-	-	-0,6	0,36
2	13,3	- 0,1	0,01	-0,7	0,49
3	14,5	+1,2	1,44	+0,5	0,25
4	13,8	-0,7	0,49	-0,2	0,04
5	14,5	+0,7	0,49	+0,5	0,25
6	14,6	+0,1	0,01	+0,6	0,36
7	14,1	-0,5	0,25	+0,1	0,01
8	14,3	+0,2	0,04	+0,3	0,09
9	14,0	+0,3	0,09	0,0	0,0
10	14,3	+0,3	0,09	+0,3	0,09
11	13,2	+0,1	1,21	-0,8	0,64
	$\sum$ 154,0	-0,2	4,12	0,0	2,58

Решение. Для приведенного ряда результатов вычислим:

среднее арифметическое значение $x_{ср.} = \dfrac{154{,}0}{11} = 14{,}0$;

оценку дисперсии $\sigma^2\,[x] = \dfrac{2{,}58}{10} = 0{,}258$;

критерий Аббе $A = \dfrac{0{,}206}{0{,}258}$ 0,8.

Как видно из таблицы, для всех уровней значимости ($\alpha = 0{,}001$; $\alpha = 0{,}01$ и $\alpha = 0{,}05$) при $n = 11$ $A > A_{\alpha}$, т.е. нулевая гипотеза о постоянстве центра группирования полтверждается. Следовательно, условия измерений для приведенного ряда оставались неизменными, и систематических расхождений между результатами наблюдений нет.

3. Было проведено 50 измерений диаметра детали 10 различными штангенциркулями. Каждым из них проводились по 5 измерений. Внутрисерийная дисперсия равна 0,054 мм^2, межсерийная – 0,2052 мм^2. Определить наличие систематической погрешности измерения диаметра детали.

Решение. Расчетное значение критерия Фишера $F = 0.2052 / 0.054 = 3.8$. Для $s - 1 = 9$ и $N - s = 40$ по табл. 2.2.7 имеем при $\alpha = 0{,}05$ $F_{\alpha\,0.05} = 2{,}1$ и при $\alpha = 0{,}01$ $F_{\alpha\,0{,}01} = 2.8$. Полученное значение F больше, чем 2,2 и 2,9. Следовательно, обнаруживается наличие систематических погрешностей в результатах наблюдений.

4. Исследование точности измерений линейного размера при выходном контроле качества изделия проводилось путем повторных измерений данного размера одного и того же изделия чеез равные промежутки времени. Полученные результаты расположены в порядке измерения: 1) 40,15; 2) 40,15; 3) 40,15; 4) 40,17; 5) 40,16; 6) 40,16; 7) 10,16; 8) 40,15; 9) 40,16; 10) 40,16; 11) 40,17; 12) 40,17; 13) 40,17; 14) 40,17 15) 40,15; 16) 40,18; 17) 40,19; 18) 40,18; 19) 40,18; 20) 40,18; 21) 40,19; 22) 40,19; 23) 40,19; 24) 40,18; 25) 40,21; 26) 40,19; 27) 40,18; 28) 40,19; 29) 40,19) 30) 40,19 мм. Выполнить обработку ряда измерений, подготовить его для нахождения показателей точности, характерезующих случайную погрешность измерений. Для этого определить наличие переменной систематической погрешности, найти поправку, внести ее в результаты измерений, построить вариационный ряд исправленных результатов измерений.

5. Измерения массы образца магнитомягкого материала, подготовленного для испытания в аппарате Эпштейна, проведенные через равные промежутки

времени, позволили получить следующие результаты: 0,925; 0,932; 0,939; 0,938; 0,936; 0,934; 0,934; 0,932; 0,924» 0,932; 0,925; 0,936; 0,930; 0,929; 0,929; 0,925; 0,936; 0,926; 0,927; 0,925 кг. Вы полнить задание, указанное в задаче 4.

6. Для изучения случайной погрешности нестандартизованного средства измерения температуры им через равные промежутки времени многократно была измерена температура массивного тела, которая во время всех измерений была неизменна. Получены следующие результаты: 40,40; 40,43; 40,49; 40,57; 40,57; 40,59; 40,69; 40,70; 40,68; 4068; 40,68; 40,66; 40,68; 40,78; 40,73; 40,73; 40,76; 40,79; 40,76; 40,80; 40,79; 40,75; 40,76; 40,76; 40,72; 40,73; 40,71; 40,69; 40,68; 40,75; 40,71; 40,63; 40,63; 40,58; 40,55; 40,64; 40,58; 40,58; 40,57; 4046 ^{o}С. Выполнить задание указанное в задече 4.

7. При многократном измерении через равные промежутки времени напряжения на выходе прецизионного калибратора получены следующие результаты: 2,042; 2,043; 2,044; 2,043; 2,045; 2,041; 2,042; 2,039; 2,040; 2,044; 2,047; 2,048; 2,043; 2,045; 2,045; 2,041; 2,044; 2,046; 2,046; 2,049; 2,045; 2,048; 2,050; 2,054; 2,054 В. Выполнить задание указанное в задаче 4

8. Измерение катушки индуктивности, проведенные методом сравнения с эталонной катушкой, дали следующие результаты: 81,82; 81,83; 81,87; 81,89 мГн. После этого эталонную катушку заменили и провели еще ряд измерений: 81,78; 81,78; 81,75; 81,85; 81,82; 81,81 мГц. Проанализировать полученные результаты и сделать выводы о систематической погрешности.

9. Показания вольтметра, записанные с интервалом 1 мин, равны 71,0; 71,2; 71,4; 71,6 В. Действительное значение напряжения 70,9 В. Определить систематическую погрешность, считая, что случайная погрешность мала.

10. С помощью амперметра с внутренним сопротивлением R_a измерено значение тока, протекающего через резистор R, подключенный к источнику напряжения E с внутренним сопротивлением R_i . Определить относительную систематическую погрешность δ измерения тока, вызванную сопротивлением амперметра. Считая R_i = 5 Ом, $R_н$ =10 и 100 Ом, построить зависимости от сопротивления амперметра R_a. Рассчитать значение поправки для R_i=1 Ом и E = 16 В.

11. Активное сопротивление $R_н$ подключено к источнику Э Д С E. Для определения потребляемой мощности $P_н$ использовались амперметр и вольтметр с внутренними сопротивлениями R_a = 0.01 Ом и R_v = 100 Ом. Показания этих приборов снимались при двух схемах их включения:

а) Последовательное соединение источника Э Д С, амперметра и группы, состоящей из параллельно соединенных сопротивления R_a и вольтметра, б) Последовательное соединение источника Э Д С и группы,состоящей из параллельного соединения вольтметра и последовательно соединенных $R_н$ и амперметра.

Определить систематические методические погрешности мощности в обоих случаях. Построить зависимости $\delta_1(R_н)$ и $\delta_2(R_н)$. Определить значение поправок ΔP_1 и ΔP_2, если $R_н$ = 3 Ом и Е = 8.

12. Используя критерий Фббе, определить наличие или оьсутствие систематической погрешности в ряду результатов измерений, построенных по данным задачи 4: а) с четными; б) с нечетными номерами.

13. Разбив данные задачи 6 на четыре последовательные группы по десять значений, определить наличие систематической погрешности.

14. Решить задачу 13 для пяти последовательных групп по восемь значений.

15. После включения генератора в сеть его частота изменяется по закону $f = f_o + f_1 e^{-t/\tau}$. Результаты измерения частоты в момент времени t_1 = 0.12 мин равны соответственно 102,000; 100,927; и 100,429 кГц. Определить значение f_o, f_1 и τ. Считая отношение частоты от нормального значения 100 кГц систематической погрешностью, определить необходимое время прогрева генератора, если допустимая относительная систематическая погрешность равна 10^{-5}.

ЗАНЯТИЕ 5. Изучение случайных погрешностей

Основные положения. Случайная погрешность (СлП) измерения определяется как разность между исправленным результатом X_i измерения и истинным значением Q изиеряемой величины.

Методы вероятностного описания случайных погрешностей. Наиболее универсальный способ описания случайных величин заключается в отыскании их интегральных или дифференциальных функций распределения. Под интегральной функцией распределения результатов наблюдений понимается зависимость вероятности того, что результат наблюдения X_i в i-м опыте окажется меньше некоторого текущего значения x, от самой величины x:

$$F(x) = P[X_i \le x] = P[-\infty < X_i \le x] \qquad (2.5.1)$$

Случайная погрешность Δ также рассматривается как случайная величина, принимающая в различных опытах различные значения Δ_i. Ее интегральную функцию распределения получают путем переноса начала координат в точку $x = Q$.

$$F(\delta) = P\,[\Delta_i \le \Delta] = P\,[X_i - Q \le x - Q] = P\,[X_i \le x].$$

Более наглядным является описание свойств результатов наблюдений и СлП с помощью дифференциальной функции распределения, иначе называемой плотностью распределения вероятностей

$$P\,(x) = \frac{dF(x)}{dx}; \quad P\,(\Delta) = \frac{dF(\Delta)}{d\Delta}.$$

Она всегда неотрицательная и подчинена условию нормирования в виде

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,dx = 1; \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} P(\Delta)\,d\Delta = 1 \qquad (2.5.2)$$

Вероятность попадания результата наблюдений или СлП в заданный интервал равна разности значений функций распределения

$$P[x_i < X \le x_2] = P[-\infty < X \le x_2] - P[-\infty < X \le x_i] = F(x_2) - F(x_i); \qquad (2.5.3)$$

$$P(\Delta_1 < \Delta \le \Delta_2] = F(\Delta_2) - F(\Delta_1).$$

Учитывая взаимосвязь $F\,(x)$ и $P(x)$, легко получить

$$P[x_1 < X \le x_2] = \int_{x_1}^{x_2} P(x)\,dx; \qquad P\,[\Delta_1 < \Delta \le \Delta_2 = \int_{\Delta_1}^{\Delta_2} P(\Delta)\,d\Delta\;.$$

Числовые параметры законов распределения. Функция распределения является самым универсальным способом описания поведения СлП. Однако для их определения необходимо проведение весьма длительных и кропотливых исследований и вычислений. В большинстве случаев бывает достаточно охарактеризовать СлП с помощью ограниченного числа специальных величин, называемых начальными моментами

$$\alpha_r[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r\,P(x)dx$$

и центральными моментами

$$\mu\,[x] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^{\,r}\,P(x)\,dx,$$

где r – порядок момента

$$m_x = \alpha_1[X] = \mathrm{M}[\mathrm{X}] = \int_{-\infty}^{+\infty} X\,P(x)\,dx;$$

первый начальный момент – математическое ожидание результатов наблюдений. Он представляет собой оценку истинного значения измеряемой величины.

Необходимо отметить, что начальные и центральные моменты СлП совпадают между собой с центральными моментами результатов измерений

$$\alpha_r[\Delta] = \mu_r[\Delta] = \mu_r[X]$$

поскольку математическое СлП равно нулю.

Важное значение имеет второй центральный момент, называемый дисперссией результатов измерений

$$D[X] = D[\Delta] = M_i[(X - M_x)^2] = M[\Delta^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m_x)^2 P(x)dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \Delta^2 P(\Delta)d\Delta$$

и являющийся характеристикой их рассеивания относительно математического ожидания. Значительно чаще в качестве меры рассеивания используется среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{D[x]}.$$

Математическое ожидание и дисперсия являются наиболее часто применяемыми моментами, поскольку они определяют наиболее важные черты распределения: положения центра и степень его разбросанности. Для более подробного описания распределения используются моменты более высоких порядков.

Третий центральный момент $\mu_3[X]$ служит характеристикой асимметрии или скошенности распределения. С его использованием вводится коэффициент асимметрии

$$S = \mu_3[X] / \sigma^3.$$

Четвертый центральный момент $\mu_4[X]$ служит для характеристики плосковешинности или островершинности распределения. Эти свойства описываются с помощью эксцесса

$$\varepsilon = \mu_4[X] / \sigma^4 - 3.$$

Основные законы распреденения случайных погрешностей. Для использования на практике вероятностного подхода к оценке погрешностей результатов измерений прежде всего необходимо установить для данной кокретной погрешности вид аналитической модели закона распределения.

Среди множества законов распределения случайных величин в метрологии нашел применение ряд основных законов. Наиболее часто используется нормальный закон распределения (распределение Гаусса). Распределение результатов измерения описывается формулой

$$P(x) = [1 / \sigma \sqrt{2\pi}\ ] \text{ e xp } [- (x - X_ц)^2]\ ,$$

где σ - параметр рассеивания распределения; $X_ц$ – оценка центра распределения.

При введении новой переменной

$$t = (x - X_ц) / \sigma \tag{2.5.4}$$

получается широко используемое нормированное нормальное распределение, плотность которого

$$P(t) = (1 / \sqrt{2\pi})\, e^{-(t^2/2)}\ ,$$

Интегральная функция этого распределения имеет вид

$$F(t) = (1 / \sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{t} e^{-(t^2/2)}\, dt\ .$$

С помощью $F(t)$ вероятность, определенную по формуле (2.5.3), находят как

$$P\,[x_1 < X \geq x_2] = F(t_2) - F(t_1) = F\left(\frac{x_2 - Q}{\sigma}\right) - F\left(\frac{x_1 - Q}{\sigma}\right).$$

При использовании этой формулы следует иметь в виду тождество

$$F(T) = 1 - F(-t)\ , \tag{2.5.5}$$

Определенный интеграл с переменным верхнем пределом

$$\Phi(t) = (1 / \sqrt{2\pi} \int_{o}^{t} e^{-(t^2/2)}\, dt$$

называют функцией Лапласа. Для нее справедливы следующие равенства:
$\Phi(-\infty) = -0{,}5$; $\Phi(0) = 0$; $\Phi(+\infty) = 0{,}5$; $\Phi(t) = -\Phi(t)$.

Значение функции Лапласа для различных t приведены в табл. 2.2.8.

Фунция распределения $F(t)$ связана с функцией Лапласа формулой

$$F(t) = 0.5 + \Phi(t). \tag{2.5.6}$$

Таблицы плотности вероятностей $P(t)$ и функции $\Phi(t)$ нормированной случайной величины, распределенной по нормальному закону, дают возможность найти плотность вероятности $P(x)$ и значения функции $F(x)$ любой случайной величины, распределенной по нормальному закону, если известны значения ее центра распределения $X_ц$ и параметр σ. При этом

$$P(x) = P\,[(x - X_ц) / \sigma] = P(t); \quad F(x) = [(x - X_ц) / \sigma] = F(t) = 0.5 + \Phi(t).$$

Другими широко распространенными являются:

- равномерное

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x< X_ц - a;\ x> X_ц + a\ ; \\ 1 / 2a, & X_ц - a \le x \le X_ц + a\ ; \end{cases} \qquad (2.5.7)$$

- трапецеидальное

$$P(x) = \begin{cases} 0; & x < X_ц - a;\ > X_ц + a; \\ (x - X_ц + a) / (a^2 - b^2); & X_ц - a \le x \le X_ц + b; \\ 1 / (a - b) & X_ц - b \le x \le X_ц + b; \\ (X_ц + a - x) / (a^2 - b^2); & X_ц - b \le x \le X_ц + a; \end{cases}$$

Таблица 2.5.8

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,0000	0,0040	0,0080	0,0120	0,0160	0,0199	0,0239	0,0279	0,0319	0,0359
0,1	0398	0438	0478	0517	0557	0596	0636	0675	0714	0753
0,2	0793	0,832	0871	0910	0948	0987	1026	1064	1103	1141
0,3	1179	1217	1255	1293	1331	1368	1406	1443	1480	1517
0,4	1554	1591	1628	1664	1700	1736	1772	1808	1844	1879
0,5	1915	1950	1985	2019	2054	2088	2123	2157	2190	2224
0,6	2257	2291	2324	2357	2389	2422	2454	2486	2517	2549
0,7	2580	2611	2642	2673	2703	2734	2764	2794	2823	2852
0,8	2881	2910	2939	2967	2995	3023	3051	3078	3106	3133
0,9	3159	3186	3212	3238	3264	3289	3315	3340	3365	3389
1,0	3413	3438	3461	3485	3508	3531	3554	3577	3599	3621
1,1	3643	3665	3686	3708	3729	3749	3770	3790	3810	3830
1,2	3849	3869	3888	3907	3925	3944	3962	3980	3997	4015
1,3	4032	4049	4066	4082	4099	4115	4131	4147	4162	4177
1,4	4192	4207	4222	4236	4251	4265	4279	4292	4306	4319
1,5	4332	4345	4357	4370	4382	4394	4406	4418	4429	4441
1,6	4452	4463	4474	4484	4495	4505	4515	4525	4535	4545
1,7	4554	4564	4573	4582	4591	4599	4608	4616	4625	4633
1,8	4641	4649	4656	4664	4671	4678	4686	4693	4699	4206
1,9	4713	4719	4726	4732	4738	4744	4750	4756	4761	4767
2,0	4772	4778	4783	4788	4793	4798	4803	4808	4813	4817
2,1	4821	4826	4830	4834	4838	4842	4846	4850	4954	4857
2,2	4861	4864	4868	4871	4874	4878	4881	4884	4987	4890
2,3	4893	4896	4898	4901	4904	4906	4909	4911	4913	4916
2,4	4918	4920	4922	4925	4927	4929	4931	4932	4934	4936
2,5	4938	4940	4941	4943	4945	4946	4948	4949	4951	4952
2,6	4953	4955	4956	4957	4959	4960	4961	4962	4963	4964
2,7	4965	4966	4967	4968	4969	4970	4971	4972	4973	4974
2,8	4924	4975	4976	4977	4977	4978	4979	4979	4980	4981

2,9 3,0 3,5 4,0	4981 4986 4998 4999	4982	4982	4983	4984	4984	4985	4985	4986	4986

треугольное (распределение Симпсона)

$$P(x) = \begin{cases} 0;\ x < X_ц - a;\ x > X_ц + a; \\ (x - X_ц + a) / a^2;\ X_ц - a \le x \le X_ц; \\ (X_ц + a - x) / a^2;\ X_ц \le x \le X_ц + a, \end{cases}$$

где $X_ц$, a, b – параметры распределения.

Арксинусоидальное распределение случайной погрешности описывается формулой

$$P(\Delta) = 1 / (\pi \sqrt{\Delta^2_m - \Delta^2}),$$

где Δ_m – параметр распределения.

Распределение Лапласа, записанное для результата измерения, имеет вид

$$P(x) = \frac{a}{2} e^{-a(x-X)},$$

где a, X –параметры распределения.

Распределение Коше, записанное для результата измерения, имеет вид

$$P(x) = \frac{1}{A\ \pi [1 + (x - X_ц / A)^2]},$$

где A, $X_ц$ – параметры распределения.

Дискретное двузначное распределение – это распределение, при котором с разными вероятностями встречаются только два дискретных значения случайной величины $+A$ и $-A$:

$$P(\Delta) = \frac{1}{2} \delta_x(\Delta - A) + \frac{1}{2} \delta_x(\Delta - A),$$

где δ_x – дельта-функция Дирака.

Рассмотренные выше функции распределения описывают поведение напрерывных случайных величин, т.е. величин, возможные значения которых неотделимы друг от друга и непрерывно заполняют некоторый конечный или бесконечный интервал.

Точечные оценки законов распределения. На практике все результаты измерений x_i и СлП Δ_i являются величинами дискретными, т.е. величинами, возможные значения которых отделены друг от друга и поддаются счету. При использовании дискретных случайных величин вознекает задача нахождения точечных оценок параметров их функций распределения на основании выборок – ряда значений x_i (или СлП Δ_i, принимаемых величиной x(или СлП Δ_i) в n независимых опытах.

В отличие от самых характеристик точечные оценки являются случайными величинами, причем их значения зависят от объема экспериментальных данных, а закон распределения – от законов распределения самих случайных величин.

Точечные оценки должны удовлетворять трем требованиям: быть состоятельными, несмещенными, эффективными. Состоятельность называется оценка, которая сходится по вероятности к оцениваемой числовой характеристике. Несмещенной является оценка, математическое ожидание которой равно оцениванемой числовой характеристике. Наиболее эффективной считают ту из нескольких возможных несмещенных оценок, которая имеет наименьшую дисперсию.

Точечной оценкой математического ожидания результата измерений является среднее арифметическое значение измеряемой величины

$$x_{\text{ср.}} = \frac{1}{n} \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} x_\mathrm{i} \, ,$$

Если из значений x_i исключена систематическая погрешность, то среднее арифметическое значение является и оценкой истинного значения измеряемой величины.

Точечная оценка дисперсии определяется как квадрат среднего квадратичного отклонения (С.К.О) результатов измерений:

$$S_x^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} (x_\mathrm{i} - x_{\text{ср.}})^2 \, .$$

Оценку С.К.О S_x определяет сходимость результатов отдельных наблюдений, т.е. степень их концентрации относительно среднего арифметического значения. Оно, в свою очередь являясь случайной величиной, исеет дисперси S_x^2 в n раз меньше дисперсии S_x^2 результатов наблюдений

$$S_x^2 = S_x^2 \,/\, n \, .$$

Доверительная вероятность и доверительный интервал. Рассмотренные точечные оценки параметров распределения дают оценку в виде числа, наиболее близкого к значению неизвестного параметра. Такие оценки используют только при большом числе измерений. Чем меньше объем выборки, тем легче допустить ошибку при выборе параметра. Для практики важно не только получить точечную оценку, но и определить интервал, называемый доверительным, между границами которого с данной (доверительной) вероятностью

$$P\,(x_{н} \le X \ge x_{в}) = 1 - \alpha\,,$$

где α - уровень значимости, $x_{н}$, $x_{в}$ – нижняя и верхняя границы интервала, находится истенное значение оцениваемого параметра.

Для получения интервальной оценки параметров распределения необходимо:

а) определить точечную оценку математического ожидания $x_{ср.}$;

б) доказать, что закон распределения $x_{ср.}$ нормальный;

в) выбрать доверительную вероятность P из ряда значений: 0,90; 0,95; 0,99.

г) найти верхнюю $x_{в}$ и нижнюю $x_{н}$ границы в соответствии с равенством

$$F\,(x_{н}) = \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - P}{2}\,; \qquad F\,(x_{в}) = 1 - \frac{\alpha}{2} = \frac{1 - P}{2}$$

полученными с учетом выражения (2.5.1). Значения $x_{н}$ и $x_{в}$ определяются из таблиц значений функции F (t) или Ф (t).

Полученный доверительный интервал удовлетворяет условию

$$P\left[x_{ср.} - t_{p}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \le x \le x_{ср.} + t_{p}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 2\Phi(t_{p})\,, \qquad (2.5.8.)$$

где σ - С.К.О величины x ; n – число измеренных значений; t_{p} – аргумент функции Лапласа Ф(t), которая отвечает вероятности P / 2, называемой квантилью нормального распределения. Половина длины доверительного интервала

$$\delta_{p} = t_{p}\,\sigma\,/\,\sqrt{n}$$

называется доверительной границей погрешности результата измерений.

Рассмотренный способ нахождения доверительных интервалов справедлив для достаточно большого числа наблюдений n, так как вычисляемое С.К.О (σ) является лишь некоторым приближением к истенному значению. Определение доверительного интервала при заданной вероятности оказывается тем менее надежным, чем меньше число наблюдений. Нельзя пользоваться формулами нормального распределения при малом числе наблюдений, если нет возможности теоретически на основе предварительных опытов с достаточно большим числом наблюдений определить С.К.О.

Определение доверительных интервалов для случая, когда распределение результатов наблюдений нормально, но их дисперсия неизвестна, т.е. при малом числе наблюдений n, возможно с использованием распределения Стьюдента S (t, k). Оно описывает плотность распределения отношения (дроби Стьюдента)

$$t = \frac{x_{ср.} - M[x]}{S_{Xср.}} = \frac{x_{ср.} - Q}{S_{Xср.}} = \sqrt{n}\,\frac{x_{ср.} - Q}{S_X},$$

где Q – истенное значение измеряемой величины. Величины x, S_X , и $S_{Xср.}$ вычисляются на основании опытных данных и представляют собой точечные оценки математического ожидания, С.К.О результатов измерений и С.К.О среднего арифметического значения.

Вероятность того, что дробь Стьдента в результате выполненных наблюдений примет некоторое значение в интервале (- t_p; +t_p) равна

$$P\left[-t_p < \frac{x_{ср.} - Q}{S_{Xср.}} \le +t_p\right] = P\left[\left|x_{ср.} - Q\right| < \frac{t_p S_X}{\sqrt{n}}\right] = \int_{-t_p}^{+t_p} S(t,k)dt = 2\int_0^{t_p} S(t,k)dt, \quad (2.9)$$

где k – число степеней свободы, равное (n – 1). Величины t_p , рассчитанные для различных значений доверительной вероятности и числа измерений, приведены в табл. 2.5.9.

Таблица 2.5.9

n	При доверительной вероятности P				
	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
2	6,31	12,71	31,82	63,68	636,61
3	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
4	2,35	3,18	4,54	5,84	12,92
5	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
6	2,02	2,57	3,37	4,06	6,87
7	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
8	1,90	2,37	3,00	3,50	5,41
9	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
10	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
11	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
12	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
13	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32

14	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
15	1,76	2,15	2,62	2,98	4,14
16	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
17	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
18	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
19	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
20	1,73	2,09	2,54	2,86	3,88
∞	1,65	1,96	2,33	2,58	3,29

Следовательно, с помощью распределения Стьюдента по формуле (2.5.9) можно найти вероятность того, что отклонение среднего арифметического от истинного значения измеряемой величины не превышает

$$\delta_{\text{р}} = t_{\text{р}}\, S_{X\,\text{ср.}} = t_{\text{р}}\, S_X / \sqrt{n}\,.$$

В тех случаях, когда распределение случайных погрешностей не является нормальным, все же часто пользуются распределением Стьюдента с приближением, степень которого остается неизвестной.

Итог измерения записывается в виде:

при большом числе измерений

$$Q = x_{\text{ср.}} \pm t_{\text{р}}\, \sigma_x / \sqrt{n} \qquad P = P_{\text{Д}};$$

при малом числе измерений

$$Q = x_{\text{ср.}} \pm t_{\text{р}}\, S_x / \sqrt{n} \qquad P = P_{\text{Д}},$$

где $P_{\text{Д}}$ – конкретное значение доверительной вероятности. Величина $t_{\text{р}}$ при большом числе измерений n определяется по таблицам функции Лапласа с помощью уравнения (2.5.8). При малом n она находится по табулированным значениям распределения Стьюдента. Следует отметить, что при $n \to \infty$ это распределение сходится к нормальному.

Рабочее заданиею Ответить на вопросы для самопровери.

1. Дайте определение понятий «случайная» погрешность измерения.
2. При каких условиях погрешность измерения может рассматриваться как случайная величина?
3. Перечислите свойства интегральной и дифференциальной функций распределения случайной величины.
4. Назовите числовые параметры законов распределения.

5 Каким образом может задаваться центр распределения?

6. Что такое момент распределения? Какие из них нашли применение в метрологии?
7. Назовите основные классы распределений, используемых в метрологии.
8. Дайте характеристику распределениям, входящим в класс трапецеидальных распределений.

9. Что такое экспоненциальные распределения ? Каковы их свойства и характеристики?

10. Что такое нормальное распределение ? Почему оно играет особую роль в метрологии?

11. Что такое функция Лапласа и для чего она используется?

12. Как описывается и где используется свойство распределений Стьюдента ?

13. Какие точечные оценки законов распределения вы знаете ?

14. Какие требования предявляются к точечным оценкам законов распределения?

15. Что такое доверительный интервал? Какие способы его задания вам известны ?

Контрольные задания.

1. Построить график интегральной и дифференциальной функций нормального распределения результатов измерений при $X_ц$ = 0; 2; 5 и σ = 0; 5; 1; 3. При каких значениях $X_ц$ и σ построенные графики являются графиками нормированного распределения ?

2. Зная плотность распределения равномерного, трапецеидального и треугольного распределений, получить выражение для их интегральных функций распределения. Построить графики интегральных и дифференциальных функций: а) равномерного; б) трапецеидального; в) треу-гольного распределений результатов измерений при $X_ц$ = 0; 10 и a = 4; b = 2.

3. Найти и построить графики интегральной и дифференциальной функций трапецеидального распределения результатов измерений при $X_ц$ = 0; a = 10 и b = 1; 5; 9.

4. Зная плотность распределения P (Δ) арксинусоидального распределения, получить формулу для интегральной функции распределения. Построить зависимости $P(\Delta)$ и F (Δ) при Δ_m = 1; 5.

5. Зная плотность распределения Лапласа $P(x)$, определить его интегральную функцию $F(x)$. Построить графики $P(x)$ и $F(x)$ при $X_ц$ = 0; 5.

6. Зная плотность распределения Коши $P(x)$, определить его интегральную функцию $F(x)$. Построить графики $P(x)$ и $F(x)$ при $X_ц$ = 0; 5; A = 0,5; 1; 2.

7. Определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий, четвертый центральный моменты коэффициент асимметрии и эксцесс для нормального распределения результатов измерений. Расчитать их значения при σ = 1; $X_ц$ = 0.

8. Определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий, четвертый центральный моменты, коэффициент

асимметрии и эксцесс для равномерного, трапецеидального и треугольного распределений результатов измерений.

9. Определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий, четвертый центральный моменты, коэффициент асимметрии и эксцесс для арксинусоидального распределения случайной погрешности.

10. Определить математическое ожидание, дисперсию, среднее квадратическое отклонение, третий, четвертый центральный моменты, коэффициент асимметрии и эксцесс для распределения Лапласа.

11. Доказать выполнение условия (2.5.2) для следующих распределений: а) нормального; б) равномерного; в) трапецеидального; г) треугольного; д) Лпласа; с) Коши; ж) арксинусоидального.

12. Техническими условиями на изготовление резисторов типа МЛТ установлено, что значения сопротивлений одного номинала $R_н$ в партии распределены равномерно с математическим ожиданием $R_н$ и средним квадратическим отклонением σ. Сколько процентов сопротивлений не попадет в допуск ($R_н$ - ΔR_1; $R_н$ + ΔR_2) в партии при сплошной проверке, если $R_н$ = 100 Ом, σ= 5 Ом и $\Delta R_1 = \Delta R_2$ = 5 Ом.

Решение. Вероятность попадания сопротивления R в интервале ($R_н$ - ΔR_1; $R_н$ + ΔR_2) в общем виде описывается формулой (2.5.5), которая с учетом выражения (2.5.7) запишется в виде

$$P_R\,[R_H - \Delta R < R \leq R_H + \Delta R] = F(t_2) - F(t_1) = \Phi(t_2) - \Phi(t_1).$$

Значения нормированных случайных величин t_1 и t_2 по формуле (2.5.4)

$$t_2 = \frac{R_H + \Delta R - R_H}{\sigma} = \frac{\Delta R}{\sigma} = 1; \quad t_1 = \frac{R_H - \Delta R - R_H}{\sigma} = -\frac{\Delta R}{R} = 1.$$

Вероятность попадания R в интервал равна

$$P_R = \Phi(1) - \Phi(-1)\ 2\Phi(1) = 20{,}3413 = 0{,}6826.$$

Соответственно в допуск не попадает

$$Q = (1 - P)\ 100\% = (1 - 0{,}6826)\ 100\% = 31{,}74\%$$

сопротивлений контролируемой партии.

13. Плотность вероятности $P(x)$ случайной погрешности X имеет вид:

$$P(x) = A \exp(-B|x|),$$

где A и B –постоянные величины. Найти соотношение, которому должны удовлетворять постоянные A и B. Определить интегральную функцию распределения $F(x)$. Построить график плотности вероятности $P(x)$ и функции $F(x)$ при $B = 2$.

14. Случайные погрешности измерения дальности до неподвижной цели подчиняются нормальному закону с математическим ожиданием $m = 5$ м и С.К.О $\sigma = 10$ м. Определить вероятность того, что измеренное значение дальности x отклонится от истинного $x_н$ не более чем на 15 м.

Решение. Определение вероятности того, что измеренное значение дальности отклонится от истинного не более чем на 15 м, сводится к вычислению попадания случайной величины $\Delta = x - x_н$ с $m = 5$ м и $\sigma = 10$ м в интервал от – 15 м до +15 м. Используя формулу (2.5.3), с учетом (2.5.6) получаем

$$P(|x| < 15) = F\left(\frac{15 - 5}{10}\right) - F\left(\frac{-15 - 5}{10}\right) = F(1) - F(-2) = F(1) + [F(2) - 1] =$$

$$= 0{,}5 + \Phi(1) + 0{,}5 + \Phi(2) - 1 = \Phi(1) + \Phi(2).$$

Из табл. 2.5.8 находим, что $\Phi(1) = 0{,}3413$, $\Phi(2) = 0{,}4772$. Значит,

$$P(|x| < 15) = 0{,}3413 + 0{,}4772 = 0{,}8185.$$

Таким образом, с вероятностью 81,85% отклонение измеренного значения дальности от истенного не превышает 15 м.

15. Нормально распределенная случайная величина имеет С.К.О. $\sigma = 10$ при $x_{ср.} = 0$. Определить вероятность того, что эта величина при некотором опыте окажется в пределах: а) от – 10 до +10; б) от – 20 до +20; в) от – 30 до +30.

16. Нориально распределенная случайная величина имеет среднее арифмеи\тическое значение $x_{ср.} = 100$ и С.К.О. $\sigma = 10$. Определить вероятность тлго, что при некотором опыте данная величина окажется: а) в пределах от 90 до 115; б) в пределах от 85 до 110; в) будет меньше 90; г) будет больше 90.

17. При изготовлении постоянных резисторов установлено, что С.К.О. их сопротивлений от номинального значения равно 20 Ом. Определить, сколько процентов резисторов выходит первым сортом, если для этого установлены допуски – 10… +5 Ом. Закон распределения значений сопротивлений – нормальный.

18. В результате поверки вольтметра установлено, что 75% всех погрешностей показаний прибора не превышает $\pm 2{,}5$ мВ. Считая распределение погрешностей нормальным, определить среднее квадратическое отклонение.

19. При поверке омметра установлено, что 80% погрешностей результатов измерений не превышает ± 1 Ом. Считая распределение погрешностей нормальным, определить вероятность того, что погрешность результата больше 1,5 Ом.

20. Случайная погрешность измерения индуктивности имеет С.К.О. σ=30 мкГн. Определить, в каких пределах при некотором опыте ожидаемая случайная погрешность, если вероятность этого события составляет 60%

21. Шкала милливольтметра имеет цену деления С = 20 мВ/дел. Какова вероятность отсчета по этому прибору напряжения с погрешностью Δ более 5 мВ, если известно, что отсчет производится с точностью до целого деления с округлением в ближайшую сторону.

Решение. При отсчете показание милливольтметра округляется в ближайшую сторону, поэтому максимальное значение погрешности округления составит половину цены деления. Распределение погрешности округления, являющейся по сути своей погрешностью квантования, подчиняется равномерному закону в пределах половины деления с плотностью распределения

$$P(\Delta) = \begin{cases} 0, \ \Delta < 0; 10 \text{ мВ} \\ 1 / (C / 2) = 0{,}1 \text{ дел./ Мв}; \ 0 \le \Delta \le 10 \text{ Мв.} \end{cases}$$

Интегральная функция распределения

$$F(\Delta) = \begin{cases} 0; \ \Delta < 0 \\ 0.1\Delta; \ 0 \ge \Delta \le 10 \text{ мВ} \\ 1; \ \Delta > 10 \text{ Мв.} \end{cases}$$

Вероятность того, что погрешность Δ находится в пределах от нуля до 5 мВ,

$$P_1\,(0 \le \Delta \le 5\ \text{мВ}) = \int\limits_0^5 P(\Delta)\,d\Delta = F(5) - F(0)\ 0.5 - 0 = 0.5$$

Искомая вероятность того, что $\Delta > 5$ мВ, равна

$$P_2\,(\Delta > 5\ \text{мВ}) = 1 - P_1 = 0{,}5.$$

22. Круговой лимб резонансного частотомера имеет цену деления 1 кГц. Какова вероятность того, что погрешность определения частоты будет в пределах ± 10 кГц, если отсчет округляется до ближайшей риски.

23. Вес младшего разряда показаний цифрового вольтметра равен 10 мВ. Определить вероятность того, что результат измерения будет сопровождаться погрешностью дискретизации меньшй 2,5 мВ, считая, что показания прибора округляются в сторону большего целого значения (в пределах младшего разряда). Закон распределения погрешности дискретизации – равномерный. Найти С.К.О. погрешности дискретизации.

24. Определить С.К.О. значения частоты генератора СВЧ от значения, установленного на шкале. Известно, что погрешность установки частоты характеризуется только случайной составляющей, имеющей нормальный закон распределения, при этом с вероятностью 0,8 она не выходит за пределы ± 20 МГц.

25. Произведено 50 измерений значения постоянного сопротивления. Определить доверительный интервал для математического ожидания значения постоянного сопротивления, если закон распределения нормальный с параметрами $m_x = R_{ср.} = 590$ Ом, $\sigma = 90$ Ом при доверительной вероятности $P = 0{,}9$.

Решение. Так как гипотеза о нормальности закона распределения не противоречит опытным данным, то доверительный интервал определяется по формуле:

$$P\left[R_{ср.} - \frac{t_p\,\sigma}{\sqrt{n}} \le R \le R_{ср.} + \frac{t_p\,\sigma}{\sqrt{n}}\right] = 2\Phi\,(t_p) = 0.9$$

Отсюда $\Phi(t_p) = 0.45$. Из табл. 2.2.8, находим, что $t_p = 1{,}65$. Следовательно, доверительный интервал записывается в виде

$1{,}65 \bullet 90$ $\qquad$ $1{,}65 \bullet 90$

590 - ------------ ≤R ≤590 + ----------- . Или 590 – 21 ≤R≤590 + 21.

$\sqrt{\ }$ 50 $\sqrt{\ }$ 50

Оокончательно: 509 Ом ≤R≤611 Ом.

26. Случайный радиосигнал распределен по нормальному закону с дисперсией $\sigma^2 = 1$ В^2 . Приведено 100 измерений его амплитуды, по которым определена оценка математического ожидания $x_{ср.}$ = 1,5 В. Определить величину доверительной вероятности, при которой можно быть гарантирована погрешность измерения среднего значения амплитуды сигнала, равная 0,2 В.

27. Десятикратное измерения сопротивления резистора дали следующие результаты: 486,25; 488,30; 487,45; 487,00; 487,60; 487,07; 488,25; 487,15; 486,84; 487,40 Ом. Определить сопротивление резистора и доверительный интервал при доверительной вероятности, равной: а) 0,90; б) 0,95; в) 0,99. При решении задачи считать, что оценка С.К.О. и само С.К.О. равны.

28. Решить предыдущую задачу при условии, что число измерений мало и оценка С.К.О. отличается от самого С.К.О.

29. При десяти измерениях емкости конденсатора получены следующие результаты: 659,59; 658,55; 658,53; 658,52; 658,51; 658,48; 658,49; 658,46; 658,45; 658,42. Определить вероятность того, что погрешность среднего результата не выйдет за границы: а) ±0,01 нФ; б) ±0,05 нФ; в) ±0,1 нФ.

30. По итогам пяти измерений была найдена длина стержня. Итог измерений составляет L = 15,785 мм, $Sx_{ср.}$ = 0,005 мм. Распределение результатов измерений можно считать нормальным. Найти вероятность того, что истинное значение длины стержня отличается от среднего арифметического из пяти наблюдений не более чем на 0,01 мм.

Решение. Поскольку число измерений невелико, то необходимо использовать распределение Стьюдента.

Дробь Сьюдента

$$t_p = \frac{0.01}{Sx_{ср.}} = \frac{0,01}{0,005} = 2$$

По табл. 2.2.9. находим значение доверительной вероятности для $t_p = 2$ b $n = 5$

$$P\left(\left|x_{ср.} - L\right| \le 0.01\right) = P\left(\left|x_{ср.} - L\right| < 2Sx_{ср.}\right) = 88,38\%.$$

Итого измерения запишется в виде

$$L = 15,785 \pm 0,010 \text{ мм}; \quad P = 88,38\%.$$

31. По условиям предыдущей задачи найти доверительный интервал для доверительной вероятности: а) 90%; б) 85%; в) 99%; г) 99,9%.

32. При измерении напряжения магнитного поля получены следующие результаты: 1791; 1805; 1830; 1785; 1840 А / м. Считать, что результаты распределены по нормальному закону, найти: а) доверительную вероятность того, что истенное значение напряженности поля отличается от среднего арифметического значения не более чем на 25 А / м; б) доверительный интервал, соответствующий доверительной вероятности 0,95.

33. В предыдущей задаче определить вероятность того, что истенное значение напряженности магнитного поля находится в пределах 1800 – 1830 А / м. Вероятность вычислить с использованием формулы Лапласа и распределения Стьюдента.

34. Определение удельных магнитных потерь для различных образцов одной партии электротехнической стали марки 2212 дало следующие результаты: 1,21; 1,17; 1,18; 1,13; 1,19; 1,14; 1,20 и 1,18 Вт / кг. Считая, что систематическая погрешность отсутствует, а случайная распределена по нормальному закону, определить: а) действительное значение удельных потерь; б) вероятность того, что оно лежит в пределах 1,25 – 1,20 Вт / кг; в) доверительный интервал при доверительной вероятности 0,95 и 0,99. Для решения задачи использовать формулу Лапласа и распределение Стьюдента.

35. Определить средний коэффициент полезного действия трансформатора, если измерения, проведенные при различных режимах, дали следующие результаты: 86; 87; 90; 92; 89; 91; 88%. Определить вероятность того, что средний коэффициент полезного действия не выходит за границы $89 \pm 3\%$. Распределение подчиняется нормальному закону. Задачу решить при условии, что количество измерений а) велико; б) мало.

ЗАНЯТИЕ 6. Суммирование погрешностей

Основные положения. Определение расчетным путем оценки результирующей погрешности по известным оценкам ее составляющих называется суммированием погрешностей.

Главной проблемой, возникающей при суммировании, является то, что все составляющие погрешности должны рассматриваться как случайные величины. С точки зрения теории вероятности они наиболее полно могут быть описаны своими законами распределения, а их совместные действия – соответствующим многомерным распределением. Однако в такой постановке задачи суммирования погрешностей практически не разрешима уже для нескольких составляющих, не говоря о нескольких десятках.

Практически приемлемый путь решения данной заддачи суммирования погрешностей состоит в отказе от определения и использования многомерных функций распределения составляющих погрешности. Необходимо подобрать для характеристик составляющих такие числовые оценки (С.К.О., эксцесс и др.), оперируя с которыми можно было бы получить соответствующие числовые оценки результирующей погрешности. При этом следует учитывать, что: а) отдельные составляющие погрешности могут быть коррелированы между собой; б) при суммировании случайных величин их законы распределения существенно деформируются, т.е. форма закона суммы может резко отличаться от формы закона распределения составляющих. Наиболее просто задача суммирования решается, если удается организовать измерения так, чтобы погрешность результата полностью определялась систематической погрешностью в виде предельной погрешности средств измерения.

Суммирование систематических погрешностей. При оценивании границ систематическая погрешность (СП) оценивается по ее составляющим, называемым элементарными СП. Если для части составляющих погрешности измерения находят их оценки и эти погрешности устраняются путем введения поправок, то в качестве рассматриваемых элементарных погрешностей выступают погрешности определения поправок, которые так же характерезуются границами. Для оценивания СП результата измерений необходимо уметь суммировать ее элементарные составляющие.

Множество возможных измерений данной величины дает множество различных реализаций каждой элементарной СП. Поэтому их можно рассматривать как случайные величины и суммировать методами, разработанными в математической статистике. Однако для этого нодо знать их функции распределения, которые, как правило, неизвестны. В этом случае суммирование выполняют, задавшись видом распределения, исходя из известных данных об элементарной СП. Это не вносит существенной ошибки в получаемые результаты, так как в соответствии с принципом оценивания погрешностей сверху из возможных форм распределений данной погрешности всякий раз выбирают наихудшую форму распределения. При этом получаемая оценка погрешности надежно характерезует неопределенность результата.

Элементарные Спимеют самую различную форму распределений. В большинстве случаев невозможно точно установить, какова она в действительности. При этом необходимо руководствоваться следующим правилам:

- если известна оценка границ погрешности, то ее распределение следует считать равномерным. Данная ситуация имеет место на пракике в большинстве случаев.

- если известна оценка С.К.О., рапределение следует считать нормальным.

Применение этого правила позволяет статистически суммировать элементарные СП и обычно приводит к осторожным и вместе с тем не слишком завышенным оценкам погрешности результата измерений.

При суммировании элементарных СП в предложении равномерного закона распределения слагаемых их сумма Q равна

$$Q = \begin{cases} k\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} Q^2_i}, & \text{если } k\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} Q^2_i} < \sum\limits_{i=1}^{n} Q^2_i \\ \sum\limits_{i=1}^{n} Q_i, & \text{если } k\sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} Q^2_i} \geq \sum\limits_{i=1}^{n} Q^2_i, \end{cases}$$

где Q_i - границы i-й элементарной СП; k – поправочный коэффициент, зависящий от числа слагаемых n и доверительной вероятности. При уровне значимости α<0,99 он мало зависит от числа слагаемых (см.табл2.6.10)

Таблица 2.6.10

α	0.90	0.95	0.98	0.99
k	0.95	1.1	1.3	1.4

При большом числе слагаемых результирующая погрешность имеет практически нормальное распределение. Оценка дисперсии этого распределения равна сумме дисперсий слагаемых

$$S_Q^2 = \sum_{i=1}^{n} Q_i^2 / 3.$$

Задавшись доверительной вероятностью, получим Q как границу доверительного интервала $Q = t_p S_Q$, где t_p - квантиль нормального распределения при выбраном уровне значимости.

Суммирование случайных погрешностей. При рассмотрении составляющих погрешности как случайных величин, результирующую погрешность следует определять по правилу суммирования случайных величин. Это правило основано на известных из теории вероятностей положениях:

а) математическое ожидание результирующей погрешности определяется алгебраической суммой математических ожиданий составляющих;

б) дисперсия суммарной погрешности определяется выражением

$$\sigma^2_{\text{сумма}} = \sum_{i=1}^{n} \sigma^2_i + \sum_{i=1}^{n} r_{ij}\,\sigma_i\,\sigma_j . \qquad (2.6.1)$$

где $\sigma^2_{\text{сумма}}$ – дисперсия результирующей погрешности; σ^2_i – дисперсия i-й составляющей погрешности; n – *число суммируемых составляющих погрешностей;* r_{ij} – коэффициент корреляции между i- и j-й составляющими который определяется по формуле

$$r_{ij} = \frac{1}{S_k\,S_t\,(n-1)} \sum_{j=1}^{n} (Q_{kj} - Q_k)(Q_{tj} - Q_t).$$

Использование выражения (2.6.1) для расчета дисперсии регулирующей погрешности затруднительно, так как точное значение коэффициента корреляции между составляющими обычно неизвкстно. В этом случае при расчетах полагают коэффициент r равным нулю, если случайные составляющие можно считать независимыми (при $r<0.7$), или равным единице со знаком плюс или минус, если заметна корреляция между суммируемыми случайными составляющими погрешностей (при $r>0.7$).

В случае суммирования случайных погрешностей при нормальных законах их распределений будет считать, что результирующая погрешность измерения состоит из n случайных составляющих, имеющих нормальный закон распределения. Зная доверительную вероятность P и доверительный интервал Δ_{im} для каждой составляющей погрешности, можно найти среднее квадратическое отклонение каждой из них по формуле

$$\sigma_i = \Delta_{im} / t_{Pi} , \qquad (2.6.2)$$

где t_{Pi} – коэффициент, взятый из таблиц для нормального распределения и соответствующей доверительной вероятности P_i .

Если доверительная вероятность для всех соответствующих одинакова и равна P, то, используя выражения (2.6.1) и (2.6.2), получим:

а) для коррелированных составляющих (r_{ij} = +1 или -1)

$$\sigma_{\text{сумма}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma^2_i + 2\sum_{ij=1}^{n} \sigma_i\,\sigma_j} = \sum_{i=1}^{n} \pm\sigma_i = \left(\sum_{i=1}^{n} \pm\Delta_{im}\right) / t_p , \qquad (2.6.3)$$

где знак $\pm$ означает, что для составляющих с положительной корреляцией σ_i и Δ_{im} нужно брать со знаком плюс, а для составляющих с отрицательной корреляцией – со знаком минус;

б) для независимых составляющих ($r_{ij} = 0$)

$$\sigma_{сумма} = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \sigma^2_i} = \left(\sum_{i=1}^{n} \Delta^2_{im}\right) / t_p . \qquad (2.6.4)$$

При суммировании составляющих, имеющих нормальный закон распределения, результирующая погрешность будет иметь тоже нормальный закон распределения. Поэтому доверительный интервал суммарной погрешности с доверительной вероятностью *P* может быть найден как

$$\Delta_{сумма} = \pm t_p \, \sigma_{сумма} , \qquad (2.6.5)$$

где $\Delta_{сумма}$ – граница доверительного интервала суммарной погрешности.

С учетом (2.5.3) и (2.6.4) выражение (2.6.5) принимать вид, соответственно для коррелированных и некоррелированных составляющих

$$\Delta_{сумма} = \pm \sum_{i=1}^{n} \pm \Delta_{im} ; \qquad \Delta_{сумма} = \pm \sqrt{\sum_{i=1}^{n} \Delta^2_{im}} , \qquad (2.6.6)$$

Суммирование погрешностей по первой формуле из (2.6.6) называется арифметическим, а по второй – геометрическим суммированием.
значению могут находится в пределах от нуля до единицы, поэтому арифметическое суммирование обычно дает завышенное значение суммарной погрешности.

Для установления доверительного интервала суммарной погрешности необходимо в каждом конкретном случае искать методами теории вероятностей результирующий закон распределения по известным законом суммируемых составляющих. Зная результирующий закон распределения, можно найти доверительный интервал суммарной погрешности по выражению

$$\delta_{сумма} = \pm k^{(P)}_{сумма} \, \sigma_{сумма} ,$$

где $k^{(P)}_{сумма}$ - коэффициент, зависящий от результирующего закона распределения и доверительной вероятности *P*.

Возможны приближенные способы определения доверительного интервала суммарной погрешности без установления результирующего закона распределения. Первый способ базируется на центральной предельной теореме: если число суммируемых независимых составляющих достаточно велико (практически при $n \geq 5$, если среди этих составляющих нет существенно преобладающих над остальными), то результирующий закон распределения близок к нормальному и в качестве коэффициента $k^{(P)}_{\text{сумма}}$ можно принимать квантильный множитель t_p.

Второй способ основан на том факте, что при суммировании независимых составляющих можно пользоваться приближенными значениями $k^{(P)}_{\text{сумма}}$: при доверительной вероятности $P = 0.90$ $k^{(0.90)}_{\text{сумма}} \approx 1{,}6$, а при доверительной вероятности $P = 0{,}95$ $k^{(0.95)}_{\text{сумма}} \approx 1{,}8$. При этом погрешность в определении $\delta_{\text{сумма}}$ не превышает 10%.

Суммирование систематических и случайных погрешностей. При проведении многократных измерений СлП может быть уменьшена во много раз. Однако погрешность усредненного результата будет характеризоваться не этой весьма малой случайной погрешностью, а определяется не зависящей от числа усредняющих отсчетов систематической погрешностью.

Механизм суммирования систематической и случайной составляющих погрешности резко отличаются от механизма суммирования случайных погрешностей. СП может суммироваться только с доверительным $t_p S_{X\text{ср.}}$ значением погрешности, а отнюдь не с оценкой С.К.О. $S_{X\text{ср.}}$ Это суммирование происходит арифметически с модулем границы неисключенной систематической погрешности Q.

Согласно ГОСТ 8.207 – 76 погрешность результата измерения определяетс по следующим правилам:

- если $|Q| < 0.8 S_{X\text{ср.}}$, то следует пренебречь систематической составляющей погрешности и учитывать только СлП результата в виде $\Delta = \pm\, t_p S_{X\text{ср.}}$;

- если $|Q| > 0.8 S_{X\text{ср.}}$, то наоборот, следует пренебречь случайной составляющей и результат характеризовать лишь границами его СП $\Delta = \pm\, Q$;

если вышеперечисленные неравенства не выполняются, то границу погрешности результата измерений находят путем композиции распределений случайных и неисключенных систематических погрешностей, рассматриваемых как случайные величины. Допускается границы погрешности результата измерений определять по формуле

$$\Delta = \pm\, K\, S_{\text{сумма}} = \pm \left[(t_p S_{X\text{ср}} + Q) / S_{X\text{ср}} + \sqrt{\sum_{i=1}^{m} Q^2_i / 3} \right],$$

где $S_{\text{сумма}} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} Q^2_i) / 3}$ - оценка суммарного С.К.О. суммарной погрешности.

Рабочее задание. Ответить на вопросы для самопроверки.

1. Начем основана теория расчетного суммирования погрешностей?

2. Как могут быть определены квантильные множители суммарной погрешности результата измерения?

3. Сформулируйте правила, по которым суммируются систематические погрешности.

4. Расшифруйте понятия коррелированных и некоррелированных случайных величин. Что считается границей между этими случайными величинами при их суммировании?

5. Каким образом суммирубтся коррелированные случайные величины?

6. По каким правилам суммируются некоррелированные случайные величины?

7. Как суммируются случайные и систематические погрешности? Какой нормативный документ регламентирует эти правила?

8. В чем состоит суть критерия ничтожно малой погрешности?

Контрольные задания.

1.При измерении электрических параметров устройства установлено, что общая погрешность результата определяется четырьмя составляющими: основной погрешностью средств измерения $\Delta_{си} = \pm 1\%$ и дополнительными

(от измерения напряжения питания сети $\Delta_{с} = \pm 0{,}5\%$, от изменения температурного режима $\Delta_{t} = \pm 0{,}45\%$ и от вличния (наводок) электрического поля $\Delta_{п} = \pm 1\%$). Определить общую погрешность измерения.

Решение. Принимаем доверительную вероятность P = 0,9, по формуле (2.2.6) поучим

$$\Delta_{сумма} = 0{,}95\sqrt{1^2 + 0{,}5^2 + 0{,}45^2 + 1^2} = 1{,}49 \approx 1{,}5\%.$$

2. При измерении электрической мощности амперметра-вольтметра установлено, что присутствуют элементарные составляющие неисключенной систематической погрешности, заданные их границами: методическая – 0,43 Вт; инструментальная – 0,51 Вт; температурная – 0,12 Вт; личная – 0,04 Вт; от влияния внешнего магнитного поля – 0,07 Вт. Определить суммарную систематическую погрешность и границы доверительного интервала при доверительной вероятности, равной а) 0,09; б) 0,95; в) 0,98; г) 0,99.

3. При измерении массы тела установлено, что присутствуют элементарные составляющие неисключенной систематической погрешности, заданные их границами: методическая – 0,02 г; инструментальная – 0,05 г; личная – 0,03 г. Определить суммарную систематическую погрешность при довеоительной вероятности, равной: а) 0,90; б) 0,95; в) 0,98; г) 0,99.

4. При измерении частоты выходного сигнала измерительного генератора синусоидального напряжения при различных положениях ручки регулировки установлено, что присутствуют элементарные составляющие неиключенной систематической погрешности, заданные их средними квадратическими отклонениями. Эти составляющие обусловлены: 1) люфтом ручки

регулировки – 1,31 Гц; 2) прогревом электронных элементов генератора – 2,12 Гц; 3) колебаниями напряжения питающей сети – 0,64 Гц. Определить суммарную систематическую погрешность и доверительный интервал при доверительной вероятности, равной: а) 0,90; б) 0,95; в) 0,98; г) 0,99.

5. При измерении некоторой безразмерной величины были получены два ряда случайных погрешностей (они расположены в порядке получения): а) 0,005; 0,015; 0,025; 0,030; 0,035; 0,037; 0,040; 0,040; 0,045; 0,048; 0,050; 0,061; 0,070; 0,077; 0,084; б) 1,010; 1,014; 1,024; 1,040; 1,046; 1,055; 1,044; 1,059; 1,055; 1,051; 1,064; 1,074; 1,089; 1,085; 1,108. Определить коррелированы ли эти случайные погрешности и найти суммарную случайную погрешность. Считая распределение погрешностей нормальным, определить доверительный интервал при доверительной вероятности 0,9; 0,95 и 0,99.

6. При поверке электронного цифрового вольтметра установлено, что случайная погрешность измерения содержит две составляющие, представленные двумя рядами: а) 0,005; 0,040; 0,025; 0,048; 0,015; 0,035; 0,050; 0,037; 0,077; 0,040; 0,061; 0,045; 0,070; 0,084; 0,030 и б) 1,061; 1,029; 1,089; 1,068; 1,001; 1,005; 1,021; 1,064; 1,073; 1,101; 1,007; 1,025; 1,031; 1,023; 1,009 мВ. Определить коррелированы ли эти случайные погрешности т найти суммарную случайную погрешность. Считая распределение погрешностей нормальным, определить доверительный интервал при доверительной вероятности 0,9; 0,95 и 0,99.

7. Поверка частотомера позволила установить, что его случайная погрешность состоит из двух составляющих: а) 0,070; 0,005; 0,048; 0,025; 0,035; 0,040; 0,030; 0,040; 0,037; 0,045; 0,050; 0,077; 0,061; 0,084; 0,015; и б) 1,067

1,067;1,025; 1,031; 1,011; 1,026; 1,079; 10,59; 1,054; 1,022; 1,037; 1,072; 1,105; 1,051; 1,084; 1,005 Гц. Определить коррелированы ли эти случайные погрешности, и найти суммарную случайную погрешность. Считая распределение погрешностей нормальными, определить доверительный интервал при доверительной вероятности 0,9; 0,95 и 0,99.

8. Омметр характеризуется двумя группами случайных погрешностей: а) 0,370; 0,305; 0,325; 0,335; 0,340; 0,315; 0,345; 0,348; 0,340; 0,350; 0,330; 0,361; 0,377 0,337; 0,384; б) 1,167; 1,135; 1,111; 1,126; 1,178; 1,106; 1,137; 1,131; 1,154; 1,172; 1,159; 1,131; 1,205; 1,122; 1,164 мОм. Определить коэффициент корреляции между этими составляющими, найти суммарную случайную погрешность при различных значениях доверительной вероятности.

9. При измерении индуктивности установлено, что случайная составляющая состоит из двух составляющих, которые представлены рядами: а) 0,315; 0,330; 0,337; 0,305; 0,340; 0,325; 0,348; 0,335; 0,350; 0,340; 0,361; 0,370; 0,345;

0,377; 0,384; б) 1,186; 1,159; 1,152; 1,235; 1,134; 1,171; 1,171; 1,101; 1,156; 1,122; 1,149; 1,131; 1,107; 1,117; 1,005; 1,064 мкГн. Найти суммарную случайную погрешность измерения при доверительной вероятности 0,95.

10. При измерении размера детали было установлено, что случайная составляющая погрешности содержит две составляющие. Они представлены в виде двух рядов: а) 9,1; -4,2; -2,2; 0,3; -3,4; 2,0; 4,0; 3,1; 5,1; -5,1; 6,2; 1,1; 7,0; -1,3; 8,2; б) 6,2; -3,2; -2,1; -0,5; -1,4; 3,4; 5,1; 2,9; 4,3; -2,0; 6,8; 1,5; 5,0; -1,1; 4,5 мкм. Найти суммарную случайную погрешность измерения размера детали при доверительной вероятности 0,9; 0,95 и 0,99.

11. При измерении массы тела случайная составляющая погрешности характерезуется двумя составляющими, которые представлены рядами:
а) –5,3; -4,2; -3,3; -2,1; -1,4; 0,1; 1,4; 2,8; 3,4; 4,6; 5,4; 6,8; 7,4; 8,1; 9,7; б) 2,0; 3,8; -4,4; 0,1; -7,1; -3,5; 6,5; -0,4;-2,9; 0,1; 4,3; -1,8; 1,4; -1,5; 0,2 г. Найти суммарную случайную погрешность измерения массы тела при доверительной вероятности 0,9; 0,95 и 0,99.

12. Используя данные задачи 5 определить суммарную погрешность определения безразмерной величины при условии, что границы неисключенной систематической погрешности равны а) $\pm 0,03$; б) $\pm 0,1$; в) $\pm 0,3$; г) $\pm 0,5$.

13. Используя данные задачи 6, определить суммарную погрешность измерения напряжения при условии, что границы неисключенной ситетической погрешности равны: а) $\pm 0,02$ мВ; б) $\pm 0,1$ мВ; в) $\pm 0,25$ мВ; г) $\pm 0,38$ мВ;

14. Используя данные задачи 7, определить суммарную погрешность измерения частоты, при условии, что границы неисключенной систематической погрешности равны: а) $\pm 0,035$ Гц; б) $\pm 0,18$ Гц; в) $\pm 0,27$ Гц; г) $\pm 0,42$ Гц.

15. Используя данные задачи 8, определить суммарную погрешность измерения сопротивления при условии, что границы неисключенной систематической погрешности равны: а) $\pm 0,034$ Ом; б) $\pm 0,12$ Ом; в) $\pm 0,32$ Ом; г) $\pm 0,47$ Ом.

16. Используя данные задачи 9, определить суммарную погрешность измерения индуктивности при условии, что границы неисключенной систематической погрешности равны: а) $\pm 0,02$ мГн; б) $\pm 0,15$ мГн; в) $\pm 0,21$ мГн; г) $\pm 0,33$ мГн.

17. Используя данные задачи 10, определить суммарную погрешность измерения размера детали при условии, что границы неисключенной систематической погрешности равны: а) ± 5 мкм; б) ± 20 мкм; в) ± 34 мкм; г) ± 71 мкм.

18. Используя данные задачи 11, определить суммарную погрешность измерения массы тела при условии, что границы неисключенной систематической погрешности равны: а) ± 4 г; б) ± 10 г; в) ± 30 г; г) ± 50 г.

19. Цифровым измерителем иммитанса Е7-14 проводились измерения сопротивлений магазина сопротивлений марки Р33:: а) 0,1 Ом; б) 10 Ом. Получены следующие результаты: а) 145,44; 145,40; 145,43; 145,42; 145,43; 145,42; 145,42; 145,42; 145,41; 145,41; 145,42; 145,43; 145,44; 145,41; 145,44 мОм и б) 10,0580; 10,0580; 10,0581; 10,0579; 10,0580; 10,0580; 10,0579; 10,0580; 10,0579; 10,0582; 10,0583; 10,0581; 10,0580; 10,0578; 10,0578; 10,0581; 10,0579; 10,0582; 10,0578; 10,579 Ом. Проведенные измерения характерезуются неисключенной систематической погрешностью, задаваемой класом точности измерителя Е7-14. Формулы для его расчета приведены в табл. 2.6.11.

Таблица 2.6.11

Диапазон измерения	Конечное значение диапазона R_k,, Ом	Предел допускаемого значения основной погрешности, Ом
0,1…1000 мОм	1	$10^{-3}(1 + Q)\ R + 10^{-4}\ R_k$
0,001…10 Ом	10	$10^{-3}(1 + Q)\ R + 10^{-4}\ R_k$
0,01…100 Ом	100	$10^{-3}(1 + Q)\ R + 10^{-4}\ R_k$
100…1000 Ом	1000	$[10^{-3}(1 + Q) +2\ 10^{-3}\ R/R_k]\ R$
1…10 кОм	10000	$[10^{-3}(1 + Q) +2\ 10^{-3}\ R/R_k]\ R$

При этом добротность Q для данного магазина сопротивлений равна нулю. Для устранения влияния соединительных проводов и переходных сопротивлений контактов были проведен ряд измерений при нулевом значении магазина сопротивлений. Получены следующие результаты: 48,30; 48,29; 48,28; 48,29; 48,28; 48,29; 48,29; 48,28; 48,30; 48,30; 48,30; 48,30; 48,31; 48,32; 48,30; 48,29; 48,27; 48,27; 48,29; 48,30; 48,31; 48,28; 48,28; 48,27; 48,31; 48,31; 48,32; 48,31 мОм. Провести обработку результатов измерений. Найти суммарную погрешность измерения сопротивлений.

20. Решить задачу 19 при условии, что измерялись сопротивления а) 0,5 Ом; б) 100 Ом и получены следующие результаты: а) 557,62; 557,61; 557,60; 557,60; 557,60; 557,61; 557,62; 557,61; 557,62; 557,59; 557,59; 557,60; 557,58; 557,60; 557,58 мОм; б) 100,032; 100,35; 100,034; 100,035; 100,036; 100,036; 100,036; 100,034; 100,033; 100,033; 100,035; 100,035; 100,037; 100,038; 100,038; 100,034; 100,036; 100,037 Ом.

21. Решить задачу 19 при условии, что измерялись сопротивления: а) 1,0 Ом; б) 5 Ом и получены следующие результаты: а) 1050,50; 1050,49; 1050,48» 1050,46; 1050,48; 1050,47; 1050,46; 1050,49; 1050,46; 1050,48; 1050,45;

1050,44; 1050,47; 1050,47; 1050,47 мОм; б) 5,0561; 5,0685; 5,0630; 5,0672; 5,0725; 5,0750; 5,0784; 5,0793; 5,0810; 5,0835; 5,0813; 5,0870; 5,0788; 5,0765; 5,0842 Ом.

ЗАНЯТИЕ 7. Обработка результатов измерения

Основные положения.

Прямые равноточные измерения. Если измерения проводятся по одной и той же методике средствами измерений одинаковой точности при неизменных внешних условиях, то такие измерения называются равноточными. Задача обработки результатов таких измерений заключается в нахождении

оценки измеряемой величины и доверительного интервала, в котором находится истинное значение измеряемой величины. При равноточных измерениях среднее квадратические отклонения всех рядов измерений равны между собой

$$\sigma^2{}_1 = \sigma^2{}_2 = \ldots = \sigma^2{}_n = \mathrm{const}\,.$$

Методика обработки результатов измерений заключается в следующем. Используя полученные результаты измерений x_1 , x_2 , x_3 … x_n , из которых исключены систематические погрешности, находят:

а) среднее арифметическое значение измеряемой величины

$$X_{\text{ср.}} = (x_1 + x_2 + \ldots + x_n) / n\,;$$

б) среднее квадратическое отклонение результатов измерения

$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{\text{ср.}})^2 \frac{1}{n-1}}\,;$$

в) среднее квадратическое отклонение среднего арифметического значения

$$\sigma_{X\text{ср.}} = \sigma / \sqrt{n}\,;$$

г) исключают грубые погрешности и промахи, используя тот или иной критерий, например критерий 3σ. После их исключения проводят повторный расчет среднего арифметического значения и среднего квадратического отклонения;

д) строят вариационный ряд и разбивают его на заданное число интервалов группирования;

е) определяют относительные частности и строят гистограму и полмгон;

ж) определяют вид закона распределения измеряемой величины, используя тот или иной критерий, например критерий Пирсона;

з) задавшись доверительной вероятностью, определяют доверительный интервал значения измеряемой величины

$$\Delta = t_p \sigma / \sqrt{n};$$

и) записывают результат измерения в форме $x = x_{ср.} \pm \Delta$ при $P = P_д$.

Прямые неравноточные измерения. В некоторых случаях одну и ту же величину необходимо измерить разными методами или средствами измерений. При этом получают m рядов наблюдений по n_1, n_2 , $n_3 \ldots$, n_m измерений в каждом из рядов. После обработки этих рядов получают средние арифметические значения x_1, x_2 , $x_3 \ldots$, x_m и средние квадратические отклонения σ_1, σ_2 , $\sigma_3 \ldots$, σ_m среднего арифметического значения каждого из рядов. Точность и соответственно средние квадратические отклонения будут различными. Такие измерения называются неравноточными.

Для установления равноточности (или неравноточности) двух рядов наблюдений, состоящих их n_1 и n_2 рядов наблюдений, вычисляют оуенки дисперсий для каждого ряда. Затем находят отношение $F = (\sigma_1 / \sigma_2)^2$, которое составляется так, чтобы $\sigma^2_1 > \sigma^2_2$. Измерения признаются неравноточными, если F попадает в критическую область, т.е. $F > F_\alpha$. При этом уровень значимости равен 2α. Значение критерия Фишера F_α для различных уровней значимости и числа степеней свободы $k_1 = n_1 - 1$ и $k_2 = n_2 - 1$ приведены в табл.2.2.7.

Обработка результатов неравноточных измерений заключается в объединении результатов различных измерений путем нахождения среднего взвешенного значения.Оно является оценкой действительного значения измеряемой величины, которое при полученных результатах измерений x_1, x_2, $x_3 \ldots x_n$ и их средних квадратических отклонениях σ_1, σ_2, σ_3, …, σ_n имеет минимальную дисперсию.

Среднее взвешенное значение определяют по формуле

$$x_p = \sum_{i=1}^{m} p_i x_i / \sum_{i=1}^{m} p_i ,$$

где $p_i = 1/ \sigma^2_i$ – вес i-го измерения.

Значение среднего квадратического отклонения среднего взвешенного значения результатов измерений находят по формуле

$$\sigma_p = \sqrt{1 / \sum_{i=1}^{m} 1/ \sigma^2_i} .$$

В случае, когда теоретические средние квадратические отклонения неизвестны, пользуются их оценками.

Если об исходных распределениях рядов наблюдений нет достовертых данных, то на основании центральной предельной теоремы можно предполагать, что распределение среднего взвешенного значения нормально, поскольку оно является суммой большого числа случайных величин с конечными математическими ожиданиями и дисперсиями.

Дверительная граница погрешности результата измерения $t_p \ \sigma_p$ при условии, что число n_i больше 20 – 30 , может быть определена по интегральной функции нормированного нормального распределения.

При малом числе нормально распределенных результатов наблюдений используется распределение Стьюдента с числом степеней свободы

$$k = m^2 / \sum_{i=1}^{m} 1 / (n_i - 1) .$$

Однократные измерения. Прямые статистические измерения в большей мере относятся к лабораторным измерениям, например, при разработке и аттестации методики, когда погрешность измерений выявляется в процессе проведения и обработки экспериментальных данных.

Для производственных процессов более характерны однократные технические прямые и косвенные измерения. Здесь процедура измерений заранее регламентируется тем, чтобы при известной точности средств измерений и внешних условиях измерений погрешность не превзошла определенное значение, т.е. значения погрешности и доверительной вероятности заданы априори. Поскольку измерения выполняются без повторных наблюдений, то нельзя отличить случайную от систематической составляющей. Поэтому для оценки погрешности дают лишь ее границы с учетом возможных влияющих величин. Последние оценивают своими границами, но не определяют. На практике дополнительные погрешности, как правило, не учитываются, так как измерения осуществляют в основном в нормальных условиях, а субъективные погрешности также весьма малы.

В принципе однократные измерения достаточны, если неисключенная систематическая погрешность (например, класс точности средства измерений) заведомо больше случайной. Практически это достигается, когда случайная составляющая в 2 – 4 раза меньше систематической. Тогда результат измерения записывают в виде $x = x_{си} \pm \Delta_{сумма}$ при доверительной вероятности 0,95, где $x_{си}$ – результат, зафиксированный средством измерений; $\Delta_{сумма} = \sqrt{\Delta^2_{си} + \Delta^2_{мет}}$ – суммарная погрешность, определяемая классом точности средства измерения $\Delta_{си}$ и методической погрешности $\Delta_{мет}$.

*Косвенные измерения.*Ковенные измерения (КИ) – измерения, при которых искомое значение величины Q находят на основании известной зависимости

$$Q = F(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m) \qquad (2.7.1)$$

между этой величиной и величинами, подвергаемыми прямым измерениям $Q_1, Q_2, \ldots, Q_m$. При проведении КИ необходимо получить оценку результата $\tilde{Q}$ и погрешности $\Delta_{КИ}$, зная оценки результата $\tilde{Q}_1$ и погрешности

$$\Delta_i = \Delta_{Спi} + \Delta_{СлПi} \qquad (2.7.2)$$

прямых измерений каждого из аргументов Q_1, где $\Delta_{Спi}$, $\Delta_{СлПi}$ – систематическая и случайная составляющие погрешности i-го аргумента.

В общем случае расчет погрешности косвенных измерений складывается из двух этапов.

Вывод формулы для абсолютной погрешности результата косвенного измерения исходя из вида функции (2.7.1). Для этого, предполагая достаточную гладкость исходной функции, разлагают ее в ряд Тейлора. В случае необходимости проводят исследование значимости отбрасываемого остаточного члена ряда Тейлора, предполагая малость погрешностей оценок аргументов. При этом необходимы сведения о законах распределения аргументов.

2. Расчет погрешности в соответствии с полученной формулой путем суммирования случайных погрешностей и их законов распределения.

Расположение функции (2.7.1) в ряд Тейлора имеет вид

$$Q = f(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m) = F(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \ldots, \tilde{Q}_m) + \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial Q_1} \Delta_i + \tilde{C}. \qquad (2.7.3)$$

Отсюда вытекает, что оценка результата равна

$$\tilde{Q} = f(\tilde{Q}_1, \tilde{Q}_2, \ldots, \tilde{Q}_m) + \tilde{C}.$$

где $\tilde{C}$ – поправка, равная

$$\tilde{C} = -0.5 \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial Q_i^2} S_i^2 - \sum_{i=1}^{m} \tilde{r}_{ek} \frac{\partial^2 f}{\partial Q_e \, \partial Q_k} S_e S_k, \qquad (2.7.4)$$

где S_e, S_k – оценки С.К.О. e-го и k-го аргументов; r_{ek} – оценка коэффициента корреляции между *e*-м и k-м аргументами.

Целесообразность введения поправки определяется соотношением между $\tilde{C}$ и погрешностями аргументов Q_i. В большинстве случаев условия независимости друг от друга погрешности измерений аргументов выполняются ($r_{ek} \approx 0$) и для вычисления поправки в последней формуле достаточно учесть лишь первый член.

В случае линейных косвенных измерений, т.е. когда

$$Q = f(Q_1, Q_2, \ldots, Q_m) = \sum k_i Q_i ,$$

поправка $\tilde{C}$ равна нулю.

Абсолютная погрешность косвенного измерения $\Delta = \tilde{Q} - Q$, как это следует из уравнения (2.7.3), равна

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f}{\partial Q_i} \Delta_i = \sum_{i=1}^{m} W_i \Delta_i,$$

где $W_i = \partial f / \partial Q_i$ – коэффициенты влияния i-го аргумента; $W_i \Delta_i$ – частная i-я погрешность.

Учитывая уравнение (2.7.2) , получили, что

$$\Delta = \sum_{i=1}^{m} W_i (Q_i + \Delta_{СлП}) = \sum_{i=1}^{m} W_i \Delta_{Ci} + \sum_{i=1}^{m} W_i \Delta_{СлПi} = \Delta_C + \Delta_{СлП} .$$

Таким образом, при косвенных измерениях путем суммирования составляющих приходится находить не только границы систематической составляющей, но и случайные погрешности.

Случайные погрешности косвенных измерений. Оценка С.К.О. случайной погрешности равна

$$\tilde{S}(Q_{ср.}) = S(\Delta_{СлП}) = \sqrt{D[Q]} = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} W_i^2 S_i^2 + 2\sum_{k=1}^{m} \tilde{r}_{ke} W_k W_e S_k S_e} . \qquad (2.7.5)$$

где $S = \tilde{S}(Q) = S(\Delta_{СлП})$ – оценка С.К.О. результата косвенного измерения;

$S_i = \tilde{S}(Q_I)$ – очнека С.К.О. результата прямого измерения i-го аргумента (С.К.О. среднего арифметического значения);

$$\tilde{r}_{ke} = \frac{1}{S_k S_e (n-1)} \sum_{i=1}^{n} (\tilde{Q}_{kj} - Q_k)(\tilde{Q}_{ej} - Q_e) , \qquad (2.7.6)$$

$\tilde{r}_{ke}$ – оценка коэффициента корреляции между погрешностями измерения аргументов Q_k и Q_e .

Если случайные погрешности статически независимы, т.е. все коэффициенты корреляции равны нулю, то получим (2.7.5) для оценки С.К.О. случайной погрешности

$$S(\Delta_{СлП}) = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} W^2_i S^2_i} .$$

Систематические погрешности косвенных измерений. Считая реализации i-й неисключенной СП случайными величинами, для каждого аргумента Q_i находят границы Q_i . При этом, принимая элементарные СП за случайные величины с равномерной плотностью распределения, получим, что распределение суммарной СП изменяется в зависимости от числа слагаемых от равномерного до нормального. Соответственно этому для расчета границ СП результата косвенного измерения используются разные формулы.

Если составляющие Δ_{Ci} общей СП Δ_C можно считать равномерно распределенными в пределах своих границ Q_i , то

$$Q = \begin{cases} k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} W^2_i Q^2_i}, & \text{если} \quad k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} W^2_i Q^2_i} < \sum_{i=1}^{n} W_i Q_i \\ \sum_{i=1}^{m} W_i Qi , & \text{кссли} \quad k\sqrt{\sum_{i=1}^{m} W^2_i Q^2_i} \geq \sum_{i=1}^{m} W_i Q_i \end{cases} \tag{2.7.7}$$

Значение k приведены в табл. 2.7.10.

Если составляющие общей систематической погрешности Δ_C можно считать имеющими нормальные распределения и все границы Q_1 вычеслены для одной и той же доверительной вероятности, то

$$Q = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} W^2_i Q^2_i} \tag{2.7.8}$$

В промежуточных случаях решение задачи может быть получено следующим образом. Пусть K слагаемых имеют нормальное, а e – равномерное распределение. Оценка С.К.О. суммы первых слагаемых равна

$$S_K = \sqrt{\sum_{i=1}^{K} W^2_i (Q_i / t_p)^2}$$

где t_p квантиль нормального распределения. Оценка суммы С.К.О. вторых слагаемых

$$S_e = \sqrt{\sum_{j=1}^{e} W_j^2 (Q_j^2 / 3)}$$

В этом случае С.К.О. СП и доверительный интервал равны

$$S(\Delta_C) = \sqrt{S_K^2 + S_e^2}\,; \qquad Q = t_{сумма} S(\Delta_C),$$

где коэффициент $t_{сумма} = (Q_K + Q_e) / (S_K + S_e)$, где Q_K, Q_e - границы суммы K и e слагаемые погрешности, вычисляемые по формулам (2.7.7) и (2.7.8) соответственно. Обе границы следует вычислять для одной и той же доверительной вероятности. Этому же значению доверительной вероятности будет отвечать и полученная доверительная граница СП результата косвенного измерения.

Суммирование случайной и неисключенной систематической погрешностей косвенных измерений производится по общим правилам.

Итоговый результат косвенных измерений записывается в виде

$$Q = \tilde{Q} \pm t_p \tilde{S},$$

где $\tilde{S}$ – оценка С.К.О. , определенная для суммы систематической и случайной составляющих; t_p – множитель, зависящий от доверительной вероятности и закона распределения суммарной погрешности.

Рабочее задание. Ответить на вопросы для самопроверки.

1. Какие измерения называют равноточные ?
2. Как вычисляется среднее арифметическое значение и среднеквадратическое отклонение?
3. Поясните, что такое доверительный интервал и доверительная вероятность.
4. Как определить доверительный интервал, если задана доверительная вероятность?
5. Что такое вариационный ряд и интервалы групирования? Как определяется число интервалов группирования?
6. Что такое гистограмма, полигон и кумулятивная кривая?
7. Перечислите этапы обработки результатов прямых многократных измерений.
8. Что собой представляют неравноточные измерения?

9. Что такое вес измерений? Какие существуют критерии для установления веса результата неравноточных измерений?

10. Как определить среднее взвешенное значение и среднее квадратическое отклонение среднего взвешенного значения?

11. Для чего необходимо индентифицировать форму закона распределения результатов измерений? Расскажите, каким образом это делается.

12. Напишите алгоритм обработки результатов однократных измерений с точным оцениванием погрешностей.

13. Как обрабатываются результаты линейных косвенных измерений?

14. В чем состоит метод линеаризации и как он используется для обработки результатов нелинейных косвенных измерений?

15. Напишите алгоритм обработки результатов косвенных измерений при использовании метода приведения.

16. Какие установлены формы представления окончательного результата измерений?

17. Перечислите основные правила округления результатов измерений.

Контрольные задания.

При измерении длины детали получены три группы результатов: а) 1,45; 1,49; 1,47; 1,45; 1,45; б) 1,46; 1,46; 1,44; 1,43; 1,50; в) 1,44; 1,55; 1,43; 1,48; 1,33 мм. Оценить равноточность полученных результатов. Провести обработку результатов измерений.

2. При измерениии двух групп постоянных резисторов получены следующие результаты: а) 5,420; 5,371; 5,425; 5,418; 5,424; 5,416; б) 5,440; 5,410; 5,418; 5,427; 5,415; 5,415; 5,435; 5,438 Ом. Проверить равноточность полученных результатов и провести их обработку.

3. Среднеквадратическое значение переменного напряжения синусоедальной формы было измеряно двумя цифровыми вольтметрами. Получены следующие результаты: а) 10,01,; 9,996; 10,005; 10,002; 9,997; 9,982; 10,008; 9,84; 10,004; 10,001; 9,991; 9,995; 10,015; 10,018; 9,998; 10,003; 9,993; 9,999; б) 10,015; 9,996; 9,985 10,045; 9,972; 10,011; 10,004; 10,029; 9,962; 10,028; 10,035; 9,980; 10,020; 10,003; 9,997; 9,992; 10,010; 9,956 В. Провести обработку результатов измерений при доверительной вероятности, равной 0,001 и 0,05.

4. Определить по составному критерию, отвечает ли закон распределения результатов 13 равноточных измерений напряжения нормальному закону: 100,08; 100,09; 100,07; 100,10; 100,05; 100,06; 100,04; 100,06; 99,95; 99,92; 100,02; 99,98; 99,97 мВ. Расчитать среднее арифметическое значение напряжения; среднее квадратическое отклонение среднего арифметического,

доверительный интервал (при заданной доверительной вероятности 0,98). Написать правильно результат измерения.

5. При измерении силы тока были получены следующие результаты измерений: 3,20; 3,15; 3,17; 3,70; 3,012; 3,08; 3,18; 0,09; 3,18; 3,10; 3,30; 3,19 mA. Провести обработку результатов равноточных измерений.

6. Частота выходного сигнала измерительного генератора сигналов специальной формы измерена тремя независимыми частотометрами. Получены при ряда результатов: а) 145; 149; 147; 145; 145;; б) 146; 148; 144; 143; 150; в) 144; 155; 143; 148; 133 Гц. Оценить равноточность полученных рядов измерений и провести их попарную обработку.

7. Тремя коллективами исследователей с помощью различных методов измерений были получены следующие значения ускорений свободного падения и их средне квадратические отклонения; g_1 = 981,9190 см/с$^{2;}$
σ_1 = 0,0004 см/с^2; g_2 = 981,9215 см/с^2; σ_2 0,0016 см/с^2; g_3 = 981,923 см/с^2; σ_3 = 0,002 см/с^2. Определить среднее взвешенное значение ускорения свободного падения и оценку его среднего квадратического значения.

8. Проведено 10 равноточных измерений угла заточки режущего инструмента: 23°44′; 23°45′; 23°46′; 23°43′; 23°48′; 23°45′; 23°46′; 23°47′; 23°41′. Провести обработку результатов измерений.

9. Измерение сопротивления образцового резистора дали следующие результаты: 2002; 2005; 2002; 2004; 2006; 2003; 2005; 2004; 2010; 2003 Ом. Считая распределение результатов измерений нормальным, провести обработку полученных результатов.

10. Равноточные измерения емкости партии керамических конденсаторов дали результаты. Количество конденсаторов, емкость которых равна значению С представлены в талл. 2.7. 12.

Таблица 2.7.12

С, пФ	288	291	294	297	300	303	306	309	312	315	318	320
3	4	8	10	13	10	11	9	5	4	2	1	

Провести обработку результатов измерений.

11. Оценить погрешность результатов однократного измерения напряжения U = 0.9 В на сопротивлении R = 4 Ом, выполненного вольтметром класса точности 0,5 с верхним пределом измерения U_n = 1.5 В и имеющим внутренее сопротивление R_V = 1000 Ом. Известно, что дополнительные погрешности показаний вольтметра из-за магнитного поля и температуры не превышают соответственно $\sigma_{мп} = \pm 0{,}75\%$ и $\sigma_{т} = \pm 0{,}3\%$ допускаемой предельной погрешности.

Решение. а) Предел допускаемой относительной погрешности вольтметра на отметке 0,9 В составляет

$$\sigma_x = \sigma_{\text{си}} U_п / U = 0.83\%;$$

б) при подсоединении вольтметра исходное напряжение U_x изменяется из-за наличия R_V и составит

$$U_V = \frac{R}{R + R_V} U_x .$$

Тогда методическая погрешность, обусловленная конечным значением R_V, в относительной форме составит

$$\sigma_m = \frac{U_V - U_x}{U_x} 100 = - \frac{R}{R + R_V} 100 = - 0.4\%;$$

в) данная методическая погрешность является систематической составляющей погрешностью измерения и должна быть внесена в результат в виде поправки $g = - \sigma_m = - 0.4\%$ или в абсолютной форме на отмеьке 0,9 в

$$g_a = U g / 100 = 0.004 \text{ В}.$$

Тогда результат измерения с учетом поправки будет равен

$$U = 0.900 + 0.004 = 0.904 \text{ В};$$

г) поскольку основная и дополнительная погрешности заданы своими границными значениями, то они могут рассматриваться как неисключенные систематические погрешности и соответственно суммируются. При доверительной вероятности 0,95 доверительная граница неисключенной систематической погрешности будет равна

$$\sigma_c = 1,1 \sqrt{0,83^2 + 0,75^2 + 0,3^2} = 1,3\%.$$

В абсолютной форме $\Delta_c = \sigma_c U / 100 = 0.012$ В. Ввиду того, что $\Delta > g$, окончательный результат измерения записывается в виде

$$U = 0.90 \text{ В}; \quad \Delta = \pm 0.01 \text{ В}; \quad P = 0.95.$$

12. Однократные измерения семи различных постоянных напряжений, проводившиеся универсальным вольтметром В7-22, дали следующие результаты: 0,105; 0,185; 0,205; 1,87; 2,57; 10,07; 1,77 В. Относительная погрешность измерения постоянного напряжения данным вольтметром

$$\sigma = \pm(0{,}1 + 0{,}15U_k / U_x),$$

где U_k – измеряемое напряжение; U_k – конечное значение предела измерения

напряжения. Вольтметр В7-22 имеет следующие пределы измерений: 0,2; 2; 20; 200 В. Считая методическую погрешность принебрежимо малой, обработать полученные результаты.

13. Однократные измерения значений сопротивления различных резисторов, проводившиеся цифровым измерителем иммитанса Е7-14, дали следующие результаты: 1,2 мОм 22,5 мОм; 345 мОм; 0,765 Ом; 1,56 Ом; 14,6 Ом; 56,7 Ом; 234 Ом; 897 Ом; 1,05 кОм; 5,67 кОм; 8,98 кОм. Предел допускаемого значения основной погрешности измерения сопротивления на различных диапазонах приведены в табл. 2.7.11.

Считая методическую погрешность пренебрежимо малой, обработать полученные результаты. При расчетах принять добротность Q равной а) 0 и б) 10. Полученные погрешности представить в относительной и абсолютной погрешностях.

14. Определить плотность ρ материала по результатам измерений объема V (по объему вытесненной в мерной мензурке жидкости) и массы m двух образцов, изготовленных из данного материала. По результатам 11 измерений объема и 17 измерений массы первого образца было установлено: среднее арифметическое значение массы образца $m_{1\text{ ср.}} = 9{,}12$ г; среднее арифметическое значение объема образца $V_{1\text{ср.}}$ 1,16 см^3; среднее квадратическое отклонение ряда измерений m_1 $\sigma_{m1} = 0.04$ г; среднее квадратическое отклонение ряда измерений V_1 $\sigma_{v1} = 0.08$ см^3. По результатам 13 измерений объема и 13 измерений массы второго образца было установлено: среднее арифметическое значение массы образца $m_{2\text{ср.}} = 11.86$ г; среднее арифметическое значение объема образца $V_{2\text{ср.}} = 1.56$ см^3; среднее квадратическое отклонение ряда измерений m_2 $\sigma_{m2} = 0.06$ г; среднее квадратическое отклонение ряда измерений V_2 $\sigma_{v2} = 0.04$ см^3. Систематические погрешности при измерениях массы и объема были полностью исключены.

Решение. Зависимость между полтностью, объемом и массой определяется формулой

$$\rho = m / V.$$

Чтобы воспользоваться этой зависимостью для оценки действительного значения плотности материала в рассматриваемом случае, вопервых, необходимо определить средние из двух рядов измерений (для двух образцов) значения массы и объема. Для этого необходимо проверить равноточность результатов измерений в этих рядах.

Составляем дисперсионное отношение для рядов измерений массы и для рядов измерений объема образцов

$$F_m = \sigma^2_{m2} / \sigma^2_{m1} = (0.06 / 0.04)^2 = 2.25, \quad F_v = (\sigma_{v1} / \sigma_{v2})^2 = (0.08 / 0.04) = 4.$$

По табл.2.7.7 находим критическое значение критерия Фишера $F_k = 2.42$ при измерении массы для $g = 0.05$; $n_2 = 13 - 1 = 12$ и $n_1 = 17 - 1 = 16$. Поскольку $F_m = 2{,}25 < F_k = 2{,}42$, то ряды измерений массы равноточны.

Критическое значение критерия Фишера при измерении объема $F_k \approx 2{,}7$ для $g = 0{,}05$; $n_1 = 11 - 1 = 10$; $n_2 = 13 - 1 = 12$. Так как $F_v = 4{,}0 > F_k = 2{,}7$, ряды измерений объема неравноточны.

При равноточных измерениях среднее значение массы $m_{ср.}$ подсчитывается как среднее арифметическое значение из масс двух образцов, т.е.

$$m = (m_1 + m_2) / 2 = (9{,}12 + 11{,}86) / 2 = 10{,}49 \text{ г.}$$

При неравноточных измерениях среднее значение объема определяется как среднее взвешенное значение их объемов V_B. Дл расчета $V_{Bср.}$ определим веса p_1 и p_2 рядов измерений $V_{1\,ср.}$ и $V_{2\,ср.}$

$$p_1 = n_{v1} / \sigma^2_{v1} = 11 / (0{,}08)^2 = 1{,}719 \bullet 10^3 \text{ см}^{-6}. \quad p_2 = n_{v2} / \sigma^2_{v2} = 13 / (0.04)^2 = \\ = 8{,}125 \bullet 103^3 \text{ см}^{-6}.$$

Следовательно, средневзвешенное значение объема равно

$$V_{B\,ср.} = (p_1 V_{1\,ср.} + p_2 V_{2\,ср.}) / (p_1 + p_2) = (1{,}719 \bullet 10^3 \bullet 1{,}16 +$$

$$+ 8{,}125 \bullet 10^3 \bullet 1{,}56) / (1{,}719 + 8{,}125) \bullet 10^3 = 1{,}4902 \text{ см}^3.$$

Действительное значение плотности материала оценивается как

$$\rho_{ср.} = m_{ср.} / V_{B\,ср.} = 10{,}49 / 1{,}4902 = 7{,}039 \text{ г/см}^3.$$

Определим теперь среднее квадратическое отклонение погрешности этой оценки. Для этого предварительно определим значения частных производных функции $\rho = m / V$ по ∂m и ∂V при $m = m_{ср.}$ и $V = V_{B\ ср.}$

184

$$(\partial\rho / \partial m)_0 = 1 / V_B = 1 / 1{,}49 = 0.67\ см^{-3};\ (\partial\rho / \partial V)_0 = - m_{ср.} / V^2_B =$$

$$= - 10{,}49 / (1{,}49)^2 = - 4{,}72\ г/см^6.$$

Дисперсия погрешностей оценок равна

$$\sigma^2_m = \frac{\sigma^2 [m_{1\ ср.}]\ \sigma^2[m_{2\ ср.}]}{\sqrt{\ } \sigma^2[m_{1\ ср.}] + \sigma^2[m_{2\ ср.}]} = 0{,}704 \bullet 10^{-4}\ г^2;$$

$$\sigma^2_v = \frac{1}{\rho_1 + \rho_2} = 1{,}016 \bullet 10^{-4}\ см^6\ .$$

Теперь, воспользовавшись формулой (2.7.5), посчитаем оценку среднего квадратического отклонения погрешности $\rho_{ср.}$, учитывая, что коэффициент корреляции равен нулю:

$$\sigma\ \rho_{\ ср.} = \sqrt{\ } (0{,}67)^2\ 0{,}704 \bullet 10^{-4} + (4{,}72) \bullet 10^{-4} = 0{,}049\ г/см^3.$$

Следует оценить необходимость введения поправки С (см. формулу (2.7.4). Так как измерения мвссы и объема проводились разными методами, то коэффициент корреляции равен нулю. Следовательно, коэффициент С равен

$$C = 0{,}5 \left[\frac{\partial^2\rho}{\partial m^2}\ \sigma^2_m + \frac{\partial^2\rho}{\partial V^2}\ \sigma^2_v \right] = \frac{m}{V^3_n}\ \sigma^2_v = 3.2206 \bullet 10^{-4}\ г/см^3.$$

Он значительно меньше полученной оценки С.К.О. погрешности плотности и, следовательно, им можно пренебречь.

Приняв, что распределение случайной погрешности измерения плотности нормальное, а это допущение оправдано, тка как при определении плотности были объединены данные четырех рядов измерений, можно, используя функцию Лапласа, определить доверительный интервал. Согласно табл. 2.2.8 квантильный множитель t_p равен 1,96 при доверительной вероятности 0,95. Следовательно, действительное значение плотности материала, из которого изготовлены образцы, равно

$$\rho = 7{,}039 \pm 1{,}96\ \ 0{,}049 = 7{,}039 \pm 0{,}096 \text{ г/см}^3 \quad \text{при } P = 0{,}95.$$

15. Удельный расход топлива определяется по формуле

$$g_e = 716{,}2\ G\ t \,/\, (M\ n\ \tau),$$

где G и τ - доза топлива и время ее расхода; n – частота вращения двигателя в течении времени t; M – крутящий момент на валу двигателя. Определить погрешность измерения удельного расхода топлива, если погрешности прямых измерений аргументов равны G – 0,2%; τ, t – 0,1%; n – 0,1%; M – 0.5%.

16. Определить сопротивление и погрешность резистора, составленного из двух последовательно соединенных резисторов, сопротивления которых соответственно равны а) $10 \pm 0{,}5$ и $20 \pm 1{,}0$ Ом; б) $15 \pm 0{,}7$ и $18 \pm 1{,}1$ Ом.

17. Решить предыдущую задачу при условии, что сопротивления соеденены паралельно.

18 Постоянная времени LR цепи находится по формуле

$$\tau = L\ (R_1 + R_2)\ /\ )R_1R_2).$$

Для ее определения были проведены по 9 измерений индуктивности L и сопротивлений R_1 и R_2. Измерения индуктивности и сопротивлений проводились разными приборами. Полученные результаты приведены в табл.2.7.13.

Таблица 2.7.13

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
L,мкГн	303	300	297	300	303	303	300	306	303
R_1, Ом	1,038	1,003	1,023	1,051	1,007	1,035	1,047	1,041	1,012
R_2, Ом	2,018	2,057	2,051	2,063	2,003	2,061	2,041	2,003	1,997

Систематические погрешности, определяемые главным образом клоссом точности используемых средств измерений, равны $\pm 0{,}1\%$ - при измерении сопротивлений. Определить погрешность измерения постоянной времени.

19. Решить предыдущую задачу, при условии, что измерение значения сопротивлений равны приведенным в табл. 2.7.14.

Таблица 2.7.14

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9
R_1, Ом	1,045	1,015	1,005	1,035	1,022	1,041	1,010	1,025	1,030
R_2, Ом	2,058	2,015	2,011	2,050	2,029	2,047	2,016	2,021	2,042

20. Определить полное сопротивление резистора на частоте $50 \pm 0{,}5$ Гц, если индуктивность составляет 10 мГн и активное сопротивление равно 5 Ом. Погрешность определения индуктивности и активного сопротивления соответственно равны 2 и 1,5%. Определить погрешность определения полного сопротивления.

СТАНДАРТИЗАЦИЯ.

ЗАНЯТИЕ 1. Правовые основы и нормативные документы по стандартизации Российской Федерации

Основные положения. Основным документом в Российской Федерации по стандартизации является закон «О техническом регулировании», а также законы «Об обеспечении единства измерений», «О защите прав потребителей» и постановления Правительства РФ, принятыми для исполнения этих Законов РФ.

Закон «О техническом регулировании» устанавливает правовые основы стандартизации в РФ, определяет права и обязанности участников регулируемые Федеральным законом отношений. Он регулирует отношения, возникающие при разработке, принятии, применении и использовании обязательных требований к продукции, процессам производства, эксплуатации и утилизации, а также разработке, принятии, применении и использовании на добровольной основе требований к продукции, процессам производства, эксплуатации, хранения, перевозки, реализации и утилизации, выполнению работ или оказанию услуг. Иные Федеральные законы и нормативные акты РФ, касающиеся сферы стандартизации (в том числе прямо или косвенно предусматривающие осуществление контроля за соблюдением требований технических регламентов), применяются в части, не противоречащей основному документу. Федеральные органы исполнительной власти вправе издавать в среде технического регулирования акты только рекомендательного характера, за исключением в случае регулирования в отношении оборонной продукции (работ, услуг) и продукции (работ, услуг) сведения о которой составляют государственную тайну. Если международным договором РФ в сфере технического регулирования установлены иные правила, чем те, которые предусмотрены основным Федеральным законом, применяются правила международного договора, а в случае, если из международного договора следует, что для его применения требуется издания внутригосударственного акта, применяются правила международного договора и принятия на его основе законодательство РФ (см. приложение 1).

Для усиления роли стандартизации в научно-техническом прогрессе, повышении качества продукции и экономичности ее производства разработана Российская национальная система стандартизации (РНСС). Основу РНСС составляет Государственная система стандартизации (ГОСТ Р 1.0 – 92. ГСС РФ. Основные положения; ГОСТ 1.5 – 2002. ГСС РФ. Стандарты. Общие требования к построению, изложению, оформлению, содержанию и обозначению; ГОСТ Р 1.8 – 2002. ГСС РФ. Стандарты междугосударственные. Правила разработки, применения, обновления и прекращения в части работ, осуществляемых в Российской Федерации; ГОСТ Р 1.9 – 95. ГСС РФ. Порядок маркировки продукции и услуг знаком соответствия государственным стандартам; ГОСТ Р 1.12 – 99. ГСС РФ. Термины и определения. и др.) с изменениями в свете Федерального закона «О техническом регулировании». РНСС устанавливает правовые основы стандартизации в РФ, для всех органов управления, а также предприятий и предпринимателей, общественных объединений, и определяет меры государственной защиты интересов потребителей и государства посредством разработки и применения нормативных документов по стандартизации.

Стандартизация по определению ИСО/МЭК – это установление и применение правил с целью упорядочения деятельности в определенной области на пользу и при участии всех заинтересованных сторон, в частности для достижения всеобщей оптимальной экономии при соблюдении условий эксплуатации (использования) и требований безопасности.

Согласно Федеральному закону «О техническом регулировании» стандатизация осуществляется в целях: повышение уровня безопасности жизни или здоровья граждан, имущества физических или юридических лиц, государственного или муниципального имущества, экологической безопасности, безопасности жизни или здоровья животных и растений и содействия соблюдению требований технических регламентов; повышение уровня безопасности объектов с учетом риска возникновения чрезвычайных ситуации природного и технического характеров; обеспечение научно-технического прогресса; повышение конкурентноспособности продукции, работ и услуг; рационального использования ресурсов; технической и информационной совместимости; сопоставимости результатов исследований (испытаний) и измерений, технических и экономико-статистических данных; взаимозаменяемости продукции. Стандартизация руководствуется следующими принципами: добровольного применения стандартов; максимального учета при разработки стандартов законных интересов заинтересованных лиц; применение международного стандарта как основы разработки национального стандарта за исключением случаев если такое применение признано невозможным в следствия несоответствия требований международных стандартов климатическим и географическим особенностям РФ, техническим и (или) технологическим особенностям или по иным основаниям либо РФ в соответствии с установленными процедурами выступала против принятия международного стандарта или отдельного его положения; недопустимости создания препятствий производству и обращению продукции, выполнению работ и оказанию услуг в большей степени чем это минимально необходимо для выполнения целей стандартизации; недопустимости установления таких стандартов которые противоречат техническим регламентам; обеспечение условий для единообразного применения стандартов.

Деятельность по стандартизации регламентируется нормативными документами [1]. Нормативный документ по стандартизации – это документ, устанавливающий правила, принципы, нормы, характеристики, касающиеся объектов стандартизации, различных видов деятельности или их результатов, и доступный широкому кругу пользователей. Перечень основных нормативных документов по стандартизации приведен на рис.1.1.1.

Международные стандарты разрабатывает и выпускает международная организация по стандартизации. На основе международных стандартов создаются национальные стандарты, их используют также для международных экономических связей. Основная цель этих стандартов – содействовать благоприятному развитию стандартизации в мире, чтобы облегчить международный обмен товарами и развивать взаимное сотрудничество в области интеллектуальной, научной, технической и экономической деятельности.

Международные, а также национальные зарубежные стандарты вводятся в Российской Федерации через принятие государственного стандарта или технических регламентов.

Международные стандарты широко используются в мире, их число в настоящее время превышает 12 тыс., причем ежегодно принимаются или пересматриваются около тысячи стандартов. Они не являются обязательными для применения странами-членами международной организации по стандартизации. Решение об их применении связано со степенью участия конкретной страны в международном разделении труда и состоянием ее внешней торговли. В России в настоящее время идет активный процесс внедрения международных стандартов в национальную систему стандартизации.

На рис. 1.1.2 приведен перечень международных организаций по стандартизации.

- Нормативные документы
  - Стандарт – документ, в котором в целях добровольного многократного использования устанавливают характеристики продукции, правила осуществления и характеристики процессов производства, эксплуатации, хранения, перевозки, реализации и утилизации, выполнения работ или оказания услуг.
  - ТР(технический регламент) – документ, который принят международным договором РФ, ратифицированным в порядке, установленном законодательством РФ, или федеральным законом, или указом Правительства РФ, и устанавливает обязательные для применения и использования требования к объектам технического регулирования (продукции, в том числе зданиям, строениям и сооружениям, процессам производства, эксплуатации, хранения, перевозки, реализации и утилизации).
  - ГОСТ – государственный стандарт бывшего СССР, действующий в качестве межгосударственного стандарта для стран – бывших республик, входящих в состав СССР.
  - ГОСТ Р – национальный стандарт России, утвержденный национальным органом РФ по стандартизации.
    - Р ИСО – стандарт, применяемый на территории РФ, который представляет собой аналогичный (аутентичный) текст соответствующего международного стандарта ИСО (ISO).
    - Р МЭК – стандарт, применяемый на территории РФ, который представляет собой аналогичный (аутентичный) текст соответствующего международного стандарта МЭК (IES).
    - Р ИСО/МЭК – стандарт, применяемый на территории РФ, который представляет собой аналогичный (аутентичный) текст соответствующего международного стандарта ИСО/МЭК.
  - ОСТ отраслевые стандарты, устанавливают на аналогичные с ГОСТ и ГОСТ Р объекты, однако имеющие сугубо отраслевое значение.
  - ТУ (технические условия) – документ, разрабатываемый предприятиями и организациями в том случае, когда государственные стандарт создавать нецелесообразно.

Рис. 1.1.1. Перечень основных нормативных документов по стандартизации

Нормативные документы

- СТП – стандарт предприятий и организаций.
- СТО – стандарты научно-технических, инженерных обществ и других общественных объединений.
- ОТР (общие технические регламенты) – документ, разрабатываемый по определенным вопросам безопасности и их действие распространяется на большие группы продукции.
- СТР (специальные технические регламенты – документ устанавливающий конкретные требование для специфических видов продукции в случае, если требований общих технических регламентов недостаточно для обеспечения безопасности этих видов продукции.
- ПР (правила по стандартизации) – нормативный документ, разрабатываемый на конкретные производственные процессы и их элементы, связанные с решением задач организации и управления работами по стандартизации, метрологии, сертификации, аккредитации, лицензированию, государственному контролю и надзору за соблюдением обязательных требований технических регламентов, государственных и международных стандартов.
- РГМ –рекомендации по межгосударственной стандартизации
- Норма – нормативный документ, содержащий положения, устанавливающие количественные меры или качественные критерии, которые должны быть удовлетворены в процессе производства или работы.
- Р (рекомендации, РД (руководящий документ) – нормативные документы, содержащие добровольные для применения организайионно-технические и (или) общетехнические положения, правила, методы выполнения работ.
- ОКТЭИ (общероссийские классификаторы технико-экономической информации) – систематизированные своды классификационных группировок определенных объектов классификации, содержащие их условные цифровые коды и наименования.
- МИ – нормативный документ (рекомендации, методики, методические указания), разработанный Всероссийским научно-исследовательским институтом метрологической службы (ВНИИМС).

Рис. 1.1.1. Окончание

Международные организации

- ИСО (ISO) – Международная организация по стандартизации.
  Цель деятельности: разработка международных стандартов
- МЭК – Международная электротехническая комиссия.
  Цель деятельности: разработка международных стандартов в области электротехники и радиотехники. Является автономной организацией в составе ИСО.
- МОЗМ – Международная организация законодательной метрологии.
  Цель деятельности: международное согласование работы национальных метрологических служб, направленное на обеспечение сопоставимости, правильности и точности результатов измерений.
- ЕОК – Европейская организация по качеству.
  Цель деятельности: содействие, распространение, совершенствование с помощью всех возможных средств применения практических методов и теоретических методов управления качеством в целях повышения качества продукции и услуг.
- СЕН – Европейский комитет по стандартизации.
  Цель деятельности: установление в рамках ЕС так называемых технических барьеров, связанных с различием национальных стандартов на изделия, путем разработки европейских стандартов (евронорм, EN).
- СЕНЭЛЕК – Европейская организация по стандартизации.
  Цель деятельности: разработка стандартов на электротехническую продукцию.
- ЕЭК ООН – Европейская экономическая комиссия ООН.
  Цель деятельности – разработка основных направлений политики по стандартизации на правительственном уровне и определение приоритетов в этой области.

Рис. 1.1..2. Международные организации по стандартизации

Рабочее задание. Изучить основные правовые документы по стандартизации (Федеральный закон «О техническом регулировании, см. прил.1), категории и виды нормативных документов по стандартизации. Ознакомиться с понятием «международные стандарты» и с деятельностью междунаро-дных организаций по стандартизации.

Практические задания. Ответить на вопросы:

- понятие стандартизации.
- цели стандартизации.
- российская национальная система стандартизации.
- определение стандарта.
- категории и виды нормативных документов по стандартизации.
- международная стандартизация.
- международные органы по стандартизации.

Определить правильные ответы тест-контроля.

1. Назовите нормативный документ по правовым основам стандартизации Российской Федерации:

- «Закон О техническом регулировании»;
- «Закон Об обеспечении единства измерений»;
- «Международные акты»;
- «Нормативно-технические документы по стандартизации».

2. Каков характер требований технических регламентов:

- обязательные лишь отдельные из них;
- они обязательные для применения;
- являются рекомендательными.

3. Укажите головную международную организацию в области стандартизации:

- Международная электротехническая комисия (МЭК);
- Европейский комитет по стандартизации (СЕН);
- Международная организация по стандартизации (ИСО).

4. Что называется стандартом:

- документ, в котором в целях добровольного многократного использования устанавливают характеристики продукции, правила осуществления и характеристики процессов производства, эксплуатации, хранения, перевозки, реализации и утилизации, выполнения работ или оказания услуг;
- документ указывающий только технические требования к объекту стандартизации;
- это плановая деятельность по установлению обязательных правил, норм и требований к объекту стандартизации.

5. Что называют техническим регламентом:

- документ указывающий только технические требования к объекту стандартизации;

- нормативный документ, разрабатываемый на конкретные производственные процессы и их элементы, связанные с решением задач организации и управления работами по стандартизации, метрологии, сертификации, аккредитации, лицензированию, государственному контролю и надзору за соблюдением обязательных требований технических регламентов, государственных и международных стандартов.
- это плановая деятельность по установлению обязательных правил, норм и требований к объекту стандартизации.

ЗАНЯТИЕ 2. Анализ контроля точности изготовления деталей, определение размеров, отклонений и допусков

Основные положения. Все детали, из которых состоят соединения, узлы, агрегаты и машины, характеризуются геометрическими размерами. Размеры выражают числовое значение линейных величин (диаметр, длину, ширину и т.д.) и делятся на номинальные, действительные и предельные. В машиностроении размеры указывают в миллиметрах.

В соединении элементов двух деталей одна из них является внутренней (охватывающей), другая – наружной (охватываемой). В системе допусков и посадок гладких соединений всякий наружный элемент условно называется *валом* и обозначается строчными буквами латинского алфавита, а внутренний элемент называется *отверстием* и обозначается заглавными буквами латинского алфавита.

Основные термины и определения установлены ГОСТ 25346. *Номинальный размер* – размер, который служит началом отсчета отклонений и относительно которого определяются предельные размеры. Обозначается номинальный размер отверстия – $D_н$ (D), вала - $d_н$ (d).

Номинальный размер является основным размером детали или их соединений (в соединении участвуют две детали – отверстие и вал). Его назначают исходя из расчетов деталей на прчность, износостойкость, жесткость и т.д. и на основании конкретных конструктивных, технологических и эксплуатационных соображений. В соединении две детали имеют общий номинальный размер. Значения номинальных размеров, полученных расчетным путем, следует округлять (как правило, в большую сторону).

Действительный размер – размер, установленный измерением с допустимой погрешностью. Этот термин введен, потому что невозможно изготовить деталь с абсолютно точными требуемыми размерами и измерить их без внесения погрешности. Действительный размер обозначается для отверстия $D_д$, а для вала $d_д$.

Предельные размеры детали – два предельно допускаемых размера, между которыми должен находиться или которым может быть равен действительный размер годной детали. Границы предельных размеров, т.е. диапазон рассеивания действительных размеров, определяются наименьшим предельным размером (D_{min}, d_{min}) и наибольшим предельным размером (D_{max}, d_{max}). Сравнение действительного размера с предельными дает возможность судить о точности изготовления деталей [6].

Для упрощения чертежей введены предельные отклонения от номинального размера. *Предельные отклонения размера* – это алгебраическая разность между предельным и номинальным размерами.

Различают верхнее и нижнее отклонение, применяя при этом краткие термины – верхнее и нижнее отклонение.

Верхнее отклонение (ES - для отверстия, es – для вала) – алгебраическая разность между наибольшим предельным и номинальным размерами:

$$ES = D_{max} - D_{н},\ es = d_{max} - d_{н}.$$

Нижнее отклонение (EI – для отверстия, ei – для вала) – алгебраическая разность между наименьшим предельным и номинальным размерами:

$$EI = D_{min} - D_{н},\ ei = d_{min} - d_{н}.$$

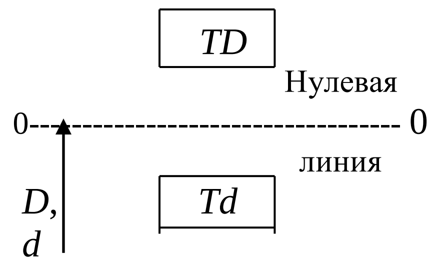
Действительным отклонением называют алгебраическую разность между действительным и номинальным размерами. Отклонение является положительным, если предельный или действительный размер больше номинального, и отрицательным, если указанные размеры меньше номинального.

На машиностроительных чертежах номинальные и предельные линейные размеры и их отклонения проставляются в миллиметрах без указания единицы, например $58^{0,013}$; $72_{-} \pm 0,2$; $50^{+0,107}$; $42_{-0,024}$; угловые размеры и их предельные отклонения – в градусах, минутах или секундах с указанием единицы, например $0^0\ 30^{/}\ 40^{//}, 120^0\ \pm 20$. Отклонение, равное нулю, на чертежах не проставляют, наносят только одно отклонение – положительное на месте верхнего или отрицательное на месте нижнего предельного отклонения, например $200_{-0,2}$; $200^{+0,2}$. Предельные отклонения в таблицах допусков указывают в миллиметрах.

Разность между наибольшим и наименьшим придельными размерами или абсолютное значение алгебраической разности между верхним и нижним отклонениями называется допуском на размер. Допуск обозначается буквой T. Для отверстия – TD, для вала – Td : ($TD = D_{max} - D_{min}$, $Td = d_{max} - d_{min}$).

Допуск всегда положительная величина. Он определяет допускаемое поле рассеивания действительных размеров деталей в партии, т.е. заданную точность изготовления. Чем меньше допуск, тем выше требуемая точность детали, при этом стоимость изготовления увеличивается.

Для упрощения допуски можно изображать графически в виде полей допусков (см. рис.). При этом ось изделия (на рис. не показана) всегда распо-



лагают под схемой. Поле допуска – поле, ограниченное верхним и нижним отклонениями. Поля допуска определяются значением допуска и его положением относительно номинального размера. При графическом изображении поле допуска заключено между двумя линиями, соответствующими верхнему и нижнему отклонениям относительно нулевой линии. Нулевая линия – линия, соответствующая номинальному размеру, от которой откладывают отклонения размеров при графическом изображении допусков и посадок. Если нулевая линия расположена горизонтально, то положительные отклонения откладывают вверх от нее, а отрицательные – вниз.

Рабочее задание. Изучить термины и определения применяемые при анализе контроля точности изготовления деталей. Ответить на вопросы для самопроверки:

- что такое взаимозаменяемость и принципы ее возникновения?
- какие размеры называют номинальными и как их определяют?
- какие размеры называют действительными и в каких пределах должны находится их числовые значения?
- какие бывают предельные размеры и каково их назначение?
- что называют допуском и как его определяют?
- что называют отклонением размера?
- выведите формулы для вычисления действительных, предельных и средних отклонений.
- охарактеризуйте графический способ изображения полей допусков через предельные размеры и отклонения.

- правила обозначения допусков и предельных отклонений на чертеже.

Практические задания. Определить правильные ответы тест-контроля данной темы, постройте график контроля точности изготовления деталей и решите примеры по данной теме.

Тест-контроль занятий

1. Укажите правильное определение понятия «допуск размера»:
   - размер, который служит началом отсчета отклонений и относительно которого определяют предельные размеры;
   - размер, установленный измерением с допустимой погрешностью;
   - разность между наибольшим и наименьшим приделными размерами или абсолютное значение алгебраической разности верхнего и нижнего отклонения;
   - алгебраическая разность между предельным и номинальным размерами;
   - алгебраическая разность между действительным и номинальным размерами.

2. Определите допуск размера вала при $d_н = 720$, es = 0; ei = - 320:

   Td = 720; 500; 320; 0; 40 мм.

3. Определите действительное отклонение, характеризующее годность годность отверстия при $D_н$ =10 мм, ES = -11 мкм, EI = - 20 мкм, $D_д$ = 3,980 мм:

   $E_д$ = -20 мкм; 20 мкм; -30 мкм; 0 мкм; 10 мкм.

4. Определите предельные отклонения деталей при $d_н$ = 70 мм, d_{max} = 69,979 мм, d_{min} = 69,949 мм:
   - es = 40 мкм, ei = 20 мкм;
   - es = -10 мкм, ei = -20 мкм;
   - es = 0 мкм, ei = -21 мкм;
   - es = -21 мкм, ei = -51 мкм;
   - es = 30 мкм, ei = 10 мкм.

5. Определите наибольший предельный размер отверстия при $D_н$ = 8 мм, ES = -9 мкм, EI = -24 мкм:

   D_{min} = 8,240 мм; 7,976 мкм; 7,991 мкм; 8 мкм; 0 мкм.

Пример 1. Для штифтов с номенальным размером 40 мм установлены предельные размеры: d_{max} = 40.009. d_{min} = 39.984 мм. В партии попались штифты, имеющие действительные размеры $d_д$ = 40,012 и $d_д$ = 39,976 мм. Определите годность этих штифтов путем сравнения действительных размеров с предельными размерами.

Решение. Сравниваем действительные размеры спредельными. В первом
34
случае $d_{д1} > d_{max}$; $d_{д1} – d_{max}$ = 40.012 – 40.009 = 0.003 мм – брак исправимый. Во втором случае $d_{д2} < d_{min}$; $d_{д2}$ - d_{min} = 39.976 – 39.984 = - 0.008 мм – брак неисправимый.

Пример 2. Для размера 40 мм заданы следующие отклонения, мкм: а) ES = 89, EI = 50; б) ES = 39, EI = 0; в) es = 0; ei = - 39 ; г) es = 19,5; д) ES = - 39, EI = - 64. Записать размер с заданными отклонениями, вычислить допуск и найти предельные размерй.

Пример 3. Заданы предельные размеры, мм: а) 14,0055 и 13,9945; б) 28,013 и 28; в) 42,042 и 42,026; г) 55,97 и 55,951; д) 90 и 89,978. Определить предельные отклонения, записать номинальные размеры с предельными отклонениями и начертить упрощенные схемы расположения полей допусков.

Пример 4. Заданы номинальный диаметр и предельные отклонения вала.

Вариант	*D*, мм	*es*, мкм	*ei*, мкм	Вариант	*D*, мм	*es*, мкм	*ei*, мкм
1	2	- 6	- 12	10	180	- 50	- 96
2	4	0	- 8	11	270	- 190	- 400
3	8	10	1	12	350	- 62	- 151
4	16	23	12	13	450	- 230	- 480
5	20	48	35	14	630	- 550	- 550
6	35	85	60	15	720	265	185
7	68	50	20	16	900	300	210
8	90	0	- 35	17	1100	1555	1450
9	140	20	- 20				

Определить предельные размеры и записать условное обозначение номинального размера с предельными отклонениями.

Пример 5. Заданы предельные размеры и действительное отклонение.

Вариант	d_{max}, мм	d_{min}, мм	$e_д$, мкм	Вариант	d_{max}, мм	$d_{min,}$, мм	$e_{д,}$, мкм
1	2,475	2,455	+ 1	9	150,015	150,115	100
2	4,970	4,922	- 15	10	200,05	200,235	49
3	7,975	7,885	- 120	11	280,094	280,414	450
4	14,984	14,914	- 30	12	320,19	320,42	100
5	24,935	24,883	- 75	13	5000,144	500,515	250
6	49,95	49,911	- 25	14	559,74	559,67	- 500
7	69,97	69,94	- 40	15	670,155	670,030	800
8	99,988	99,934	- 65				

Найти номинальный и действительный размер детали, вычислить предельные отклонения, определить годность детали по предельным размерам и предельным отклонениям, привести обозначение номинального размера с предельными отклонениями, начертить схемы полей допусков по предельным размерам (не в маштабе) и по предельным отклонениям (в масштабе), показать на них действительный размер и действительное отклонение.

Пример 6. Дано: наибольший предельный размер 44,975 мм; наименьший предельный размер 44,950; номинальный размер 45 мм. Вычислить допуск по предельным размерам и по предельным отклонениям. Начертить схемы полей допуска. Записать номинальный размер с предельными отклонениями.

Пример 7. Допуск на диаметр 28 мм равен 52 мкм. На диаметр 280 мм установлены следующие допуски: 52, 130 и 210 мкм. Определить, какой из допусков на диаметр 280 мм больше, равен и меньше, чем допуск на диаметр 28 мм.

Пример 8. Для отверстия и вала с номинальными диаметрами D = 20 мм заданы: ES = + 41, ei = - 61, $TD = Td$ = 21мкм. Дать условное обозначения этих размеров с допусками, т.е. записать номинальные размеры с предельными отклонениями, и начертить упрощенную схему полей допусков.

Пример 9. Здано: а) $D_н$ = 25 мм, ES = +0,098 мм, EI = +0, 063; б) $D_н$ = 32 мм, ES = 62 мкм, EI = 0 мкм; в) $d_н$ = 60 мм, es = + 230 мкм, ei = - 230 мкм; г) $D_н$ = 25 мм, ES = - 0,065 мкм, EI = - 0,098; д) $d_н$ = 32 мм, es = 0 мм, ei = - 0,062 мм..Определить номинальные и предельные размеры, предельные отклонения и допуски.

Пример 10. Задано а) TD =0 , EI = 0;) Td, es = 0;) $TD = Td$, $EI = es$ = 0. Начертить схему полей допусков..

ЗАДАНИЕ 3. Изучение основных понятий о соединениях и посадках

.**Основные понятия**. Две или несколько подвижно или неподвижно соединениях деталей называют сопрягаемыми, а поверхности соединяемых элементов называют сопрягаемыми поверхностями. Поверхности тех элементов деталей, которые не входят в соединение с поверхностями других деталей, называются несопрягаемыми (свободными) поверхностями. Соединения подразделяют и по геометрической форме сопрягаемых поверхностей – гладкие цилиндрические, плоские и др.

В зависимости от эксплуатационных требований сборку соединений осуществляют с различными посадками.

Посадкой называют характер соединения деталей, определяемый разностью между размерами отверстия и вала.

Если размер отверстия больше размера вала, то их разность называется зазором. Зазор обозначается буквой S, тогда $S = d - D$.

Если размер отверстия меньше размера вала, то их разность называется натагом. Натяг обозначается буквой N, тогда $N = d - D$.

Зазор может быть выражен как натяг, только со знаком минус ($S = -N$), а натяг – как зазор со знаком минус ($N = -S$).

В зависимости от взаимного расположения полей допусков отверстия и вала посадка может быть с зазором, с натягом или переходной, при которой возможно получение как зазора, так и натяга. Схемы полей допусков для разных посадок даны на рис.1.5.1.

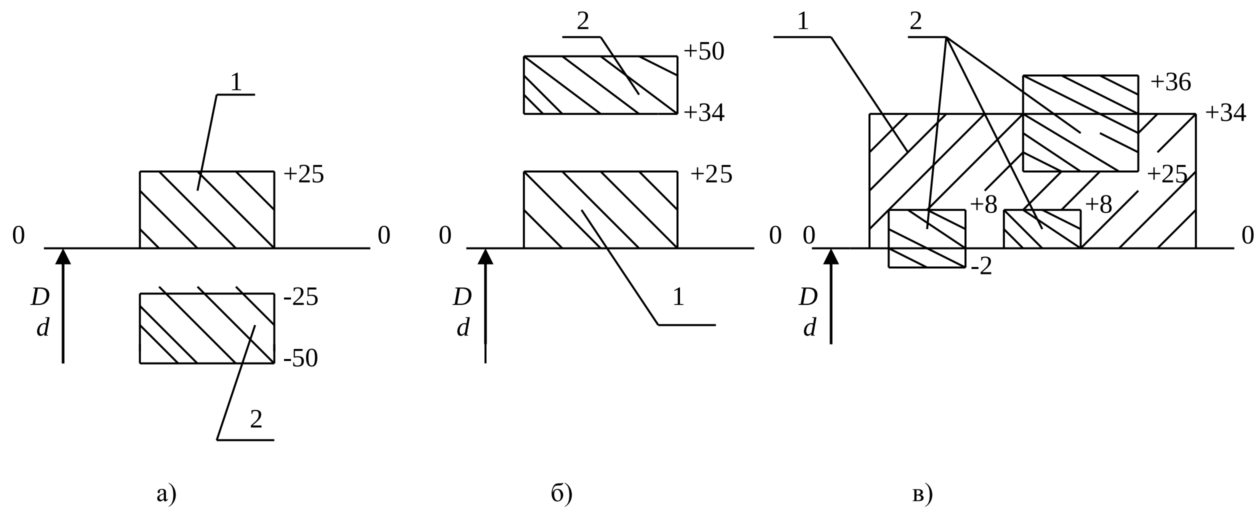


Рис.1.5.1. Поля допусков отверстия 1 и вала 2

Посадка с зазором характеризуется наибольшим, наименьшим и средним зазором, которые определяются по формулам:

$S_{max} = D_{max} - d_{min} = ES - ei$; $S_{min} = D_{min} - d_{max} = EI - es$; $S_{cp} = (S_{max} + S_{min}) / 2$.

Посадка с зазором обеспечивает возможность относительного перемещения собранных деталей. К посадкам с зазором относятся также посадки, в которых нижнее отклонение отверстия совпадает с верхним отклонением вала, т.е. $S_{min} = 0$. В случае посадки с зазором поле допуска вала всегда будет располагаться ниже поля допуска отверстия (рис. 1.5.1, а).

Посадка с натягом характеризуется: наибольшим, наименьшим и средним натягом, которые определяются по формулам:

$N_{max} = d_{max} - D_{min} = es - EI$; $N_{min} = d_{min} - D_{max} = ei - ES$; $N = (N_{max} + N_{min}) / 2$.

Посадка с натягом обеспечивает взаимную неподвижность деталей после их сборки. В случае посадки с натягом поле допуска отверстия расположено под полем допуска вала (см. рис.1.5.1, б).

Переходная посадка – посадка, при которой возможно получение как зазора, так и натяга. Она характеризуется наибольшим зазором и натягом. В переходной посадке поля допусков отверстия и вала перекрываются частично или полностью (см.рис.1.5.1, в).

Из-за неточности выполнения размеров отверстия и вала зазоры и натяги в соединениях, рассчитанные из эксплуатационных требований, не могут быть выдержаны точно. Отсюда появляется понятие «допуск посадки».

Допуск посадки – разность между наибольшим и наименьшим допускаемыми зазорами (допуск зазора TS в посадках с зазором) или наибольшим и наименьшим допускаемыми натягами (допуск натяга TN в посадках с натягам), в переходных посадках допуск посадки – сумма наибольшего натяга и наибольшого зазора, взятых по абсолютному значению, а также допуск любой посадки можно определить как сумма допусков отверстия и вала:

$$TS = S_{max} - S_{min};\ TN = N_{max} - N_{min};\ Tn = N_{max} + S_{max},$$

или $$TS = TD + Td;\ TN = TD + Td;\ Tn = TD + Td.$$

Пример обозначения посадки: $40_{-0,03} / ^{+0,003}$, где 40 – номинальный размер, общий для отверстия и вала, в числителе вехнее и нижнее отклонение для отверстия, а в знаменателе для вала.

Расчет и выбор посадки с гарантированным зазором. К соединениям с гарантированным зазором типа подшипников скольжения предъявляются требования минимального трения и износа сопрягающих деталей, что достигается при работе в режиме жидкосного трения. Жидкосное трение в узлах трения создается тогда, когда при определенных конструктивных и эксплуатационных факторах смазочное масло увлекается вращающейся цапфой и возникает гидродинамическое давление, превышающее нагрузку на опору и стремящееся расклинить поверхности цапфы и вкладыша. При определенной частоте вращения вала создается равновесие гидродинамического давления и сил, действующих на опору.

Поверхности цапфы и вкладыша подшипника при этом разделены переменным зазором, равным h_{min} в месте их наибольшего сближения и $h_{max} = S - h_{min}$ на диаметрально противоположной стороне. Наименьшая толщина масляного слоя h_{min} связана с Z зависимостью

$$h_{min} = \frac{S_{опт}}{2} - 1 = \frac{S_{опт}}{2} - \frac{Z\,S_{опт}}{2} = \frac{S_{опт}}{2}(1 - Z)\,. \quad (1.5.1)$$

Для обеспечения жидкостного трения необходимо, чтобы микронеровности цапфы и вкладыша подшипника не зацеплялись, т.е. чтобы слой смазки не имел разрывов. Это достигается при толщине маслянного слоя в самом узком месте

$$h_{min} \geq h_{ж.т} \geq Rz_1 + Rz_2 + \Delta_ф + \Delta_р + \Delta_{изг} + \Delta_д. \qquad (1.5.2)$$

где $h_{ж.т}$ - толщина масляного слоя, при котором обеспечивается жидкостное трение:

Rz_1, Rz_2 - высоты неровностей поверхностей вкладыша подшипника и цапфы вала;

$\Delta_ф$, $\Delta_р$ – величины, учитывающие влияние погрешностей формы и расположения поверхностей цапфы и вкладыша;

$\Delta_{изг}$ - величина, учитывающая влияние изгиба вала и других деформаций деталей подшипникового узла;

$\Delta_д$ – добавка, учитывающая отклонения нагрузки, скорости, температуры от расчетных, а также механические включения в масле и другие неучтенные факторы (в большинстве случаев она принимается в размере 2 мкм).

Для упрощения расчета формулу (1.5.2) иногда заменяют следующей:

$$h_{min} \geq h_{ж.т} \geq k_{ж.т} (Rz_1 + Rz_2 + \Delta_д), \qquad (1.5.3)$$

где $k_{ж.т}$ - коэффициент запаса надежности по толщине маслянного слоя $k_{ж.т} \geq 2$.

Одновременно с обеспечением жидкостного трения необходимо, чтобы подшипник обладал требуемой несущей способностью, характерезуемой радиальной силой R. Из гидродинамической теории смазки известно, что несущая способность смазочного слоя в подшипнике (при неразрывности) определяется уравнением:

$$R = (\mu \varpi / \psi^2)\, l\, d\, C_R, \qquad (1.5.4)$$

где R – радиальная сила, Н;

μ - динамическая вязкость смазочного материала, Па с (значения динамической вязкости μ при рабочей температуре 50^0С приведены в табл.1.4.1);

Таблица 1.5.1

Марка масла	Динамическая вязкость μ при t = 50^0С, Па с	Марка масла	Динамическая вязкость μ при t = 50^0С, Па с
Индустриальное		Турбинное	
12	0,009 – 0,013	22	0,018 – 0,021
20	0,015 – 0,021	30	0,025 – 0,029
30	0,024 – 0,030	46	0,040 – 0,043

40	0,034 – 0,047	57	0,050 – 0,053
50	0,038 – 0,052	Моторное Т	0,056 – 0,061

ϖ - угловая скорость, равная πn / 30, рад/с;
l, d – длина подшипника и диаметр цапфы, мм;
ψ - относительный зазор, равный S/d;
C_R – безразмерный коэффициент нагруженности подшипника, зависящий от Z и l /d .

Значения C_R для подшипников с углом охвата 180^0 (половинный*) приведены в табл. 1.5.2.

*Половинные подшипники – подшипники, у которых маслянный клин может образовываться на половине окружности.

Таблица 1.5.2

1	Коэффициент нагруженности C_R при Z									
	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
l /d	0,3	04	0,5	0,6	0,65	0,7	0,75	0,8	0,85	0,9
0,2	0,024	0,038	0,059	0,094	0,121	0,161	0,225	0,335	0,548	1,034
0,3	0,052	0,083	0,128	0,203	0,259	0,347	0,475	0,699	1,122	2,074
0,4	0,084	0,141	0,216	0,339	0,431	0,573	0,776	1,079	1,775	3,195
0,5	0,133	0,209	0,317	0,493	0,622	0,819	1,098	1,572	2,428	4,261
0,6	0,182	0,283	0,427	0,655	0,819	0,970	1,418	2,001	3,036	5,214
0,7	0,234	0,361	0,538	0,816	1,014	1,312	1,720	2,399	3,580	6,721
0,8	0,287	0,439	0,647	0,972	1,199	1,538	1,965	2,754	4,053	6,921
0,9	0,339	0,515	0,754	1,118	1,371	1,745	2,248	3,067	4,459	7,294
1,0	0,391	0,589	0,853	1,253	1,528	1,929	2,469	3,372	4,808	7,772
1,1	0,440	0,658	0,947	1,377	1,669	2,097	2,664	3,580	5,106	8,186
1,2	0,487	0,723	1,033	1,489	0,796	2,247	2,838	3,787	5,364	8,533
1,3	0,529	0,784	1,111	1,590	1,912	2,379	2,990	3,968	2,586	8,831
1,5	0,610	0,891	1,248	1,763	2,099	2,600	3,242	4,266	5,947	9,304
2,0	0,763	1,091	1,483	2,070	2,446	2,981	3,671	4,778	6,545	10,09

Из уравнения (1.5.4) следует, что несущая способность подшипника при постоянной рабочей температуре повышается с увеличением вязкости масла, частоты вращения вала и размеров подшипника и уменьшается с увеличением относительного зазора. Для выбора посадки необходимо знать зависимость толщины маслянного слоя в месте наибольшего сближения цапфы и вкладыша подшипника от величины зазора S. Вид зависимости h_{min} = f (S) при постоянных значениях l/d и угла охвата подшипника показан на рис 1.5.3.

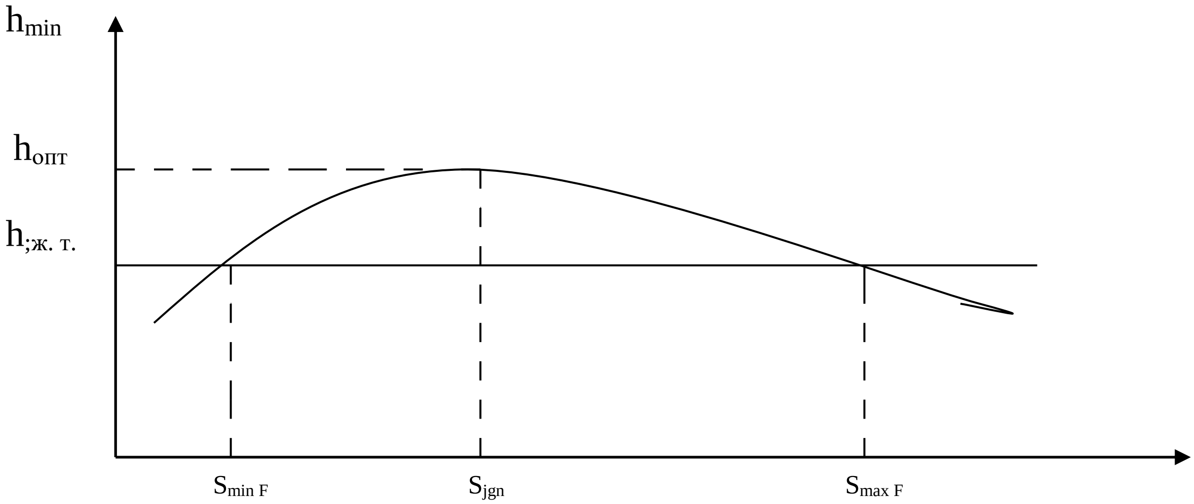


Рис. 1.5.3. Зависимость наименьшей толщины слоя смазочного материала h_{min} от диаметрального зазора S

Установлено, что жидкостное трение создается лишь в определенном диапазоне диаметральных зазоров, ограниченном наименьшим S_{minF} и наибольшим S_{maxF} функциональными зазорами.

Если после сборки диаметральный зазор в соединении равен S_{minF}, то после приработки и некоторого времени работы механизма этот зазор достигает величины, соответствующей $S_{опт}$. При дальнейшем износе трущихся деталей зазор увеличивается, и когда он будет близок или равен S_{maxF}, эксплуатация механизма должна быть прекращена из-за снижения его эксплуатационных показателей и возможности быстрого износа деталей.

Нахождение уравнений для определения предельных функциональных зазоров (S_{minF}, S_{maxF}) производится на базе уравнения (1.5.4) с введением среднего давления, приходящегося на единицу площади проекции опорной поверхности подшипника $P = R / l\ d$, и коэффициентов k и m, зависящих от конструкции подшипников (см. табл.1.5.3).

Таблица 1.5.3

l/d	k		m	
	Полный подшипник	Половинный подшипник	Полный подшипник	Половинный подшипник
0,4	0,255	0,409	0,356	0,641
0,5	0,355	0,533	0,472	0,792
0,6	0,452	0,638	0,568	0,893
0,7	0,539	0,723	0,634	0,948
0,8	0,623	0,792	0,698	0,972
0,9	0,690	0,849	0,705	0,976
1,0	0,760	0,895	0,760	0,963
1,1	0,823	0,932	0,823	0,942

1,2	0,880	0,972	0,880	0,972

С учетом всех вышеизложенных положений уравнения для определения S_{minF} и S_{maxF} будут иметь следующий вид:

$$S_{minF} = (k\ \mu_1\ \varpi\ d^2 - \sqrt{(k\mu_1\ \varpi\ d^2)^2 - 16\ Ph^2_{ж.т.}\ m\mu_1\ \varpi\ d^2})\ /\ 4P\ h_{ж.т.} \qquad (1.5.5)$$

$$S_{maxF} = (k\ \mu_2\ \varpi\ d^2 + \sqrt{(k\mu_2\ \varpi\ d^2)^2 - 16\ Ph^2_{ж.т.}\ m\mu_2\ \varpi\ d^2})\ /\ 4P\ h_{ж.т.} \qquad (1.5.6)$$

В уравнения (1.5.5) и (1.5.6) необходимо подставить те значения динамической вязкости масла μ_1 и μ_2, которые соответствуют средним температурам смазочного слоя соответственно при S_{minF} и S_{maxF} .

В нашем случае в целях упрощения задачи принимаем, что $\mu_1 = \mu_2$.

В большинстве случаев рабочая температура подшипников должна быть не выше 60 – 75^{0}С. Для предварительных расчетов $t_{раб} = 50^0$С. В соответствии с принятой температурой $t_{раб}$ и маркрй масла определяется динамическая вязкость масла

$$\mu = \mu_{табл}(50\ /\ t_{раб})^{2,8} ,$$

где $\mu_{табл}$ – динамическая вязкость при $t_{раб} = 50^0$С по табл. 1.5.1.

По расчетным значениям S_{minF} и S_{maxF} определяют ближайшую посадку по табл.1.5.4 с наименьшим, средним и наибольшими зазорами.

Таблица 1.5.4

Номинальные размеры, мм	Посадки в системе отверстия							
	H5/g4	H5/h4	H6/f6	-	H6/g5	H6/h5	-	H7/d8
	Посадка в системе вала							
	G5/h4	H5/h4	-	F7/h5	G6/h5	H6/h5	D8/h6	D8/h7
	Предельные зазоры $\frac{S_{max}}{S_{min}}$, мкм							
От 1 до 3	9 2	7 0	18 0	20 6	12 2	10 0	40 20	44 20
Св.3 до 6	13 4	9 0	16 10	27 10	17 4	13 0	56 30	60 30
Св.6 до 10	15 5	10 0	31 13	34 13	20 5	15 0	71 40	77 40
Св.10 до 18	19 6	13 0	38 16	42 16	25 6	19 0	88 50	95 50
Св.18 до 30	22 7	15 0	46 20	50 20	29 7	22 0	111 65	119 65
Св.30 до 50	27 9	18 0	57 25	61 25	36 9	27 0	135 80	144 80

Св.50 до 80	31 10	21 0	68 30	73 30	42 10	32 0	165 100	176 100
Св.80 до 120	37 12	25 0	80 36	86 36	49 12	37 0	196 120	209 120
Св.120 до 180	44 14	30 0	93 43	101 43	57 14	43 0	233 145	248 145
Св.180 до 250	49 15	34 0	108 50	116 50	64 15	49 0	271 170	288 170
Св.250 до 315	56 17	39 0	120 56	131 56	72 17	55 0	303 190	323 190
Св.315 до 400	61 18	43 0	134 62	144 62	79 18	61 0	335 210	356 210
Св.400 до 500	67 20	47 0	145 68	158 68	87 20	67 0	367 230	390 230

Продолжение табл. 1.5.4

Номинальные размеры, мм	Посадки в системе отверстия							
	H7/e7	-	H7/e8	H7/f7	-	-	H7/g6	H7/h6
	Посадки в системе вала							
	-	E8/h6	E8/h7	F7/h7	F7/h6	F8/h6	G7/h6	H7/h6
	Педельные зазоры $\frac{S_{max}}{S_{min}}$, мкм							
От 1 до 3	34 14	34 14	38 14	26 6	22 6	26 6	18 2	16 0
Св.3 до 6	44 20	16 20	50 20	34 10	30 10	36 10	24 4	20 0
Св.6 до 10	55 25	56 25	62 25	43 13	37 13	44 13	29 5	24 0
Св.10 до 18	68 32	70 32	77 32	52 16	45 16	54 16	35 6	29 0
Св.18 до 30	82 40	86 40	94 40	62 20	54 20	66 20	41 7	34 0
Св.30 до 50	100 50	105 50	114 50	75 25	66 25	80 25	50 9	41 0
Св.50 до 80	120 60	125 60	136 60	90 30	79 30	95 30	59 10	49 0
Св.80 до 120	142 72	148 72	161 72	106 36	93 36	112 36	69 12	57 0
Св.120 до 180	165 85	173 85	188 85	123 43	108 43	131 43	79 14	65 0
Св.180 до 250	192 100	201 100	218 100	142 50	125 50	151 50	90 15	75 0

Св.250 до 315	214 110	223 110	243 110	160 56	140 56	169 56	101 17	84 0
Св.315 до 400	239 125	250 125	271 125	176 62	155 62	187 62	111 18	93 0
Св.400 до 500	261 135	272 135	295 135	194 68	171 68	205 68	123 20	103 0

Продолжение табл. 1.5.4

Номинальные размеры, мм	Посадки в системе отверстия								
	H8/d8	H8/d9	H8/d8	H8/e8 H9/e8	H8/f7	H8/f8	H8/f9	H8/h7	H8/h8
	Посадки в системе вала								
	D9/h8	D9/h8	E8/h8	E9/h8	F8/h7	F8/h8	F9/h8	H8/h7	H8/h8
	Педельные зазоры $\frac{S_{max}}{S_{min}}$, мкм								
От 1 до 3	48 20	59 20	42 14	53 14	30 6	34 6	45 6	24 0	28 0
Св.3 до 6	66 30	78 30	56 20	68 20	40 10	46 10	58 10	30 0	36 0
Св.6 до 10	84 40	98 40	69 25	83 25	50 13	57 13	71 13	37 0	44 0
Св.10 до 18	104 50	120 50	86 32	102 32	61 16	70 16	86 16	45 0	54 0
Св.18 до 30	131 65	150 65	106 40	125 40	74 20	86 20	105 20	54 0	66 0
Св.30 до 50	158 80	181 80	128 50	151 50	89 25	103 25	126 25	64 0	78 0
Св.50 до 80	192 100	220 100	152 60	180 60	106 30	122 30	150 30	76 0	92 0
Св.80 до 120	228 120	261 120	180 72	213 72	125 36	144 36	177 36	89 0	108 0
Св.120 до 180	271 145	308 145	211 85	248 85	146 43	169 43	206 43	103 0	126 0
Св.180 до 250	314 170	357 170	244 100	287 100	168 50	194 50	237 50	118 0	144 0
Св.250 до 315	352 190	401 190	272 110	321 110	189 56	218 56	267 56	133 0	162 0
Св.315 до 400	388 210	439 210	303 125	154 125	208 62	240 62	291 62	146 0	178 0
Св.400 до 500	424 230	482 230	329 135	387 135	228 68	262 68	320 68	16 0	194 0

Продолжение табл. 1.5.4

Номинальные размеры, мм	Посадки в системе отверстия								
	H8/h9 H9/h8	H9/d9	-	H9/t9	H9/f9	H9/h9	H10/d10	H10/h9	H10/h10
	Посадки в системе вала								
	H8/h9 H9/h8	D9/h9	D10/h9	E9/h9	F9/h9	H9/h9	D10/h10	H10/h9	H10/h10
	Педельные зазоры $\frac{S_{max}}{S_{min}}$, мкм								
От 1 до 3	39 0	70 20	85 20	64 14	56 6	50 0	100 20	65 0	80 0
Св.3 до 6	18 0	90 30	108 30	80 20	70 10	60 0	125 30	78 0	96 0
Св.6 до 10	58 0	112 40	134 40	97 25	85 13	72 0	156 40	92 0	116 0
Св.10 до 18	70 0	136 50	163 50	118 32	102 16	86 0	190 50	113 0	140 0
Св.18 до 30	85 0	169 65	201 65	144 40	124 20	104 0	233 65	136 0	168 0
Св.30 до 50	101 0	204 80	242 80	174 50	149 25	124 0	280 80	162 0	200 0
Св.50 до 80	120 0	248 100	294 100	208 60	178 30	148 0	340 100	194 0	240 0
Св.80 до 120	141 0	294 120	347 120	246 72	210 36	174 0	400 120	227 0	280 0
Св.120 до 180	163 0	345 145	405 145	285 85	243 43	200 0	465 145	23 0	320 0
Св.180 до 250	187 0	400 170	470 170	330 100	280 50	230 0	540 170	300 0	370 0
Св.250 до 315	211 0	450 150	530 190	370 110	316 56	260 0	610 190	340 0	420 0
Св.315 до 400	229 0	490 210	580 210	405 125	342 62	280 0	670 210	370 0	460 0
Св.400 до 500	252 0	540 230	635 230	445 135	378 68	310 0	730 230	405 0	500 0

Продолжение табл. 1.5.4

Номинальные размеры, мм	Посадки в системе отверстия							
	H7/ c8	H11/a11	H11/b11	H11/c11	H11/d11	H11/h11	H12/b12	H12/h12
	Посадки в системе вала							
	-	A11/h11	B11/h11	C11/h11	D117/h11	H11/h11	B12/h12	H12/h12
	Педельные зазоры $\frac{S_{max}}{S_{min}}$, мкм							
От 1 до 3	84 60	390 270	260 140	180 60	140 20	120 0	340 140	200 0
Св.3 до 6	100 70	420 270	290 140	220 70	180 30	150 0	380 140	240 0
Св.6 до 10	117 80	460 280	330 150	260 80	220 40	180 0	450 150	300 0
Св.10 до 18	140 95	510 290	370 150	315 95	270 50	220 0	510 150	360 0
Св.18 до 30	164 110	560 300	420 160	370 110	325 65	260 0	580 160	420 0
Св.30 до 40	184 120	630 310	490 170	440 120	400 80	320 0	670 170	500 0
Св.40 до 50	194 130	640 320	500 180	450 130	400 80	320 0	680 180	500 0
Св.50 до 65	216 140	720 340	570 190	520 140	480 100	380 0	790 150	600 0
Св.65 до 80	226 150	740 360	580 200	530 150	480 100	380 0	800 200	600 0
Св.180 до 250	259 170	820 380	660 220	610 170	560 120	440 0	920 220	700 0
Св.100 до 120	269 180	850 410	680 240	620 180	560 120	440 0	940 240	700 0

Продолжение табл. 1.5.4

Номинальные размеры, мм	Посадки в системе отверстия							
	H7/ c8	H11/a11	H11/b11	H11/c11	H11/d11	H11/h11	H12/b12	H12/h12
	Посадки в системе вала							
	-	A11/h11	B11/h11	C11/h11	D117/h11	H11/h11	B12/h12	H12/h12
	Педельные зазоры $\frac{S_{max}}{S_{min}}$, мкм							
От 120 до 140	303 200	960 460	760 260	700 200	645 145	500 0	1060 260	800 0
Св.140 до 160	313 210	1020 520	780 280	710 210	645 145	500 0	1080 280	800 0
Св.160 LJ 180	333 230	1080 580	810 310	730 230	645 145	500 0	1119 310	800 0
Св.180 до 200	358 240	1240 660	920 340	820 240	750 170	580 0	1260 340	920 0
Св.200 до 225	378 260	1320 740	960 380	840 260	750 170	580 0	1300 380	920 0
Св.225 до 250	398 280	1400 820	1000 420	860 280	750 170	580 0	1340 420	920 0
Св.250 до 280	433 300	1560 920	1120 480	940 300	830 190	640 0	1520 480	1040 0
Св.280 до 315	463 330	1690 1050	1180 540	970 330	830 190	640 0	1580 540	1040 0
Св.315 до 355	506 360	1920 1200	1320 600	1000 360	930 210	720 0	1740 600	1140 0
Св.355 до 400	546 400	2070 1350	1400 680	1120 400	930 210	720 0	1820 680	1140 0
Св.400 до 450	600 440	2300 1500	1560 760	1240 440	1030 230	800 0	2020 760	1260 0
Св.450 до 500	640 480	2425 1650	1640 840	1260 480	1030 230	800 0	2100 840	1260 0

Расчет и выбор посадки с натягом. Посадки с натягом предназначаются для образования неподвижных соединений. Разность между диаметром вала и внутренним диаметром втулки до сборки определяет натяг N. При запрессовке деталей происходят растяжение втулки на величину N_D и одновременно сжатие вала на величину N_d , при чем $N = N_d + N_D$.

Упругие силы, вызываемые натягом, создают по поверхности соединения деталей напряжения, препятствующие их взаимному смещению.

Предельные значения натягов выбранной посадки должны удовлетворять следующим условиям:

1. При наименьшем натяге должна обеспечиваться прочность соединения, т.е. не должно быть относительного поворота деталей от действия внешнего крутящего момента или осевого усилия или их совместного действия. Это условие выполняется, если $M_{кр} \le M_{тр}$, где $M_{кр}$ – наибольший прикладываемый к одной детали момент кручения; $M_{тр}$ – момент трения, зависящий от натяга, размеров соединяемых деталей, шероховатости поверхностей и других факторов.
2. При наибольшем натяге должна обеспечиваться прочность соединяемых деталей, т.е. наибольшее напряжение, возникающее в материалах деталей, не должно превышать допустимого значения.

Величину наименьшего натяга при условии, что сопрягаемые поверхности идеально гладкие, рассчитывают по формуле:

$$N_{min\ рас} = p_э D\, [\, (C_D/E_D) + (C_d / E_d)] \qquad (1.5.7)$$

где $p_э$ – удельное эксплуатационное давление по поверхности контакта, Па;
D – номинальный диаметр соединения, мм;
E_D , E_d - модули упругости материалов соединяемых деталей (для стали $E \approx 2{,}06\ 10^{11}$ Па; для чугуна $E \approx 1{,}2$ 1011 Па; для бронзы и латуни $E \approx 1{,}1$ 1011 Па);
C_D , C_d – коэффициенты, определяемые по формулам:

$$C_D = \frac{1 + (D / d_2)^2}{1 - (D / d_2)^2} + \mu_D; \qquad C_D = \frac{1 + (D / d_2)^2}{1 - (D / d_2)^2} + \mu_D; \qquad (1.5.8)$$

где D, d_1 , d_2 – соответствующие диаметры сопрягаемых деталей, мм;
μ_D, μ_D - коэффициенты Пуассона для металлов охватывающей и охватываемой деталей (табл.1.5.5).

Таблица 1.5.5

Мрка материала	$\sigma_т$, Па	μ	Марка материала	$\sigma_т$, Па	μ
Сталь 25	$2,74\ 10^8$	0,30	Чугун СЧ 28-48	$2,74\ 10^8$	0,25
Сталь 30	$2,94\ 10^8$		Бронза Бр АЖН-11-6-6	$3,92\ 10^8$	
Сталь 35	$3,14\ 10^8$				
Сталь 40	$3,30\ 10^8$		Латунь ЛмцОС 58-2-2	$3,43\ 10^8$	0,25
Сталь 45	$3,53\ 10^8$				

Величина удельного контактного эксплуатационного давления определяется:

при осевом сдвигающем усилии $p_э = P\ n\ /\ \pi Dlf$; (1.5.9)

при крутящем моменте $p_э = 2M_{кр}\ n\ /\ \pi Dlf$; (1.5.10)

при их совместном воздействии $p_э = \sqrt[n]{\ }\ [(2M_{кр})^2 + p^2]\ /\ \pi Dlf$; (1.5.11)

где P –осевое усилие, Н;

$M_{кр}$ – крутящий момент, Н м;

D и l – номинальные диаметр и длина соединения, мм

n = 1,5…2 – коэффициент запаса прочности соединения на возможные перегрузки и воздействие вибраций;

f – коэффициент трения (табл. 1.5.6).

Таблица 1.5.6

Метод запрес-совки	Материал детали: охваты-ваемой	Материал детали: охватывающей	Смазка	Коэффициент трения сцепления при распрессовке: осевого	Коэффициент трения сцепления при распрессовке: кругового
Механи-ческая запрес-совка		Сталь 30-50	Машинное масло	0,20	0,08
		Чугун СЧ 28-48	- " -	0,17	0,09
		Латунь	Всухую	0,10	0,04

Нагрев или охлаж-дение	Сталь 30-50	Бронза		- “ -	0,07	-
		Сталь 30-50	Нагрев	-“ –	0,40	0,35
			Охлаждение	-“-	0,40	0,16
		Чугун СЧ 28-48		-“-	0,18	0,13
		Латунь		-“-	0,25	0,17
	Бр.ОЦС 6-6-3	Чугун СЧ 15—32		-“-	0,07	-
	Бр.АЖ9-4 Бр.АЖН 11-6-6	Сталь 45		-“-	0,07	-

Прежде, чем приступить к выбору посадки, следует проверить обеспечение прочности соединяемых деталей. Для этого определяют предельное допустимое удельное контактное давление на основе теории наибольших касательных напряжений по формулам:

$$P_{доп\,D} = 0.58\,\sigma_{TD}[\,1 - (D^2/d_2^2)]; \qquad (1.5.12)$$

$$P_{доп\,d} = 0.58\,\sigma_{Td}[\,1 - (d_1^2/D^2)], \qquad (1.5.13)$$

где σ_{TD} и σ_{Td} – условный предел текучести или предел прочности сопрягаемых отверстий и валов (см. табл.1.5.5).

Стандартную посадку выбирают из табл. 1.5.7.

Таблица 1.5.7

Номинальные размеры, мм	Посадки в системе отверстия							
	H5/n4	H6/p4	H6/r6	H6/s5	H7/p6	H7/r6	H7/s6	H7/s7
	Посадка в системе вала							
	N5/h4	P6/h5	-	-	P7/h6	R7/h6	S7/h6	-
	Предельные зазоры $\frac{N_{max}}{N_{min}}$, мкм							
От 1 до 3	7 0	17 4	20 7	24 11	20 0	23 3	27 7	31 7
Св.3 до 6	12 3	17 4	20 7	24 11	20 0	23 3	27 7	31 7
Св.6 до 10	14 4	21 6	25 10	29 14	24 0	28 4	32 8	38 8
Св.10 до 18	17 4	26 7	31 12	36 17	29 0	34 5	39 10	46 10
Св.18 до 30	21 6	31 9	37 15	44 22	35 1	41 7	48 14	56 14
Св.30 до 50	24 6	37 10	45 18	54 27	42 1	50 9	59 18	68 18

Св.50 до 65	28 7	45 13	54 22	66 34	51 2	60 11	72 23	83 23
Св.65 до 80	28 7	45 13	56 24	72 40	51 2	62 13	78 29	89 29
Св.80 до 100	33 8	52 15	66 29	86 49	59 2	73 16	93 36	106 36
Св.100 до 120	33 8	52 15	69 32	94 57	59 2	76 19	101 44	114 44
Св.120 до 140	39 9	61 18	81 38	110 67	68 3	88 23	117 52	132 52

Продолжение табл. 1.5.7

Номинальные размеры, мм	Посадки в системе отверстия							
	H5/n4	H6/p4	H6/r6	H6/s5	H7/p6	H7/r6	H7/s6	H7/s7
	Посадка в системе вала							
	N5/h4	P6/h5	-	-	P7/h6	R7/h6	S7/h6	-
	Предельные зазоры $\frac{N_{max}}{N_{min}}$, мкм							
Св.140 до 160	39 9	61 18	83 40	118 75	68 3	90 25	125 60	140 60
Св.160 до 180	39 9	61 18	86 43	126 83	68 3	93 28	138 68	148 68
Св.180 до 200	45 11	70 21	97 48	142 93	68 3	106 31	151 76	168 76
Св.200 до 225	45 11	70 21	100 51	150 101	79 4	109 34	159 84	176 84
Св.225 до 250	45 11	70 21	104 55	160 111	79 4	113 38	169 94	186 94
Св.250 до 280	50 11	79 24	117 62	181 126	79 4	126 42	190 106	210 106
Св.280 до 315	50 11	79 24	121 66	193 138	88 4	130 46	202 118	222 118
Св.315 до 355	55 12	87 26	133 72	215 154	98 5	144 51	226 133	247 133
Св.355 до 400	55 12	87 26	139 78	233 172	98 5	150 57	244 151	265 151

Св.400 до 450	60 13	95 28	153 86	259 192	108 5	166 63	272 169	295 169
Св.450 до 500	60 13	95 28	159 92	279 212	108 5	172 69	292 189	315 189

Продолжение табл. 1.5.7

Номинальные размеры, мм	Посадки в системе отверстия						
	H7/t6	H7/u7	H8/s7	-	H8/u8	H8/x8	H8/z8
	Посадка в системе вала						
	T7/h6	-	-	U8/h7	-	-	-
	Предельные зазоры $\frac{N_{max}}{N_{min}}$, мкм						

От1 до 3	-	28 8	24 0	32 8	32 4	34 6	40 12
Св..3 до6	-	35 11	31 1	41 11	41 5	46 10	53 17
Св..6 до10	-	43 13	38 1	50 13	50 6	56 12	64 20
Св.10 до14	-	51 15	46 1	60 15	60 6	67 13	77 23
Св.14 до 18	-	51 15	46 1	60 15	60 6	72 18	87 33
Св.18 до 24	-	62 20	56 2	74 20	74 8	87 21	106 40
Св.24 до 30	54 20	69 27	56 2	81 27	81 15	97 31	121 55
Св.30 до 40	64 23	85 35	68 4	99 25	99 21	119 41	151 78
Св.40 до 50	70 29	98 45	68 4	109 45	109 31	136 58	175 97
Св.50 до65	85 36	117 57	83 7	133 57	133 41	168 76	218 126
Св.65 до 80	94 45	132 72	89 13	148 72	148 56	192 100	256 164
Св.80 до100	113 56	159 89	106 17	176 89	178 70	232 124	312 204
Св.100 до 120	126 69	179 109	114 25	198 109	198 90	264 155	364 256

Продолжение табл. 1.5.7

Номинальные размеры, мм	Посадки в системе отверстия						
	H7/t6	H7/u7	H8/s7	-	H8/u8	H8/x8	H8/z8
	Посадка в системе вала						
	T7/h6	-	-	U8/h7	-	-	-
	Предельные зазоры $\frac{N_{max}}{N_{min}}$, мкм						

Св.120 до 140	147 82	210 180	132 29	233 130	233 107	311 185	428 302
Св..140 до160	159 94	280 150	140 37	253 150	253 127	343 217	478 352
Св..160 до180	171 106	250 170	148 45	278 170	273 147	373 247	528 402
Св.180 до 200	195 120	282 190	168 50	308 190	308 164	422 278	592 448
Св.200 до 225	209 134	304 212	176 58	330 212	330 186	457 313	647 503
Св.225 до 250	225 150	330 238	186 68	356 238	356 212	497 353	712 568
Св.250 до 280	250 166	367 263	210 77	396 263	396 234	556 394	791 629
Св.280 до 315	272 188	402 298	222 89	431 298	431 269	606 444	871 709
Св.315 до 355	304 211	447 333	247 101	479 333	479 301	679 501	989 811
Св.355 до 400	330 237	492 378	265 119	524 278	524 346	749 571	1089 911
Св.400 до 450	370 267	553 427	295 135	587 427	587 393	837 643	1197 1003
Св.450 до500	400 297	603 477	315 155	637 477	637 443	917 723	1347 1153

Стандартную посадку выбирают таким образом, чтобы детали не проворачивались относительно друг друга, поэтому

$$N_{min\ расч} \leq N_{min\ табл}; \qquad N_{max\ расч} \geq N_{max\ табл}.$$

Величина $N_{max\ расч}$ определяется в соответствии с формулами (1.5.5)…(1.5.9) при $P_{нб}$. При этом в качестве $P_{нб}$ принимается одно из двух значений $P_{доп}$, расчитанных по (1.5.10) и (1.5.11), имеющее наименьшее значение. Но прежде, чем выбрать посадку, следует учесть, что на прочность соединения вала и отверстия оказывает существенное вличние высоты микронеровностей.

Для расчета компенсации влияния микронеровностей рекомендуется пользоваться формулами (1.5.14) и (1.5.15), в частности:
для материалов с различными механическими свойствами

$$\Delta_{ш} = 2(k_1 R_{ZD} + k_2 R_{Zd}), \qquad (1.5.14)$$

для материалов с одинаковыми механическими свойствами

$$\Delta_{ш} = 2\,k(R_{ZD} + k_2 R_{Zd}), \qquad (1.5.15)$$

где k, k_1 , k_2 – коэффициенты, учитывающие смятием микронеровностей поверхностей отверстия и вала, приведенные в табл. 1.5.8.

Таблица 1.5.8

<table>
<tr><th rowspan="3">Метод сборки соединения</th><th rowspan="3">k</th><th>k_1</th><th>k_2</th></tr>
<tr><th colspan="2">Материал соединения</th></tr>
<tr><th>Сталь или чугун</th><th>Бронза или сталь</th></tr>
<tr><td>Механическая запрессовка:
без смазки
со смазкой</td><td>
0.25 – 0.50
0.25 – 0.35</td><td>0.1 – 0.2</td><td>0.6 - 0.8</td></tr>
<tr><td>С нагревом охватывабщей детали
С охлождением вала</td><td>0.4 – 05

0.6 – 0.7</td><td>0.3 – 0.4</td><td>0.8 – 0.9</td></tr>
</table>

Выбор величин микронеровностей производят по табл.1.5.9.

Таблица 1.5.9

<table>
<tr><th rowspan="2">Номинальные размеры, мм</th><th colspan="4">Валы</th><th colspan="4">Отверстия</th></tr>
<tr><th>s5
r5</th><th>n6
p6
r6
t7
u7</th><th>h7
s7</th><th>u8
x8
z8</th><th>H6</th><th>H7
R7
U7</th><th>H8
U8</th><th>H9</th></tr>
<tr><td colspan="9">R_Z , мкм</td></tr>
<tr><td>От 1 до 3</td><td>0,8</td><td rowspan="3">1,6</td><td>1,6</td><td rowspan="4">6,3</td><td rowspan="3">1,6</td><td rowspan="3">3,2</td><td rowspan="3">3,2</td><td rowspan="4">6,3</td></tr>
<tr><td>Св.3 до 6</td><td rowspan="4">1,6</td><td rowspan="3">3,2</td></tr>
<tr><td>Св.6 до 10</td></tr>
<tr><td>Св.10 до 18</td><td rowspan="4">3,2</td><td rowspan="4">3,2</td><td rowspan="4">6,3</td><td rowspan="2">6,3</td></tr>
<tr><td>Св.18 до 30</td><td rowspan="4">6,3</td><td rowspan="5">10</td><td rowspan="3">10</td></tr>
<tr><td>Св.30 до 50</td><td rowspan="4">3,2</td><td rowspan="3">10</td></tr>
<tr><td>Св.50 до 80</td></tr>
<tr><td>Св.80 до 120</td><td rowspan="2">6,3</td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Св.120 до 180</td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>Св.180 до 260</td><td rowspan="3">6,3</td><td></td><td rowspan="3">10</td><td rowspan="3">20</td><td rowspan="3">6,3</td><td rowspan="3">10</td><td rowspan="3">20</td><td rowspan="3">20</td></tr>
<tr><td>Св.260 до 360</td><td rowspan="2">10</td></tr>
<tr><td>Св.360 до 500</td></tr>
</table>

Таким образом, значения натягов при выборе посадок:

$$N_{min\ рас} = N_{min\ рас} + \Delta_{ш} \leq N_{min\ табл},$$

$$N_{max\ рас} = N_{max\ рас} + \Delta_{ш} \geq N_{max\ табл}.$$

Величины натягов могут также зависеть и от ряда других факторов (температуры при эксплуатации, неоднородности физико-химических свойств, материалов, отклонения формы сопрягаемых поверхностей и дрю), которые здесь не рассматриваются.

Рабочее задание. Изучить понятия о соединениях и посадках. Ответьте на вопросы для самопроверки:

- что называют посадкой и какими параметрами она характеризуется?
- назовите виды и системы посадок.
- приведите примеры посадок в системе отверстия и вала.
- Что называют допуском посадки? Выведите формулу для вычисления допуска посадки через предельные зазоры (натяги).

Практические задания. Определить правильные ответы тест-контроля данной темы и решить пример по определению характеристик посадки.

Тест-контроль занятий

1. Указать правильное определение понятия «посадка»:

- разность размеров отверстия и вала, если размер отверстия больше размера вала;
- разность размеров вала и отверстия до сборки, если размер вала больше размера отверстия;
- посадка, при которой возможно получение как зазора, так и натяга;
- характер соединения деталей, определяемый величиной получающихся в нем зазоров или натягов;
- разность между наибольшим и наименьшим допустимыми зазорами или натягами.

2. Определить допуск посадки с зазором при, $D_н$ ($d_н$) = 40 мм, EI = 0 мкм, ES = 25 мкм, ei = -50 мкм, es = -25 мкм:

TS = 0,01 мм; 0,025 мм; 0 мм; 0,03 мм; 0,05 мм.

3. Определить наибольший натяг соединения при, ES = 0.024 мм, EI = -0.059 мм, es = +0.113 мм, ei = 0.91 мм:

- N_{max} = 20 мкм, N_{min} = 10 мкм;
- N_{max} = 300 мкм, N_{min} = 100 мкм;
- N_{max} = 172 мкм, N_{min} = 115 мкм;
- N_{max} = 2 мкм, N_{min} = 1 мкм;
- N_{max} = 0 мкм, N_{min} = 5 мкм.

4.Определить наибольший и наименьший зазоры соединения при, ES = +0.025 мм, EI = 0 мм, es = -0.025 мм, ei = 0.050 мм:

- S_{max} = 50 мкм, S_{min} 25 мкм;
- S_{max} = 75 мкм, S_{min} = 25 мкм;
- S_{max} = 10 мкм, S_{min} = 5 мкм;
- S_{max} = 5 мкм, S_{min} = 2 мкм;
- S_{max} = 0 мкм, S_{min} = 0 мкм.

5. Определить максимальный натяг в переходной посадке при, $D_н$ $\{d_н\}$ = 40 мм, ES = 25 мкм, EI = 0 мкм, es = 18 мкм, ei = 2 мкм:

N_{max} = 18 мкм; 27 мкм; 25 мкм; 2 мкм ; 7 мкм.

6. Указать правильное определение термина «посадка в системе вала»:

* посадки, в которых различные зазоры и натяги получают соединением различных валов с основным отверстием, обозначенным Н;

* число, которое выражает зависимость допуска от квалитета и не зависящее от номинального размера;

* расстояние от ближайшей границы поля допуска до нулевой линии, которое обозначается буквами латинского алфавита;

* число, которое выражает зависимость допуска только от номинального размера;

* посадка, в которой различные зазоры и натяги получают соединением разных отверстий с основным валом.

Примеры и методические указания по их решению

Пример 1. Определить характеристики посадки 45 н7/f7. дать эскизы деталей сопряжения и показать на них номинальный диаметр с предельными отклонениями (см. прил. 6); начертить схему расположения полей допусков, сопрягаемых по данной посадке деталей. На схеме расположения полей допусков соединения:

- показать номинальный диаметр сопряжения с его значениями и записать условные обозначения полей допусков, придельные отклонения, мкм;
- изобразить графически предельные размеры и допуски отверстия и вала, а также основные характеристики сопряжения с их значениями, для чего необходимо рассчитать по предельным отклонениям предельные размеры и допуски отверстия и вала;
- рассчитать основные характеристики сопряжения – для посадки с зазором предельные и средние зазоры и допуск посадки;
- результаты решения представить в виде таблицы.

Решение. Предельные размеры, допуск: отверстия 45 H7($^{+0,025}$), $D_{\min}$ = 54 мм, $D_{\max}$ = 45 + 0,025 = 45,025 мм, TD = 45,025 - 45,000 = 0,025 мм; вала 45 f7 (-0,025/-0,050), $d_{\min}$ = 45 - 0,050 = 44,950 мм, $d_{\max}$ = 45 - 0,025 = 44,975 мм, Td = 44,975-44,950 = 0,025 мм.

Наибольший зазор $S_{\max}$ = 45,025 - 44,950 = 0,075 мм.

Наименьший зазор $S_{\min}$ = 45 - 44,975 = 0,025 мм.

Средний зазор $S_{ср}$ = ($S_{\max}$ + $S_{\min}$) / 2 = (0,025 + 0,075) / 2 = 0,05 мм .

Допуск посадки TS = $S_{мм}$ - $S_{\min}$ =0,075 - 0,025 = 0,05 мм .

Проверка TS = TD+Td = 0,025 + 0,025 = 0,05 мм.

Эскизы сопрягаемых деталей приведены на рис.1.5.4, а схема расположения полей допусков – на рис. 1.5.5.

Результаты решения примера представить в табл.1.5.10

По аналогичной методике решаются примеры для переходной посадки или посадки с натягом

.

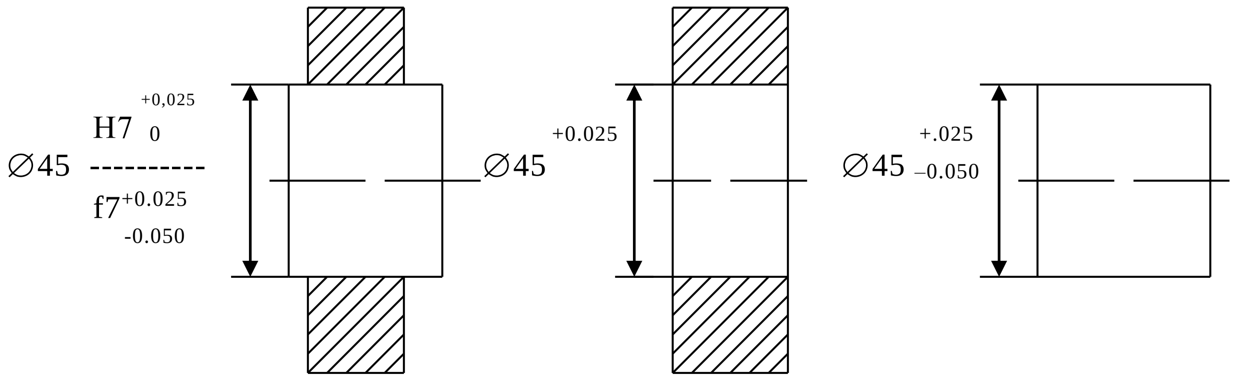


Рис.1.5.4. Эскизы соединения сопрягаемых деталей

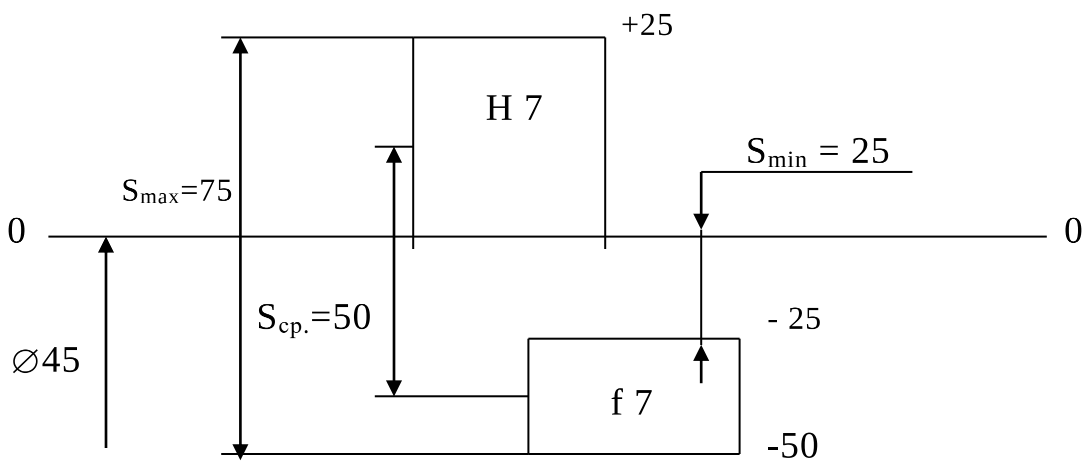


Рис.1.5.5. Схема расположения полей допусков (на схеме все отклонения проставляются в мкм)

Таблица 1.5.10

Посадка	Отклонение, мкм				Допуск, мкм			Зазоры, мкм		Натяги, мкм	
	Вала		Отверстие								
	es	*ei*	*ES*	*EI*	*Td*	*TD*	*TS.TN*	$S_{\max}$	$S_{\min}$	$N_{\max}$	$N_{\min}$
45 H7/f7	-25	-50	+25	0	25	25	50	25	75	-	-

Пример 2. По заданным номинальным размерам (табл. 1.5.11) определить основные характеристики посадок, приведенных в табл. 1.5.12

Таблица 1.5.11

Пример	Последняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	5	8	15	25	35	56	70	125	200	220
2	15	25	35	55	70	126	200	220	5	8
3	55	70	125	200	220	5	8	15	25	35

Таблица 1.5.12

Пример	Последняя цифра зачетной книжки									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	$\frac{H7}{e8}$	$\frac{H7}{f7}$	$\frac{H7}{g6}$	$\frac{H7}{h6}$	$\frac{H8}{d9}$	$\frac{F7}{h6}$	$\frac{H7}{h6}$	$\frac{E9}{h6}$	$\frac{H8}{h7}$	$\frac{E8}{d9}$
2	$\frac{H7}{p6}$	$\frac{H7}{r6}$	$\frac{H7}{s6}$	$\frac{P7}{h6}$	$\frac{Y7}{s7}$	$\frac{R7}{h8}$	$\frac{S7}{h6}$	$\frac{H5}{h4}$	$\frac{P6}{h5}$	$\frac{H6}{s5}$
3	$\frac{H7}{j_s6}$	$\frac{H7}{k6}$	$\frac{H7}{n6}$	$\frac{J_s7}{h6}$	$\frac{R6}{h6}$	$\frac{H8}{k8}$	$\frac{H8}{j_s7}$	$\frac{R6}{h6}$	$\frac{K8}{h7}$	$\frac{V8}{n7}$

Пример 3. Для отверстия и вала с номинальным диаметром D = 20 мм заданы: ES = +0.021, EI = 0 мм; es = + 0,048, ei = + 0,035 мм. Рассчитать посадку с зазором: определить номинальные и предельные размеры; предельные и средние отклонения, предельные зазоры, допуски отверстия, вала и посадки. Построить схемы полей допусков по предельным размерам и упрощенную.

Пример 4. Для отверстия и вала с номинальным диаметром D = 20 мм заданы: ES = +0.021, EI = 0 мм; es = - 0.007, ei = - 0,020 мм. Рассчитать посадку с натягом: определить номинальные и предельные размеры, предельные и средние отклонения, предельные натяги, допуски отверстия, вала и посадки.

Начертить схемы полей допусков по предельным размерам, отклонениям и упрощенную.

Пример 5. Для отверстия и вала с номинальным диаметром D = 20 мм заданы: ES = +0.021, EI = 0 мм; es = + 0,015, ei = + 0,002 мм. Рассчитать переходную посадку: определить номинальные и предельные размеры, предельные и средние отклонения, предельные натяги и зазоры, допуски отверстия, вала и посадки. Начертить схемы полей допусков по предельным размерам и упрощенную.

Пример 6. Определить предельные размеры и отклонения, допуски и посадки, зазоры и натяги по следующим данным:

а) $18\dfrac{+0{,}011}{\begin{matrix}-0{,}006\\-0{,}014\end{matrix}}$; б) $18\dfrac{+0{,}011}{\begin{matrix}+0{,}009\\+0{,}001\end{matrix}}$; в) $18\dfrac{+0{,}011}{\begin{matrix}+0{,}031\\+0{,}023\end{matrix}}$; г) $18\dfrac{+0{,}014}{\begin{matrix}+0{,}011\\-0{,}008\end{matrix}}$.

Пример 7. Известны следующие размеры соединения: Номинальный диаметр 90 мм, наибольший зазор 12 мкм, - $Td = ei$ = - 22 мкм; TD = 35 мкм. Определить наименьший зазор, предельные размеры, предельные отклонения отверстия и вала, допуск посадки.

Пример 8. Даны предельные размеры отверстия D_{max} = 125.040, $D_{\min}$ = 125 мм и вала, мм: а) $d_{\max}$ = 124.915, $d_{\min}$ = 124,875; б) $d_{\max}$ = 125,083, $d_{\min}$ = 125,043; в) $d_{\max}$ = 125,117, $d_{\min}$ = 125,092; г) $d_{\max}$ = 125,020, $d_{\min}$ = 124,980; д) $d_{\max}$ = 125,028, $d_{\min}$ 125,003. Определить предельные зазоры, натяги и допуски соединения, начертить упрощенные схемы полей допусков.

Пример 9. Задано: номенальный размер соединения 3мм. TD = 20 мкм, EI = 0; $TD = Td$, $EI = es$. Начертить схему полей допусков, определить предельные размеры, предельные отклонения, предельные зазоры и допуск посадки.

Пример 10. Подобрать посадку с зазором для подшипника с углом охвата 180^0 (d = 150 мм; l = 180 мм), работающего при n = 600 об/мин, под нагрузкой R = 58,8 Кн (6000 кгс), вкладыш цинкового сплава ЦАМ 10-5 с шероховатостью поверхности Rz_1 = 3,2 мкм, цапфа стальная закаленная с шероховатостью поверхности Rz_2 = 1,6 мкм. Применяют масло индустриальное 20 (при $t_{раб}$ =50^0С динамическая вязкость μ = 0,017 Па с).

Решение. Для выбора оптимальной посадки наряду с уравнением (1.5.1) и (1.5.3) используется дополнительное условие, что максимальный табличный зазор $S_{max\ T}$ после введения стандартных полей допусков должен быть примерно равен оптимальному зазору $S_{опт}$. Используя уравнения (1.5.5) , (1.5.6) и рис.1.4.3 находим: $S_{min\ F}$ = 33 мкм, $S_{max\ F}$ =362 мкм и $S_{опт}$ = 175 мкм.

По табл. 1.5.4 определяем, что ближайшей посадкой для реализации полученных расчетных значений будет посадка

$150\ H8\left(\frac{+0.063}{0}\right)/\ f8\left(\frac{-\ 0.043}{-\ 0.106}\right)$ с наименьшим, средним и наибольшим табличными зазорами: $S_{min\ T}$ = 43 мик; $S_{ср\ T}$ = 106 мкм; S_{max} = 169 мкм (рис.1.5.6). При этом запас на износ $S_и$ составляет: $S_и = (S_{max\ F} - S_{min\ T}) - (TD + Td) = (362 - 43) - (63 + 63) = 193$ мкм. Зная величину запаса на износ и скорость изнашивания сопрягаемых деталей, можно определить время надежной работы соединения.

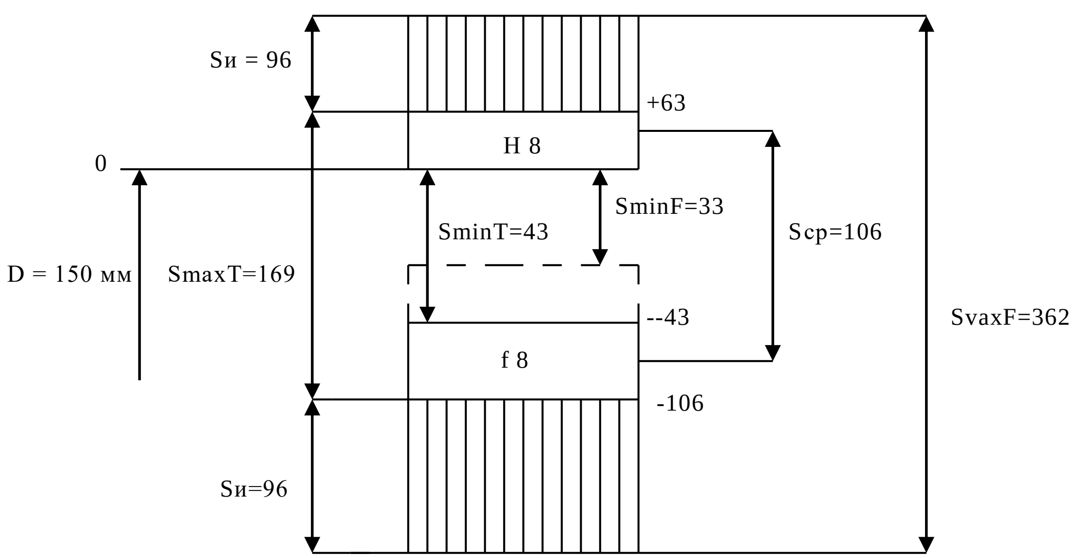


Рис.1.5.6. Схема расположения полей допусков к расчету посадки с зазором (Sи – запас на износ)

Примеры 11 - 35. Рассчитать, выбрать посадку с гарантированным зазором и построить расположения полей допусков для гидродинамических подшипников скольжения при исходных данных, представленных в табл.1.5.13.

Таблица 1.5.13

№ примера	Номинальный диаметр соединения подшипника, d, мм	Длина соединения подшипника, l, мм	Частота вращения цапфы, об/мин	Радиальная нагрузка, R, кН	Масло (смазочный материал)	R_{Z1}, (вкл.), мкм	R_{Z2}, (цапфа), мкм
11	100	25	500	1,5	Индустриальное 20	1,25	3,2
12	60	30	1250	1,3	Турбинное 30	1,6	4
13	60	42	1000	2	Индустриальное 40	1,25	2,5
14	70	65	2000	3	Индустриальное 30	1,6	4
15	65	40	1500	4	Турбинное 46	1,0	2,5
16	75	60	2500	4,5	Моторное Т	0,80	2,0
17	80	90	3000	5	Индустриальное 50	1,0	2,5
18	85	85	2500	5	Турбинное 46	1,25	3,2
19	90	105	2000	5	Турбинное 30	1,25	3,2
20	95	95	1500	7,5	Индустриальное 20	1,0	2,0
21	100	110	1000	10	Турбинное 22	1,6	2,5
22	105	85	750	12	Индустриальное 30	1,6	4
23	110	100	500	12	Турбинное 30	1,25	3,2
24	115	70	600	0,5	Индустриальное 30	1,0	2,5
25	120	84	1000	15	Турбинное 30	1,0	2,0
26	125	50	1500	17	Турбинное 46	1,25	2,0
27	130	65	2000	18	Турбинное 57	1,25	2,5
28	135	80	2500	18	Турбинное 46	1,25	2,5
29	140	100	3000	20	Индустриальное 50	1,6	4,0
30	150	120	2500	21	Турбинное 46	1,25	3,2
31	55	32	1000	2,0	Турбинное 30	1,6	4,0
32	65	45	1500	2,5	Индустриальное 40	1,25	2,0
33	75	75	2500	4,0	Индустриальное 30	1,6	4,0
34	80	60	3000	4,0	Моторное Т	1,0	2,0
35	90	90	2000	4,5	Турбинное46	1,25	3,2

Примечание. Во всех примерах подшипник разъемный полоаинный, материал цапфы и вкладыша выбирать различным.

Пример 36. Рассчитать и выбрать посадку с натягом в соединении при следующих исходных данных:

- передаваемый крутящий момент $M_{кр}$ = 30 Н м;
- номинальный диаметр сопряжения D = 25 мм;
- внутренний диаметр вала d_1 = 0 (вал сплошной);

- наружный диаметр втулки d_2 = 35 мм;
- номинальная длина сопряжения l = 45 мм;
- материал вала и втулки – сталь 45;
- запрессовка механическая при наличии смазки.

Решение. Используя уравнения (1.5. 7)…(1.5.15) согласно теоретическим положениям и алгоритму расчета было установлено:
$N_{vax\ расч}$= 47 мкм ; $N_{min\ расч}$ =12 мкм.

В соответствии с табл.1.5.7 принимаем посадку 25 H6/r6 или

$$25\left(\frac{+0{,}013}{\substack{+0{,}041\\+0{,}028}}\right)$$

, для которой (рис.1.5.7) является характерным следующее:

допуск отверстия $TD_{nf,k}$ = 0.013 мм;
допуск вала $Td_{табл}$ = 0,013 мм;
минимальный натяг $N_{min\ табл}$ = 0,015 мм;
максимальный натяг $N_{max\ табл}$ = 0,041 мм;
допуск посадки $TN_{табл} = N_{max\ табл} - N_{min\ табл}$ = 0,026 мм.

Решение будет правильным, если выполняются условия:
$N_{min\ табл} \geq N_{min\ расч}$; $N_{max\ табл} \leq N_{max\ расч}$.

Принятая посадка обеспечивает неподвижность соединения и при наименьшем натяге, так как $N_{min\ табл} \geq N_{min\ расч}$ (15 >12)мкм, а при $N_{max\ табл}$ остается еще некоторый запас прочности сопрягаемых деталей, поскольку допускаемый наибольший натяг $N_{max\ расч}$=47 мкм, а $N_{max\ табл}$ =41 мкм.

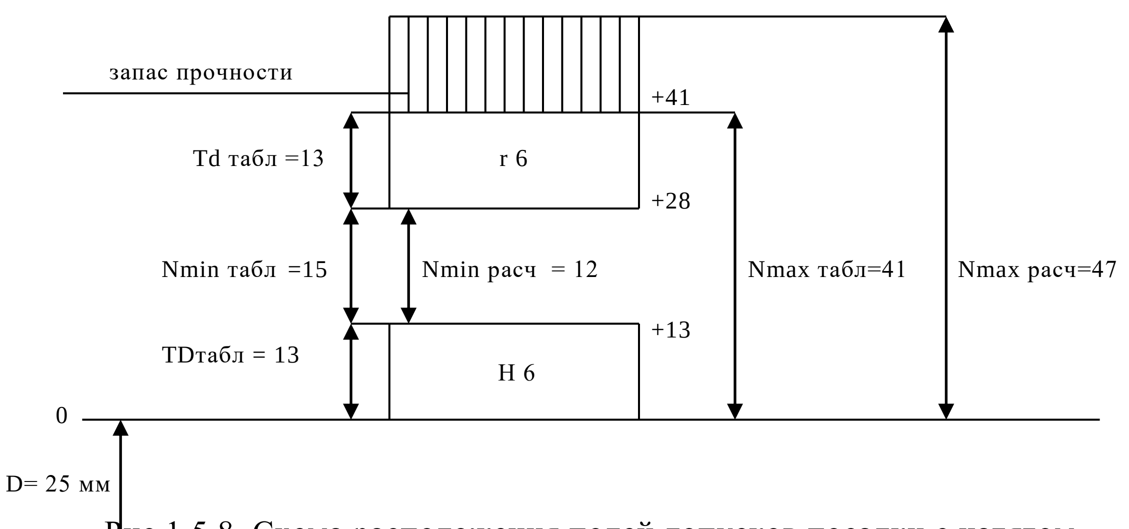


Рис.1.5.8. Схема расположения полей допусков посадки с натягом

Примеры 37 – 62. Рассчитать, выбрать и представить схему расположенич полей допусков посадки с натягом с указанием размеров, отклонений из системы ИСО при соответствующих исходных данных, которые представлены в табл.1.5.14.

Таблица 1 5.14

Исходные данные к решению примеров	Номера примеров				
	37	38	39	40	41
Передаваемая осевая сила Р, кН	-	20	16	-	-
Передаваемый момент $M_{кр}$, Н м	1200	-	-	350	1800
Номинальный диаметр D, мм	80	220	40	50	80
Внутренний диаметр вала d_1, мм	-	55	20	20	-
Наружный диаметр d_2, мм	150	240	120	80	150
Номинальная длина сопряжения l, мм	120	0,5 D	1,5 D	75	140
Материал: вала втулки	Сталь 30 Сталь 30	Сталь 35 БрАЖН-11-6-6	Чугун 28-48 Сталь 35	Сталь 45 Сталь 45	Сталь 35 Сталь 35
Метод запрессовки	Механич.	Механич.	Механич.	Механич.	Механич.
Смазка	-	-	-	-	-

Продолжение табл. 1 5.14

Исходные данные к решению примеров	Номера примеров				
	42	43	44	45	46
Передаваемая осевая сила Р, кН	-	-	-	-	-
Передаваемый момент $M_{кр}$, Н м	185	250	257	250	80
Номинальный диаметр D, мм	40	50	80	40	100
Внутренний диаметр вала d_1, мм	-	-	40	-	60
Наружный диаметр d_2, мм	80	80	160	60	240
Номинальная длина сопряжения l, мм	60	75	160	60	0,5D
Материал: вала втулки	Сталь 35 Сталь 35	Сталь 35 Сталь 35	Сталь 45 Сталь 45	Сталь 45 Сталь 45	Чугун СЧ-28-48 Сталь 45
Метод запрессовки	Механич.	Механич.	Механич.	Механич.	Механич.
Смазка	-	-	-	-	Со смазкой

Продолжение табл. 1 5.14

Исходные данные к решению примеров	Номера примеров				
	47	48	49	50	51
Передаваемая осевая сила P, кН	22	5	4	6	3
Передаваемый момент $M_{кр}$, Н м	-	8	18	18	16
Номинальный диаметр D, мм	200	35	40	80	200
Внутренний диаметр вала d_1, мм	50	25	25	30	80
Наружный диаметр d_2, мм	240	80	85	220	270
Номинальная длина сопряжения l, мм	0,5D	35	35	80	100
Материал: вала втулки	Сталь 35 БрАЖН-11-6-6	Сталь 45 Сталь 30	Сталь 30 Сталь 40	Сталь 50 ЛМиОС 58-2-2-2	Сталь35 Сталь35
Метод запрессовки	Механич.	Охл.вала	Охл.вала	Механич.	Механич.
Смазка	Со смазкой	-	-	-	-

Продолжение табл. 1 5.14

Исходные данные к решению примеров	Номера примеров				
	52	53	54	56	57
Передаваемая осевая сила P, кН	-	20	18	2	3
Передаваемый момент $M_{кр}$, Н м	1550	-	50	1800	185
Номинальный диаметр D, мм	50	200	70	80	40
Внутренний диаметр вала d_1, мм	-	75	20	-	-
Наружный диаметр d_2, мм	80	240	120	150	80
Номинальная длина сопряжения l, мм	70	100	180	140	60
Материал: вала втулки	Сталь 45 Сталь 45	Сталь 45 Сталь 45	Сталь 30 Сталь 30	Чугун 28-48 Сталь 45	Сталь 30 Сталь 30
Метод запрессовки	Нагр.отв.	Механич.	Механич.	Механич.	Механич.
Смазка	-	-	-	Со смазкой	-

Продолжение табл. 1 5.14

Исходные данные к решению примеров	Номера примеров				
	58	59	60	61	62
Передаваемая осевая сила P, кН	40	30	10	5	3
Передаваемый момент $M_{кр}$, Н м	1000	300	-	50	30
Номинальный диаметр D, мм	100	180	35	40	150
Внутренний диаметр вала d_1, мм	-	50	25	25	80
Наружный диаметр d_2, мм	200	240	80	65	270
Номинальная длина сопряжения l, мм	60	80	35	40	
Материал: вала втулки	Чугун СЧ28-48 Сталь 45	Сталь 45 Сталь 45	Сталь 35 Сталь 35	Сталь 30 Сталь 30	Сталь 45 Сталь 45
Метод запрессовки	Механич.	Механич.	Механич	Механич.	Механич
Смазка	Со смазкой	Со смазкой	-	-	-

ЗАНЯТИЕ 4. Изучение государственных стандартов Единной системы допусков и посадок

Основные положения. Согласно ГОСТ 25346-89, ГОСТ 25347, ГОСТ 25348, в системах ИСО и ЕСДП установлены допуски и посадки для размеров менее 1 мм и до 500 мм, от 500 до 3150 мм, а в ЕСДП также для размеров от 315 до 10 000 мм. В ЕСДП поля допусков для размеров менее 1 мм выделены отдельно.

Системой допусков и *посадок* называют совокупность рядов допусков и посадок, закономерно построенных на основе опыта, теоретических и экспериментальных исследований и оформленных в виде стандартов. Система предназначена для выбора минимально необходимых, но достаточных для практики вариантов допусков и посадок типовых соединений деталей машин.

Системы допусков и посадок ИСО и ЕСДП для типовых деталей машин построены по единым принципам. Предусмотрены посадки в системе отверстия и в системе вала (рис. 1.6.1).

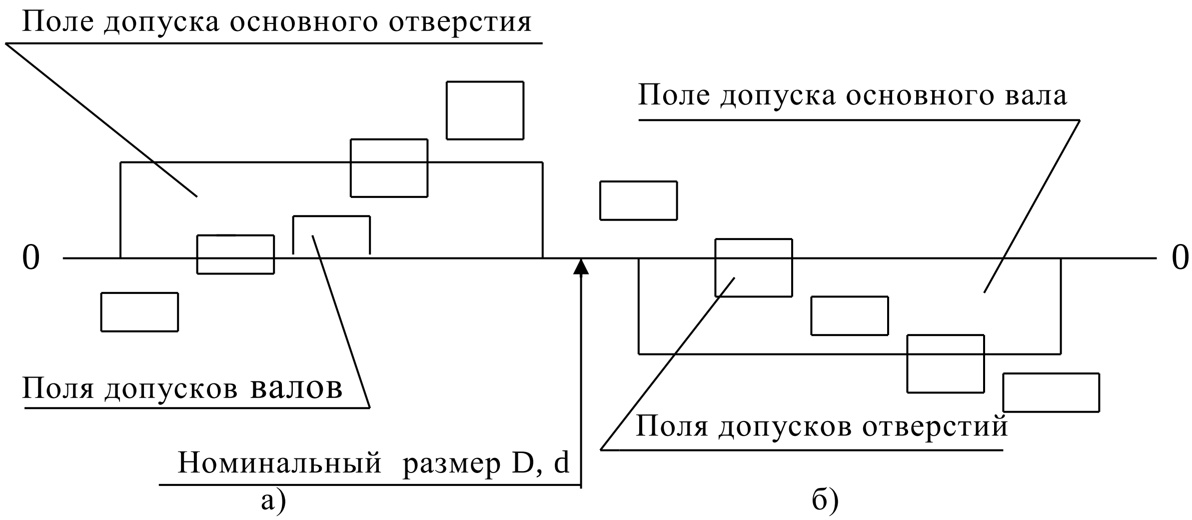


Рис.1.5.1. Примеры расположения полей допусков для посадок
в системах отверстия (*а*) и в системе вала (*б*)

Посадки в системе отверстия - это посадки, в которых различные зазоры и натяги получаются соединением различных валов с основным отверстием (рис. 1.5.1, *а*), которое обозначают *H*. Для всех посадок в системе отверстия нижнее отклонение отверстия $EI = 0$, т.е. нижняя граница поля допуска основного отверстия, всегда совпадает с нулевой линией, верхнее отклонение *ES* всегда положительное и равно цифровому значению допуска, т.е. $TD = ES - EI = ES - 0 = ES$. Поле допуска основного отверстия откладывают вверх, т.е. в материал детали.

Посадка в системе вала - это посадки, в которых различные зазоры и натяги получаются соединением различных отверстий с основным валом (рис. 1.6.1, *б*), который обозначают *h*. Для всех посадок в системе валаверхнее отклонение основного вала $es = 0$, т.е. верхняя граница поля допуска вала всегда совпадает с нулевой линией, нижнее отклонение отрицательное и равно цифровому значению допуска по модулю, т.е. допуск основного вала так как и все допуски положительные ($Td = es - ei = 0 - (-ei) = 1ei1$. Поле допуска основного вала откладываются вниз от нулевой линии, т.е. в материал детали.

Такую систему допусков называют односторонней предельной. Характер одноименных посадок (т.е. предельные зазоры и натяги) в системах отверстия и вала примерно одинаков. Выбор систем отверстия и вала для той или иной посадки определяется конструктивными, технологическими и экономическими соображениями.

Точные отверстия обрабатывают дорогостоящим режущим инструментов (зенкерами, развертками, протяжками и т.п.). Каждый из них применяют для обработки отверстия только одного размера с определенным полем допуска. Валы независимо от их размера обрабатывают одним и тем же резцом или шлифовальным кругом. В системе отверстия различных по предельным размерам отверстий меньше, чем в системе вала, а следовательно, меньше номенклатура режущего инструмента, необходимого для обработки отверстий. В связи с этим преимущественное распространение получила система отверстия.

Однако в иногда по конструктивным соображениям приходится применять систему вала, например, когда требуется чередовать соединения нескольких отверстий одинакового номинального размера, но с различными посадками на одном валу. При выборе системы посадок нужно также учитывать допуски на стандартные детали и составные части изделий (например, вал для соединения с внутренним кольцом подшипника качения всегда следует изготовлять по системе отверстия, а гнездо в корпусе для установки подшипника - по системе вала).

В некоторых случаях (в ремонтной практике) целесообразно применять посадки, образованные таким сочетанием полей допусков отверстия и вала, когда ни одна из деталей не является основной. Такие посадки называют внесистемными (комбинированными).

Для построения систем допусков устанавливают единицу допуска i (I), которая, отражая влияние технологических, конструктивных и метрологических факторов, выражает зависимость допуска от номинального размера, ограничиваемого допуском, и является мерой точности, а также число единиц допуска (a), зависящее от качества изготовления (квалитета) и не зависящее от номинального размера (в ЕСДП установлено 19 квалитетов - совокупность допусков, соответствующих одинаковой степени точности для всех номинальных размеров. Порядковый номер возрастает с увеличением допуска:
01; 0; 1; 2;...17 (допуск по квалитету обозначается через IT с порядковым номером, например $IT14$).

На основании исследований точности механической обработки установлены следующие эмпирические формулы нахождения единицы допуска для размеров: до 500 мм - $i = 0.45 \sqrt[3]{D} + 0.001\,D$; от 500 мм до 10000 мм - $I = 0,004D + 2,1$, где D - среднее геометрическое крайних размеров каждого интервала, мм ($D = \sqrt{D_{\max} \quad D_{\min}}$); i (I) - единица допуска, мкм, $0,001D$ учитывает погрешность измерения.

Число единиц допуска (a) постоянное для каждого квалитета (качества изготовления) и не зависит от номинального размера. Число единиц допуска при переходе от одного квалитета к другому, начиная с

5-го и по 17-й, изменяется приблизительно по геометрической прогрессии со знаменателем $\sqrt[5]{10} \approx 1{,}6$. Число единиц допуска для этих квалитетов соответственно равно: 7, 10, 16, 25, 40, 64, 100, 160, 250, 400, 640, 1000 и 1600. Начиная с 5-го квалитета допуски при переходе к следующему, более грубому квалитету увеличиваются на 60%, а через каждые пять квалитетов - в 10 раз. Это правило дает возможно- сть развить систему в сторону более грубых квалитетов, например $IT\,18 = 10\,IT13$ и т.д. Таким образом, допуск любого квалитета равен $IT = ai$.

Все измерения в ЕСДП определены при нормальной температуре, которая во всех странах принята равной 20 ± 2^0С (ГОСТ 9249). Она близка к температуре рабочих помещений машиностроительных и приборостроительных заводов. Градуировку и аттестацию всех линейных и угловых мер и измерительных приборов, а также точные измерения следует выполнять при нормальной температуре, отступления от нее не должны превышать допускаемых значений (ГОСТ 8.050). Температура детали и измерительного средства в момент контроля должна быть одинаковой, что может быть достигнуто совместной выдержкой детали и измерительного средства в одинаковых условиях.

В отдельных случаях погрешность измерения, вызванную отклонением от нормальной температуры и разностью температурных коэффициентов линейного расширения материалов детали и измерительного средства, можно компенсировать введением поправки, равной погрешности, взятой с обратным знаком. Температурную погрешность $\Delta 1$ приближенно определяют по формуле

$$\Delta L = L\,(\alpha_1\,\Delta t_1 - \alpha_2\,\Delta t_2),$$

где L - измеряемый размер, мм; α_1 и α_2 - температурные коэффициенты линейного расширения материалов деталей и измерительного средства соответственно, $^0C^{-1}$; $\Delta t_1 = t_1 - 20^0C$ - разность между температурой детали и нормальной температурой; $\Delta t_2 = t_2 - 20^0C$ - разность между температурой измерительного средства и нормальной температурой.

Если температура детали и средств измерения одинакова, но не равна 20^0С, также неизбежны ошибки вследствие разности температурных коэффициентов линейного расширения детали и измерительного средства. В этом случае (т.е. при $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t$) погрешность

$$\Delta L \approx L\,\Delta t\,(\alpha_1 - \alpha_2).$$

Для построения рядов допусков каждый из диапазонов размеров в свою очередь разделен на несколько интервалов. Для номинальных размеров от 1 до 500 мм установлено 13 интервалов: до 3, от 3 до 6, от 6 до 10 мм,, от 400 до 500 мм. Для полей, образующих посадки с большими зазорами или натягами, введены дополнительные промежуточтые интервалы, что уменьшает колебание зазоров и натягов и делает посадки более определенными.

Положение поля допуска относительно нулевой линии (номинального размера) определяется основным отклонением. Для образования посадок с различными зазорами и натягами в системе ИСО и ЕСДП для размеров до 500 мм предусмотрено 27 вариантов основных отклонений валов и отверстий.

Основное отклонение - это расстояние от ближней границы поля допуска до нулевой линии (рис. 1.6.2) Основные отклонения отверстий обозначают прописными буквами латинского алфавита (H), валов-строчными (h). Отклонение A - H (a - h) предназначены для образования полей допусков в посадках с зазором; отклонения J_s - N (j_s - n) - в переходных посадках, отклонения P -ZC (p - zc) - в посадках с натягом.

Каждая буква обозначает ряд основных отклонений, значение которых зависит от номинального размера. Абсолютное значение и знак каждодого основного отклонения вала (верхнего es для вала a - h или нижнего ei для вала j - zs) определяют по эмпирическим формулам. Основное отклонение вала не зависит от квалитета (даже когда формула содержит допуск IT). Основные отклонения отверстий построены так, чтобы обеспечить посадки в системе вала, аналогичные посадкам в системе отверстия. Они равны по абсолютному значению и противоположны по знаку основным отклонением валов, обозначаемым той же буквой.

Предельные отклонения линейных размеров указывают на чертежах непосредственно после номинальных размеров (рис.1.6.3., а, б) следующими способами:

1) условными обозначениями полей допусков (основное отклонение и квалитет);
2) числовыми значениями;
3) условными обозначениями и числовыми значениями, которые помещают справа от условных обозначений, в скобках.

Третий способ применяют в тех случаях, если предельные отклонения назначены:

• на размеры, не включенные в ряды нормальных линейных размеров;

• на определенные виды изделий и их элементы, например на пазы для шпонок;

• на размеры уступов с несимметричным полем допуска;

• на отверстия по системе вала.

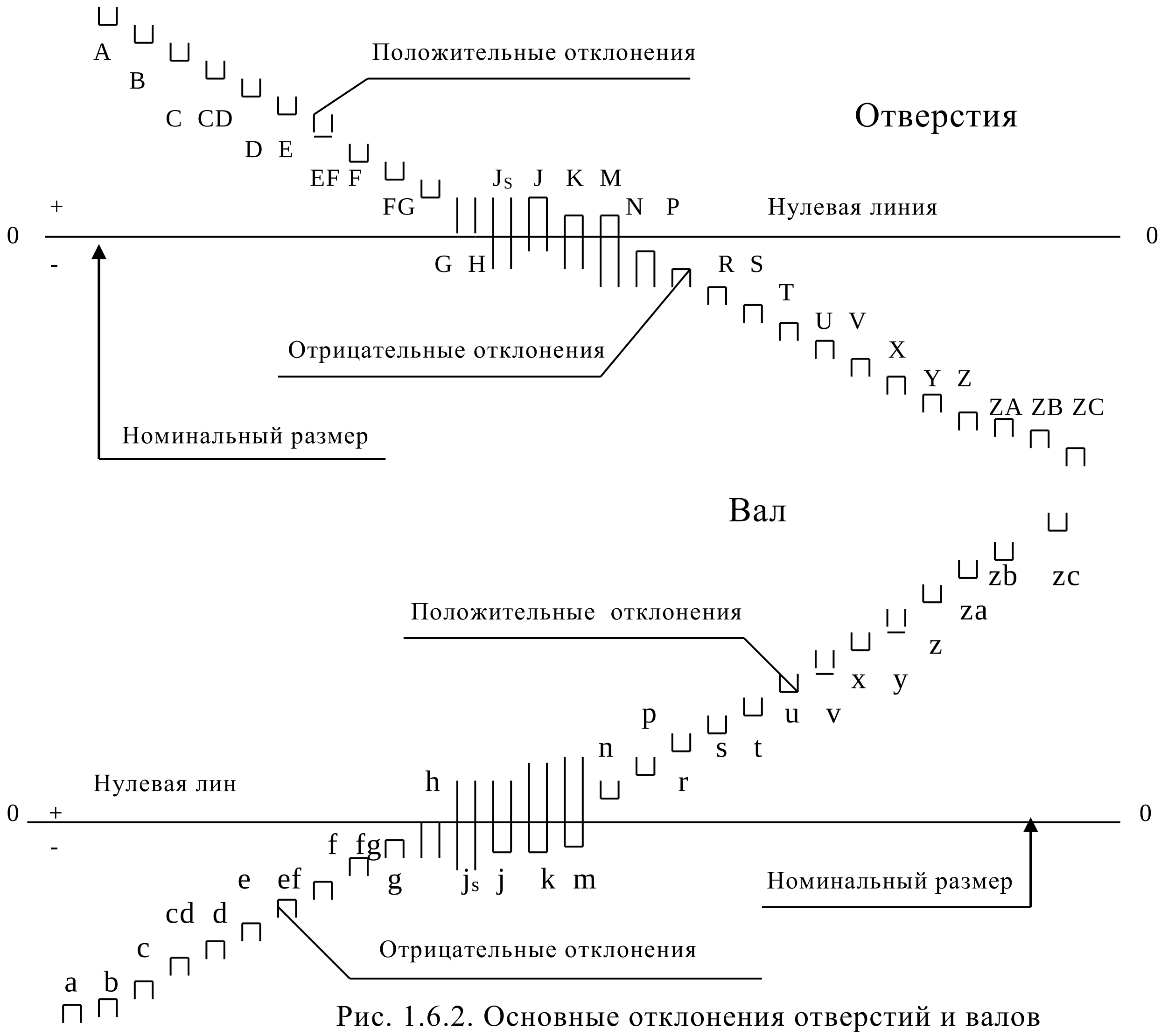


Рис. 1.6.2. Основные отклонения отверстий и валов

Посадки и предельные отклонения размеров деталей, изображенных на чертеже в собранном виде, указывают дробью: в числителе – буквенное обозначение или числовое значение предельного отклонения отверстия либо буквенное обозначение с указанием справа в скобках его числового значения, после буквенного обозначения основного отклонения проставляют цифровое значение квалитета, в знаменателе – аналогичное обозначение поля допуска вала.

Рабочее задание. Изучить построение Единой системы допусков и посадок. Ответьте на вопросы для самопроверки:

1. Опишите содержание Единой системы допусков и посадок
2.. Что такое квалитет и как его обозначают ?
3. Как определить единицу и число единиц допуска ?
4. Объясните способ нахождения допуска по квалитету.
5. Что такое основное отклонение, приведите примеры ?
6. Как определить температурную погрешность измерения ?
7. Каким образом наносятся размеры на чертеж

Практические задания. Определить правильный ответ по тест-контолю:

1.Определить квалитет, по которому назначен допуск на изготовление вала при, $d_н$ = 80 мм, IT = 210 мм: IT 11; 10; 8; 9; 7.

2.. Дана посадка 60 $D8/\ h7$. Определить вид посадки: с натягом; с зазором; переходная; в системе вала; комбинированная.

3. Дана посадка 10$N5/\ h4$. Определить допуск отверстия и вала:

- TD = 10 мкм, Td = 6 мкм;
- TD = 16 мкм, Td = 10 мкм;
- TD = 6 мкм, Td = 4 мкм;
- TD = 9 мкм, Td = 8 мкм;
- TD = 20 мкм, Td = 10 мкм.

4. Подобрать посадку в системе отверстия при, $d_н$ 40 мм, S_{max} = 8 мкм, N_{max} = 33 мкм:

40$H7/\ p6$; 40$H6/\ m5$; 40$H7/\ p8$; 40$H7/\ n6$; 40$H7/$ r5.

5. Определить квалитет, по которому назначен допуск на изготовление вала при, $d_н$ = 80 мм, IT = 210 мм:
IT 11; 10; 8; 9; 7.

6. Дана посадка 60 $D8/\ h7$. Определить вид посадки: с натягом; с зазором; переходная; в системе вала; комбинированная.

7. Дана посадка 10$N5/\ h4$. Определить допуск отверстия и вала: TD = 10 мкм, Td = 6 мкм; TD = 16 мкм, Td = 10 мкм; TD = 6 мкм, Td = 4 мкм; TD = 9 мкм, Td = 8 мкм; TD = 20 мкм, Td = 10 мкм.

8. Подобрать посадку в системе отверстия при, $d_н$ 40 мм, S_{max} = 8 мкм, N_{max} = 33 мкм:

40$H7/\ p6$; 40$H6/\ m5$; 40$H7/\ p8$; 40$H7/\ n6$; 40$H7/$ r5.

9. Определить допуск 10 квалитета для размера 100 мм с помощью единицы допуска и числа единиц допуска:
1T = 100 мкм; 1T = 133 мкм; 1T = 145 мкм; 1T =120 мкм; 1T = 130 мкм.

Пример 1. Для посадки в системе вала известны D = 63 мм, S_{max} = 152 мкм, S_{min} = 60 мкм, $TD = Td$. О пределить предельные размеры и отклонения, $TD, Td, TП, TS$, начертить схему полей допусков.

Пример 2. Для посадки в системе отверстия известны D = 40 мм, TD = 25 мкм, Td = 16 мкм N_{min} = 18 мкм. Определить предельные отклонения и размеры, наибольший натяг, допуск соединения, начертить схему полей допусков.

Пример 3. Вычислить допуски в 5-м и 10-м квалитетах для диаметра размером 100 мм.

Решение. Вычисляем средний размер D интервала (св. 80 до 120 мм) , в котором находится заданный размер $D = \sqrt{80 \bullet 120} \approx 98$ мм.

Единица дапуска $i = 0.45 \sqrt{98} + 0.001 \bullet 98 \approx 2.17$ мкм. Число единиц допуска для 5-го и 10-го квалирета $a_5 = 7$, $a_{10} = 64$. Затем находим допуск для 5-го квалитета $IT5 = a_5\, i = 7 \bullet 2.17 = 15.2 \approx 15$ мкм; $IT\,10 = a_{10} \bullet i = 64 \bullet 2.17 = 139 \approx 140$ мкм. Округленные значения допусков соответствуют табличным (см. прил.6).

Пример 4. Задано основное отклонение вала. Вычислить основное отклонение отверстия; записать их условные обозначения и начертить эскизы полей допусков отверстия и вала.

Вари-ант	Диаметр вала, мм	Основное отклонение вала, мкм	Квалитет		Вари-ант	Диаметр вала, мм	Основное отклонение вала, мкм	Квалитет	
			вала	отвер-стия				вала	отвер-стия
1	2	- 60	8	11	8	90	23	7	8
2	5	- 30	10	8	9	150	43	5	6
3	8	- 25	8	9	10	190	77	6	7
4	12	- 16	6	7	11	280	158	6	7
5	25	- 7	5	6	12	320	268	6	7
6	45	2	7	8	13	420	490	7	8
7	65	11	7	8	14	460	68	6	7

Пример 5. Даны посадки: $H7\,/\,g6$, $H7\,/\,k6$, $H6\,/\,m5$, $H8\,/\,e8$, $H8\,/\,k7$, $H6\,/\,f6$, $H5$ / n4, $H9\,/\,d9$, $H8\,/\,m7$, $H6\,/h5$, $D8\,/h6$, $R7\,/h6$, $E8\,/\,h7$, $K8\,/\,h7$, $U8\,/\,h7$, $D8\,/\,h8$, $Y6\,/h5$, $U6\,/\,H5$. Определить систему и вид посадки. Найти предельные отклонения и допуски; вычислить предельные размеры отверстий и валов; предельные зазоры, натяги и допуски посадок; начертить эскизы полей допусков посадок в масштабе; записать заданные размеры с предельными отклонениями.

ОГЛАВЛЕНИЕ