Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)
КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине «МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА; ГЕОМЕТРИЯ»

для специальностей среднего профессионального образования
технического и социально-экономического профилей

1 курс

1-2 семестр

Часть 1

Составитель - старший преподаватель КИТП И. С. Яппарова

Владимир 2016 г.

Пояснительная записка

Курс лекций по дисциплине «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия» рассчитан на 118 часов.

Цель конспекта лекций – освоение студентами теоретических основ учебной дисциплины.

Задачи :

– раскрытие содержания учебной дисциплины;
– обеспечение студентов необходимым объемом теоретического материала для решения прикладных задач;
– управление познавательной деятельностью студентов.

Конспект лекций построен в виде системы аудиторных занятий, учебный материал чётко дозирован по каждому занятию. Кратко и доступно изложены теоретические основы разделов курса, приведены примеры решения типовых задач, содержатся задачи для самостоятельного решения.

1 семестр

Алгебра и начала математического анализа

ЛЕКЦИЯ 1. Введение.

- Математика в науке, технике, экономике, информационных технологиях и практической деятельности.
- Цели и задачи изучения математики при освоении специальности.

Раздел 1. Развитие понятия о числе.
Тема 1.1.Числа. Приближенные вычисления

<u>ЛЕКЦИЯ 1. Действительные числа. Приближенные вычисления.</u>

План лекции:

- Множество натуральных чисел.
- Множество целых чисел.
- Множество рациональных чисел.
- Перевод бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную и обратно.
- Иррациональные числа.
- Множество действительных чисел.
- Определение приближенного значения числа.
- Приближение с избытком и с недостатком.
- Абсолютная погрешность приближения.
- Относительная погрешность приближения.
- Значащие цифры и верные знаки.
- Округление чисел.
- Действия с приближенными числами.

Множество натуральных чисел: N={1,2,3,4, …} – числа, с помощью которых мы считаем.
Множество целых чисел: Z={0, ±1, ±2, ±3, …}

Множество рациональных чисел: Q={числа вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z,\ n \in N$}. К рациональным числам относятся все числа, которые можно представить в виде обыкновенной дроби: натуральные, например, 2=$\frac{2}{1}=\frac{4}{2}$=…; целые: 0=$\frac{0}{1}$, –4=$\frac{-4}{1}$,…; обыкновенные дроби: $\frac{2}{3}$; $-2\frac{3}{7}$; $\frac{7}{5}$;…; десятичные конечные дроби: 0,5=$\frac{1}{2}$; – 2,7=$\frac{-27}{10}$;… и десятичные бесконечные периодические дроби: 0,33333…=0,(3); 1,225252525…=0,2(25).

ЗАДАЧА. Доказать, что число 0,2(18) является рациональным.

РЕШЕНИЕ. Обратим это число в обыкновенную дробь.

0,2(18)=0,2181818…; 18 – период дроби. Пусть x=0,2181818….

Умножим обе части этого равенства на 10^1=10, т.к. между запятой и первым периодом одна цифра - 2:

10x=2,181818… (1)

Умножим обе части равенства (1) на 10^2=100, т.к. в периоде две цифры - 1 и 8:

1000x=218,181818… (2).

Вычтем левые и правые части равенств (2) – (1):

1000x – 10x = 218,181818… - 2,181818…

990x = 216

x = $\frac{216}{990}=\frac{12}{55}$ $\Rightarrow$ 0,2(18) = $\frac{12}{55}$ - рациональное число.

Десятичные бесконечные непериодические дроби называются иррациональными числами (множество I): например, $\sqrt{2}$=1,4142135…; $\sqrt{3}$ =-1,7320508…; $\pi \approx 3{,}14$ - иррациональные числа.

Множество действительных чисел (R) объединяет множества рациональных и иррациональных чисел: $Q \cup I = R$.

Таким образом $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Пусть A-точное значение величины, a – ее приближенное значение. $A \approx a$.
Число a называется приближенным значением A с ошибкой Δ, если $A - a = \Delta$.
Если $\Delta > 0$, то $A \approx a$ с недостатком.
Если $\Delta < 0$, то $A \approx a$ с избытком.
Например, $A = 3{,}756$ – точное число, $a_1 = 3{,}75, a_2 = 3{,}76$ – его приближения.
$\Delta_1 = 3{,}756 - 3{,}75 = 0{,}006 \Rightarrow 3{,}756 \approx 3{,}75$ с недостатком.
$\Delta_2 = 3{,}756 - 3{,}76 = -0{,}004 \Rightarrow 3{,}756 \approx 3{,}76$ с избытком.
$3{,}75 < 3{,}756 < 3{,}76$.

Абсолютной погрешностью приближенного числа a называется модуль разности между точным числом и его приближением: $\Delta = |A - a|$.
Чем меньше Δ, тем лучше приближение.
Если точное число неизвестно, но известна граница, за которую наверняка не выходит абсолютная погрешность, то есть $\Delta < \delta$ то δ называется границей абсолютной погрешности приближенного числа a.
$|A - a| \le \delta$, то $-\delta \le A - a \le \delta$, значит $a - \delta \le A \le a$ и $A = a \pm \delta$.

ЗАДАЧА. Даны приближения числа $\frac{2}{3}$: a_1=0,66 и a_2=0,67. Какое приближение лучше?
РЕШЕНИЕ. Найдем абсолютные погрешности приближений:

$$\Delta_1 = \left|\frac{2}{3} - 0,66\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{66}{100}\right| = \frac{1}{150}$$

$$\Delta_2 = \left|\frac{2}{3} - 0,67\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{67}{100}\right| = \frac{1}{300}$$

$\frac{1}{150} > \frac{1}{300}$, значит 0,67 лучшее приближение.
Ответ: 0,67.

ЗАДАЧА. Длина отрезка равна $21,5 \pm 0,3(см)$. Найти границы измерения отрезка.
РЕШЕНИЕ. $l = 21,5 \pm 0,3 \Rightarrow 21,5 - 0,3 \le l \le 21,5 + 0,3 \Rightarrow 21,2 \le l \le 21,8$
Ответ: $21,2 \le l \le 21,8$.

Относительной погрешностью ε называется отношение абсолютной погрешности к приближенному значению величины.

$\varepsilon = \frac{\Delta}{a}$ или $\varepsilon = \frac{\Delta}{a} \cdot 100\%$

ЗАДАЧА. Найти относительную погрешность приближения $\frac{2}{3} \approx 0,6$.
РЕШЕНИЕ. $A = \frac{2}{3}; a = 0,6$

$$\Delta = \left|\frac{2}{3} - 0,6\right| = \frac{1}{15}$$

$\varepsilon = \frac{1}{15} : 0,6 = \frac{1 \cdot 6}{15 \cdot 10} = 0,04$ или $\varepsilon = 4\%$
Ответ: 4%.

Значащие цифры приближенного числа-это все его цифры, кроме нулей, стоящих впереди. Например, в числе 3,275 четыре значащих цифры, а в числе 0,0035 две (3 и 5).
Цифра m приближенного числа называется верной, если граница абсолютной погрешности не превышает единицы того разряда, в котором записана цифра m.
Например, в числе 3,73 $\pm$ 0,056 две верные цифры 3 и 7, т. к. $\Delta = 0,056 < 0.1$.
При сложении и вычитании приближенных чисел надо оставить столько десятичных знаков, сколько их дано в числе с наименьшим количеством знаков (округлить). Примеры:
233,78+52,308+3,9313 $\approx$ 233,78+52,31+3,93=290,02
29,37-2,1462 $\approx$ 29,37-2,15=27,22
При умножении и делении в результате надо оставить столько значащих цифр, сколько их имеет то число, у которого их меньше. Пример:

$2,143 \cdot 0,45 = 0,96435 \approx 0,96$.

ЛЕКЦИЯ 2. Комплексные числа.

План:

- Число i - мнимая единица.

- Определение комплексного числа (алгебраическая форма).
- Действительная и мнимая части комплексного числа.
- Комплексно-сопряженные и противоположные числа.
- Действия над комплексными числами в алгебраической форме: сложение, вычитание, умножение и деление.

Комплексные числа имеют вид $a+b\cdot i$, где a и b-действительные числа, а число i, определяемое равенством $i^2=-1$, называется мнимой единицей.
a называется действительной частью комплексного числа, а b – мнимой частью комплексного числа.
$z=a+bi$ – алгебраическая форма комплексного числа.

Например: $z=2+i$; $z=-1+4i$; $z=\frac{1}{2}+\frac{3}{4}i$; $z=\sqrt{2}-\sqrt{3}i$.
Любое действительное число можно представить как комплексное, например: $5=5+0\cdot i$; $0=0+0\cdot i$
$R\subset C$; C – множество комплексных чисел.
С введением комплексных чисел стало возможно извлекать квадратные корни из отрицательных чисел: $\sqrt{-2}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot i$, они являются комплексными числами.
Комплексные числа $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называются равными, если $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$
Комплексные числа $z_1=a+bi$ и $z_2=a-bi$ называются комплексно-сопряжёнными.
Комплексные числа $z_1=a+bi$ и $z_2=-a-bi$ называются противоположными.
Действия с комплексными числами (на примерах)
При сложении и вычитании комплексных чисел надо раскрыть скобки и привести подобные слагаемые:

$$(-2-i)+(-1+3i)=-2-i-1+3i=-3+2i$$
$$(-2-i)-(-1+3i)=-2-i+1-3i=-1-4i$$

При умножении комплексных чисел надо раскрыть скобки, учесть $i^2=-1$.

$$(2-3i)(-4+2i)=-8+12i+4i-6i^2=-8+16i+6=-2+16i.$$

При делении надо домножить числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю, раскрыть скобки, привести подобные слагаемые, каждое слагаемое числителя разделить на знаменатель.
Пример:

$$\frac{-1+2i}{3-2i}=\frac{(-1+2i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{-3+6i-2i+4i^2}{3^2-(2i)^2}=\frac{-3+4i-4}{9+4}=\frac{-7+4i}{15}=\frac{-7}{15}+\frac{4}{15}i$$

Раздел 2. Основы тригонометрии

Тема 2.1.Тригонометрические функции числового аргумента.

ЛЕКЦИЯ 1. Радианная мера угла. Определения тригонометрических функций.

План:
- Радианная мера угла.
- Перевод градусной меры угла в радианную и обратно.
- Единичная окружность.
- Повороты точки $P(1;0)$ на угол α радиан.

- Нахождение координат точек, соответствующих заданному углу.
- Определение синуса числа α.
- Определение косинуса числа α.
- Определение тангенса числа α.
- Определение котангенса числа α.

Центральный угол окружности, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.
Основная формула для перехода градусной меры в радианную и обратно:

$\boldsymbol{\pi = 180^\circ} \Rightarrow 1 рад = \dfrac{180^\circ}{\pi}$ и $1^\circ = \dfrac{\pi}{180^\circ} рад$

Значит $\alpha\ рад = \left(\dfrac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}\right)^\circ$ и $\alpha^\circ = \left(\dfrac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}\right) рад$.

Обычно «рад» опускают.
ПРИМЕРЫ:
Найти градусную меру угла:
1) $\dfrac{\pi}{2}$; 2) $\dfrac{3\pi}{4}$

РЕШЕНИЕ: $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$; $\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{3 \cdot 180^\circ}{4} 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$, т к. $\pi = 180^\circ$

Найти радианную меру угла:
1) 45°; 2) 15°

РЕШЕНИЕ:1) $45^\circ = \dfrac{\pi \cdot 45^\circ}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{4}$; 2) $15^\circ = \dfrac{\pi \cdot 15^\circ}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{12}$

Единичная окружность – это окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1.
Поворот точки P(1;0) единичной окружности на угол α против часовой стрелки означает поворот на угол $\alpha > 0$.
Поворот P(1;0) по часовой стрелке на угол α означает поворот на угол $\alpha < 0$.
Каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки P(1;0) на угол α радиан.
Но одной и той же точке единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi n$, $n \in z$.
Синусом угла α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) на угол α.
Косинусом угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) на угол α.

$\sin\alpha = Y_\alpha$; $\sin\alpha \in [-1;1]$

$\cos\alpha = X_\alpha$; $\cos\alpha \in [-1;1]$

$\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha \neq 0$; $\operatorname{tg}\alpha \in R$

$\operatorname{ctg}\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha \neq 0$; $\operatorname{ctg}\alpha \in R$

ЛЕКЦИЯ 2. Свойства тригонометрических функций.

- Таблица некоторых значений тригонометрических функций.
- Примеры вычислений.
- Границы четвертей.

- Знаки значений тригонометрических функций по четвертям.
- Четная и нечетные тригонометрические функции.
- Периоды тригонометрических функций.

α	0 (0°)	$\frac{\pi}{6}$ (30°)	$\frac{\pi}{4}$ (45°)	$\frac{\pi}{3}$ (60°)	$\frac{\pi}{2}$ (90°)	π (180°)	$\frac{3}{2}\pi$ (270°)	2π (360°)
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	–1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	–1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не существует	0	Не существует

- Примеры упрощения тригонометрических выражений.

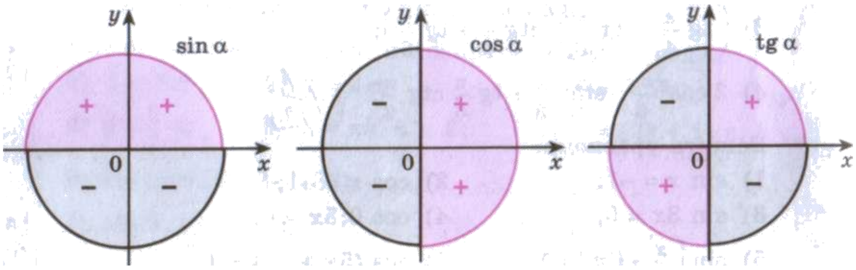


Таблица некоторых значений тригонометрических функций:

Знаки тригонометрических функций по четвертям

ПРИМЕР. Определите знак выражения

$$\frac{\cos 75^\circ \,\mathrm{tg}^2\, 305^\circ \sin 95^\circ}{\mathrm{ctg}\, 293^\circ \cos 269^\circ}$$

Свойства тригонометрических функций

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ - четная функция

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ - нечетная функция

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$ - нечетная функция

$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$ - нечетная функция, $n \in Z$

ПРИМЕР. Вычислите

1) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos(-\pi) + \mathrm{tg}(-2\pi)$

РЕШЕНИЕ:

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos(-\pi)+\mathrm{tg}(-2\pi)=-\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\pi-\mathrm{tg}\,2\pi=-(-1)+(-1)-0=1-1=0$$

$\sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha$, $n\in Z$ - периодическая функция с наименьшим положительным периодом $2\pi=360^\circ$

$\cos(\alpha+2\pi n)=\cos\alpha$, $n\in Z$ - периодическая функция с наименьшим положительным периодом $2\pi=360^\circ$

$\mathrm{tg}(\alpha+\pi n)=\mathrm{tg}\,\alpha$, $n\in Z$ - периодическая функция с наименьшим положительным периодом $\pi=180^\circ$

$\mathrm{ctg}(\alpha+\pi n)=\mathrm{ctg}\,\alpha$, $n\in Z$ - периодическая функция с наименьшим положительным периодом $\pi=180^\circ$

ПРИМЕР. Вычислите

1) $\cos 3660^\circ=\cos(3660^\circ-360^\circ\cdot 10)=\cos 60^\circ=\dfrac{1}{2}$

ЗАДАЧИ.

Упростите тригонометрические выражения:

1) $4\sin\dfrac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{4}$
2) $\left(2\,\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{6}-\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{3}\right):\cos\dfrac{\pi}{6}$
3) $2\,\mathrm{tg}^2\dfrac{\pi}{3}-\mathrm{ctg}^2\dfrac{\pi}{6}-\sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{3}$
4) $2\cos^2\dfrac{\pi}{6}-\sin^2\dfrac{\pi}{3}+\mathrm{tg}\dfrac{\pi}{6}\mathrm{ctg}\dfrac{\pi}{3}$
5) $\cos^3\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)-\mathrm{ctg}^3\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)+\sin^3\left(-\dfrac{\pi}{6}\right)$
6) $\sqrt{3}\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)-2\,\mathrm{ctg}^3\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(-\dfrac{3\pi}{2}\right)$
7) $\cos 7230^\circ$
8) $\mathrm{ctg}\,4{,}5\pi$

ЛЕКЦИЯ 3. Основные тригонометрические тождества

- Основные тригонометрические тождества. Формулы одного и того же аргумента.
- Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов.
- Примеры решения задач и упрощения тригонометрических выражений с помощью этих формул.

ФОРМУЛЫ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ АРГУМЕНТА

$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ – основное тригонометрическое тождество.

$\sin^2\alpha = 1 - \cos^2\alpha$ $\qquad$ $\cos^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha$

$\sin\alpha = \pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $\qquad$ $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

Знак + или – совпадает со знаком синуса или косинуса в той четверти, в которой лежит угол α.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1$$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{ctg}\alpha} \qquad \operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$$

ПРИМЕР. Вычислить $\cos\alpha$; $\sin\alpha$; $\operatorname{tg}\alpha$, если $\sin\alpha = \frac{-5}{13}; \frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$

РЕШЕНИЕ: $\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; $\alpha \in \mathrm{IV}$ четверти, то $\cos\alpha = +\sqrt{1-\left(-\frac{5}{13}\right)^2} = \frac{12}{13}$

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{5}{13} : \frac{12}{13} = -\frac{5}{12}$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = -\frac{12}{5}$$

ПРИМЕР. Упростить $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha$.

РЕШЕНИЕ. $\sin^4\alpha - \cos^4\alpha + \cos^2\alpha = \left(\sin^2\alpha\right)^2 - \left(\cos^2\alpha\right)^2 + \cos^2\alpha =$

$= \left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha + \cos^2\alpha\right) + \cos^2\alpha = \left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)\cdot 1 + \cos^2\alpha = \sin^2\alpha$

ЗАДАЧИ.

Доказать тождество

1) $\left(\sin^2\alpha - \cos^2\alpha\right)^2 + 2\cos^2\alpha\sin^2\alpha = \sin^4\alpha + \cos^4\alpha$
2) $\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} + \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{2}{\sin\alpha}$
3) $\operatorname{tg}^2\alpha - \sin^2\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$
4) $\left(1+\operatorname{tg}^2\alpha\right)\cos^2\alpha - 1 = 0$
5) $\left(1+\cos\alpha\right)\operatorname{ctg}^2\alpha\left(1-\cos\alpha\right) = \cos^2\alpha$

Упростить выражение:

1) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha + 2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$
2) $\cos^2\alpha - \cos^4\alpha + \sin^4\alpha$

3) $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$

4) $\left(\sin^2\alpha+\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha\right)\mathrm{ctg}\,\alpha$

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\mathrm{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha+\mathrm{tg}\,\beta}{1-\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$
$$\mathrm{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\mathrm{tg}\,\alpha-\mathrm{tg}\,\beta}{1+\mathrm{tg}\,\alpha\,\mathrm{tg}\,\beta}$$

ПРИМЕРЫ:

1) $\sin105^\circ=\sin\left(60^\circ+45^\circ\right)=\sin60^\circ\cos45^\circ+\sin45^\circ\cos60^\circ=\dfrac{\sqrt3}{2}\cdot\dfrac{\sqrt2}{2}+\dfrac12\cdot\dfrac{\sqrt2}{2}=$ $\dfrac{\sqrt6+\sqrt2}{4}$

2) Найти $\cos(60^\circ+\alpha)$, если $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt3}$ и $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$

РЕШЕНИЕ: $\cos(60^\circ+\alpha)=\cos60^\circ\cos\alpha-\sin60^\circ\sin\alpha=\dfrac12\cos\alpha-\dfrac{\sqrt3}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt3}$,

$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, угол $\alpha\in1$ четверти, значит $\cos\alpha=\sqrt{1-\dfrac13}=\sqrt{\dfrac23}$,

$\cos(60^\circ+\alpha)=\dfrac12\cdot\dfrac{\sqrt2}{\sqrt3}-\dfrac{\sqrt3}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt3}=\dfrac{\sqrt2-\sqrt3}{2\sqrt3}$.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить:

1) $\cos75^\circ$

2) $\sin210^\circ$

3) $\dfrac{tg29^\circ+tg31^\circ}{1-tg29^\circ tg31^\circ}$

4) $\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha=-\dfrac13$ и $\dfrac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

5) $\sin\left(\alpha+\dfrac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha=-\dfrac35$ и $\pi<\alpha<\dfrac{3\pi}{2}$

6) $\sin73^\circ\cos13^\circ-\sin13^\circ\cos73^\circ$

2.Упростить:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$

2) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

3) $cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

ЛЕКЦИЯ 4. Тригонометрические формулы.

- Формулы приведения.
- Синус, косинус и тангенс двойного угла.
- Формулы половинного аргумента.
- Примеры решения задач с помощью этих формул.

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Эти формулы позволяют преобразовать тригонометрические функции аргумента $\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\pm\alpha\right)$ к тригонометрическим функциям аргумента α.

Например, $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$.

Здесь в левой части равенства записана приводимая функция (π - граница четверти· α считается углом 1 четверти),а в правой части – приведенная функция.

ПРАВИЛО ПРИВЕДЕНИЯ.

Знак приведенной функции совпадает со знаком приводимой функции в той четверти, в которой лежит угол α.

Если угол α откладывается от оси ОХ, то название функции не меняется.

Если угол α откладывается от оси OY, то название функции меняется сходное (синус – на косинус, тангенс – на котангенс и наоборот).

ПРИМЕР. Упростить $tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$

РЕШЕНИЕ .Определим знак приводимой функции: дуга $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ оканчивается в четвертой четверти, где тангенс отрицательный, значит, ставим знак минус.

Определим название приведенной функции: угол α откладывается от оси OY, значит, название меняется на котангенс.

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha$$

ПРИМЕРЫ.

$$\sin 135^\circ=\sin\left(90^\circ+45^\circ\right)=+\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 240^\circ=\cos\left(180^\circ+60^\circ\right)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos\left(180^\circ-60^\circ\right)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=+\cos\alpha$$

ЗАДАЧИ

Вычислить

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

2) $\dfrac{\sin^2(\pi-\alpha)}{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}-\cos(2\pi-\alpha)$

3) $10ctg\frac{3\pi}{4}\cdot\sin\frac{5\pi}{4}\cdot\cos\frac{7\pi}{4}$

4) $ctg240^\circ$

5) $\sin\frac{5\pi}{3}$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$

$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

ПРИМЕР. Найти $\sin 2\alpha$ и $cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi$.

РЕШЕНИЕ. $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 1-2\cdot 0.8^2 = -0.28$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos\alpha$ -?

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$\frac{\pi}{2}<2\alpha<\pi \Rightarrow \frac{\pi}{4}<\alpha<\frac{\pi}{2}$; 1 четверть, $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}8^2} = 0{,}6$

$\sin 2\alpha = 2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6 = 0{,}96$

ПРИМЕР. Упростить $1-8\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

РЕШЕНИЕ. $1-8\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = 1-2\cdot(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1-2\sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha$

ПРИМЕР. Вычислить $\sin 120^\circ$

РЕШЕНИЕ. $\sin 120^\circ = \sin(60^\circ\cdot 2) = 2\sin 60^\circ\cos 60^\circ = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ЗАДАЧИ

1. Дано: $\sin\alpha = 0{,}6; 0<\alpha<\frac{\pi}{2}$. Найти $\sin 2\alpha; \cos 2\alpha; tg2\alpha$.
2. Упростить или вычислить:
   1) $\sin 15^\circ\cdot\cos 15^\circ$
   2) $1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$
   3) $\dfrac{2tg15^\circ}{1-tg^2 15^\circ}$
   4) $1-2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$

5) $\cos 4\alpha + 2\sin^2 2\alpha$

ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА (Формулы понижения степени)

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$

$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$

$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ПРИМЕР. Упростить $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

РЕШЕНИЕ. $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2} = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 1-\sin\alpha$

ЗАДАЧИ

Упростить

1) $\dfrac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}$

2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)-1$

3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha - \cos 2\alpha$

4) $\dfrac{1+\cos 42^\circ}{1-\sin 48^\circ}$

ЛЕКЦИЯ 5. Тригонометрические формулы (продолжение).

- Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.
- Преобразование произведения в сумму.
- Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента – универсальная подстановка.
- Преобразования тригонометрических выражений с помощью различных формул.

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В СУММУ

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ $\sin\alpha, \cos\alpha$ и $tg\frac{\alpha}{2}$

(УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПОДСТАНОВКА)

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1-tg^2\frac{\alpha}{2}}{1+tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

ЗАДАЧИ

1. Упростить или вычислить:

   1) $\dfrac{\cos 76^\circ - \cos 16^\circ}{1-2\sin^2 22^\circ}$

   2) $\left(\dfrac{1}{\sin\alpha} - \dfrac{1}{\sin 3\alpha}\right)\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha+\cos 5\alpha}$

   3) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha}\cdot\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$

   4) $\dfrac{(\sin 3\alpha - \sin\alpha)(\cos 3\alpha + \cos\alpha)}{1+\cos 4\alpha}$

5) $\dfrac{\sin\alpha+\sin 3\alpha}{\cos\alpha+\cos 3\alpha}$

6) $\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{tg\alpha-tg\beta}-\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$

7) $\sin^2\alpha+\cos(60^\circ+\alpha)\cdot\cos(60^\circ-\alpha)$

8) $2\cos(45^\circ+\alpha)\cdot\cos(45-\alpha)$

9) $\sin 75^\circ+\sin 15^\circ$

10) $\cos\dfrac{5\pi}{12}-\cos\dfrac{\pi}{12}$

11) $\sin 15^\circ\cdot\cos 75^\circ$

12) $\sin 45^\circ\cdot\sin 15^\circ$

13) Найти $\sin\alpha+2\cos\alpha$, если $tg\dfrac{\alpha}{2}=-2$.

14) Найти $\sin 2\alpha-\cos 2\alpha$, если $tg\alpha=3$.

15) Найти $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, если $ctg\dfrac{\alpha}{2}=2$.

Тема 2.2.Функции, их свойства и графики.

ЛЕКЦИЯ 1. Свойства и графики тригонометрических функций.

- Числовая функция. Область определения и множество значений; график функции.
- Числовая функция $y=\sin x$, ее свойства и график.
- Числовая функция $y=\cos x$, ее свойства и график.
- Числовая функция $y=tgx$, ее свойства и график.
- Числовая функция $y=ctgx$, ее свойства и график.

Числовые функции, заданные формулами $y=\sin x, y=\cos x, y=tgx, y=ctgx$ называются соответственно синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом.

Область определения (все значения независимой переменной):

$D($sin)=D(cos)=R

$D(tg)=(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\dfrac{\pi}{2}+\pi n)$; $D(ctg)=(\pi n;\pi+\pi n)$, $n\in Z$

Множество значений (все значения зависимой переменной):

$E(\sin)=E(\cos)=[-1;1]$

$E(tg)=E(ctg)=R$.

Четность: $\cos(-x)=\cos x$ (четная)

$\sin(-x)=-\sin x$ (нечетная)

$\mathrm{tg}(-x)=-\mathrm{tg}\,x$ (нечетная)

$\mathrm{ctg}(-x)=-\mathrm{ctg}\,x$ (нечетная)

Периодичность:

$\sin(x+2\pi n)=\sin x$

$\cos(x+2\pi n)=\cos x$

$\operatorname{tg}(x+\pi n)=\operatorname{tg} x$

$\operatorname{ctg}(x+\pi n)=\operatorname{ctg} x,\ n\in Z$

Построим графики тригонометрических функций.

ЛЕКЦИЯ 2. Преобразования графиков.

- Параллельный перенос вдоль оси oy.
- Параллельный перенос вдоль оси ox.
- Растяжение вдоль оси oy.
- Сжатие вдоль оси oy.
- Сжатие вдоль оси ox.
- Растяжение вдоль оси ox.
- Симметрия относительно осей координат.
- Симметрия относительно начала координат.
- Построение графиков функций с модулем.

1. График функции $y=f(x)+b$ получается параллельным переносом графика $y=f(x)$ вдоль оси OY на $|b|$ единиц:
если $b>0$, то вверх; если $b<0$, то вниз.

ПРИМЕР. Построить график функции $y=x^2-2$ двумя способами – параллельным переносом графика $y=x^2$ на 2 единицы вниз и параллельным переносом системы координат в противоположную сторону.

2. График функции $y=f(x+a)$ получается параллельным переносом графика $y=f(x)$ вдоль оси OX на $|a|$ единиц:
если $a>0$, то влево; если $a<0$, то вправо.
ПРИМЕР. Построить график функции $y=(x-2)^2$ двумя способами – параллельным переносом графика $y=x^2$ на 2 единицы вправо и параллельным переносом системы координат в противоположную сторону.

3. График функции $y=kf(x),$ получается из графика $y=f(x)$:
при *k*.>1 растяжением вдоль оси OY в *k* раз,
при 0<*k*<1 сжатием вдоль оси OY в $\frac{1}{k}$ раз.

ПРИМЕР. Построить график функции $y=2\sin x$ растяжением графика функции $y=\sin x$ вдоль оси OY в 2 раза и
график функции $y=\frac{1}{2}\sin x$ сжатием графика функции $y=\sin x$ вдоль оси OY в 2 раза.

4. График функции $y=f(kx),$ получается из графика $y=f(x)$:
при *k*.>1 сжатием вдоль оси OX в *k* раз,
при 0<*k*<1 растяжением вдоль оси OY в $\frac{1}{k}$ раз.

ПРИМЕР. Построить график функции $y = \sin 2x$ сжатием графика функции $y = \sin x$ вдоль оси OY в 2 раза и

график функции $y = \frac{1}{2}\sin x$ растяжением графика функции $y = \sin x$ вдоль оси OY в 2 раза.

5. График функции $y = -f(x),$ симметричен графику $y = f(x)$ относительно оси OX.

ПРИМЕР. Построить график функции $y = -x^2$

6. График функции $y = f(-x),$ симметричен графику $y = f(x)$ относительно оси OY.

ПРИМЕР. Построить график функции $y = \sqrt{-x}$

7. График функции $y = |f(x)|$ строят так: построить график функции $y = f(x),$ оставить часть графика над осью OX, а часть графика ниже оси OX заменить ее симметрией в верхнюю полуплоскость.

ПРИМЕР. Построить график функции $y = |x^2 - 2|$.

8. График функции $y = f(|x|)$ строят так: построить график функции $y = f(x),$ оставить часть графика для $x \geq 0$ (справа от оси OY), а часть графика слева от оси OY заменить симметрией правой части в левую полуплоскость.

ПРИМЕР. Построить график функции $y = \sqrt{|x|}$

ЛЕКЦИЯ 3. Основные свойства функций.

- Числовая функция. Область определения и множество значений; график функции (повторение).
- Способы задания функций.
- Нахождение области определения и множества значений функции, примеры.
- Четные и нечетные функции.
- Периодические функции. Наименьший положительный период функции.
- Возрастание и убывание функции. Промежутки возрастания и убывания.
- Точки экстремума функции.
- Экстремумы функции.
- Наибольшее и наименьшее значения функции.
- Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях.
- Сложная функция.
- Обратные функции. Область определения и область значений обратной функции.
- График обратной функции.
- Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.

Понятие функции является центральным понятием математики и не только математического анализа. Вспомним школьное определение функции.

Если каждому элементу x множества D ставится в соответствие единственный элемент y множества E, то говорят, что на множестве D задана функция $y = f\left(x\right)$.

x – аргумент – независимая переменная; y – зависимая; она находится по закону: f.
Множество D называется областью определения функции, множество E называется множеством значений функции.
Множество значений аргумента – Ваши личности, множество значений функции – Ваши фамилии. Вот так мы продемонстрировали понятие функции: каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции, человек не может иметь две фамилии.
Но математика рассматривает числовые функции, т.е. множества D и E – числовые множества.
При этом можно дать и такое определение числовой функции: числовая функция – это множество пар (x,y), среди которых нет пар с одинаковым первым элементом. Вдумайтесь.
Как определяется, задается функция? Прежде всего формулой, по которой по заданному x находится y. Например: $f(x) = x^2 + x + 3$. Подставим $x = 2$ получим $y = 9$
Функция может задаваться не одним аналитическим выражением, а несколькими, например:

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 0; \\ x, \text{ если } x \geq 0 \end{cases}$$

Очень часто зависимость одной переменной величины от другой невозможно выразить аналитически, но такая зависимость существует о определяется она в виде таблицы.

x	-3	-1	0	3	5	6	8	11	13
y	45	22	12	2	-4	3	13	25	34

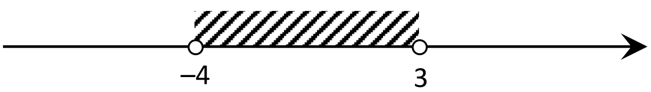
В таком случае говорят о таблично заданной функции.
И, наконец, когда не удается найти аналитического выражения для $y = f\left(x\right)$, найти множество пар (x;y), то функцию можно задать графически, т.е. ее графиком. Вспомните свою кардиограмму, перо самописцев в самых различных приборах.

Рассмотрим практические задачи на отыскание области определения некоторых функций. Заметим, что многочлен определен на всем множестве действительных чисел: D: $x \in R$. Так для функции $y = x^2 + 6x - 7$ D: $x \in R$.
Дробно – рациональная функция определена для всех x, при которых ее знаменатель отличен от нуля. Например:

$y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1}$ областью определения будет все множество действительных чисел, отличных от -1 и 1. На языке интервалов D: $x \in \left(-\infty;-1\right) \cup \left(-1;1\right) \cup \left(1;\infty\right)$.

Рассмотрим другие примеры. Найти область определения функций 1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{12 - x - x^2}}$

Очевидно, что функция существует только для тех значений x, которые удовлетворяют неравенству: $12 - x - x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 12 < 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+4) < 0$



Ответ: $x \in$(-4; 3). Воспользовались методом интервалов.

2) $y = \dfrac{\sqrt{x+5}}{x-1}$ Очевидно, что функция существует только для тех значений x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}$$ Откуда $x \geq -5$ и $x \neq 1$ Объединяя эти неравенства, имеем ответ: $x \in [-5; 1) \cup (1; \infty)$.

Рассмотрим понятия, выражающие *основные (общие) свойства* функций.

Монотонность. Если для x_1, x_2 , принадлежащих интервалу (a;b) и удовлетворяющих условию $x_1 < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$, то, говорят, что на (a;b) эта функция возрастает. Или, как говорили в школе, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то функция возрастает. Самостоятельно сформулируйте определение убывающей функции. Если функция только возрастает или только убывает в области определения, то о такой функции говорят, что она *монотонна.* Так линейная функция, степенная с нечетным показателем являются монотонными, а $y = x^2$ монотонной не является, т.к. при $x < 0$ она убывает, а при $x > 0$ она возрастает.

Ограниченность. Пусть на D задана функция $y = f(x)$. Если существуют такие числа m и M, что для всех $x \in D$, что $m \leq f(x) \leq M$, то говорят, что функция ограничена в области определения. Различают и такие понятия, как ограниченность снизу и ограниченность сверху. Так, $y = x^3$ – неограниченная функция, $y = x^2$ – ограничена снизу, т.к. она неотрицательна в области определения. y = Sinx и y = Cosx – ограниченные функции, т.к. они принимают значения только из отрезка [-1; 1] – это их множество значений.
Наибольшее и наименьшее значения функции – это самое большое и самое маленькое из всех значений функции. Так для синуса и косинуса $y_{наиб} = 1, y_{наим} = -1$

Четность и нечётность. Функция называется четной, если ее область определения симметрична относительно x = 0 и $f(-x) = f(x)$;

Функция называется нечетной, если ее область определения симметрична относительно x = 0 и $f(-x) = -f(x)$.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат, а нечётной – относительно начала координат.

Яркие «представители» четных функций: $y = x^2$, y = Cosx, $y = \frac{1}{x^2}$, нечетных $y = x^3$, y = Sinx, $y = \frac{1}{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$. Для многих функций нет смысла говорить об их четности – нечетности. Так функция $y = \sqrt{x}$ не относится ни к четным, ни к нечетным, потому как ее область определения несимметрична относительно нуля. Такие функции называют функциями общего вида.
Какова методика определения четности – нечетности функции? Рассмотрим примеры.
$f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}$; Подставим в функцию вместо x -x, будем иметь:
$f(-x) = \frac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \frac{-x^3}{x^2+1} = -\frac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$ Получили определение нечетной функции, вывод: функция нечетная.
$f(x) = \frac{Cosx}{x^4+1}$; Подставим в функцию вместо x -x, будем иметь:
$f(-x) = \frac{Cos(-x)}{(-x)^4+1} = \frac{Cosx}{x^4+1} = \frac{Cosx}{x^4+1} = f(x)$ Получили определение четной функции, вывод: функция четная.

Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число T, что для всех x из области определения выполняется равенство: $f(x+T) = f(x),\ где\ T \neq 0$
Очевидно, что если существует такое число T, называемое периодом, то число nT, где n – целое число, также является периодом этой функции. Важнейшие представители периодических функций – тригонометрические функции.

Промежутки знакопостоянства функции – значения аргумента, при которых функция сохраняет постоянный знак: $f(x) \rangle 0$ или $f(x) \langle 0$.

Нули функции - значения аргумента, при которых $f(x)=0$. Это абсциссы точек пересечения графика с осью OX.

Точки, в которых возрастание функции меняется на убывание называются *точками максимума* - $x_{\max}$

Точки, в которых убывание функции меняется на возрастание называются *точками минимума* - $x_{\min}$

Значение функции в точке максимума называется *максимумом функции,* значение функции в точке минимума называется *минимумом функции:* $f_{\max} = f(x_{\max})$, $f_{\min} = f(x_{\min})$

$x_{\max}$, $x_{\min}$ - называются *точки экстремума функции,*

$f_{\max} = f(x_{\max})$, $f_{\min} = f(x_{\min})$- называются *экстремумы функции.*

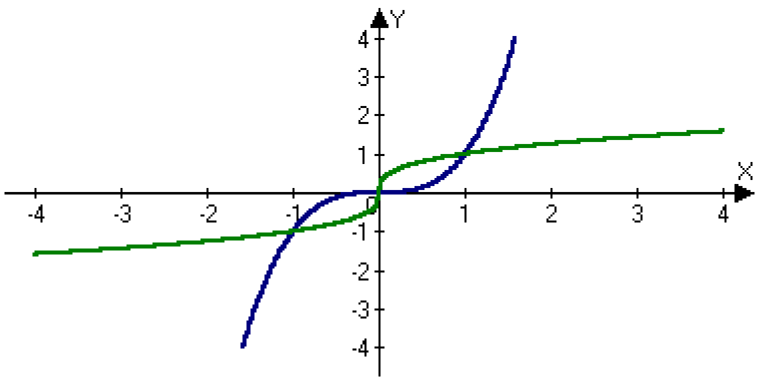
Функция называется *сложной*, если ее аргумент тоже функция, например, $y=\sqrt{3x+1}$.

$y=\sqrt{t}$ - внешняя функция, $y=3x+1$ - внутренняя.

Понятие об обратной функции.

Пусть дана функция y = x$^{3.}$ Вспомним, что она монотонная: каждому значению аргумента соответствует единственное значение аргумента и наоборот: *каждому значению функции соответствует единственное значение аргумента* (только для монотонных функций!). Будем далее считать независимой переменной y, а x – его функцией, выразим x через y.

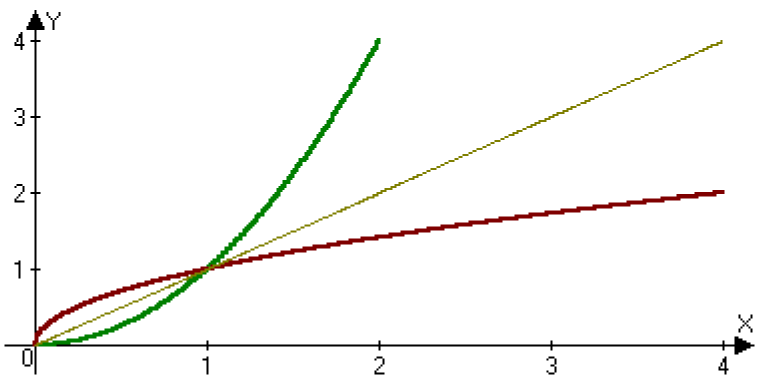
$x=\sqrt[3]{y}$ и заменим, как то принято обозначать аргумент и функцию, x на y и y на x, получим $y=\sqrt[3]{x}$. Вот эти две функции $y = x^3$, $y=\sqrt[3]{x}$ и называются *взаимно обратными*.



Построим графики этих функций и убедимся, что они симметричны относительно биссектрисы 1-3 координатных углов. Запомните это свойство графиков всех взаимно обратных функций. В дальнейшем Вы будете строить обратные функции по мере их изучения.

Но как быть, если функция, для которой надо построить обратную не является монотонной?

Например, необходимо построить обратную для $y = x^2$, которая немонотонна. Для этого необходимо так задать область определения исходной функции, на которой она стала бы монотонной. Если для функции $y = x^2$ положить $x \in [0; \infty)$, то на этом луче она монотонно возрастает, а значит имеет обратную. Очевидно, это $y=\sqrt{x}$ Построим их графики и убедимся, что они симметричны относительно биссектрисы 1-3 координатных углов.



ЗАДАЧИ

1)Постройте обратную функцию для монотонной линейной функции y = 3x, постройте их графики.

2)Определив функцию $y=\dfrac{1}{x^2}$ на

$x \in [0; \infty)$, постройте для нее обратную функцию.

Тема 2.3.Тригонометрические уравнения и неравенства

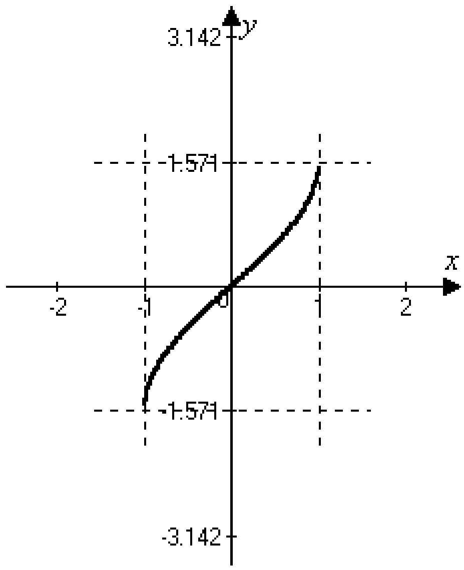
ЛЕКЦИЯ 1. Обратные тригонометрические функции.

- Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики:
- Определение и свойства арксинуса числа.
- Определение и свойства арккосинуса числа.
- Определение и свойства арктангенса числа.
- Определение и свойства арккотангенса числа.

1) $y = \arcsin x$

Функция $y = \sin x$, где $x \in (-\infty; +\infty)$ не является монотонной на этом промежутке. Поэтому, чтобы говорить об обратной функции, надо выделить участок монотонности. Для функции $y = \arcsin x$ является отрезок $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Итак: $y = \sin x$ $\quad x = \arcsin y$ $\quad y = \arcsin x$



Свойства функции $y = \arcsin x$

1) Область определения $x \in [-1;1]$

2) Множество значений $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

3) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

4) Функция монотонно возрастает $[-1;1]$

Например:

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 30^\circ = \arcsin\frac{1}{2}$

$\sin 90^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad 90^\circ = \arcsin 1$ $\qquad \arcsin 0,72 = 46^\circ 03'$

$\arcsin\frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$ $\qquad \arcsin 0,236 = 13^\circ 39'$

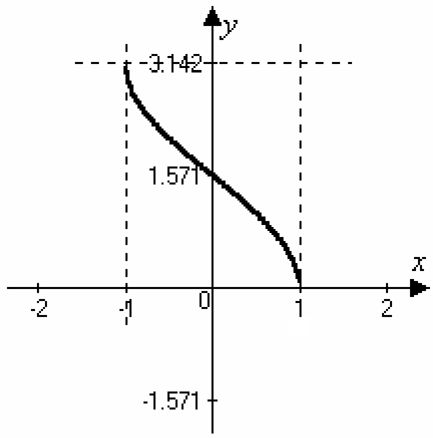
$\arcsin 0 = 0$

2) $y = \arccos x$

$y = \cos x$

$x = \arccos y$ Промежуток монотонности $0 \le x \le \pi$

$y = \arccos x$



Свойства функции $y = \arccos x$

1) Область определения $x \in [-1;1]$

2) Множество значений $y \in [0; \pi]$

3) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

4) Функция монотонно убывает $[-1;1]$

Например:

$\arccos\frac{1}{2} = 60^\circ$ или $\frac{\pi}{3}$

$\arccos(-1) = 180^\circ$ или π

$\arccos 0 = 90^\circ$ или $\frac{\pi}{2}$

$\arccos 0,708 = 44^\circ 55'$

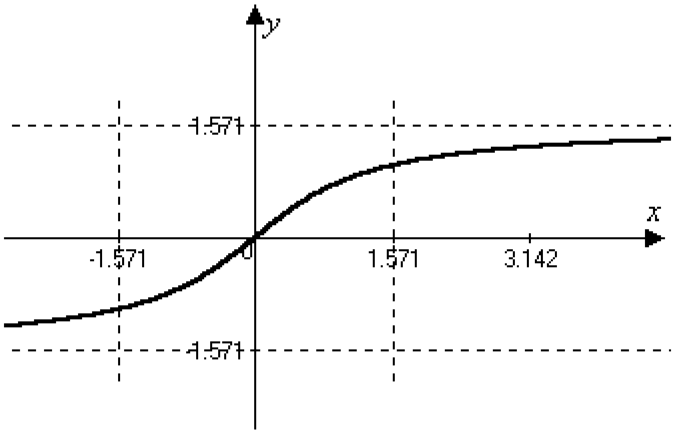
$\arccos 0,112 = 83^\circ 34'$

3) $\underline{y = arctgx}$

Промежуток монотонности $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

$y = tgx$

$x = arctgy$ $\quad \underline{y = arctgx}$



Свойства функции $\underline{y = arctgx}$

1) Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Множество значений $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

3) $arctg(-x) = -arctgx$

4) Функция монотонно возрастает $(-\infty; +\infty)$

Например:

$arctg1 = 45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$ $\quad arctg2 = 63^\circ 26'$

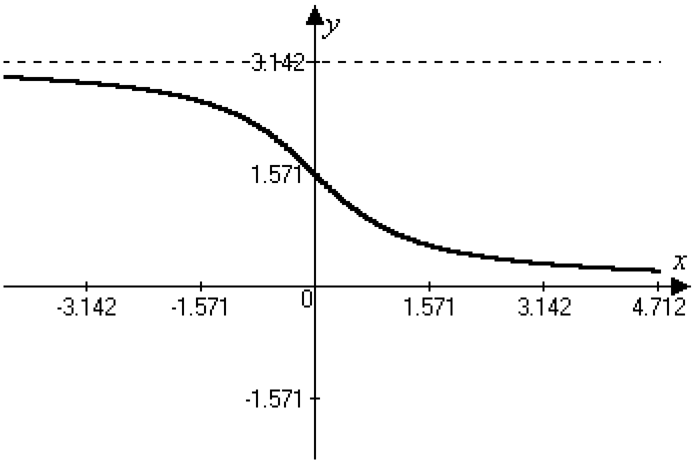
$arctg\sqrt{3} = 60^\circ$ или $\frac{\pi}{3}$ $\quad arctg14,7 = 86^\circ 11'$

4) $y = arcctgx$

Промежуток монотонности $0 < x < \pi$

$y = ctgx$

$x = arcctgy$ $\quad \underline{y = arcctgx}$



Свойства функции $\underline{y = arcctgx}$

1) Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Множество значений $y \in (0; \pi)$

3) $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$

4) Функция монотонно убывает $(-\infty; +\infty)$

Например:

$arcctg1 = 45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$ $\quad arcctg4,7 = 12^\circ$

$arcctg\sqrt{3} = 30^\circ$ или $\frac{\pi}{6}$ $\quad arcctg10,8 = 5^\circ 17'$

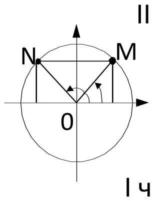
ЛЕКЦИЯ 2. Простейшие тригонометрические уравнения.

- Решение простейшего тригонометрического уравнения $\cos x = a$. Условия существования корней уравнения. Формулы корней.
- Решение простейшего тригонометрического уравнения $\sin x = a$. Условия существования корней уравнения. Формулы корней.
- Решение простейшего тригонометрического уравнения $tgx = a$. Условия существования корней уравнения. Формулы корней.
- Решение простейшего тригонометрического уравнения $ctgx = a$. Условия существования корней уравнения. Формулы корней.
- Частные случаи.
- Примеры решения уравнений.

Уравнения вида $\sin x = a;\ \cos x = a;\ tgx = a;\ ctgx = a$ называются простейшими тригонометрическими уравнениями.

1) $\sin x = a \qquad |a| \le 1$

II ч. $180^\circ - x = \arcsin a + 360^\circ \cdot n$



отсюда

$x = 180^\circ - \arcsin a + 360^\circ \cdot n$

I ч. $x = \arcsin a + 360^\circ \cdot n$

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z}$$

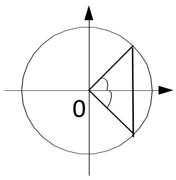
Например:

$\sin x = 0,437$

$x = (-1)^n \arcsin 0,437 + \pi n; n \in Z$

$x = (-1)^n\, 25^\circ 54' + 180^\circ \cdot n; n \in Z$

2) $\cos x = a \qquad |a| \le 1$



$x = \arccos a + 2\pi n$

$-x = \arccos a + 2\pi n \quad \Rightarrow$

$$\boxed{x = \pm \arccos a + 2\pi n; n \in Z}$$

Например:

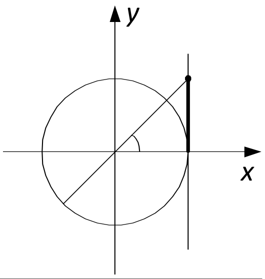
$\cos 4x = -0,712$

$4x = \pm \arccos(-0,72) + 2\pi \cdot n, n \in Z$

$4x = \pm 135^\circ 24' + 360^\circ \cdot n, n \in Z$

$x = \pm 33^\circ 51' + 90^\circ \cdot n, n \in Z$

3) $tgx = a$; $\quad a$ – любое значение



$$\boxed{x = arctga + \pi n, n \in Z}$$

Например:

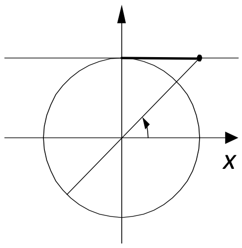
$tg\dfrac{x}{2} = 4$

$\dfrac{x}{2} = arctg 4 + \pi n, n \in Z$

$\dfrac{x}{2} = 75^\circ 57' + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$x = 151^\circ 54' + 360^\circ \cdot n, n \in Z$

4) $ctgx = a$; $\quad a$ – любое



$$\boxed{x = arctga + \pi n, n \in Z}$$

Например:

$ctg 3x = 4,72$

$3x = arcctg 4,72 + \pi n, n \in Z$

$3x = 11^\circ 57' + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$x = 3^\circ 59' + 60^\circ \cdot n, n \in Z$

Решить уравнения:

1) $\sin 2x = -0,72$ $\qquad$ 2) $ctg\left(\dfrac{x}{2} + 20^\circ\right) = 0,34$ $\qquad$ 3) $\cos\dfrac{x}{4} = -0,318$

4) $tg\left(\dfrac{\pi}{6} - 5x\right) = 1$ $\qquad$ 5) $\cos(2x - 3,4) = 0,112$

Решения уравнений:

2) $\dfrac{x}{2} + 20^\circ = arcctg 0,34 + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$\dfrac{x}{2} + 20^\circ = 71^\circ 13' + 180^\circ \cdot n, \quad n \in Z$

$\dfrac{x}{2} = 51^\circ 13' + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

1) $2x = (-1)^n \arcsin(-0,72) + \pi n, n \in Z$

$2x = (-1)^n \arcsin\left(-46^\circ 03'\right) + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$2x = (-1)^{n+1} \cdot 46^\circ 03' + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$x = (-1)^{n+1} \cdot 23^\circ 02' + 90^\circ \cdot n\ n \in Z$

3) $\frac{x}{4} = \pm\arccos(-0,318) + 2\pi n,\ n \in Z$

$\frac{x}{4} = \pm 108^\circ 32' + 360^\circ \cdot n,\ n \in Z$

$x = \pm 434^\circ 8' + 1440^\circ \cdot n,\ n \in Z$

4) $\frac{\pi}{6} - 5x = arctg1 + \pi n,\ n \in Z$

$\frac{\pi}{6} - 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$

$-5x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

$-5x = \frac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z$

$x = -\frac{\pi}{60} - \frac{\pi}{5} n,\ n \in Z$

5) Решаем в радианной мере измерения

$2x - 3,4 = \pm\arccos 0,112 + \pi n,\ \ n \in Z$

$2x - 3,4 = \pm 1,459 + \pi n,\ \ n \in Z$

$2x = \pm 1,459 + 3,4 + \pi n,\ \ n \in Z$

распишем два случая:

$2x_1 = 1,459 + 3,4 + \pi n,\ \ n \in Z$

$2x_1 = 4,859 + \pi n,\ \ n \in Z$

$x_1 = 2,4295 + \frac{\pi}{2} \cdot n,\ n \in Z$

$x_1 = 2,43 + \frac{\pi}{2} \cdot n,\ \ n \in Z$

или

$2x_2 = -1,459 + 3,4 + \pi n,\ \ n \in Z$

$2x_2 = 1,941 + \pi n,\ \ n \in Z$

$\boxed{x_2 = 0,97 + \frac{\pi}{2} \cdot n,\ \ n \in Z}$

Ответ: $x_1 = 2,43 + \frac{\pi}{2} \cdot n,\ \ n \in Z$ $\qquad x_2 = 0,97 + \frac{\pi}{2} \cdot n,\ \ n \in Z$.

Частные случаи простейших тригонометрических уравнений

Вспоминаем свойства функций, табличные значения функций и отмечаем углы, в которых функции равны нулю, -1, 1.

$\boxed{\begin{array}{l} \sin x = 0 \\ x = \pi n, n \in Z \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} \sin x = 1 \\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} \sin x = -1 \\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} \cos x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} \cos x = -1 \\ x = \pi + 2\pi n, n \in Z \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} \cos x = 1 \\ x = 2\pi n, n \in Z \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} tg\, x = 0 \\ x = \pi n, n \in Z \end{array}}$

$\boxed{\begin{array}{l} ctg\, x = 0 \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z \end{array}}$

Решение уравнений:

1) $\sin 2x = 0$

2) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

3) $\sin\left(4x + 20^\circ\right) = -1$

4) $\cos\frac{x}{2} = -1$

5) $\cos 5x = 0$

6) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

7) $tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

8) $ctg\,\frac{2}{3}x = 1$

9) $tg\,4x = 1$

10) $\sin 4x \cdot \cos 3x + \cos 4x \cdot \sin 3x = 0$

11) $\cos^2 4x - \sin^2 4x = 0$

12) $2\sin 6x \cdot \cos 6x = 1$

13) $\sin 4x \cdot tg\,\frac{x}{2} = 0$

14) $ctg\,\frac{x}{2} \cdot \left(1 + \cos x\right) = 0$

15) $\cos 7x \cdot \cos 3x + \sin 7x \cdot \sin 3x = 0$

16) $\sin\left(2x - 3\right) = -1$

Решения: В уравнениях 1–9 применяются формулы решения соответствующих уравнений.

1) $\sin 2x = 0$

$2x = \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z}$

2) $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$3x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$

$3x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n$

$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n, n \in Z}$

3) $4x + 20^\circ = -90^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in Z$

$4x = -110^\circ + 360^\circ$

$\boxed{x = -27^\circ 30' + 90^\circ \cdot n, n \in Z}$

4) $\frac{x}{2} = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$\boxed{x = 2\pi + 4\pi n, n \in Z}$

5) $5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n, n \in Z}$

6) $2x - \frac{\pi}{3} = 2\pi n, n \in Z$

$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z}$

7) $x - \frac{\pi}{6} = \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z}$

8) $\frac{2}{3}x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{3}{8}\pi + \frac{3}{2}\pi n, n \in Z}$

9) $4x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}n, n \in Z}$

При решении остальных уравнений следует использовать и формулы суммы двух углов, и формулы двойных углов.

10) $\sin 7x = 0$

$7x = \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{7} n, n \in Z}$

11) $\cos 8x = 0$

$8x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{8} n, n \in Z}$

12) $\sin 12x = 1$

$12x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{6} n, n \in Z}$

13) $\sin 4x = 0;$

$4x = \pi n, n \in Z;$

$\boxed{x = \frac{\pi}{4} n, n \in Z}$

$tg \frac{x}{2} = 0$

$\frac{x}{2} = \pi n$

$\boxed{x = 2\pi n, n \in Z}$

14) $ctg \frac{x}{2} = 0;$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \pi + 2\pi n, n \in Z}$

$1 + \cos x = 0$

$\cos x = -1$

$\boxed{x = \pi + 2\pi n, n \in Z}$

15) $\cos 4x = 0$

$4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n, n \in Z}$

16) $2x - 3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$2x = \left(3 - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$

$x = \frac{6-\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = 0,71 + \pi n, n \in Z}$

ЛЕКЦИЯ 3. Решение тригонометрических уравнений и неравенств

- Уравнения, приводимые к квадратным.
- Уравнения, решаемые разложением на множители
- Однородные тригонометрические уравнения.
- Уравнения, приводимые к однородным.
- Введение вспомогательного аргумента.
- Решение простейших тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности.

Решение тригонометрических уравнений:

1) $2\sin^2 x + 5\cos x = 4$

уравнение содержит функции одинакового угла, можно привести к квадратному уравнению, если заменить $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$2\left(1 - \cos^2 x\right) + 5\cos x = 4$

$2 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 4 = 0$

$-2\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0$

$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

Пусть $\cos x = t$, тогда

$2t^2 - 5t + 2 = 0 \qquad D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$

$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4}; \quad t_1 = 2 \quad t_2 = \frac{1}{2}$ и тогда имеем два простейших уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = 2$

решаем их, применяя формулу решения уравнения $\underline{\sin x = a}$

$\sin x \neq 2$ уравнение не имеет решения, т.к. $\lvert\sin x\rvert \le 1$	$\sin x = \frac{1}{2}$ $x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$ $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

И тогда, ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

2) $2\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) - 2 = 0$

функции имеют разные углы, приведем к одному углу, используя формулы приведения:

$2\sin^2 x - 5\cos x - 2 = 0$, т.к. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\cos x$

учитывая, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, имеем:

$2(1 - \cos^2 x) - 5\cos x - 2 = 0$

$2 - 2\cos^2 x - 5\cos x - 2 = 0$

$2\cos^2 x + 5\cos x = 0$

$\cos x(2\cos x + 5) = 0$

произведение равно 0, если хотя бы один из сомножителей равен 0, имеем

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

и

$2\cos x + 5 = 0$

$\cos x \neq -\frac{5}{2}$ – уравнение не имеет решения, т.к. $\lvert\cos x\rvert \le 1$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

3) $tg^3 x = tgx$

$tg^3 x - tgx = 0$

$tgx(tg^2 x - 1) = 0 \Rightarrow$

$tgx = 0$

$x = \pi n, n \in Z$

и $tg^2 x - 1 = 0; tg^2 x = 1$ и тогда $tgx = \pm 1$ $\quad x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}, k \in Z$

Ответ: $x = \pi n, n \in Z;\quad x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}, k \in Z$.

4) $\sin 7x + \sin 2x = 0$

левую часть уравнения можно преобразовать в произведение, используя формулу $\sin\alpha + \sin\beta =$
$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$2\sin\frac{7x+2x}{2} \cdot \cos\frac{7x-2x}{2} = 0$

$2\sin\frac{9}{2}x \cdot \cos\frac{5}{2}x = 0$ и тогда

$\sin\frac{9}{2}x = 0$

$\frac{9}{2}x = \pi n, n \in Z$

$x = \frac{2}{9}\pi n, n \in Z$

или

$\cos\frac{5}{2}x = 0$

$\frac{5}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi k, k \in Z$

Ответ: $\underline{x=\frac{2}{9}\pi n, n\in Z}$ $\quad\underline{x=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi k, k\in Z}$.

5) $4\cos^3 x+4\cos^2 x-3\cos x-3=0$

левую часть можно преобразовать в произведение, используя способ группировки:

$$\left(4\cos^3 x+4\cos^2 x\right)-\left(3\cos x+3\right)=0$$

$$4\cos^2 x\left(\cos x+1\right)-3\left(\cos x+1\right)=0$$

$$\left(\cos x+1\right)\left(4\cos^2 x-3\right)=0$$

и тогда

$\cos x+1=0$

$\cos x=-1$

$\underline{x=\pi+2\pi n, n\in Z}$

или

$4\cos^2 x-3=0$

$\cos^2 x=\frac{3}{4}$

$\cos x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\underline{x=\pi k\pm\frac{\pi}{3}, k\in Z}$

Ответ: $x=\pi k\pm\frac{\pi}{3}, k\in Z$ $\quad x=\pi+2\pi n, n\in Z$.

6) Рассмотрим уравнение $\sin^2 x-10\sin x\cdot\cos x+21\cos^2 x=0$

Замечаем, что левая часть уравнения есть однородный многочлен относительно функций $\sin x$ и $\cos x$, а правая часть равна нулю.

Такие уравнения называются однородными тригонометрическими уравнениями. Для их решения надо каждый член уравнения разделить на $\cos x$ или $\sin x$ в той степени, какова степень уравнения:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{10\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x}+\frac{21\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$$

$tg^2 x-10tgx+21=0,$

решаем квадратное уравнение относительно функции tgx.

Пусть $tgx=t$, тогда

$t^2-10t+21=0$

$D=100-84=16$

$t_{1,2}=\frac{10\pm4}{2};\quad t_1=7;\quad t_2=3$

тогда $tgx=7$

$x=arctg7+\pi n, n\in Z$

$\underline{x=81^\circ52'+180^\circ n, n\in Z}$

$tgx=3$

$x=arctg3+\pi n, n\in Z$

$x=71^\circ33'+180^\circ n, n\in Z$

Ответ: $\underline{x=81^\circ52'+180^\circ n, n\in Z}$ $\quad x=71^\circ33'+180^\circ n, n\in Z$.

7) $3\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+5\cos^2 x=2$

Данное уравнение приводится к однородному тригонометрическому уравнению; для этого представим $2=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$.

Имеем:

$$3\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+5\cos^2 x=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$$

$$3\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+5\cos^2 x-2\sin^2 x-2\cos^2 x=0$$

$$\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+3\cos^2 x=0$$

разделим на $\cos^2 x$

$tg^2x-4tgx+3=0$

$tgx=t;\quad t^2-4t+3=0$

$D=16-12=4$

$t_{1,2}=\frac{4\pm2}{2};\quad t_1=3;t_2=1$

$tgx=3$

$x=arctg3+\pi n, n\in Z$

$\underline{x=71^\circ33'+180^\circ n, n\in Z}$

$tgx=1$

$\underline{x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z}$

Ответ: $x=71^\circ33'+180^\circ n, n\in Z$ $\quad x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

Итак, мы рассмотрели уравнения, приводимые к одному аргументу, квадратному уравнению; левая часть которых разлагается на множители, а правая равна нулю – однородные тригонометрические уравнения.

А сейчас рассмотрим уравнение линейное относительно $\sin x$ и $\cos x$, которое имеет вид $a\sin x+b\cos x=c$. Надо помнить, что уравнение имеет решение, если $c^2\le a^2+b^2$. Это уравнение можно решать: 1) выразив $\sin x$ и $\cos x$ через $tg\frac{x}{2}$, приводим уравнение к квадратному относительно $tg\frac{x}{2}$; 2) введением вспомогательного угла.

Рассмотрим на конкретном примере:

1) $8\sin x+3\cos x=5$

проверим условие $c^2\le a^2+b^2$; действительно 25 < 64 + 9 $\Rightarrow$ уравнение имеет решение.

<u>Первый способ</u>.

$$8\cdot\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+3\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=5 \qquad 16tg\frac{x}{2}+3-3tg^2\frac{x}{2}=5+5tg^2\frac{x}{2}$$

$$8tg^2\frac{x}{2}-16tg\frac{x}{2}+2=0 \qquad 4tg^2\frac{x}{2}-8tg\frac{x}{2}+1=0$$

$$tg\frac{x}{2}=t\,4t^2-8t+1=0$$

$$D=64-16=48$$

$$t_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{48}}{8}=\frac{8\pm4\sqrt3}{8}=1\pm\frac{1}{2}\sqrt3$$

$t_1=1{,}87 \qquad t_2=0{,}134$

имеем:

$tg\frac{x}{2}=1{,}87$ и $tg\frac{x}{2}=0{,}134$

$\frac{x}{2}=arctg1{,}87+\pi n, n\in Z \qquad \frac{x}{2}=arctg0{,}134+180^\circ k, k\in Z$

$\frac{x}{2}=61^\circ52'+180^\circ n, n\in Z \qquad \frac{x}{2}=7^\circ38'+180^\circ k, k\in Z$

$x=123^\circ44'+360^\circ n, n\in Z \qquad x=15^\circ16'+360^\circ k, k\in Z$

Ответ: $x=123^\circ44'+360^\circ n, n\in Z$; $x=15^\circ16'+360^\circ k, k\in Z$.

<u>Второй способ</u>.

$8\sin x + 3\cos x = 5$

$25 < 64 + 9$ – уравнение имеет решения

Найдем $\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{8^2+3^2} = \sqrt{73}$

Разделим каждый член уравнения на $\sqrt{73}$

$$\frac{8}{\sqrt{73}}.\sin x + \frac{3}{\sqrt{73}}\cos x = \frac{5}{\sqrt{73}}$$

Заметим, что $\frac{8}{\sqrt{73}} < 1$ и $\frac{3}{\sqrt{73}} < 1$, а вот $\left(\frac{8}{\sqrt{73}}\right)^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{73}}\right)^2 = \frac{64}{73} + \frac{9}{73} = 1$.

Из этого следует, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \sin\varphi$, где φ – вспомогательный угол. Для нашего уравнения $\cos\varphi = \frac{8}{\sqrt{73}}$; $\sin\varphi = \frac{3}{\sqrt{73}}$; отсюда $\varphi = \arcsin\frac{3}{\sqrt{73}}$.

Наше уравнение принимает вид:

$$\cos\varphi \cdot \sin x + \sin\varphi \cdot \cos x = \frac{5}{\sqrt{73}}$$

левая часть уравнения – это $\sin(x+\varphi)$ и значит получаем

$$\sin(x+\varphi) = \frac{5}{\sqrt{73}}$$

$$x + \varphi = (-1)^n \arcsin\frac{5}{\sqrt{73}} + \pi n, n \in Z$$

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{5}{\sqrt{73}} - \varphi + \pi n, n \in Z$$

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{5}{\sqrt{73}} - \arcsin\frac{3}{\sqrt{73}} + \pi n, n \in Z$$

Найдем углы

$$x = (-1)^n 35^\circ 49' - 20^\circ 33' + 180^\circ n, n \in Z$$

Если дать значения $n = 0, 1, 2, 3...$, то получим те же углы, что и в первом случае.

Ваше желание, какому способу отдать предпочтение.

Решим ещё: 2) $\sqrt{3}\sin x - \cos x = 1$ проверим условие: $1 < 3 + 1$

$$\sqrt{a^2+b^2} = \sqrt{3+1} = 2; \quad \cos\varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}; \ \sin\varphi = \frac{1}{2} \Rightarrow \varphi = 30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos x = 1$$

$$\cos 30^\circ \cdot \sin x - \sin 30^\circ \cdot \cos x = 1$$

$\sin(x + 30^\circ) = 1$ – частный случай $\Rightarrow$

$$x + 30^\circ = 90^\circ + 360^\circ n, n \in Z$$

$$x = 60^\circ + 360^\circ n, n \in Z$$

Итак, что можно сказать о решении тригонометрических уравнений?

Наиболее применимы два метода:

1) привести тригонометрическое уравнение к алгебраическому различными методами, в зависимости от условия.
2) Метод разложения на множители, это общий метод решения многих уравнений. Суть его в том, что перенеся все члены в одну часть, надо постараться разложить её на

множители. Таким образом решение уравнения сводится к решению совокупности простейших уравнений.

Продолжим решение тригонометрических уравнений различных видов.

3) $\cos 15x = \sin 5x$

$\cos 15x - \sin 5x = 0$

$\cos 15x - \cos\left(90^\circ - 5x\right) = 0$

применяем формулу $\cos\alpha - \cos\beta$

$-2\sin\frac{15x + 90^\circ - 5x}{2} \cdot \sin\frac{15x - 90^\circ + 5x}{2} = 0$

$-2\sin\frac{10x + 90^\circ}{2} \cdot \sin\frac{20x - 90^\circ}{2} = 0$

$-2\sin\left(5x + 45^\circ\right) \cdot \sin\left(10x - 45^\circ\right) = 0$

и тогда:

$\sin\left(5x + 45^\circ\right) = 0$	$\sin\left(10x - 45^\circ\right) = 0$
$5x + 45^\circ = 180^\circ \cdot n, n \in Z$	$10x - 45^\circ = 180^\circ \cdot k, k \in Z$
$5x = -45^\circ + 180^\circ \cdot n, n \in Z$	$10x = 45^\circ + 180^\circ \cdot k, k \in Z$
$\underline{x = -9^\circ + 36^\circ n, n \in Z}$	$\underline{x = 4^\circ 30' + 18^\circ \cdot k, k \in Z}$

Ответ: $\underline{x = -9^\circ + 36^\circ n, n \in Z}$; $\underline{x = 4^\circ 30' + 18^\circ \cdot k, k \in Z}$.

4) $1 - \cos x = 2\sin\frac{x}{2}$ левая часть уравнения это формула

$2\sin^2\frac{x}{2} = 2\sin\frac{x}{2}$

$2\sin^2\frac{x}{2} - 2\sin\frac{x}{2} = 0 \quad \Rightarrow \quad 2\sin\frac{x}{2}\left(\sin\frac{x}{2} - 1\right) = 0$

$\sin\frac{x}{2} = 0$	$\sin\frac{x}{2} - 1 = 0$
	$\sin\frac{x}{2} = 1$
$\frac{x}{2} = \pi n, n \in Z$	$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$
$\underline{x = 2\pi n, n \in Z}$	$\underline{x = \pi + 4\pi k, k \in Z}$

Ответ: $\underline{x = 2\pi n, n \in Z}$ $\underline{x = \pi + 4\pi k, k \in Z}$.

5) $\sin\left(30^\circ + x\right) + \sin\left(30^\circ - x\right) = \frac{1}{2}$

применим формулу $\sin\alpha + \sin\beta$ к левой части уравнения:

$$2\sin\frac{30^\circ+x+30^\circ-x}{2}\cdot\cos\frac{30^\circ+x-30^\circ+x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$2\sin 30^\circ\cdot\cos x=\frac{1}{2}$$

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos x=\frac{1}{2}$$

$\cos x=\frac{1}{2};\qquad x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k, k\in Z$

$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$.

6) $\cos\left(x-70^\circ\right)=\sin\left(x+70^\circ\right)$

$\cos\left(x-70^\circ\right)-\sin\left(x+70^\circ\right)=0$

Учитывая, что $\cos\alpha=\sin\left(90^\circ-\alpha\right)$ заменим $\sin\left(x+70^\circ\right)$ на $\cos\left(90^\circ-x-70^\circ\right)=\cos\left(20^\circ-x\right)$, тогда $\cos\left(x-70^\circ\right)-\cos\left(20^\circ-x\right)=0$.

Применяем формулу $\cos\alpha-\cos\beta$ и получим

$$-2\sin\frac{x-70^\circ+20^\circ-x}{2}\cdot\sin\frac{x-70^\circ-20^\circ+x}{2}=0$$

$$-2\sin\frac{-70^\circ}{2}\cdot\sin\frac{2x-90^\circ}{2}=0$$

$$2\sin 35^\circ\cdot\sin\left(x-45^\circ\right)=0$$

$2\sin 35^\circ\neq 0$, то $\sin\left(x-45^\circ\right)=0$

$x-45^\circ=180^\circ n, n\in Z$

$x=45^\circ+180^\circ n, n\in Z$

7) $\cos 3x+\sin 2x\cdot\sin x=0$

$\cos 3x-\frac{1}{2}\left(\cos 3x-\cos x\right)=0$

$\cos 3x-\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x=0$

$\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x=0$

$\frac{1}{2}\left(\cos 3x+\cos x\right)=0$

$\cos 3x+\cos x=0\qquad 2\cos 2x\cdot\cos x=0\qquad \cos 2x\cdot\cos x=0$

$\cos 2x=0$

$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z$

$\cos x=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

8) $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+3\cos\left(\pi-x\right)-2=0$

ещё раз вспомним, как решать такие уравнения. Применим формулы приведения

$2\sin^2 x-3\cos x-2=0$

приведем к одинаковой функции $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ из значит

$2\left(1-\cos^2 x\right)-3\cos x-2=0$

$2-2\cos^2 x-3\cos x-2=0$

$2\cos^2 x+3\cos x=0$

$\cos x\left(2\cos x+3\right)=0$

отсюда

$\cos x=0\qquad$ и $\qquad 2\cos x+3=0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$ $\qquad \cos x = -\frac{3}{2}$, как видим это уравнение не имеет решения, т.к. $\left| -\frac{3}{2} \right| > 1$,

а $|\cos x| \le 1$ поэтому ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

Мы рассмотрели решения различных уравнений и видим, что в каждом случае надо творчески подходить к нахождению метода решения, что возможно при хорошем знании формул тригонометрии, алгебраических преобразованиях.

1. Решение тригонометрических неравенств

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида

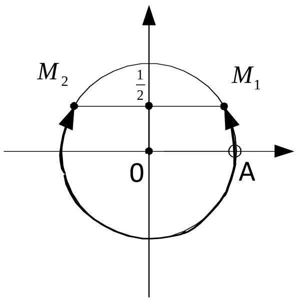
$\sin x < m \quad \cos x < m \quad tgx < m \quad ctgx < m$

$\sin x > m \quad \cos x > m \quad tgx > m \quad ctgx > m$

где m – данное число

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство.
Рассмотрим на примерах

1) $\sin x < \frac{1}{2}$, т.к. $|\sin x| \le 1$, то данное неравенство можно записать $-1 \le \sin x \le \frac{1}{2}$



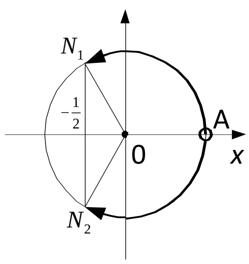
$\cup AM_1 = \frac{\pi}{6}$

$\cup AM_2 = -\pi - \frac{\pi}{6} = -\frac{7}{6}\pi$

и значит неравенству $\sin x < \frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка $-\frac{7}{6}\pi < x < \frac{\pi}{6}$. Т.к. функция $\sin\alpha$ имеет период 2π, то решение этого неравенства будет промежуток $-\frac{7}{6}\pi + 2\pi k \le x < \frac{\pi}{6} + 2\pi k$.

2) $\cos x > -\frac{1}{2}$

Перепишем неравенство в силу того, что $|\cos x| \le 1$

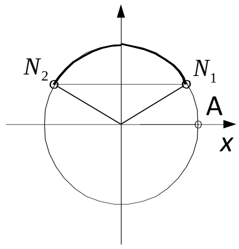


$-\frac{1}{2} < \cos x \le 1$

неравенству $\cos x > -\frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка $-\frac{2}{3}\pi < x \le \frac{2}{3}\pi$.

Общим решением служит множество дуг вида $-\frac{2}{3}\pi + 2\pi k < x < \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$.

3) $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$, аналогично для $\sin x > \frac{\sqrt{2}}{2}$ удовлетворяет



$\frac{\pi}{4} < x < \pi - \frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4} < x < \frac{3}{4}\pi$

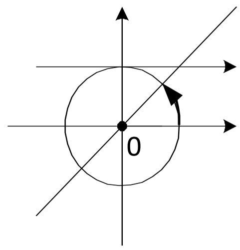
$\frac{\pi}{4} + 2\pi k < x < \frac{3}{4}\pi + 2\pi k$

4) $tgx > \sqrt{3}$, т.е. можно записать $\sqrt{3} < tgx < \infty$, т.к. функция tg неограниченная. Это неравенство выполняется при $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$; период функции тангенса равен π, значит $\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$

Самостоятельно:

5) $ctgx > 1$

$1 < ctgx < \infty$ этому неравенству удовлетворяют значения x из промежутка



$$0 < x < \frac{\pi}{4}$$

$$0 + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$$

Общее решение: $\pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$

Раздел 3. Начала математического анализа
Тема3.1.Последовательности

ЛЕКЦИЯ 1. Последовательности .

- Определение последовательности. Способы задания и свойства числовых последовательностей.
- Понятие о пределе последовательности
- Существование предела монотонной ограниченной последовательности.
- Теоремы о пределах последовательностей.
- Нахождение пределов последовательностей.
- Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.

Числовая последовательность – это числовое множество, поставленное в соответствие множеству натуральных чисел. Каждый член последовательности имеет свой порядковый номер. Или, красиво и коротко: числовая последовательность – это функция натурального аргумента. Числовые последовательности задаются формулой общего члена, например:

(1) $a_n = \frac{1}{n}$: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$

(2) $a_n = \frac{n}{n+1}$: $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$

(3) $a_n = 2n - 1$: $1; 3; 5; 7; 9; 11; \ldots$

(4) $a_n = \frac{1}{2^n}$; $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \ldots$

(5) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$; $1; \frac{-1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{-1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{-1}{64}; \ldots$

(6) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$; $\frac{-1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{-3}{10}; \frac{4}{17}; \frac{-5}{26}; \ldots$

(7) $a_n = \frac{1}{n!}$; $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{24}; \frac{1}{120}; \frac{1}{720}; \ldots$

Как видите, после каждой формулы общего члена числовой последовательности вычислено несколько первых членов соответствующих последовательностей, проверьте правильность.
Числовые последовательности можно определять заданием нескольких первых членов, например:
(8) a_n: 1; -1; 1; -1; 1; -1;…
(9) a_n: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13… -эта последовательность носит название «Числа Фибоначчи», члены этой последовательности получают по рекуррентной формуле $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, при условии, что $a_1 = a_2 = 1$
МОНОТОННОСТЬ. Числовая последовательность a_n называется *возрастающей*, если для всех n $a_n < a_{n+1}$. Различайте понятия «возрастающая последовательность» и «неубывающая последовательность». Так последовательность (2) возрастающая, а последовательность (10) a_n: 1; 1; 2; 2; 3; 3;… неубывающая.
Аналогично, числовая последовательность a_n называется убывающей, если для всех n $a_n > a_{n+1}$. Различайте понятия «убывающая последовательность» и «невозрастающая последовательность». Так последовательность (1) убывающая, а последовательность (11) a_n: 1; 1; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1;… невозрастающая.
Итак, убывающие, возрастающие, неубывающие, невозрастающие последовательности называются МОНОТОННЫМИ.
Так, последовательности (1); (2); (3); (4); (7); (9); (10); (11) являются монотонными, а последовательности (5); (6); (8) монотонными не являются, они называются *колеблющимися*.
ОГРАНИЧЕННОСТЬ. Если существуют такие числа m и M, что для всех n $m \le a_n \le M$, то говорят, что последовательность a_n ограниченная. Причем m – нижняя граница, M – верхняя граница. Только последовательности, ограниченные и сверху и снизу называются собственно ограниченными.
Так, последовательность (1) ограниченна: снизу числом 0, сверху – числом 1. В самом деле, все ее члены принадлежат промежутку:
(0; 1]. Последовательность (2) также ограничена, все члены этой последовательности удовлетворяют неравенству $\frac{1}{2} \le a_n < 1$. А вот последовательность (3) хотя и ограничена снизу числом 1, но она неограниченна сверху, поэтому она является неограниченной.
Убедитесь самостоятельно, что последовательности (4) – (7) являются ограниченными и найдите нижнюю и верхнюю границы. Так, для последовательности (6) все ее члены принадлежат отрезку $[\frac{-1}{2}; \frac{2}{5}]$.

СХОДИМОСТЬ. Для усвоения этого понятия необходимо ввести понятие *предела числовой последовательности*. Оно, это понятие, - важнейшее в курсе математического анализа! Рассмотрим последовательность

(2) $a_n = \frac{n}{n+1}$: $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5};...$ Как уже отмечалось, эта последовательность ограничена и монотонна. Она ограничена сверху числом 1, т.к. все ее члены меньше 1, в то же время она возрастает. Таким образом, на интуитивном уровне, можно сделать вывод, что члены этой последовательности *стремятся* к 1. Как понимается последний глагол? Если $a \to b$, то это означает, что расстояние на числовой прямой между этими числами будет меньше любого сколь угодно малого положительного числа ε, т.е. $|a-b| < \varepsilon$.
В этом случае можно сказать, что пределом этой последовательности при $n \to \infty$ является число 1. И записывают это так:
$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, и читают: предел числовой последовательности $a_n = \frac{n}{n+1}$ равен 1 при n стремящимся к бесконечности.

Дадим определение предела числовой последовательности в общем виде, его сформулировал французский математик О. Коши.

Число b называется пределом числовой последовательности a_n, если по любому наперед заданному сколь угодно малому положительному числу ε найдется такой номер члена последовательности N, что для всех n > N, будет выполняться неравенство $|a_n - b| < \varepsilon$.

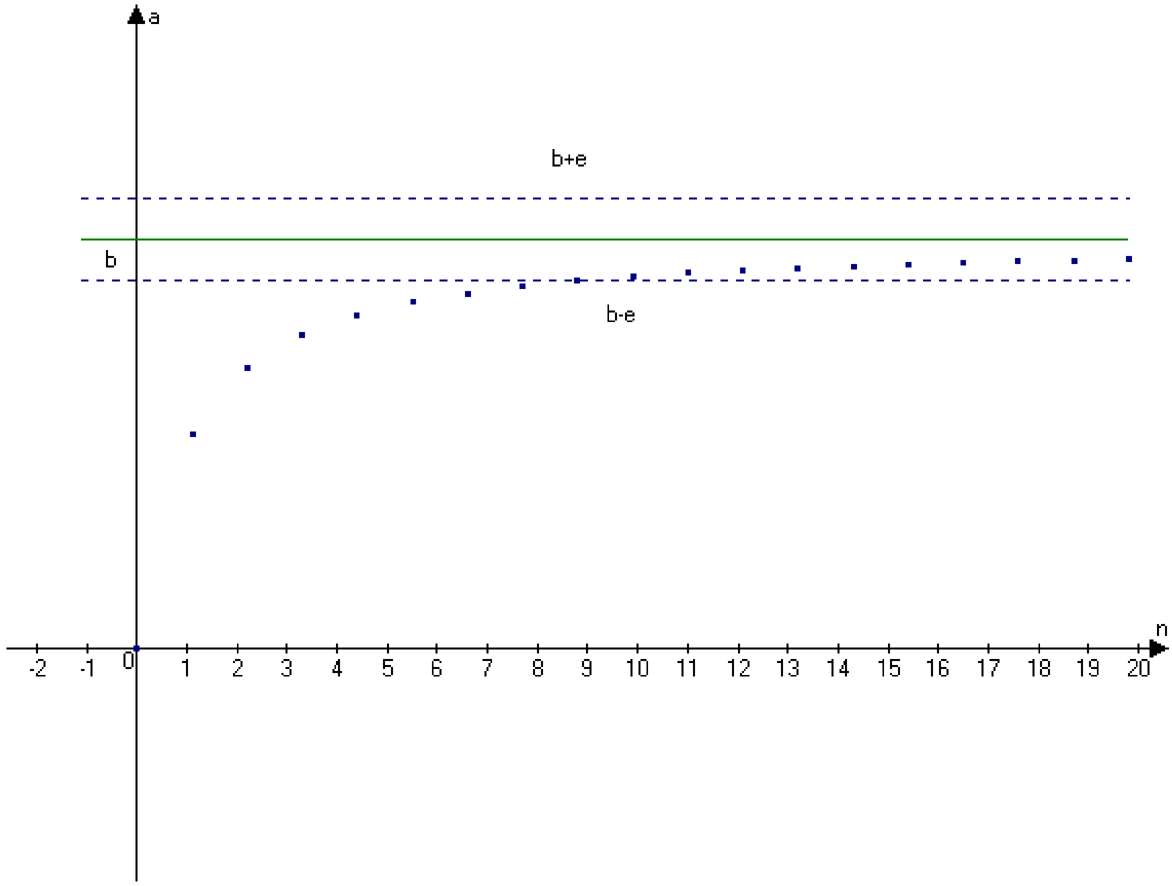


Рис . 1

Или (на языке интервалов) …для всех n > N все члены последовательности будут принадлежать интервалу (b - ε; b + ε).

На рисунке видно, что все члены последовательности с номером больше 9 отличаются от b меньше, чем на ε.

Обратим особое внимание на то, что в интервале (b - ε; b + ε) содержится бесконечное число членов последовательности, а вне его – конечное.

Последовательности, которые имеют предел, называются *сходящимися*.

Перечислим без доказательства некоторые свойства пределов последовательностей, записав их на символическом языке математики. Постарайтесь сформулировать их словесно, внести в конспект.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$, *если* $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

5) Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Возвратимся к понятиям «МОНОТОННОСТЬ, ОГРАНИЧЕННОСТЬ, СХОДИМОСТЬ».
Задумайтесь: из чего, что следует, ответьте на вопросы, такие как.
Если последовательность сходится, она ограничена?
Если последовательность монотонна, она ограничена?
Если последовательность ограничена, она монотонна?
Если последовательность ограничена, она сходится? И т.д.

Центральным же вопросом является следующий:
При каких условиях последовательность сходится? Ответ прост и очевиден: *монотонная ограниченная последовательность сходится*. Это теорема К.Вейерштрасса.

Рассмотрим некоторые примеры применения теории пределов.
Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|q^n\right| = 0\,(*)$, если $|q| < 1$. Воспользуемся этим ключом для вывода формулы **суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Вы знаете эту формулу,** но как ее получить?
Под суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии будем понимать предел последовательности частичных сумм геометрической прогрессии при неограниченном увеличении числа слагаемых: $S_{бугп} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n \quad (**)$

Формула для суммы членов геометрической прогрессии: $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, подставим ее в (**), будем иметь:

$$S_{бугп} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = (\textit{но } b_1 \textit{ и } q \textit{ константы, потому и дробь } \frac{b_1}{1-q} \textit{ так же является константой}$$

$$\textit{и ее можно вынести за знак предела}) = \frac{b_1}{1-q}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-q^n) = (\textit{но в силу } (*)\ \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = 1, \textit{поэтому}) = \frac{b_1}{1-q}$$

Итак, $S_{бугп} = \dfrac{b_1}{1-q}\cdot$ Используем полученную формулу для перевода бесконечных периодических дробей в обыкновенные. Сначала рассмотрим т.н. чистые периодические дроби, например, a = 0,27272727…. Запишем это число в виде суммы разрядных единиц:

$$a = \frac{27}{100}+\frac{27}{10000}+\frac{27}{1000000}+\frac{27}{100000000}+\ldots = \frac{27}{100}+\frac{27}{100^2}+\frac{27}{100^3}+\frac{27}{100^4}+\ldots$$

Как видите, получили бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с $b_1 = \dfrac{27}{100}$ и $q = \dfrac{1}{100}$. Подставим в полученную формулу: a = 0,272727 = $\dfrac{\frac{27}{100}}{1-\frac{1}{100}} = \dfrac{\frac{27}{100}}{\frac{99}{100}} = \dfrac{27}{99} = \dfrac{3}{11}$.

Легко видеть, что формулой можно и не пользоваться, а формально подставить в числитель дроби цифры периода, а в знаменатель записать столько девяток, сколько цифр в периоде. Так, 0,333333… = $\dfrac{3}{9} = \dfrac{1}{3}$, 0,504504504504… = $\dfrac{504}{999} = \dfrac{56}{111}$
Самостоятельно: 0,(72); 0,(2934); 0,(36) и т.д. И проверяйте на МК.

Аналогично, но несколько сложнее решается такая задача для *смешанной* периодической дроби. Это такая дробь, у которой до периода существуют другие цифры, например:
0,34545454545…, 0,5036363636…, 0,8106666666 и т.д.

Снова запишем дробь в виде суммы разрядных единиц:

$$0,3454545\ldots = \frac{3}{10}+\frac{45}{1000}+\frac{45}{100000}+\ldots = \frac{3}{10}+\frac{45}{1000}+\frac{45}{1000}\cdot\frac{1}{100}+\frac{45}{1000}\cdot\frac{1}{100^2}\ldots = w$$

Как видите бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с $b_1 = \frac{45}{1000}$ и $q = \frac{1}{100}$ начинается со второго слагаемого, применяем выведенную формулу.

$$w = \frac{3}{10} + \frac{\frac{45}{1000}}{1 - \frac{1}{100}} = \frac{3}{10} + \frac{\frac{45}{1000}}{\frac{99}{100}} = \frac{3}{10} + \frac{45}{990} = \frac{3}{10} + \frac{1}{22} = \frac{3 \cdot 11 + 5}{110} = \frac{38}{110} = \frac{19}{55}$$. Проверим на МК.

Действительно $\frac{19}{55} = 0,345454545.....$ Все верно.

Для закрепления рассмотрим еще один пример:

$$r = 0,8106666666 = \frac{810}{1000} + \frac{6}{10000} + \frac{6}{100000} + ... = \frac{810}{1000} + \frac{6}{10000} + \frac{6}{10000} \cdot \frac{1}{10} + \frac{6}{10000} \cdot \frac{1}{10^2} + ...$$

Здесь $b_1 = \frac{6}{10000}$ и $q = \frac{1}{10}$. Применяя формулу, будем иметь:

$$r = \frac{810}{1000} + \frac{\frac{6}{10000}}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{810}{1000} + \frac{\frac{6}{10000}}{\frac{9}{10}} = \frac{810}{1000} + \frac{6}{9000} = \frac{810}{1000} + \frac{1}{1500} = \frac{3 \cdot 810 + 2}{3000} = \frac{2432}{3000} = \frac{304}{375}.$$

Убедитесь с помощью МК, что расчеты проведены верно.

ПРИМЕРЫ. Вычислите:

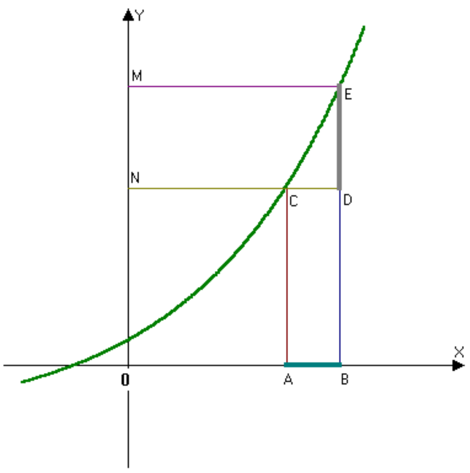
1) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{5n + 2}{3n - 1}$

2) $\lim\limits_{n \to \infty} \frac{5n^2 + 2n - 3}{3n^2 - n + 4}$

Тема3.2.Производная и ее применение

ЛЕКЦИЯ 1. Производная функции.

- Приращение аргумента и приращение функции.
- Задача на движение, приводящая к понятию производной.
- Средняя скорость движения.
- Мгновенная скорость.
- Понятие производной.
- Дифференцирование. Дифферецируемая функция.
- Вывод нескольких формул дифференцирования по определению производной. Производная степенной функции.
- Производная и непрерывность.



Приращение аргумента и приращение функции.

Пусть задана функция $y = f(x)$. При x = x_0 она принимает значение $y_0 = f(x_0)$.

x_0 - на оси ОХ в точке А, y_0 – на оси ОУ в точке N. Дадим x приращение Δx = AB, получим новое приращенное значение аргумента (в точке В) $x = x_0 + \Delta x$

Вычислим приращенное значение функции $y = f\left(x_0 + \Delta x\right)$ на оси ОУ – точка М, т.е. длина отрезка ВЕ.
Естественно, что отрезок DE и будет являться *приращением функции в точке x_0, если приращение аргумента равно Δх*.
Т.е. $\Delta f(x_0) = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$
Итак, приращение функции есть разность между приращенным значением функции и первоначальным (отрезок DE).
Обратите внимание, что для возрастающей функции DE > 0, а для убывающей функции АС будет больше DE, поэтому разность DE – AC < 0 и $\Delta f(x_0) < 0$.
Сделайте самостоятельно схематический чертеж убывающей функции и укажите $\Delta f(x_0)$.
Вычислим приращение функции $f(x) = x^2 + 2x + 5$ при $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0{,}1$ $x_0 + \Delta x = 2{,}1$
По формуле $\Delta f(x_0) = f\left(x_0 + \Delta x\right) - f\left(x_0\right)$ = (будем иметь) = $f\left(2{,}1\right) - f\left(2\right)$ =
$2{,}1^2 + 2*2{,}1 + 5 - (2^2 + 2*2 + 5)$ = (применяем микрокалькулятор) = 0,61
Поставим задачу отыскать приращение функции не в конкретной точке x_0, а в произвольной х, т.е. выведем формулу приращения в общем виде:
$\Delta f(x) = f\left(x + \Delta x\right) - f\left(x\right) = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) + 5 - x^2 - 2x - 5 = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x\,\Delta x + 5 - x^2 - 2x - 5 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\,\Delta x = 2x\,\Delta x + 2\,\Delta x + (\Delta x)^2 = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$ – это и есть приращение функции в общем виде: $\Delta f(x) = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$. Подставим х = 2, $\Delta x = 0{,}1$ получим $\Delta f(x) = 0{,}61$ – все верно.

Изучение различных процессов (механического движения, химических реакций, расширение жидкости при нагревании, течения электрического тока) требует вычисления скорости изменения различных величин.
Задача на движение. Средняя скорость прямолинейного движения материальной точки.
Пусть материальная точка *М* движется по прямой . В начале движения при $t = 0$ она занимала положение *О*. В момент времени t_1 она заняла положение M_1, в момент времени t_2 она заняла положение M_2 . Каждому моменту времени t соответствует определенная координата *s* точки *М*. Поэтому положение точки есть функция времени $s = f\left(t\right)$.Эту функцию называют законом движения точки *М*.

Для характеристики изменения пути служит понятие скорости. Средняя скорость движения точки равна отношению пройденного пути ко времени его прохождения. Если $s_1 = f\left(t_1\right),\ s_2 = f\left(t_2\right)$ то

На участке OM_1: $v_{cp} = \dfrac{s_1}{t_1} = \dfrac{f\left(t_1\right)}{t_1}$;

На участке OM_2: $v_{cp} = \dfrac{s_2}{t_2} = \dfrac{f\left(t_2\right)}{t_2}$;

На участке M_1M_2: $v_{cp} = \dfrac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \dfrac{f\left(t_2\right) - f\left(t_1\right)}{t_2 - t_1}$.

Пусть Δt - приращение времени, а Δs - приращение пути . то На участке M_1M_2:
$v_{cp} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{f\left(t_2\right) - f\left(t_1\right)}{t_2 - t_1}$ При равномерном движении v_{cp} постоянно на любом участке пути.

На практике поезда, самолеты, корабли движутся неравномерно. Средняя скорость не дает точного представления о быстроте движения на отдельных участках пути. В связи с этим возникает необходимость понятия скорости в данный момент времени.,т.е. мгновенной скорости.

Пусть материальная точка М движется прямолинейно по закону $s = f(t)$. В момент времени t_0 она заняла положение M_0 и прошла путь $s_0 = f(t_0)$. Найдем скорость точки в момент времени t_0.

Пусть за промежуток времени Δt, начиная с момента t_0, она продвинулась на расстояние Δs и заняла положение M_1. Тогда $t_1 = t_0 + \Delta t$, $s_1 = f(t_1) = s_0 + \Delta s$.

$\Delta s = f(t_1) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$.

Средняя скорость движения на участке M_0M_1 равна $v_{cp} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = \dfrac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$. При Δt, стремящемся к нулю, средняя скорость будет приближаться к скорости в момент времени t_0.

Мгновенной скоростью прямолинейно движущейся точки в момент времени t_0 называется предел средней скорости при Δt, стремящемся к нулю:

$$v_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем внутри себя точку x_0. Дадим аргументу приращение Δx такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдем соответствующее приращение функции Δy (при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$) и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$.

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).}$$

Операция нахождения производной данной функции называется *дифференцированием* этой функции, Если производная в точке x_0 существует, то говорят, что функция *дифференцируема* в этой точке.

Функция, имеющая производную в каждой точке промежутка, называется *дифференцируемой* на этом промежутке.

Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$.

1. **Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.**
2. **Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.**
3. **Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.**
4. **Составить отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$.**
5. **Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.**

Этот предел и есть $f'(x)$.

Пример 1. Найти производную постоянной функции $y = C$.

Решение. Здесь $f(x) = C$. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x имеем: $f(x) = C$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = C$.

3) $\Delta y = C - C = 0$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{0}{\Delta x} = 0$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} 0 = 0$.

Ответ: $(C)' = 0$.

Пример 2. Найти производную функции $y = \dfrac{1}{x}$.

Решение. Здесь $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x (разумеется, мы полагаем, что $x \neq 0$) имеем: $f(x) = \dfrac{1}{x}$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = \dfrac{1}{x + \Delta x}$ (при этом предполагаем, что x и $x + \Delta x$ — числа одного знака, чтобы в промежутке между x и $x + \Delta x$ не оказалась точка 0).

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \dfrac{1}{x + \Delta x} - \dfrac{1}{x} = \dfrac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = \dfrac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$.

4) $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \dfrac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = \dfrac{-1}{x(x + \Delta x)}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\dfrac{1}{x^2}$.

Ответ: $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$.

Аналогично можно вывести формулы дифференцирования других функций:

$$\boxed{(kx + m)' = k.}$$

В частности,

$$\boxed{(x)' = 1.}$$

, и еще:

$$\boxed{(x^2)' = 2x.}$$

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}.}$$

Запишем таблицу производных:

$$C' = 0;$$
$$x' = 1;$$
$$(kx + m)' = k;$$
$$(x^2)' = 2x;$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Таблица производных будет постепенно пополняться новыми формулами.

Существование производной функции в точке связано непрерывностью данной функции.

ТЕОРЕМА. Если функция имеет производную в точке x_0,то она непрерывна в этой точке.

Обратная теорема неверна. Так, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но производная в этой точке не существует.

ЛЕКЦИЯ 2. Правила дифференцирования. Таблица производных.

- Производные тригонометрических функций.
- Производная суммы (разности) функций.
- Производная произведения.
- Производная частного.
- Производная сложной функции.
- Производная обратной функции.

Добавим в *таблицу производных* формулы для тригонометрических функций:

$c' = 0$, **c - число**

$$(x)' = 1$$
$$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$$
$$(\sin x)' = \cos x$$
$$(\cos x)' = -\sin x$$
$$(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$$
$$(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Для нахождения производных выражений, составленных из этих функций, доказано несколько теорем, которые называются *правилами дифференцирования*.

Правила дифференцирования.

Пусть u и v – функции, с – число.

$$\boxed{\begin{aligned}&(u+v)'=u'+v'\\&(u-v)'=u'-v'\\&(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'\\&\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}\\&(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'\\&(c\cdot u)'=c\cdot u'\end{aligned}}$$

ПРИМЕРЫ:

$$(x^2+\sin x)'=(x^2)'+(\sin x)'=2x+\cos x.$$

$$(5x^2)'=5(x^2)'=5\cdot 2x=10x;$$

$$\left(-\frac{\cos x}{3}\right)'=-\frac{1}{3}(\cos x)'=-\frac{1}{3}(-\sin x)=\frac{1}{3}\sin x.$$

$$((2x+3)\sin x)'=(2x+3)'\sin x+(2x+3)(\sin x)'=$$
$$=2\sin x+(2x+3)\cos x.$$

$$\left(\frac{x^2}{5-4x}\right)'=\frac{(x^2)'\cdot(5-4x)-x^2(5-4x)'}{(5-4x)^2}=\frac{2x(5-4x)-x^2(-4)}{(5-4x)^2}=\frac{10x-4x^2}{(5-4x)^2}.$$

Функция называется *сложной*, если ее аргумент тоже функция, например, $y=\sqrt{3x+1}$.

$y=\sqrt{t}$ - внешняя функция, $y=3x+1$ - внутренняя.

Правило для нахождения производной сложной функции:

Производная сложной функции равна произведению производной внешней функции на производную внутренней.

$$\boxed{(f(t(x)))'=f'(t)\cdot t'(x)}$$

ПРИМЕР.

$$y'=(\sqrt{3x+1})'=\frac{1}{2\sqrt{3x+1}}\cdot(3x+1)'=\frac{3}{2\sqrt{3x+1}}.$$

Производная обратной функции.

Если функция $y=f(x)$ и ее обратная функция $x=f^{-1}(y)$ имеют производные, то

$$x'(y)=\frac{1}{y'(x)}$$

Пример. Найдем производную функции $y=\arcsin x$, где $x\in[-1;1]$.

$x=\sin y\Rightarrow x'=\cos y$;

$$y'=\frac{1}{x'}\Rightarrow(\arcsin x)'=\frac{1}{\cos y}=\frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Аналогично $(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

<u>ЛЕКЦИЯ 3. Применение производной.</u>

- Производная и непрерывность функции.
- Применение непрерывности. Метод интервалов для решения дробно-рациональных неравенств.
- Правило расстановки знаков.
- Примеры решения неравенств.
- Секущая и касательная.
- Существование касательной к графику функции в данной точке.
- Угловой коэффициент прямой.
- Геометрический смысл производной.
- Уравнение касательной.
- Приближенные вычисления с помощью производной.
- Физический смысл производной.
- Нахождение скорости для процесса, заданного формулой и графиком.

1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. **Функция $f(x)$, непрерывная в каждой точке заданного промежутка, называется непрерывной на всем промежутке.**

3. Любая рациональная функция непрерывна при всех значениях независимой переменной, при которых она определена. Любая иррациональная функция непрерывна в любой точке области определения, кроме крайних точек, если они существуют.

Например, функция $y = x^2$ непрерывна в любой точке числовой прямой, а функция $y = \sqrt{x}$ непрерывна в любой точке $x > 0$.

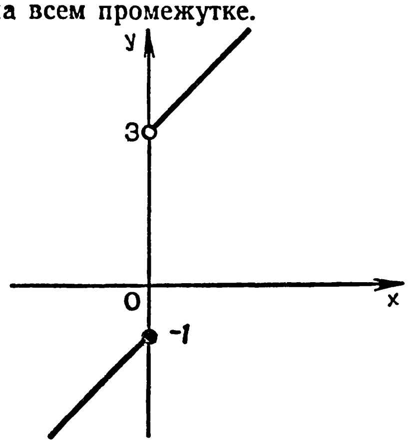


Рис. 179

4. **Если функция, определенная в некоторой окрестности точки x_0, в точке x_0 не определена или ее предел в точке x_0 не равен значению функции в этой точке, то говорят, что функция имеет разрыв в точке x_0, а точку x_0 называют точкой разрыва.**

Например, функция $y = \frac{a}{x}$ непрерывна в любой точке $x \neq 0$, а в точке $x = 0$ терпит разрыв.

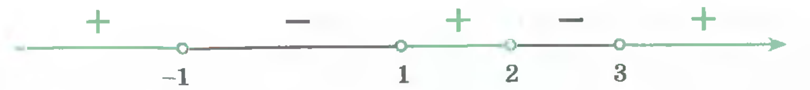
Если на интервале $(a; b)$ функция f непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

2. Метод интервалов. На свойстве непрерывных функций, рассмотренном в этом пункте (его полное доказательство приводится в курсах математического анализа), основан метод решения неравенств с одной переменной (*метод интервалов*). Опишем его.

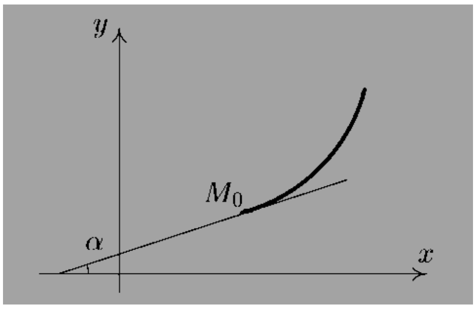
Пусть функция f непрерывна на интервале I и обращается в нуль в конечном числе точек этого интервала. По сформулированному выше свойству непрерывных функций этими точками I разбивается на интервалы, в каждом из которых непрерывная функция f сохраняет постоянный знак. Чтобы определить этот знак, достаточно вычислить значение функции f в какой-либо одной точке из каждого такого интервала.

Пример 1. Решим неравенство $\dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6} \geqslant 0$.

Функция $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2-5x+6}$ непрерывна в каждой точке своей области определения (это дробно-рациональная функция) и обращается в нуль в точках -1 и 1. Область определения этой функции — вся числовая прямая, за исключением нулей знаменателя, т. е. точек 2 и 3. Эти точки и точки -1 и 1 разбивают область определения f на 5 промежутков (рис. 90), в каждом из которых функция f непрерывна и не обращается в нуль. На рисунке отмечен знак f в каждом из соответствующих интервалов, который определяем, найдя знаки значений f во внутренних точках интервалов. Неравенство нестрогое, поэтому числа -1 и 1 (нули функции f) являются решениями неравенства. Рассматривая рисунок, можно записать ответ: множество решений неравенства — объединение промежутков $(-\infty; -1]$, $[1; 2)$ и $(3; \infty)$.



Геометрический смысл



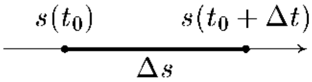
Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, т.е. $f'(x_0) = tg\alpha$, где α – угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0.

Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ - уравнение касательной.

Физический смысл.

Предположим, что функция $s=s(t)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, т.е. $s=s(t)$ – путь, пройденный этой точкой от начала отсчета за время t. Тогда за время t_0 пройден путь $s=s(t_0)$, а за время t_1 – путь $s=s(t_1)$. За промежуток времени $\Delta t=t_1-t_0$ точка пройдет отрезок пути $\Delta s=s(t_0+\Delta t)-s(t_0)$.



Отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ выражает *среднюю скорость* движения материальной точки за время Δt.

Предел отношения $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ при $\Delta t\to 0$ называется *мгновенной скоростью* движения материальной точки в момент времени t_0. Поскольку $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\Delta s}{\Delta t}=s'(t_0)$, то *физический смысл* производной функции $s=s(t)$ – мгновенная скорость движения.

ЛЕКЦИЯ 4. Применение производной к исследованию функции.

- Достаточные признаки возрастания и убывания функции.
- Критические точки.
- Необходимый признак экстремума функции.
- Достаточные признаки существования экстремума функции.
- План исследования функции с помощью производной.
- Исследование функции и построение графика. Пример.
- Нахождение наибольшего наименьшего значений функции на отрезке.

Условия возрастания и убывания функций.

***Теорема* 1**. Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a,b) функция $f(x)$ была *неубывающей* (*невозрастающей*) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)\geq 0$ ($f'(x)\leq 0$) для всех $x\in(a,b)$.

***Теорема* 2.** Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x)>0$ ($f'(x)<0$) для всех $x\in(a,b)$, то эта функция *возрастает* (*убывает*) на интервале (a,b).

Точки экстремума.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*.

***Теорема* 3.** (*необходимое условие существования экстремума*) Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то производная $f'(x_0)$ обращается в нуль или не существует.

Следствие. Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум.

Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

***Теорема* 4.** (*достаточное условие существования экстремума*) Если при переходе через критическую точку x_0 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на

“–“, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет *максимум*, а если производная меняет знак с “–“ на “+” – то функция имеет *минимум*.

Правила нахождения экстремумов функции.

1) Найти производную функции.
2) Найти критические точки функции.
3) Исследовать знак производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции.
4) Определить существование максимумов и минимумов и найти значение функции в этих точках.

Схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции (это понятие включает в себя и область значений, и область определения функции).
2) Исследовать функцию на четность и периодичность.
3) Координаты точек пересечения графика функции с осями координат (если они имеются).
4) Интервалы возрастания и убывания.
5) Точки максимума и минимума.
6) Построение графика.

Наибольшее и наименьшее значения на отрезке непрерывная на этом отрезке функция достигает на концах промежутка или в критических точках этого отрезка. Чтобы найти наибольшее или наименьшее значение функции на заданном отрезке, надо найти критические точки функции, принадлежащие этому отрезку, вычислить значения функции на концах отрезка и в этих критических точках и выбрать наибольшее и наименьшее значения.

ЛЕКЦИЯ 5. Вторая производная.

- Вторая производная.
- Геометрический и физический смысл второй производной.
- Примеры решения задач.

Пусть функция $f(x)$ – дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную от функции $f'(x)$, получим *вторую производную* функции $f(x)$.

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени *n*.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Исследование функции на экстремум с помощью производной второго порядка.

***Теорема* 5.** Если $f'(x)=0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет *максимум*, если $f''(x_0)<0$ и *минимум*, если $f''(x_0)>0$.

Если $f''(x_0)=0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.

Кривая обращена *выпуклостью вверх* на интервале (a,b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется *выпуклой*, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется *вогнутой*.

***Теорема* 6.** Если функция $f(x)$ имеет на интервале (a,b) вторую производную и $f''(x)>0$ ($f''(x_0)<0$) во всех точках данного интервала, то график функции имеет на (a,b) выпуклость, направленную *вниз* (*вверх*).

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба*. Точками перегиба могут служить только *критические точки второго рода*, т.е. точки, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в ноль или не существует.

***Теорема* 7.** Пусть кривая определяется уравнением $y=f(x)$. Если вторая производная $f''(x)=0$ или не существует и при переходе через точку $x=x_0$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x=x_0$ является точкой перегиба.

Правила нахождения точек перегиба.

1) Найти вторую производную функции.
2) Найти критические точки второго рода.
3) Исследовать знак второй производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции.
4) Определить точки перегиба и найти значение функции в этих точках.

Физический смысл производной функции $s=s(t)$ – мгновенная скорость движения.

Соответственно, *вторая производная функции* – ускорение.

Тема3.3.Первообразная и интеграл

ЛЕКЦИЯ 1. Первообразная.

- Определение первообразной.
- Интегрирование – операция, обратная дифференцированию.
- Признак постоянства функции.
- Основное свойство первообразных.
- Общий вид первообразных.
- Таблица первообразных.
- Правила нахождения первообразных.
- Примеры нахождения первообразных.

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x)=f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число, т.е. $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Таблица первообразных

№	Функция	Первообразная
1	κ	$\kappa x+C$
2	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1}+C, n \neq -1$
3	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
4	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
5	$\sin x$	$-\cos x + C$
6	$\cos x$	$\sin x + C$
7	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgx + C$
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx + C$

Правила нахождения первообразных

№	Функция	Первообразная
1	$f \pm g$	$F \pm G$
2	$k \cdot f$	$k \cdot F$
3	$f(kx+b)$	$\frac{1}{k} \cdot F(kx+b)$

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$ здесь $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)\,dx$ – подынтегральное выражение.

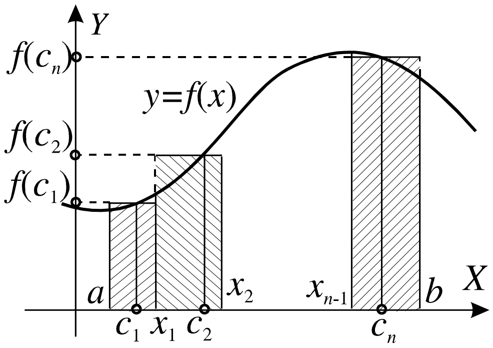
Вычисление неопределенного интеграла от заданной функции называется *интегрированием*.

ЛЕКЦИЯ 2 .Криволинейная трапеция. Определенный интеграл.

- Криволинейная трапеция.
- Площадь криволинейной трапеции.
- Определенный интеграл.
- Формула Ньютона-Лейбница.
- Вычисление интегралов.

Определенный интеграл.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. На каждом из частичных отрезков выберем произвольно по одной точке: $c_1 \in [a, x_1]$, $c_2 \in [x_1, x_2]$, …, $c_n \in [x_{n-1}, b]$.



Введем обозначения: $\Delta x_1 = x_1 - a$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, …, $\Delta x_n = b - x_{n-1}$.

Составим сумму: $\sigma = \sum\limits_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, которая называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Геометрический смысл σ: Каждое слагаемое интегральной суммы представляет собой площадь прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$, покрытого штриховкой на рисунке.

Обозначим через $\lambda = \max(\Delta x_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ – длину наибольшего частичного отрезка. Величину λ иногда называют *параметром разбиения*.

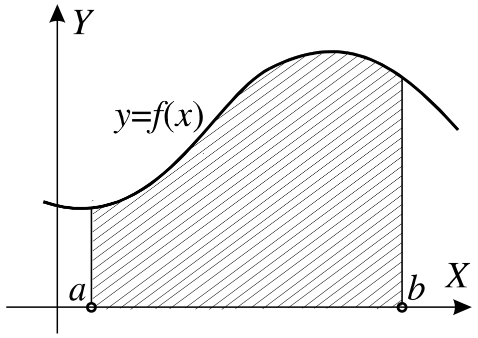
Рассмотрим процесс, при котором число точек разбиения неограниченно возрастает таким образом, что величина λ стремится к нулю.

Если существует предел интегральной суммы $I = \lim\limits_{\lambda \to 0} \sigma$, то он называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

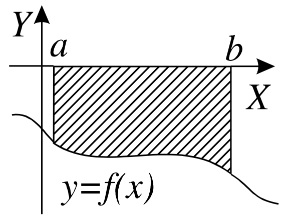
В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой на отрезке* $[a,b]$. Число a называется *нижним пределом интегрирования*, а число b – *верхним пределом интегрирования*.

Если такой предел существует, то он не зависит от первоначального разбиения отрезка $[a,b]$ и выбора точек c_i. Из определения определенного интеграла следует, что его величина зависит только от вида функции $f(x)$ и от чисел a и b. Следовательно, если заданы $f(x)$ и пределы интегрирования, то интеграл определяется однозначно и представляет собой некоторое число.



Геометрический смысл *определенного интеграла*: Если $f(x)>0$ на отрезке $[a,b]$, то определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$.

Если $f(x)<0$ на отрезке $[a,b]$, то $S=-\int\limits_a^b f(x)dx$.



Свойства определенного интеграла

1. $\int\limits_a^b f(x)dx=-\int\limits_b^a f(x)dx$;
2. $\int\limits_a^a f(x)dx=0$;
3. Если $c\in[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)dx=\int\limits_a^c f(x)dx+\int\limits_c^b f(x)dx$;
4. $\int\limits_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int\limits_a^b f(x)dx+\int\limits_a^b g(x)dx$;
5. $\int\limits_a^b kf(x)dx=k\int\limits_a^b f(x)dx$, где k – произвольное число.

Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и функция $F(x)$ является ее первообразной на этом отрезке, то имеет место *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

то есть определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

ЛЕКЦИЯ 3.Вычисление площадей через интеграл.

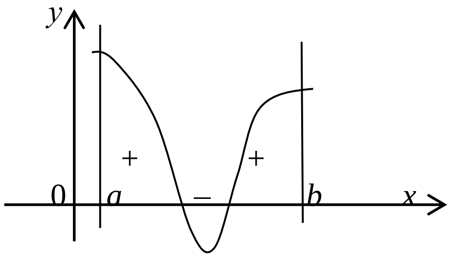
- Площадь криволинейной трапеции через интеграл.
- Площади различных фигур, ограниченных графиками функций.
- Примеры решения задач.

Геометрические приложения определенного интеграла.

Площадь плоской фигуры.

а) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a,b]$, вычисляется по формуле $S = \int\limits_a^b f(x)dx$

Если график расположен ниже оси *Ox*, т.е. $f(x)$ < 0, то площадь имеет знак “–“, если график расположен выше оси *Ox*, т.е. $f(x)$ > 0, то площадь имеет знак “+”.



Таким образом, для нахождения суммарной площади используется формула

$$S = \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right|.$$

б) Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $\left(f_1(x) \le f_2(x)\right)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$S = \int\limits_a^b \left[f_2(x) - f_1(x)\right]dx$$

ЛЕКЦИЯ 4.Применение интеграла в геометрии и физике.

- Нахождение объемов геометрических тел.
- Нахождение пути материальной точки.
- Нахождение работы переменной силы.
- Примеры решения практических задач.

С помощью интеграла можно вычислять не только площади плоских фигур, но и объемы пространственных тел.

Пусть задано тело объемом V, причем плоскость, перпендикулярная выбранной оси Ox и проходящая через точку x, пересекает это тело. Площадь сечения тела этой плоскостью равна $S(x)$. Если функция S непрерывна на $[a, в]$, то

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Пусть криволинейная трапеция опирается на отрезок $[a, в]$ оси Ох и ограничена сверху графиком функции $f(x)$, неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a, в]$. При вращении этой криволинейной трапеции вокруг оси Ох получим тело вращения, объем которого находится по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Если скорость материальной точки при прямолинейном движении есть производная пройденного пути, то путь, пройденный точкой за промежуток времени от t_1 до t_2, можно найти по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt,$$

А скорость движения, зная ускорение, находим аналогично по формуле

$$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt.$$

Пусть точка движется по оси Ох под действием силы, проекция которой на ось Ох есть функция $f(x)$ - непрерывная функция. Под действием этой силы материальная точка переместилась из точки $M(a)$ в точку $M(в)$. то работа этой силы равна

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

ПРИМЕР.

Сила упругости пружины , растянутой на $5см$, равна $3Н$. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 5 см?

РЕШЕНИЕ.

По закону Гука сила F, растягивающая пружину на величину x, вычисляется по формуле F=kx, Значит, $3 = k \cdot 0{,}05$. Следовательно, k=60 и сила F=60x.

$$A = \int_0^{0{,}05} 60x dx = 0.075(Дж)$$

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)
КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине «МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА; ГЕОМЕТРИЯ»

для специальностей среднего профессионального образования
технического и социально-экономического профилей

1 курс

1-2 семестр

Часть 2

Составитель - старший преподаватель КИТП И. С. Яппарова

Владимир 2016 г.
2 семестр

Алгебра и начала математического анализа

Раздел 4. Корни, степени и логарифмы

Тема 4.1.Корни и степени

ЛЕКЦИЯ 1. Корень натуральной степени из числа.

- Определение корня n-ой степени.
- Подкоренное выражение и показатель корня.
- Корни четной и нечетной степени.
- Определение арифметического корня n-ой степени.
- Решение уравнения $x^n = a$.
- Свойства арифметических корней.
- Определение иррационального уравнения.
- Способы решения уравнений, содержащих корни второй степени.
- Способы решения уравнений, содержащих корни третьей степени.
- Уравнения, решаемые заменой.
- Способы решения систем уравнений, содержащих корни.
- Решение иррациональных неравенств

Определение. Корнем *n*-ой степени из числа *a* называется число, *n*-ая степень которого равна *a*.

$$\sqrt[n]{a} = x \Leftrightarrow x^n = a$$

n –показатель корня, *a* – подкоренное выражение.

Примеры: $\sqrt[3]{8} = 2 \Leftrightarrow 2^3 = 8$

$\sqrt[4]{81} = 3 \Leftrightarrow 3^4 = 81$

$\sqrt[3]{-8} = -2 \Leftrightarrow (-2)^3 = -8$

Определение. Арифметическим корнем *n*-ой степени из неотрицательного числа *a* называется неотрицательное число, *n*-ая степень которого равна *a*.

Например, $\sqrt[3]{8} = 2$ - арифметический корень, т.к. $2 \geq 0$

Извлечение корня – действие, обратное возведению в степень.

Решим уравнения:

$x^2 = 64$	$x^3 = 8$	$x^3 = -8$
$x = \pm\sqrt{64}$	$x = \sqrt[3]{8}$	$x = \sqrt[3]{-8}$
$x = \pm 8$	$x = 2$	$x = -2$

Итак, уравнение $x^n = a$ при четном показателе степени имеет два корня $x = \pm\sqrt[n]{a}$, при условии $a \geq 0$, а при нечетном показателе – один корень $x = \sqrt[n]{a}$ при любом значении a.

Свойства арифметических корней.

Для любого натурального n, целого k и любых неотрицательных чисел a и b выполнены равенства:

1°. $\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$.

2°. $\sqrt[n]{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b\neq 0)$.

3°. $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}$ $(k>0)$.

4°. $\sqrt[n]{a}=\sqrt[nk]{a^k}$ $(k>0)$.

5°. $\sqrt[n]{a^k}=(\sqrt[n]{a})^k$ (если $k\leqslant 0$, то $a\neq 0$).

ПРИМЕРЫ

а) $\sqrt[5]{8}\cdot\sqrt[5]{4}=\sqrt[5]{8\cdot 4}=\sqrt[5]{32}=2$ (свойство 1^0);

б) $\sqrt[4]{5\frac{1}{16}}=\sqrt[4]{\frac{81}{16}}=\frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}}=\frac{3}{2}$ (свойство 2^0);

в) $\sqrt[3]{\sqrt[5]{7}}=\sqrt[15]{7}$ (свойство 3^0);

г) $\sqrt[21]{128}=\sqrt[21]{2^7}=\sqrt[3]{2}$ (свойство 4^0);

Иррациональные уравнения содержат переменную под знаком корня. Требуется проверка, т.к. могут появиться посторонние корни.

○ Пример 1. Решим уравнение $\sqrt{x^2-5}=2$.

Возведем обе части этого уравнения в квадрат и получим $x^2-5=4$, откуда следует, что $x^2=9$, т. е. $x=3$ или $x=-3$.

Проверим, что полученные числа являются решениями уравнения. Действительно, при подстановке их в данное уравнение получаются верные равенства

$$\sqrt{3^2-5}=2 \text{ и } \sqrt{(-3)^2-5}=2.$$

Следовательно, $x=3$ и $x=-3$ — решения данного уравнения.

Пример 2. Решим уравнение $\sqrt{x}=x-2$.

Возведя в квадрат обе части уравнения, получим $x=x^2-4x+4$. После преобразований приходим к квадратному уравнению $x^2-5x+4=0$, корни которого $x=1$ и $x=4$. Проверим, являются ли найденные числа решениями данного уравнения. При подстановке в него числа 4 получаем верное равенство $\sqrt{4}=4-2$, т. е. 4 — решение данного уравнения. При подстановке же числа 1 получаем в правой части -1, а в левой части число 1. Следовательно, 1 не является решением уравнения; говорят, что это *посторонний корень,* полученный в результате принятого способа решения. Ответ: $x=4$. ●

Мы видим, что при решении иррациональных уравнений полученные решения требуют проверки, потому, например, что неверное равенство при возведении в квадрат может дать верное равенство. В самом деле, неверное равенство $1=-1$ при возведении в квадрат дает верное равенство $1^2=(-1)^2$.

○ Пример 3. Решим уравнение $\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x}$.

Возведем обе части этого уравнения в квадрат: $x^2-2=x$, откуда получаем уравнение $x^2-x-2=0$, корни которого $x=-1$ и $x=2$. Сразу ясно, что число -1 не является корнем данного уравнения, так как обе части его не определены при $x=-1$. При подстановке в уравнение числа 2 получаем верное равенство $\sqrt{2^2-2}=\sqrt{2}$. Следовательно, решением данного уравнения является только число 2.

Пример 4. Решим уравнение $\sqrt{x-6}=\sqrt{4-x}$.

Возводя в квадрат обе части этого уравнения, получаем $x-6=4-x$, $2x=10$, $x=5$. Подстановкой убеждаемся, что число 5 не является корнем данного уравнения. Поэтому уравнение не имеет решений. ●

Иногда удобнее решать иррациональные уравнения, используя равносильные переходы.

○ Пример 5. Решим уравнение $\sqrt{x-2}=x-8$.

По определению $\sqrt{x-2}$ — это такое неотрицательное число, квадрат которого равен подкоренному выражению. Другими словами, уравнение $\sqrt{x-2}=x-8$ равносильно системе

$$\begin{cases} x-2=(x-8)^2, \\ x-8\geqslant 0. \end{cases}$$

Решая первое уравнение системы, равносильное уравнению $x^2-17x+66=0$, получим корни 11 и 6, но условие $x-8\geqslant 0$ выполняется только для $x=11$. Поэтому данное уравнение имеет один корень $x=11$.

Пример 6. Решим уравнение $x-1=\sqrt[3]{x^2-x-1}$.

В отличие от рассмотренных ранее примеров данное иррациональное уравнение содержит не квадратный корень, а корень третьей степени. Поэтому для того, чтобы «избавиться от радикала», надо возвести обе части уравнения не в квадрат, а в куб: $(x-1)^3=x^2-x-1$. После преобразований получаем:

$$x^3-3x^2+3x-1=x^2-x-1,$$
$$x^3-4x^2+4x=0,$$
$$x(x^2-4x+4)=0,$$
$$x(x-2)^2=0.$$

Итак, $x_1=0$, $x_2=2$.

Пример 7. Решим систему уравнений

$$\begin{cases}\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y}=4,\\ x+y=28.\end{cases}$$

Положив $u=\sqrt[3]{x}$ и $v=\sqrt[3]{y}$, приходим к системе

$$\begin{cases}u+v=4,\\ u^3+v^3=28.\end{cases}$$

Разложим левую часть второго уравнения на множители: $u^3+v^3=(u+v)(u^2-uv+v^2)$ — и подставим в него из первого уравнения $u+v=4$. Тогда получим систему, равносильную второй:

$$\begin{cases}u+v=4,\\ u^2-uv+v^2=7.\end{cases}$$

Подставляя во второе уравнение значение v, найденное из первого ($v=4-u$), приходим к уравнению

$$u^2-u(4-u)+(4-u)^2=7, \text{ т. е. } u^2-4u+3=0.$$

Полученное квадратное уравнение имеет два корня: $u_1=1$ и $u_2=3$. Соответствующие значения v таковы: $v_1=3$ и $v_2=1$. Переходя к переменным x и y, получаем: $\sqrt[3]{x}=u_1$, т. е. $x_1=u_1^3=1$, $y_1=v_1^3=27$, $x_2=u_2^3=27$, $y_2=v_2^3=1$. Ответ: (1; 27), (27; 1). ●

Иррациональные неравенства содержат переменную под знаком корня.

ПРИМЕРЫ:

1) $\sqrt{2x+4}\le 2$

О.Д.З. $x\ge -2$

$(\sqrt{2x+4})^2\le 2^2 \Rightarrow 2x+4\le 4 \Rightarrow x\le 0$. С учетом О.Д.З. получим ответ $x\in[-2;0]$

2) $\sqrt{x+3}\rangle x+1$

О.Д.З. $x\ge -3$

Рассмотрим два случая:

$$\begin{cases}x+1\ge 0\\ x+3\rangle(x+1)^2\end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases}x+1\langle 0\\ x\ge -3\end{cases}$$

Первая система неравенств имеет решения $[-1;1)$, вторая - $[-3;-1)$, Ответ – объединение промежутков с учетом О.Д.З - $x\in[-3;1)$.

ЛЕКЦИЯ 2. Степень с действительным показателем.

- Определение степени целым показателем.
- Определение степени дробным показателем.
- Свойства степеней с рациональным показателем.

- Понятие степени с иррациональным показателем.
- Свойства степеней с действительным показателем.
- Примеры вычислений и преобразования степенных выражений.

1. Вспомним свойства степени с рациональным показателем.

$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\ \text{раз}}=a^n$ для натурального n

a^n – степень; а – основание степени; *n* – показатель степени.
Для степени с рациональным показателем *n*:

$a>0 \quad a^n>0$ $\qquad (abc)^n=a^nb^nc^n$

$a<0\begin{cases} n-\text{четн.} & a^n>0 \\ n-\text{нечет.} & a^n<0 \end{cases}$ $\qquad \left(\dfrac{a}{b}\right)^n=\dfrac{a^n}{b^n}$

$a^0=1$ $\qquad (a^m)^n=a^{m\cdot n}$

$a^{-n}=\dfrac{1}{a^n}$ $\qquad a^m\cdot a^n=a^{m+n}$

$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$ $\qquad a^m:a^n=a^{m-n}$

(прочесть свойства словами, а также справа налево)

2. Обобщим понятие степени

Определение: Пусть действительное число α записано в виде бесконечной десятичной дроби, и пусть α_n, $n\in N$, последовательность его десятичных приближений. Тогда для любого действительного числа а > 0 степень a^α определяется равенством $a^\alpha=\lim\limits_{n\to\infty}a^{\alpha_n}$

а) Пусть а > 1 и $\alpha>0$, например $10^{\sqrt{2}}$. Степень $10^{\sqrt{2}}$ означает такое число, которое больше всякой степени 10^{α_1}, но меньше всякой степени 10^{α_2}, где α_1 и α_2 – любые рациональные приближённые значения числа $\sqrt{2}$, взятые с недостатком и избытком.

С недостатком $10^{1{,}4};10^{1{,}41};10^{1{,}414};10^{1{,}4142}\cdots$

С избытком $10^{1{,}5};10^{1{,}42};10^{1{,}415};10^{1{,}4143}\cdots$

б) Пусть а < 1, но $\alpha>0$, например $0{,}5^{\sqrt{2}}$. Тогда под степенью a^α разумеют такое число, которое меньше всякой степени a^{α_1}, но не больше всякой степени a^{α_2}. Т. е. $0{,}5^{\sqrt{2}}$ есть число, меньшее каждого из чисел ряда $0{,}5^{1{,}4};0{,}5^{1{,}41};0{,}5^{1{,}414};0{,}5^{1{,}4142}\cdots$, но большее каждого из чисел ряда $0{,}5^{1{,}5};0{,}5^{1{,}42};0{,}5^{1{,}415};0{,}5^{1{,}4143}\cdots$. Таким образом, если иррациональное число α заключено между двумя рациональными числами α_1 и α_2, то степень a^α заключена между степенями a^{α_1} и a^{α_2} и тогда, когда а > 1, и тогда, когда а < 1.

в) Пусть а > 1, а < 1 и $\alpha<0$, например $10^{-\sqrt{2}};0{,}5^{-\sqrt{2}}$.

Тогда выражению a^α придают тот же смысл, какой имеют степени с отрицательным рациональным показателем

$10^{-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{10^{\sqrt{2}}}$; $\qquad 0{,}5^{-\sqrt{2}}=\dfrac{1}{0{,}5^{\sqrt{2}}}$

Таким образом можно сказать, что все свойства показателей рациональных применимы и к показателям иррациональным

$a^\alpha\cdot a^\beta=a^{\alpha+\beta}$; $\left(a^\alpha\right)^\beta=a^{\alpha\cdot\beta}$

И значит записанные выше свойства степени с рациональным показателем справедливы для степени с любым действительным показателем (прочесть свойства словами ещё раз).

Вычислить

1) $3^{\sqrt{45}}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{\sqrt{20}}-\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{2}\right)^{-0,25}\cdot 36^{\frac{1}{2}}\cdot 0,1^{-1}=$

воспользуемся свойствами степени

$$=3^{3\sqrt{5}}\cdot 3^{-2\sqrt{5}}-\left(\frac{1}{4}\right)^{-0,5}\cdot\left(6^{2}\right)^{\frac{1}{2}}\cdot 10=3^{3\sqrt{5}-2\sqrt{3}}-4^{0,5}\cdot 6\cdot 10=3^{\sqrt{5}}-2\cdot 6\cdot 10=3^{\sqrt{5}}-120=11,66-120=-108,34$$

2) $6^{-\sqrt{8}}\cdot 6^{\sqrt{18}}-(-5)^{0}\cdot\left(4\sqrt{2}\right)^{2}+\sqrt[-5]{0,00032}$

Решение:

$$6^{-2\sqrt{2}}\cdot 6^{3\sqrt{2}}-(-1)\cdot 16\cdot 2+\left(\frac{32}{100000}\right)^{-\frac{1}{5}}=6^{\sqrt{2}}+32+\left(\left(\frac{2}{10}\right)^{5}\right)^{-\frac{1}{5}}=6^{\sqrt{2}}+32+\left(\frac{1}{5}\right)^{-1}=6^{\sqrt{2}}+32+5=49,6$$

Самостоятельно:

1)

$$2^{\sqrt{80}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\sqrt{45}}+0,125^{-\frac{1}{3}}-\left(\frac{1}{8}\right)^{-\frac{1}{2}}=2^{\sqrt{80}}\cdot 2^{-\sqrt{45}}+8^{\frac{1}{3}}-8^{\frac{1}{2}}=2^{4\sqrt{5}}\cdot 2^{-3\sqrt{5}}+2-2\sqrt{2}=2^{\sqrt{5}}+2-2\sqrt{2}=3,88$$

2) $\left(\frac{1}{10}\right)^{-5}\cdot 10^{-2}+\dfrac{0,5^{-2}-\left(\frac{2}{7}\right)^{0}}{(-2)^{-2}}=10^{5}\cdot 10^{-2}+\dfrac{2^{2}-1}{\left(-\frac{1}{2}\right)^{2}}=10^{3}+\dfrac{3}{\frac{1}{4}}=1000+12=1012$ **;**

3) $\sqrt{\sqrt{65}-7}\cdot\sqrt{\sqrt{65}+7}=\sqrt{65-49}=\sqrt{16}=4$;

4) $\left(3a^{\frac{2}{3}}-b^{-1}\right)\left(3a^{\frac{2}{3}}+b^{-1}\right)=\left(3a^{\frac{2}{3}}\right)^{2}-\left(b^{-1}\right)^{2}=9a^{\frac{4}{3}}-b^{-2}=9a\sqrt[3]{a}-\frac{1}{b^{2}}$;

5) $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^{2}=2+\sqrt{3}+2\sqrt{2+\sqrt{3}}\cdot\sqrt{2-\sqrt{3}}+2-\sqrt{3}=4+2+\sqrt{4-3}=4+2\cdot 1=6$

Тема 4.2.Показательная, логарифмическая и степенная функции

ЛЕКЦИЯ 1. Показательная функция.

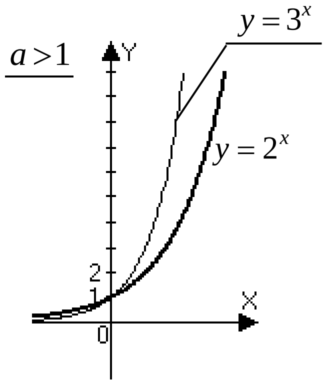
- Определение показательной функции.
- Свойства показательной функции.
- График показательной функции.
- Нахождение области определения и множества значений показательной функции.
- Сравнение степеней.
- Графическое решение уравнений.

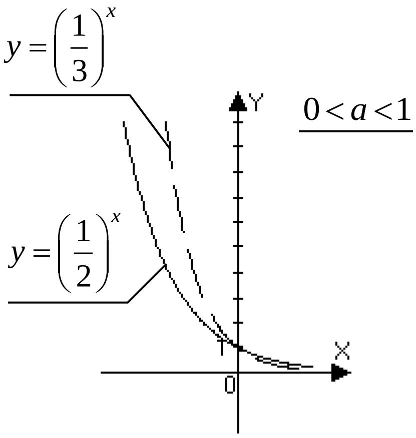
Определение. Функция вида $y=a^{x}$, где $a\neq 1$ и $a>0$ называется показательной.
Рассмотрим функции.

$y = 2^x$; $\quad y = 3^x \quad (a > 1)$

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$; $\quad y = \left(\frac{1}{3}\right)^x \quad (a < 1)$

построим их графики и запишем свойства функций.





Свойства

1. Область определения: $x \in (-\infty; +\infty)$
2. Множество значений функции: $y \in (0; +\infty)$
3. При $x = 0 \quad y = 1$.

Эти свойства называются общими свойствами показательной функции и не зависят от основания, какое оно больше 1 или меньше 1.

$\underline{a > 1}$	$a < 1$
4. Функция возрастающая	4. Функция убывающая
5. при $x < 0 \quad y < 1$	5. при $x < 0 \quad y > 1$
$x > 0 \quad y > 1$	$x > 0 \quad y < 1$
6. $x \to \infty, \quad y \to \infty$	6. $x \to \infty, \quad y \to 0$
та степень больше показатель которой больше	та степень больше, показатель которой меньше

Используя свойства функции предлагается решить примеры

а) Сравнить степени с 1

Условие	Ответы
$5{,}26^{0{,}38}$	>1
$1{,}4^{-0{,}84}$	<1
$0{,}72^{0}$	$=1$
$0{,}3^{1{,}84}$	<1
$\left(\frac{2}{7}\right)^{-0{,}78}$	>1

При решении учитывается основание (какое оно больше 1 или меньше 1) и знак показателя степени.

б) Сравнить показатели степени, если:

Условие: Ответы:

$0,4^m < 0,4^n$ $\qquad m > n$

$2,7^m < 2,7^n$ $\qquad m < n$

$5,2^m > 5,2^n$ $\qquad m > n$

$\left(\frac{4}{9}\right)^m > \left(\frac{4}{9}\right)^n$ $\qquad m < n$

$\left(\frac{5}{2}\right)^m < \left(\frac{5}{2}\right)^n$ $\qquad m < n$

При решении обращается внимание на основание (какое оно больше 1 или меньше 1) и учитывается 6-ое свойство показательной функции

ЛЕКЦИЯ 2. Показательные уравнения и неравенства.

- Определение показательного уравнения.
- Решение простейшего показательного уравнения.
- Способы сведения показательного уравнения к простейшему (примеры).
- Способ замены.
- Системы уравнений.
- Простейшие показательные неравенства.
- Примеры решения показательных неравенств.
- Графический способ решения неравенств.

Уравнения, содержащие переменную в показателе степени, называются показательными.

Например: $2^{2x-1} - 4 = 2^x$; $\quad 5^{\sqrt{x}} = 1$ и т.д.

При решении показательных уравнений применяются разные методы решения, которые мы рассмотрим на конкретных примерах.

1. $2^{3x-8} = 64$, т.к. $64 = 8 \cdot 8 = 2^3 \cdot 2^3 = 2^6$, то $2^{3x-8} = 2^6$, мы привели обе части уравнения к одинаковому основанию, а так как степени равны, равны их основания, то равны и показатели степеней, т.е $3x - 8 = 6; \ \Rightarrow \ 3x = 14 \ \Rightarrow \ x = \frac{14}{3} = 4\frac{2}{3}$

Ответ: $4\frac{2}{3}$

Показатель степени может быть любым числом, поэтому проверку делать не надо.

Ответ: $4\frac{2}{3}$

2. $0,1^{2x} \cdot 10^{3x-2} = 100$ В левой части $0,1 = 10^{-1}$ и тогда $\left(10^{-1}\right)^{2x} \cdot 10^{3x-2} = 10^2$, так как при умножении степеней с одинаковым основанием их показатели складываются, при возведении степени в степень показатели перемножаются, то $10^{-2x+3x-2} = 10^{-2} \ \Rightarrow \ -2x + 3x - 2 = -2 \ \ x = 0$, это и есть решение уравнения. Ответ: $x = 0$. $\quad 3^{2x} - 2 \cdot 3^{2x-1} - 2 \cdot 3^{2x-2} = 1$ используя свойства степени, имеем $3^{2x} - 2 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{-1} - 2 \cdot 3^{2x} \cdot 3^{-2} = 1$ в левой части каждое слагаемое содержит общий множитель 3^{2x}. Вынесем 3^{2x} за скобки, получим: $3^{2x}\left(1 - 2 \cdot 3^{-1} - 2 \cdot 3^{-2}\right) = 1; \quad 3^{2x}\left(1 - \frac{2}{3} - \frac{2}{9}\right) = 1; \quad 3^{2x} \cdot \frac{9 - 6 - 2}{9} = 1$

$$3^{2x}\cdot\frac{1}{9}=1 \qquad 3^{2x}=9 \qquad 3^{2x}=3^2$$

$$2x=2 \qquad x=1$$

Ответ: $x=1$. Этот метод так и называется – метод вынесения общего множителя за скобки..

3 $2\cdot4^{2x}-17\cdot4^x+8=0$ так как $4^{2x}=\left(4^x\right)^2$, то уравнение $2\cdot\left(4^x\right)^2-17\cdot4^x+8=0$ представляет квадратное уравнение относительно 4^x. Пусть $4^x=t$, тогда $2\cdot t^2-17t+8=0$ решаем квадратное уравнение относительно переменной *t*.

$$Д=17^2-4\cdot8\cdot2=289-64=225$$

$$t_{1,2}=\frac{17\pm15}{4};\quad t_1=8;\quad t_2=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$$

Подставим значения *t* в равенство $4^x=t$

$$4^x=8 \quad\Rightarrow\quad 2^{2x}=2^3;\quad 2x=3;\quad x=\frac{3}{2}=1,5$$

$$4^x=\frac{1}{2};\quad 2^{2x}=2^{-1};\quad 2x=-1;\quad x=-\frac{1}{2}$$

Ответ: $x=1,5;\ \ x=-0,5$. При решении уравнения применим первоначально сведения к квадратному уравнению. В следующих примерах постараемся самостоятельно определять метод решения и затем с подсказкой преподавателя выполнять решение этого уравнения.

3. $\sqrt{3^x}=\frac{1}{\sqrt{27}}$; приведем к одинаковому основанию «3»

$$3^{\frac{x}{2}}=\frac{1}{3^{\frac{3}{2}}}$$

$$3^{\frac{x}{2}}=3^{-\frac{3}{2}}$$

$$\frac{x}{2}=-\frac{3}{2}$$

$x=-3$. Ответ: $x=-3$

4. $2^x\cdot5^x=1000$; $10^x=10^3$; $x=3$. Ответ: $x=3$

5.

$$3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=7^x+7^{x+1}+7^{x+2}$$

$$3^x+3^x\cdot3+3^x\cdot3^2=7^x+7^x\cdot7+7^x\cdot7^2$$

$$3^x\left(1+3+9\right)=7^x\left(1+7+49\right)$$

$3^x\cdot13=7^x\cdot57; 3^x\neq0$ и $7^x\neq0$ можно разделить обе части уравнения на 3^x или 7^x, получим:

$$\frac{3^x}{7^x}=\frac{57}{13} \qquad \left(\frac{3}{7}\right)^x=\frac{57}{13}$$

$$x\cdot\lg\frac{3}{7}=\lg\frac{57}{13}$$

$x=\dfrac{\lg\frac{57}{13}}{\lg\frac{3}{7}}=-1,74$. Ответ: $x=-1,74$

6.

$4+2^x=2^{2x-1}$ $\quad 4+2^x=2^{2x}\cdot 2^{-1}$ $\quad 2^{2x}\cdot\frac{1}{2}-2^x-4=0$

$(2^x)^2\cdot\frac{1}{2}-2^x-4=0$

Пусть $2^x=t$, тогда $\frac{1}{2}t^2-t-4=0$

$t^2-2t-8=0$ $\quad Д=4+4\cdot 8=36$

$t_{1,2}=\frac{2\pm 6}{2};$ $\quad t_1=4$ $\quad t_2=-2$

$2^x=4;$ $\quad 2^x=2^2;$ $\quad \underline{x=2}$ $\quad 2^x=-2$ – уравнение не имеет решения, т.к. $2^x>0$ всегда. Ответ: $x=2$

Самостоятельно:

$\left(\frac{2}{5}\right)^x=\frac{25}{4}$

$\left(\frac{2}{5}\right)^x=\left(\frac{2}{5}\right)^{-2}$

$\underline{x=-2}$

$33\cdot 2^{x-1}-2^{x+1}=29$

$33\cdot 2^x\cdot 2^{-1}-2^x\cdot 2^1=29$

$2^x\left(\frac{33}{2}-2\right)=29$

$2^x\cdot\frac{29}{2}=29$ $\quad 2^x=29\cdot\frac{2}{29}$

$2^x=2;$ $\quad \underline{x=1}$

3. $\quad 9^{x-1}+3^{x+2}=90$ $\quad 9^x\cdot 9^{-1}+3^x\cdot 3^2=90$ $\quad (3^x)^2\cdot\frac{1}{9}+3^x\cdot 9=90$

$3^x=t$

$\frac{1}{9}t^2+9t-90=0$ $\quad t^2+81t-810=0$ $\quad Д=81^2+4\cdot 810=9801$

$t_{1,2}=\frac{-81\pm 99}{2};$ $\quad t_1=\frac{-81+99}{2}=\frac{18}{2}=9$

$t_2=\frac{-81-99}{2}=\frac{-180}{2}=-90$ $\quad 3^x=9;$ $\quad 3^x=3^2;$ $\quad x=2$

$3^x\neq -90$, уравнение не имеет решения, т.к. $3^x>0$ всегда

Ответ: $x=2$

Дополнительно

4

$$3^{3x+1}-4\cdot 27^{x-1}+9^{1,5x-1}-80=0$$

$$3^{3x}\cdot 3-4\cdot 3^{3x}\cdot 27^{-1}+3^{3x}\cdot 9^{-1}-80=0$$

$$3^{3x}\cdot 3-3^{3x}\cdot \frac{4}{27}+3^{3x}\cdot \frac{1}{9}=80$$

$$3^{3x}\left(3-\frac{4}{27}+\frac{1}{9}\right)=80$$

$$3^{3x}\cdot \frac{81-4+3}{27}=80$$

$$3^{3x}\cdot \frac{80}{27}=80;\qquad 3^{3x}=80\cdot \frac{27}{80};$$

$$3^{3x}=27;\qquad 3^{3x}=3^3;\qquad 3x=3;\qquad x=1$$

Ответ: $x=1$.

Показательные неравенства.

<u>Определение</u>. Неравенства, содержащие переменную в показателе степени, называются показательными.

При решении показательных неравенств используются свойства показательной функции, свойства степени. Рассмотрим простейшие методы решения показательных неравенств.

а) $5^{x-1}>\left(\frac{1}{25}\right)^{4-x}$

приведём обе части неравенства к одинаковым основаниям. Учитывая, что $\frac{1}{25}=5^{-2}$, то $5^{x-1}>\left(5^{-2}\right)^{4-x}\Rightarrow 5^{x-1}>5^{-2(4-x)}$, т.к. $\left(a^m\right)^n=a^{m\cdot n}$ (свойство степени). Основание 5 > 1 $\Rightarrow$ функция возрастающая и поэтому $x-1>-2(4-x)$.

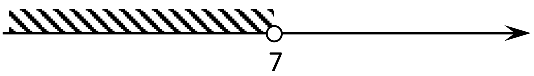
Решаем неравенство первой степени.

$$x-1>-8+2x$$

$$x-2x>-8+1$$

$$-x>-7$$

$$x<7$$



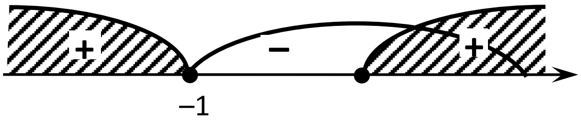
$x\in(-\infty;7)$

б) $0,7^{x^2-1}\le 1$. Приведём к одинаковым основаниям. Зная, что $a^0=1$, представим правую часть неравенства, как $0,7^0$ и тогда

$$0,7^{x^2-1}\le 0,7^0$$

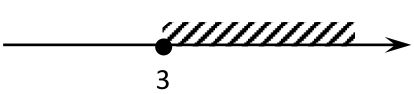
так как 0,7 < 1, то функция убывающая и значит $x^2-1\ge 0$. Это квадратное неравенство, которое решается методом интервалов.

$$(x-1)(x+1)\ge 0$$



$x\in(-\infty;-1]\cup[1;+\infty)$

в) $3^{x+1}-3^x\le 54$ Используя свойство степени, имеем $3^x\cdot 3^1-3^x\le 54$; вынесем 3^x за скобки $3^x(3-1)\le 54\ \Rightarrow\ 3^x\cdot 2\le 54\ \Rightarrow\ 3^x\le 27\ \Rightarrow\ 3^x\le 3^3$, т.к. 3 > 1, то $x\le 3$

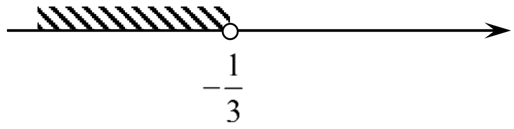


$x\in[3;+\infty)$

Затем решаются неравенства

$1)\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} > 4,5^{x-2}$, т.к. $4,5=\frac{9}{2}$, то $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} > \left(\frac{9}{2}\right)^{x-2}$; $\left(\frac{2}{9}\right)^{2x+3} > \left(\frac{2}{9}\right)^{-x+2}$

Учитывая, что $\frac{2}{9}<1$, то



$$2x+3<-x+2$$
$$3x<-1$$
$$x<-\frac{1}{3}$$

$$x\in\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$$

1) $9^{0,5x^2-3}<27$, приведем к основанию 3 $3^{2\left(0,5x^2-3\right)}<3^3$, т.к. 3 > 1, то

$$2\left(0,5x^2-3\right)<3$$
$$x^2-6<3$$
$$x^2-9<0$$
$$(x-3)(x+3)<0$$

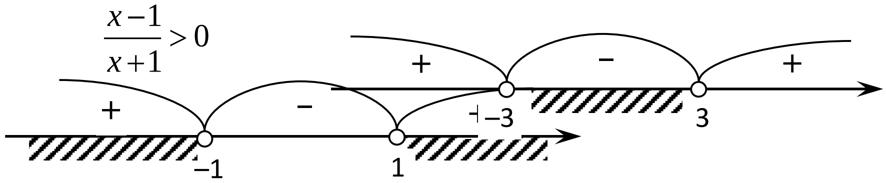
$$x\in(-3;3)$$

2.9

$$2^{\frac{x-1}{x+1}}>1$$

$2^{\frac{x-1}{x+1}}>2^0$, т.к. 2 > 1, то

$$\frac{x-1}{x+1}>0$$



$$x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$$

3)

$$\left(\frac{3}{7}\right)^{x-1}\cdot\left(\frac{49}{6}\right)^{x-1}>\frac{4}{49}.$$

В левой части неравенства надо умножить степени с одинаковым показателем. Т.к.

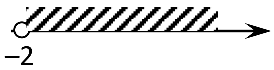
$a^n \cdot b^n = (ab)^n$, то $\left(\frac{3}{7} \cdot \frac{49}{6}\right)^x > \frac{4}{49}$

Сокращаем дроби и получим

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x > \frac{4}{49}$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x > \left(\frac{2}{7}\right)^2$$

$$\left(\frac{7}{2}\right)^x > \left(\frac{7}{2}\right)^{-2}$$, т.к. $\frac{7}{2} > 1$, то



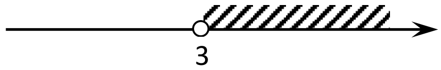
$x > -2$ $\qquad$ $x \in (-2; +\infty)$

4)

$$0{,}3^{3x-7} < \left(\frac{100}{9}\right)^{-1}$$

$$0{,}3^{3x-7} < \left(\frac{10}{3}\right)^{-2}$$

$$\left(\frac{3}{10}\right)^{3x-7} < \left(\frac{3}{10}\right)^2$$, т.к. $\frac{3}{10} < 1$, то



$3x-7>2$

$3x>9$

$x>3$

$x\in(3;+\infty)$

Самостоятельно:

1) $0,4^{x-2}\le\frac{125}{8}$

2) $2,5^{\frac{x+1}{x-2}}\ge1$

3) $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x-1}>\frac{1}{32}$

4) $7^{x}<12,7$

<u>ЛЕКЦИЯ 3. Логарифмы и их свойства. Логарифмическая функция.</u>

- Определение логарифма.
- Примеры вычисления логарифмов.
- Десятичный логарифм.
- Основное логарифмическое тождество.
- Основные свойства логарифмов.
- Переход к новому основанию.

- Примеры вычислений и упрощения логарифмических выражений.
- Определение логарифмической функции.
- Свойства логарифмической функции.
- График логарифмической функции.
- Сравнение логарифмов.

Итак, мы знаем, что $a^n = b$, а если n – неизвестно? Как можно найти показатель степени из равенства: $2^x = 14$? Никакие известные нам действия не помогут. Вот поэтому вводится новое понятие, понятие логарифма.

Определение: Логарифмом числа называется показатель степени, в которую надо возвести основание, чтобы получить данное число: $\log_a b = c;\quad a > 0$ согласно определения имеем $a^c = b$, и тогда $a^{\log_a b} = b$ – основное логарифмическое тождество.

$5^{\log_5 2} = 2; \qquad 0,2^{\log_{0,2} 3} = 3$.

Логарифмы обладают свойствами:

Логарифмы отрицательных чисел не существуют (положительное число в любой степени есть число положительное).

Логарифм единицы при любом основании равен нулю, $\log_a 1 = 0$, т.к $a^0 = 1$.

Логарифм самого основания равен 1, то есть $\log_a a = 1$, т.к. $a^1 = a$

Логарифм произведения при любом основании равен сумме логарифмов сомножителей при этом же основании. $\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$

Покажем, что это так:

Пусть $\log_a N_1 = n_1$ и $\log_a N_2 = n_2$; по определению логарифма имеем $N_1 = a^{n_1}$ и $N_2 = a^{n_2}$

$N_1 \cdot N_2 = a^{n_1} \cdot a^{n_2} = a^{n_1+n_2}$; отсюда $n_1 + n_2 = \log_a(N_1 \cdot N_2)$ и тогда $\log_a(N_1 \cdot N_2) = \log_a N_1 + \log_a N_2$, что и требовалось доказать!

Логарифм дроби при любом основании равен разности логарифма числителя и логарифма знаменателя при этом же основании

$$\log_a \frac{N_1}{N_2} = \log_a N_1 - \log_a N_2$$

Логарифмом степени при любом основании равен произведению показателя степени на логарифм основания степени. $\log_a N^m = m \cdot \log_a N$.

Логарифм числа с основанием 10 называется десятичным и имеет особую запись.

$$\log_{10} b = \lg b$$

По определению логарифма $a^{\log_a N} = N$, используя свойство логарифмов имеем

$\log_b N = \log_a N \cdot \log_b a$

и тогда $\boxed{\log_a N = \dfrac{\log_b N}{\log_b a}}$ и называется формулой перехода от одной системы логарифмов к другой. Эта формула часто применяется при решении логарифмических уравнений и неравенств, что даёт возможность вычисления выполнять при помощи МК.

Решить: $\log_{1,24} 618,7 = \dfrac{\lg 618,7}{\lg 1,24} = 29,88$

$\log_{1,2} 0,784 = -1,3347 \qquad \log_{0,34} 11,78$

Самостоятельно: $\log_{0,38} 6,24; \qquad \log_{1,2} 0,00412,$

Замечания: 1) $\log_a b = \dfrac{\log_b b}{\log_b a} = \dfrac{1}{\log_b a}$, т.е. 2) $\boxed{\log_{a^n} b = \dfrac{1}{n}\log_a b}$ 3) $\boxed{\log_a b = \dfrac{1}{\log_b a}}$

Используя определение логарифма, можно находить переменную.

Рассмотрим на конкретных примерах

$\log_{\sqrt{3}} x = -2$ по определению логарифма $\left(\sqrt{3}\right)^{-2} = x \;\Rightarrow\; x = \left(3^{\frac{1}{2}}\right)^{-2} = 3^{-1} = \dfrac{1}{3}$

$\log_x \dfrac{1}{27} = -3$ по определению логарифма $x^{-3} = \dfrac{1}{27} \;\Rightarrow\; \dfrac{1}{x^3} = \dfrac{1}{27};\quad x^3 = 27;\quad x = 3$

1) $\log_{\sqrt[3]{2}} 64 = x$ по определению логарифма

$$\left(\sqrt[3]{2}\right)^x = 64 \;\Rightarrow\; 2^{\frac{1}{3}x} = 64 \;\Rightarrow\; 2^{\frac{1}{3}x} = 2^6;\quad \frac{1}{3}x = 6;\quad x = 18$$

2) $\log_{\sqrt{x}} 8 = 3;\quad \left(\sqrt{x}\right)^3 = 8;\quad \left(x^{\frac{1}{2}}\right)^3 = 8;\quad x^{\frac{3}{2}} = 8;\quad \left(x^{\frac{3}{2}}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(2^3\right)^{\frac{2}{3}};\quad x = 2^2 = 4$

3) $\log_{\frac{2}{3}} 2,25 = x;\quad \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = 2\dfrac{1}{4};\quad \left(\dfrac{2}{3}\right) = \dfrac{9}{4};\quad \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{3}{2}\right)^2;\quad \left(\dfrac{2}{3}\right)^x = \left(\dfrac{2}{3}\right)^{-2};\quad \Rightarrow\; x = -2$

4) $\log_{5\sqrt[3]{5}} x = -0,8;\quad \left(5\sqrt[3]{5}\right)^{-0,8} = x;\quad x = \left(5\cdot 5^{\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(5^{1\frac{1}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = \left(5^{\frac{4}{3}}\right)^{-\frac{4}{5}} = 5^{-\frac{16}{15}} = \dfrac{1}{5^{\frac{16}{15}}} = \dfrac{1}{5^{1\frac{1}{15}}} = \dfrac{1}{5\sqrt[15]{5}};$

5) $\log_{0,6} 4\dfrac{17}{27} = x;\quad 0,6^x = 4\dfrac{17}{17};\quad \left(\dfrac{3}{5}\right)^x = \dfrac{125}{27};\quad \left(\dfrac{3}{5}\right)^x = \dfrac{5^3}{3^3};\quad \left(\dfrac{3}{5}\right)^x = \left(\dfrac{5}{3}\right)^3;\quad \left(\dfrac{3}{5}\right)^x = \left(\dfrac{3}{5}\right)^{-3};\quad x = -3$

6) $\log_4 36 + \log_2 10 - 2\log_2\sqrt{15} + 4^{\frac{1}{2}\log_2 5} = \log_{2^2} 6^2 + \log_2 10 - 2\cdot\dfrac{1}{2}\log_2 15 + 2^{2\cdot\frac{1}{2}\log_2 5} =$

$$= \frac{2}{2}\log_2 6 + \log_2 10 - \log_2 15 + 2^{\log_2 5} = \log_2\frac{6\cdot 10}{15} + 5 = \log_2 4 + 5 = 2 + 5 = 7$$

7) $0,04^{1+\log_5 0,02} - \sqrt{2}^{\log_2 25} = \left(\dfrac{1}{25}\right)^{1+\log_5\frac{1}{50}} - 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} = \dfrac{1}{25}\cdot\left(\dfrac{1}{25}\right)^{\log_5\frac{1}{50}} - 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} = \dfrac{1}{25}\cdot 5^{-2\log_5\frac{1}{50}} - 2^{\frac{1}{2}\log_2 25} =$

$$= \frac{1}{25}\cdot\left(\frac{1}{50}\right)^{-2} - 25^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{25}\cdot 2500 - 5 = 100 - 5 = 95$$

1. *Логарифмирование выражений.*

Определение: Действие нахождения логарифма числа называется действием логарифмирования.

Рассмотрим на примере.

Пусть дано число в общем виде

$$x = \frac{a^3\cdot b^2\cdot\sqrt[5]{(a+b)^2}}{(a-b)^4\cdot\sqrt{a^2+b^2}}$$

Найдём логарифм числа x, используя свойства логарифмов (логарифм дроби, произведения, степени при любом основании)

Так как можно находить логарифм при любом основании, то договорились основание не писать.

$$\log x = \log\left(a^3\cdot b^2\sqrt[5]{(a+b)^2}\right) - \log\left((a-b)^4\cdot\sqrt{a^2+b^2}\right) = \log a^3 + \log b^2 + \log\sqrt[5]{(a+b)^2} - \log(a-b)^4 -$$

$$-\log\sqrt{a^2+b^2} = 3\log a + 2\log b + \frac{2}{5}\log(a+b) - 4\log(a-b) - \frac{1}{2}\log\left(a^2+b^2\right)$$

Однако так подробно не следует каждый раз расписывать, а сразу следует применять свойства логарифмов и писать результат.

Например: $x = \dfrac{2a^{-5}b^{\frac{2}{3}}\sqrt[3]{(a-b)^2}}{3(a-b)^4}$

$$\log x = \log 2 - 5\log a + \frac{2}{3}\log b + \frac{2}{3}\log(a-b) - \log 3 - 4\log(a-b)$$

2. *Потенцирование выражений*

Действие нахождения числа по его логарифму называется действием потенцирования. Как видно: потенцирование – есть обратное действие логарифмированию.

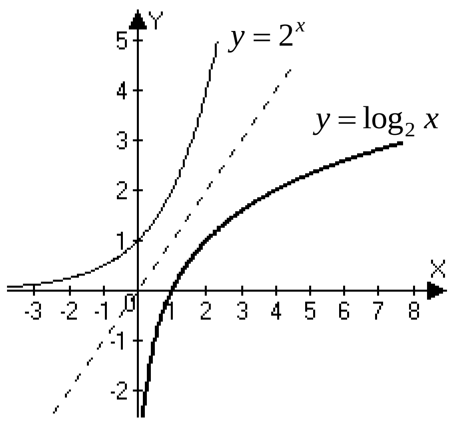
Пример. $\log x = \dfrac{2}{5}\log(a+b) - 2\log a - \dfrac{1}{2}\log b$

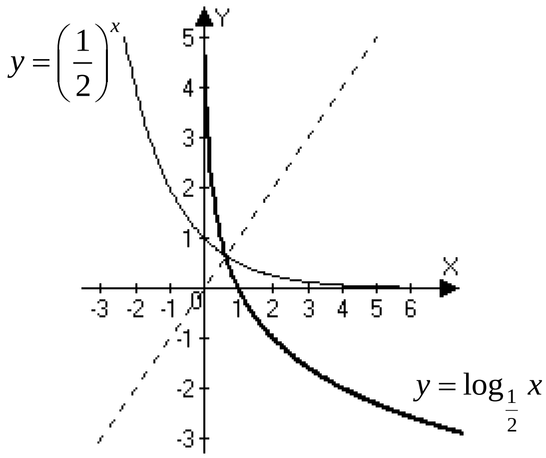
Знак минус говорит о том, что число представлено дробью, коэффициенты перед логарифмом – показатели степени.

И тогда $x = \dfrac{(a+b)^{\frac{2}{5}}}{a^2 \cdot b^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{\sqrt[5]{(a+b)^2}}{a^2 \cdot \sqrt{b}}$;

Функция, обратная показательной, называется логарифмической $y = a^x, a \neq 1$ и $a > 0$ – показательная функция $x = \log_a y$, поменяем местами x и y, получаем $y = \log_a x,\quad a \neq 1,\quad a > 0$ – это и есть логарифмическая функция.

Знаем, что графики обратных функций симметричны относительно биссектрисы I и III координатных углов. Воспользовавшись этим свойством изобразим графики логарифмической функции при a > 1 и a < 1





Свойства

1. $D(y)$: $x \in (0; +\infty)$
2. $E(y)$: $y \in (-\infty; +\infty)$
2. при $x = 1 \quad y = 0$

Свойства (1 – 3) являются общими свойствами логарифмических функций и не зависят от основания (больше 1 или меньше 1).

Остальные свойства рассматриваются в зависимости от основания

a > 1	0 < a < 1
3. Функция монотонно возрастающая	4. Функция монотонно убывающая
4. При $0 < x < 1 \quad y < 0$	5. При $0 < x < 1 \quad y > 0$
$x > 1 \quad y > 0$	$x > 1 \quad y < 0$
5. При $x \to \infty$	6. При $x \to \infty$

$y \to \infty$	$y \to -\infty$
большему числу соответствует и больший логарифм	большему числу соответствует меньший логарифм

Используя свойства логарифмической функции (свойства логарифмов), определите знак числа

1. $\log_2 3$
2. $\log_{1,4} 0,72$
3. $\log_{0,34} 14,7$
4. $\log_{0,29} 0,786$

Ответы:

1. > 0
2. < 0
3. < 0
4. > 0

ЛЕКЦИЯ 4. Логарифмические уравнения и неравенства.

- Определение логарифмического уравнения.
- Решение простейшего логарифмического уравнения.
- Способы сведения логарифмического уравнения к простейшему (примеры).
- Способ замены.
- Простейшие логарифмические неравенства.
- Примеры решения логарифмических неравенств.
- Системы уравнений.

Логарифмические уравнения и неравенства содержат переменную под знаком логарифма.

При решении логарифмических уравнений следует помнить, что $\log_a f(x) = \log_a g(x)$ имеет смысл при $f(x) > 0$ и $g(x) > 0$. Говорят, что область допустимых значений неизвестного (ОДЗ) для данного уравнения является множеством чисел, удовлетворяющих системе неравенств

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Потенцируя данное уравнение, приходим к уравнению $f(x) = g(x)$, для которого ОДЗ является более широким множеством, и, следовательно можно получить посторонние корни. Поэтому нужно либо сначала найти ОДЗ и затем посторонние корни отбросить, либо просто проверить все полученные корни, а затем записать ответ.

Рассмотрим методы решения логарифмических уравнений на примерах.

1) $\log_{\frac{1}{4}}\left(x^2+6\right) = -2$

По определению логарифма можно записать,

$$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = x^2+6$$

$$x^2+6=16$$

$$x^2+6-16=0$$

$$x^2-10=0$$

$x=\pm\sqrt{10}$ надо помнить, что логарифма отрицательных чисел не существует. Так как $x^2+6>0$ всегда, то полученные значения $x=\pm\sqrt{10}$ оба являются корнями уравнения. Ответ: $\pm\sqrt{10}$

2) По определению логарифма, можно решить уравнение:

$\log_5\left(6-5^x\right)=1-x$; отсюда $5^{1-x}=6-5^x$

получили показательное уравнение $5\cdot5^{-x}=6-5^x$, решим его: $\dfrac{5}{5^x}=6-5^x$

приведём к общему знаменателю $5^x\neq0 \;\Rightarrow\; 5=\left(6-5^x\right)\cdot5^x \qquad 5=6\cdot5^x-\left(5^x\right)^2$

Обозначим $5^x=t$, получим

$5=6t-t^2; \qquad t^2-6t+5=0$

$$D=36-20=16$$

$t_{1,2}=\dfrac{6\pm4}{2}; \quad t_1=5; \quad t_2=1$ и тогда $5^x=5 \;\Rightarrow\; x=1; \quad 5^x=1; \quad 5^x=5^0; \quad x=0$.

Ответ: $x=1 \quad x=0$

3) $\lg\left(3x-2\right)+\lg2=2-\lg\left(x+1\right)$

Используя определение логарифма, можно число 2 записать $2=\lg100$ и тогда имеем равносильное уравнение $\lg\left(3x-2\right)+\lg2=\lg100-\lg\left(x+1\right)$. Применим свойства логарифмов и тогда

$$\lg\left(\left(3x-2\right)\cdot2\right)=\lg\frac{100}{x+1}$$

отсюда следует, что

$$2\left(3x-2\right)=\frac{100}{x+1}$$

решаем уравнение при $x\neq-1$

$$2\left(3x-2\right)\left(x+1\right)=100$$

$$\left(3x-2\right)\left(x+1\right)=50$$

$$3x^2-2x+3x-2=50$$

$$3x^2+x-52=0$$

$$D=1+4\cdot3\cdot52=625$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm25}{6}; \;\; x_1=4; \;\; x_2=-\frac{26}{6}=-\frac{13}{3}$$

потенцирование выражений может привести к появлению посторонних корней, поэтому полученные корни нужно проверить.

Проверка:

$x=4$

$\lg10+\lg2=\lg100-\lg5$

$10\cdot2=\dfrac{100}{5}$

$20=20$ верно.

$x=-\dfrac{13}{3}$ – посторонний корень, так как логарифма отрицательных чисел не существует.

Ответ: $x=4$.

Можно указать другой метод нахождения корней уравнения, основанный на предварительном нахождении всех значений *x*, для которых имеет смысл уравнение, то есть указать область допустимых значений переменной (ОДЗ).
По свойству логарифмов:

$$\begin{cases} 3x-2>0 \\ x+1>0 \end{cases} \quad \begin{cases} 3x>2 \\ x>-1 \end{cases} \quad \begin{cases} x>\dfrac{2}{3} \\ x>-1 \end{cases} \Rightarrow \quad x>\frac{2}{3} \qquad x\in\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$$

и тогда можно сказать, что ОДЗ удовлетворяет корень $x = 4$. Проверив этот корень, получаем верное равенство.
<u>Замечание</u>. Пользоваться указанием ОДЗ удобно для более простых выражений, стоящих под знаком логарифма.

При решении уравнения применяется метод решения, известный как метод потенцирования.

4)

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)+2=-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$$

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3)+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=-\log_{\frac{1}{2}}(x+2)$$

т.к. $2=\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}$

Используя свойства логарифмов имеем $\log_{\frac{1}{2}}\left((2x-3)\cdot\frac{1}{4}\right)=\log_{\frac{1}{2}}(x+2)^{-1}$

и тогда

$$\frac{1}{4}(2x-3)=\frac{1}{x+2}, \qquad x\neq-2$$

$$\frac{1}{4}(2x-3)(x+2)=1 \qquad\qquad (2x-3)(x+2)=4$$

$$2x^2-3x+4x-6-4=0 \qquad\qquad 2x^2+x-10=0$$

$$D=1+80=81$$

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm9}{4}; \quad x_1=2; \; x_2=-2,5$$

Проверка:

$x=2$

$$\log_{\frac{1}{2}}1+\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}=-\log_{\frac{1}{2}}4$$

$x = -2,5$ – посторонний корень, так как логарифма отрицательных чисел не существует.

$$1\cdot\frac{1}{4}=4^{-1}$$

$\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$ верно.

Ответ: $x=2$

5) $x^{2\lg x-1,5}=\sqrt{10}$

данное уравнение можно назвать и показательным и логарифмическим.

Прологарифмируем обе части уравнения по основанию 10, получаем равносильные ему логарифмическое уравнение

$$\left(2\lg x-1{,}5\right)\cdot\lg x=\frac{1}{2}\lg 10$$

$$2\lg^2 x-1{,}5\lg x=\frac{1}{2}\cdot 1$$

$$2\lg^2 x-1{,}5\lg x-\frac{1}{2}=0$$

$$4\lg^2 x-3\lg x-1=0$$

Получаем квадратное уравнение относительно $\lg x$

Пусть $\lg x=t$, тогда $4t^2-3t-1=0$

$D=9+16=25;\qquad t_{1,2}=\dfrac{3\pm 5}{8}$

$t_1=1;\quad t_2=-\dfrac{2}{8}=-\dfrac{1}{4}$

И тогда $\lg x=1\ \Rightarrow\ x=10$

если $\lg x=-\dfrac{1}{4}$, то $x=10^{-\frac{1}{4}}$ $x=10^{-\frac{1}{4}}=\dfrac{1}{\sqrt[4]{10}}$

Ответ: 10; $\dfrac{1}{\sqrt[4]{10}}$.

6) $2\log_x 25-3\log_{25} x=1$

Приведём логарифмы к одинаковому основанию. Известно, что $\log_a b=\dfrac{1}{\log_b a}$ и тогда

$2\cdot\dfrac{1}{\log_{25} x}-3\log_{25} x=1$ <u>ОДЗ</u>: $x>0\quad x\neq 1$

$2-3\left(\log_{25} x\right)^2=\log_{25} x$

$3\log_{25}^2 x+\log_{25} x-2=0$

Пусть $\log_{25} x=t,\qquad 3t^2+t-2=0$

$D=1+24=25;\qquad t_{1,2}=\dfrac{-1\pm 5}{6};$

$t_1=-1;\qquad t_2=\dfrac{4}{6}=\dfrac{2}{3}$

И тогда $\log_{25} x=-1\qquad x=25^{-1}=\dfrac{1}{25}$;

Если $\log_{25} x=\dfrac{2}{3}$, то $x=25^{\frac{2}{3}}=5^{\frac{4}{3}}=5^{1\frac{1}{3}}=5\sqrt[3]{5}$

Ответ: $\dfrac{1}{25};\quad 5\sqrt[3]{5}$

7) $\log_2(2-x)+\log_{\frac{1}{2}}(x-1)=\log_{\sqrt{2}} 3$

Приведём логарифмы к одинаковому основанию. Так как $\log_{a^n} b=\dfrac{1}{n}\log_a b$, то

$\log_2(2-x)+\log_{2^{-1}}(x-1)=\log_{2^{\frac{1}{2}}} 3$ <u>ОДЗ</u>:

$\log_2(2-x)-\log_2(x-1)=2\log_2 3$ $\begin{cases}2-x>0\\ x-1>0\end{cases}$ $\begin{cases}x<2\\ x>1\end{cases}$ $x\in(1;2)$

Используем свойства логарифма и получим

<u>Проверка</u>:

$x=1{,}1$

$\log_2 0{,}9+\log_{\frac{1}{2}} 0{,}1=\log_{\sqrt{2}} 3$

$\log_2 0{,}9-\log_2 0{,}1=2\log_2 3$

$\dfrac{0{,}9}{0{,}1}=9$

$9=9$ верно.   Ответ: $x=1{,}1$

$$\frac{2-x}{x-1}=3^2 \qquad x\neq 1$$

$$2-x=9(x-1)$$

$$2-x=9x-9;\quad 2-x-9x+9=0$$

$$-10x=-11;\qquad 10x=-11$$

$$x=1{,}1$$

<u>Самостоятельно</u>:

1) $\log_2(2x-6)=4-\log_2(x-6)$

$$2x-6=\frac{16}{x-6} \qquad x\neq 6$$

<u>ОДЗ</u>:

$$\begin{cases}2x-6>0\\ x-6>0\end{cases} \qquad \begin{cases}x>3\\ x>6\end{cases}$$

$$x\in(6;+\infty)$$

Как видно x = 1,3 не удовлетворяет ОДЗ и следовательно проверке подлежит корень x = 7,7

$$2x^2-6x-12x+36=16$$

$$2x^2-18x+20=0$$

$$x^2-9x+10=0 \qquad x_{1,2}=\frac{9\pm\sqrt{41}}{2};\qquad x$$

<u>Проверка</u>:

$x=7{,}7$

$$\log_2 9{,}4=\log_2 16-\log_2 1{,}7$$

$$9{,}4=\frac{16}{1{,}7}$$

$9{,}4=9{,}4$ верно. Ответ: $x=7{,}7$

2) $\log_4 x+\log_x 4=2{,}5$

$$\log_4 x+\frac{1}{\log_4 x}=2{,}5$$

$$\log_4 x=y \quad\Rightarrow\quad y^2-2{,}5y+1=0$$

$$D=6{,}25-4=2{,}25$$

$$y_{1,2}=\frac{2{,}5\pm1{,}5}{2};\qquad y_1=2;\ y_2=\frac{1}{2}$$

$$\log_4^2 x-2{,}5\log_4 x+1=0$$

$$\log_4 x=2 \qquad \log_4 x=\frac{1}{2}$$

$$\underline{x=16} \qquad x=4^{\frac{1}{2}}=\sqrt{4}=2$$

$$\underline{x=2}$$

3) $(\log_3 x)^2+4\log_{\frac{1}{3}} x+3=0$

$$\log_3^2 x-4\log_3 x+3=0$$

$$\log_3 x=t;\quad t^2-4t+3=0 \qquad \log_3 x=3 \qquad \log_3 x=1$$

$$t_1=3;\quad t_2=1 \qquad \underline{x=27} \qquad \underline{x=3}$$

Ответ: $x=27;\ x=3$

4) $x^{\lg x}=10$

$$\lg x\cdot\lg x=\lg 10$$

$$\lg^2 x=1$$

$$\lg x=\pm1;\qquad \lg x=1;\qquad \lg x=-1$$

$$x=10 \qquad x=10^{-1}=0{,}1$$

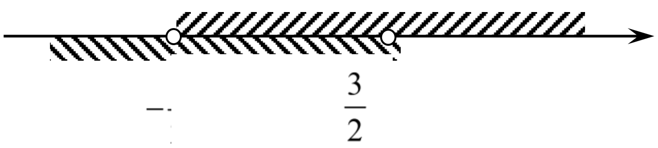
Ответ: 10; 0,1.

Переходим к решению неравенств:

$1)\log_{\frac{1}{4}}(3-2x) > -1$, т.к. $-1 = \log_{\frac{1}{4}}\left(\frac{1}{4}\right)^{-1} = \log_{\frac{1}{4}} 4$

$\log_{\frac{1}{4}}(3-2x) > \log_{\frac{1}{4}} 4$

Учитывая, что $\frac{1}{4} < 1$, то есть функция убывающая, имеем:



$$\begin{cases} 3-2x < 4 \\ 3-2x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} -2x < 4-3 \\ -2x > -3 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x < \frac{3}{2} \end{cases}$$

Ответ: $x \in \left(-\frac{1}{2}; \frac{3}{2}\right)$

2) $3^{4x-1} \cdot \left(\frac{1}{9}\right)^{x} \geq 27$

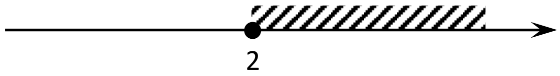
показательное неравенство. Приведём обе части неравенства к одинаковому основанию.

$3^{4x-1} \cdot \left(3^{-2}\right)^{x} \geq 3^{3}$

$3^{4x-1} \cdot 3^{-2x} \geq 3^{3}$

Используем свойства степени получим

$3^{4x-1-2x} \geq 3^{3}$, т.к. 3 > 1, функция возрастающая, то



$4x-1-2x \geq 3$

$2x \geq 4$

$x \geq 2$

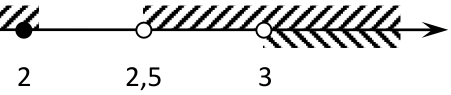
$x \in [2;+\infty)$

Ответ: $x \in [2;+\infty)$

3) $\log_3(2x-5) \leq \log_3(x$

Основания одинаковые, причём 3 > 1, следовательно

$$\begin{cases} 2x-5 \le x-3 \\ 2x-5>0 \\ x-3>0 \end{cases} \quad \begin{cases} x \le 2 \\ x>2, \\ x>3 \end{cases}$$



нет общих значений *x*.

Ответ: неравенство не имеет решения.

<u>Дополнительно</u>:

$y=\sqrt{\lg\left(x^2-7x+13\right)}$

указать область определения функции

$Д\left(y\right): \lg\left(x^2-7x+13\right) \ge 0$

$\lg\left(x^2-7x+13\right) \ge 1$

$$\begin{cases} x^2-7x+13 \ge 1 \\ x^2-7x+13>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-7x+12 \ge 0 \\ x^2-7x+13>0 \end{cases}$$

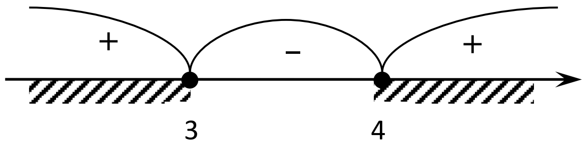
Система второй степени, решаем методом интервалов.

$x^2-7x+12=0$ $\qquad$ $x^2-7x+13=0$

$D=49-48=1$ $\qquad$ $D=49-52=-3<0$

$x_{1,2}=\dfrac{7\pm1}{2}$ $\qquad$ действительных корней нет, т.к. a = 1 > 0, то $x^2-7x+13>0$ всегда

$x_1=4 \quad x_2=3$ $\qquad$ $x\in(-\infty;+\infty)$, а поэтому решение системы зависит от решения первого неравенства.



$$x\in(-\infty;3]\cup[4;+\infty)$$

Ответ: $x\in(-\infty;3]\cup[4;+\infty)$

Решим системы уравнений:

1. $\begin{cases} 2x-y=19 \\ \log_9(2x-1)-2\log_9 y=-0,5 \end{cases}$

ОДЗ:

$$\begin{cases} y>0 \\ x>\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

преобразуем второе уравнение

$$\log_9(2x-1)-2\log_9 y=-0,5$$

Так как $-0,5=\log_9 9^{-0,5}=\log_9\dfrac{1}{\sqrt{9}}=\log_9\dfrac{1}{3}$

$$\log_9(2x-1)-2\log_9 y=\log_9\frac{1}{3}$$

потенцируем уравнение

$$\frac{2x-1}{y^2}=\frac{1}{3} \quad\Rightarrow\quad 3(2x-1)=y^2$$

и тогда данная система запишется

$$\begin{cases} 2x-y=19 \\ 6x-3=y^2 \end{cases}$$

Получили алгебраическую систему второй степени, применим метод подстановки

$$\begin{cases} y=2x-19 \\ 6x-3=(2x-19)^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} y=2x-19 \\ 6x-3=4x^2-76x+361 \end{cases}$$

Решаем второе уравнение относительно *x*

$4x^2-82x+364=0$

$2x^2-41x+182=0$

$D=41^2-8\cdot182=225$

$x_{1,2}=\dfrac{41\pm15}{4}$

$x_1=\dfrac{56}{4}=14; \quad x_2=\dfrac{26}{4}=\dfrac{13}{2}=6,5$

И тогда при $x_1=14 \quad y_1=2\cdot14-19=28-19=9$ (14; 9)

при $x_2=6,5 \quad y_2=2\cdot6,5-19=-6$ (6,5; −6)

Точка (6,5; −6) не удовлетворяет ОДЗ, а поэтому данной системе удовлетворяет точка (14; 9).
Проверим:

$$\begin{cases} 2\cdot 14-9=19 \\ \log_9 27-2\log_9 9=-0,5 \end{cases} \qquad \begin{cases} 19=19 \\ \frac{27}{81}=\frac{1}{3} \end{cases} \qquad \begin{cases} 19=19 \\ \frac{1}{3}=\frac{1}{3} \end{cases} \text{ верно}$$

Ответ: (14; 9).

2. $\begin{cases} \log_2(x-y)=1 \\ 2^x\cdot 3^{y+1}=72 \end{cases}$

Используем определение логарифма.

$$\begin{cases} x-y=2 \\ 2^x\cdot 3^{y+1}=72 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2+y \\ 2^{2+y}\cdot 3^{y+1}=72 \end{cases}$$

Решим уравнение $2^{2+y}\cdot 3^{y+1}=72$

$$2^2\cdot 2^y\cdot 3^y\cdot 3^1=72$$

$$4\cdot 6^y\cdot 3=72$$

$$6^y\cdot 12=72$$

$$6^y=6$$

$y=1$ и тогда $x=2+1=3$

Значения $x=3$ $y=1$ удовлетворяют ОДЗ; проверим

$$\log_2(3-1)=1 \qquad 2^3\cdot 3^2=72$$

$$\log_2 2=1 \qquad 8\cdot 9=72$$

$$1=1 \text{ верно} \qquad 72=72 \text{ верно}$$

Ответ: (3; 1)

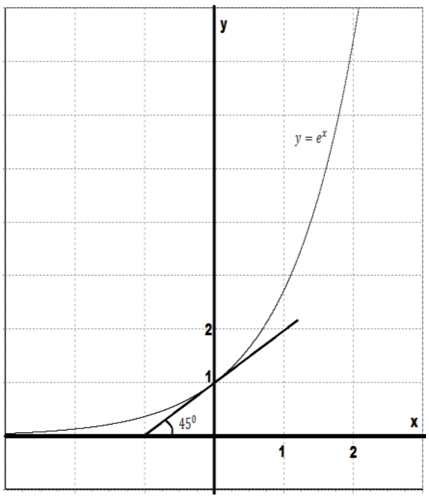
ЛЕКЦИЯ 5. Производная показательной и логарифмической функций Степенная функция.

- Число *e*.
- Функция экспонента, ее производная.
- Натуральный логарифм.
- Производная показательной функции.
- Производная логарифмической функции.
- Первообразная показательной функции.
- Определение степенной функции.
- Свойства и графики степенной функции при различных показателях степени.
- Производная степенной функции.
- Первообразная степенной функции.

Рассмотрим функцию $y=a^x$. В любой точке графика можно построить касательную. В любой точке области определения функция имеет производную.

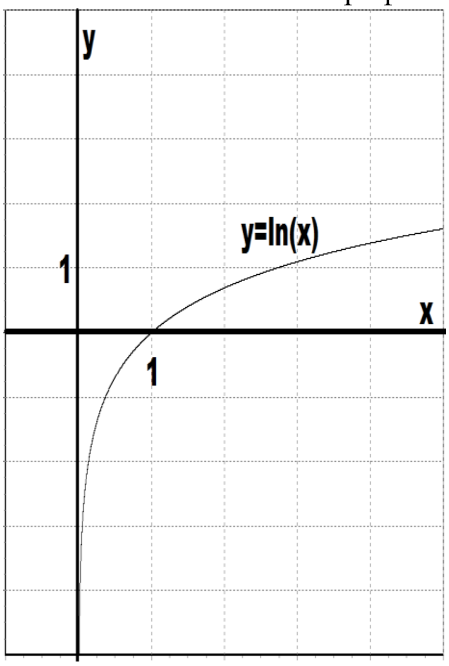
Существует число *a* такое, что функция $y=a^x$ в точке $x=0$ имеет касательную, которая образует угол 45° с положительным направлением оси Ox. Это число является иррациональным числом и обозначается е.

$$a=e\approx 2,7$$



Функция $y = e^x$ называется экспонента. Эта функция возрастает на своей области определения, т.к. e>1 и принимает только положительные значения, как любая показательная функция. $e^x > 0$ при любом *x*. Все свойства степеней выполняются.

Функция экспонента имеет обратную - $y = \log_e x = \ln x$, которая называется натуральный логарифм. Эта функция также возрастает на своей области определения$(x > 0)$, т.к. e>1. Все свойства логарифмов выполняются.



ПРИМЕРЫ:

$$\ln e = 1; \quad \ln 1 = 0; \quad \ln e^5 = 5; \quad \ln \frac{1}{e} = -1; \quad \ln \sqrt{e} = \frac{1}{2}; \quad e^{\ln 2} = 2$$

Производная показательной функции:

$$(e^x)' = e^x$$

$$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$$

ПРИМЕРЫ:

$(4e^x)' = 4e^x$

$(e^x + 2x)' = e^x + 2$

$$\left(e^{5x}\right)' = e^{5x}(5x)' = 5\cdot e^{5x}$$
$$\left(2^{x}\right)' = 2^{x}\cdot\ln 2$$
$$\left(2^{3x}\right)' = 3\cdot 2^{3x}\cdot\ln 2$$

Производная логарифмической функции:

$$(\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\log_a x)' = \frac{1}{x\cdot\ln a}$$

ПРИМЕРЫ:

$$(\lg x)' = \frac{1}{x\cdot\ln 10}$$
$$(\log_3 x)' = \frac{1}{x\cdot\ln 3}$$
$$(\ln(2x+3))' = \frac{1}{2x+3}\cdot(2x+3)' = \frac{2}{2x+3}$$

Первообразная показательной функции:

Таблица первообразных

№	Функция	Первообразная
1	e^x	$e^x + C$
2	a^x	$\dfrac{a^x}{\ln a} + C$
3	$\dfrac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert + C$

ПРИМЕРЫ:

$$f(x) = 5^x \Rightarrow F(x) = \frac{5^x}{\ln 5}$$
$$f(x) = 4\cdot e^{5x} \Rightarrow F(x) = 4\cdot\frac{1}{5}\cdot e^{5x}$$
$$f(x) = \frac{1}{2x-3} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\ln(2x-3)$$

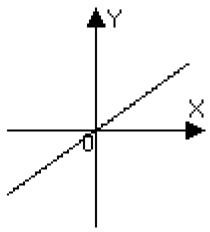
Степенная функция.

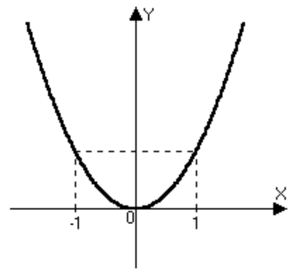
Функция вида $y = x^n$ называется степенной функцией.

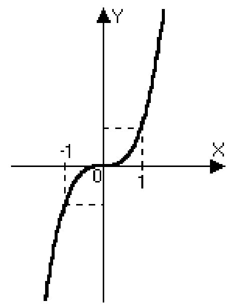
Рассмотрим графики функций при $n = \pm1; \pm2; \pm3; \pm\frac{1}{2}; \pm\frac{1}{3}; \pm\frac{2}{3}$

<u>При n > 0</u>

$n = 1 \quad y = x$ $\qquad$ $n = 2 \quad y = x^2$ $\qquad$ $n = 3 \quad y = x^3$

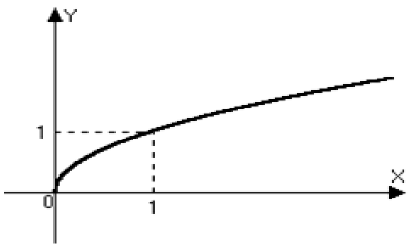


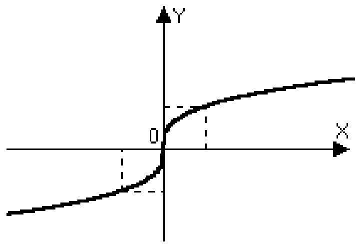


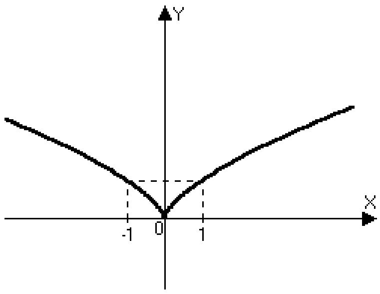


$n=\dfrac{1}{2} \quad y=x^{\frac{1}{2}}=\sqrt{x}\,;\ x \geq 0$ $\qquad$ $n=\dfrac{1}{3} \quad y=x^{\frac{1}{3}}=\sqrt[3]{x}\,;\ x \in R$ $\qquad$ $n=\dfrac{2}{3} \quad y=x^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{x^2}$

$x \in R;\ y>0$



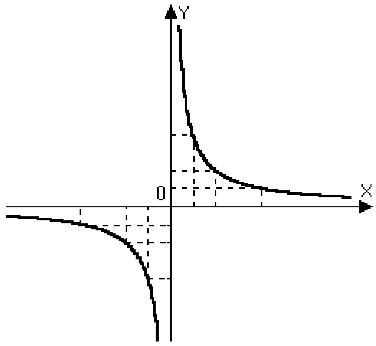


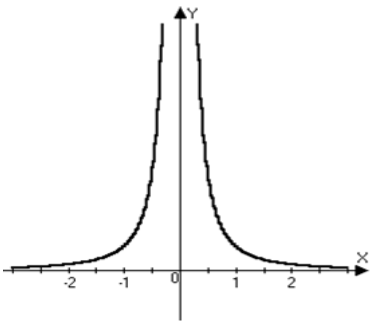


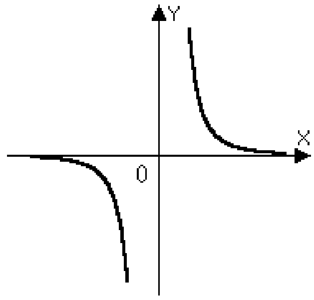
<u>При n < 0</u>

$n=-1;\ y=x^{-1}=\dfrac{1}{x};\quad x \neq 0$ $\qquad$ $n=-2;\ y=x^{-2}=\dfrac{1}{x^2};\quad x \neq 0$ $\qquad$ $n=-3;\ y=x^{-3}=\dfrac{1}{x^3};$

$x \neq 0$

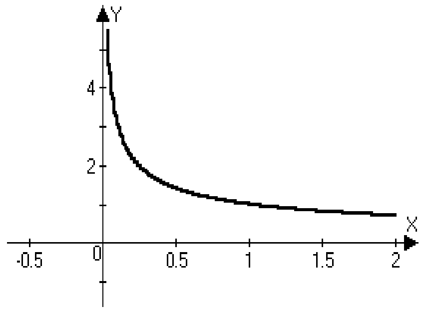


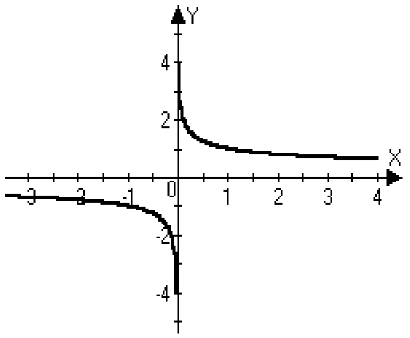


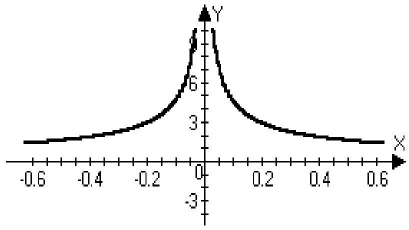


$n=-\dfrac{1}{2};\quad y=x^{-\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{x}};\quad x>0$ $\qquad$ $n=-\dfrac{1}{3};\quad y=x^{-\frac{1}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x}};\quad x \neq 0$

$n=-\dfrac{2}{3};\quad y=x^{-\frac{2}{3}}=\dfrac{1}{\sqrt[3]{x^2}};\quad x \neq 0$







Отметим свойства общие для степенных функций:

1) при $n>0$ $x>0$ функция возрастающая
2) при $n<0$ $x>0$ функция убывающая

Производная степенной функции $x^n = n \cdot x^n$.

Первообразная степенной функции: $\dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$.

Раздел 5. Уравнения и неравенства
Тема 5.1.Уравнения и неравенства

ЛЕКЦИЯ 1-2. Уравнения.

- Равносильность уравнений.
- Теоремы о равносильности
- Преобразование данного уравнения в уравнение-следствие
- Расширение ОДЗ
- Сужение ОДЗ

Равносильность уравнений.

Определение. Два уравнения с одной переменой f(x)=g(x) и h(x)=q(x) называются равносильными, если множества решений этих уравнений совпадают. Два уравнения равносильны, если у них одинаковые корни или если у них нет решений.

Давайте приведем пример равносильных уравнений.

Уравнения $x^2-9=0$ и $(x+3)(3^x-27)=0$ равносильны, т.к. имеют одинаковые корни $x=\pm3$. Уравнения $x^2+9=0$ и $3^x+27=0$, также равносильны, поскольку не имеют действительных корней.

Определение. Если каждый корень уравнения 1: f(x)=g(x) является в тоже время корнем уравнения 2: h(x)=q(x), то уравнение 2 является следствием уравнения 1.

Например, уравнение $x-3=3$ имеет корень $x=6$, а уравнение $(x-3)^2=9$ имеет два корня $x=6$ и $x=0$. Один из корней совпадает, тогда уравнение $(x-3)^2=9$ является следствием уравнения $x-3=3$.

Два уравнения являются равносильными, тогда и только тогда, когда каждое из уравнений является следствием другого уравнения.

Формально, схему решения любого уравнения можно описать так. Исходное уравнение преобразуют в более простое уравнение. Получившееся уравнение преобразуют в еще более простое уравнение и так, пока не получится совсем простое уравнение, которое легко решить. Но стоит заметить, уравнения нельзя преобразовывать как вздумается. Для каждого класса уравнений есть свои правила и требования. Возникает вопрос: совпадают ли корни, полученного в конце уравнения с корнями исходного уравнения? Если все преобразования уравнений были равносильными, то корни совпадут. Что означает, что правильное решение последнего уравнения даст верные корни исходного уравнения.

Если же мы переходили к уравнениям-следствиям, то мы могли потерять корни уравнения, что не позволяет утвердительно ответить на поставленный выше вопрос.

Для определенности, найденные корни последнего полученного уравнения подставляют в исходное уравнение. Если есть корни, которые не удовлетворяют решению, то их называют посторонними и соответственно в ответ не включают.

Решение уравнений обычно осуществляется в три этапа:

Технический. На данном этапе осуществляются преобразования уравнений, по схеме описанной выше. И находят корни последнего (самого простого) уравнения.

Анализ решения. Проводится проверка, все ли преобразования были равносильными.

Проверка. Если анализ выявил, что некоторые преобразования привели к уравнениям-следствиям, то проводится обязательная проверка всех полученных корней прямой подстановкой в исходное уравнение.

Итак, какие преобразования являются равносильными?

Теоремы о равносильности уравнений

Все теоремы, которые мы рассмотрим , уже встречались нам ранее.

Теорема 1. Если какой-либо член уравнения перенести из одной части в другую, поменяв при этом знак на противоположный, то получится уравнение равносильное исходному.

Теорема 2. Если обе части уравнения возвести в одну и ту же нечетную степень, то получится уравнение, равносильное данному.

Теорема 3. Показательное уравнение $a^{f(x)}=a^{g(x)}$, где $a>0$ и $a\neq 1$ равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

Вспомним, что такое "область определения уравнений". Поскольку при выборе корней уравнения она играют почти ключевую роль.

Определение. Областью определения уравнения $f(x)=g(x)$ или областью допустимых значений переменной x называют множество тех значений переменной, при которых одновременно имеют смысл выражения f(x) и g(x).

Теорема 4. Если обе части уравнения f(x)=g(x) умножить на одно и тоже выражение h(x), которое:

а) имеет смысл всюду в области определения уравнения f(x)=g(x),

б) нигде в этой области не обращается в 0, то получится уравнение $f(x)*h(x)=g(x)*h(x)$ равносильное исходному.

Следствие. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и тоже отличное от нуля число, то получится уравнение равносильное данному.

Теорема 5. Если обе части уравнения $f(x)=g(x)$ неотрицательны в области определения уравнения, то после возведения обеих его частей в одну и ту же нечетную степень n получится уравнение, равносильное данному: $f(x)^n=g(x)^n$

Теорема 6. Если f(x)>0 и g(x)>0, то логарифмическое уравнение $\log_a f(x)=\log_a g(x)$, где $a>0$, $a\neq 1$, равносильно уравнению $f(x)=g(x)$.

Преобразование данного уравнения в уравнение-следствие

Уравнения следствия могут возникнуть, если при использовании трех последних теорем не учитывать ограничения указанные в данных теоремах.

1. Уравнение $x-3=3$, имеет один корень $x=6$. Умножив обе части уравнения на выражения вида $(x-a)$, где a – любое число, получим уравнение $(x-3)(x-a)=3(x-a)$. Мы получаем дополнительный корень $x=a$, который является посторонним для исходного уравнения. Причина его появления в том, что мы нарушили условие *теоремы 4.* Мы умножили на выражение, которое может обратиться в нуль, нарушение пункта б) *теоремы 4*.

2. Возведем обе части уравнения $x-3=3$ в квадрат. Получилось уравнение $(x-3)^2=9$, решением которого являются $x=6$ и $x=0$. Опять мы имеем посторонний корень. Мы нарушили условие

теоремы 5: возвели в четную степень, а там сказано, что можно возводить уравнение только в нечетную степень.

3. Рассмотрим уравнение ln(2x−4)=ln(3x−5). Мы можем избавиться от знака логарифма и решить простое линейное уравнение $2x-4=3x-5$, решением которого является $x=1$. Данный корень является посторонним. При решении данного уравнения мы нарушили условие *теоремы 6* (под знаком логарифма должны находиться выражения строго большие нуля).

Для правильного решения уравнения, всегда следует проверять или отыскивать область определения уравнения. Для последнего примера, проверка сводится к системе неравенств:

$2x-4>0$ *и* $3x-5>0$..

Решением данной системы является $x>2$, то есть только числа большие двух могли бы быть решением исходного логарифмического уравнения. В данном примере, мы искусственно расширили область определения исходного уравнения, что делать нельзя.

Давайте приведем примеры причин, когда область определения расширяется:

Освобождение при решении уравнения от знаменателей, содержащих переменную величину.

Освобождение в процессе решения от знаков корней четной степени.

Освобождение в процессе решения от знаков логарифма.

Обязательно нужно делать проверку корней, если:

произошло расширение области определения уравнения,

осуществляется возведение обеих частей в одну и ту же четную степень,

выполняется умножение обеих частей уравнения на одно и то же выражение с переменной.

Стоит заметить, что проверку корней стоит производить всегда (для всех корней уравнения).

Пример.

Решить уравнение: $\sqrt{2x+5}+\sqrt{5x-6}=5$

Решение.

Технический этап решения уравнения. Проведем различные преобразования уравнения.

$$\sqrt{5x-6}=5-\sqrt{2x+5}$$

$$(\sqrt{5x-6})^2=(5-\sqrt{2x+5)^2}$$

$$5x-6=25-10\sqrt{2x+5}+2x+5$$

$$10\sqrt{2x+5}=36-3x$$

$$(10\sqrt{2x+5)^2}=(36-3x)^2$$

$$100\cdot\left(2x+5\right)=1269-216x+9x^2$$

$$9x^2-416x+796=0$$

$$x_1=2;x_2=44\frac{2}{9}$$

Анализ решения.

В процессе решения уравнения дважды возводили в четную степень. Такое преобразование не является равносильным. Также произошло расширение области определения, т.к. в исходном уравнении встречались квадратные корни, которые накладывают свое ограничение. Значит, полученное в результате квадратное уравнение является уравнением следствием. Проверка корней обязательна.

Подставим все полученные корни в исходное уравнение. Проверка корней показывает, равенство верно только при $x_1=2;$ второй корень посторонний.

Ответ: $x=2$.

Проверка корней может быть сложной вычислительной операцией. Как в примере выше, полная проверка второго корня заняла немало времени. В случаях сложных вычислений стоит попробовать найти обходной путь.

Чаще всего (но не всегда), достаточно проверить ОДЗ заданного уравнения.

Пример.

Решить уравнение: $\ln(x+4)+\ln(2x+3)=\ln(1-2x)$.

Решение.

Преобразуем исходное уравнение:

$\ln(x+4)+\ln(2x+3)=\ln(1-2x)$,

$\ln(x+4)(2x+3)=\ln(1-2x)$,

$(x+4)(2x+3)=(1-2x)$,

$2x^2+13x+11=0$,

$x_1=-1$, $x_2=-5,5$.

Область определения была расширена, значит проверку следует произвести. Мы только расширили область определения, поэтому достаточно найти область определения исходного уравнения:

$$\begin{cases} x+4>0 \\ 2x+3>0 \\ 1-2x>0 \end{cases}$$

Первый корень $x=-1$ удовлетворяет данной системе, а вот корень $x=-5,5$ не удовлетворяет уже первому неравенству данной системы, тогда у нас всего один корень.

Ответ: $x=-1$.

Проверка по области определения исходного уравнения не всегда достаточна. Все зависит от преобразований, которые мы проводили, поэтому более надежным способом являет непосредственная подстановка корней уравнения.

При преобразовании уравнений также может происходить потеря корней. Когда такая ситуация может возникнуть?

Деление обеих частей уравнения на одно и тоже выражение $h(x)$ (кроме случая, когда уверены что $h(x)$ не обращается нуль при любых x).

Сужение области определения уравнения в процессе решения.

Бороться с первой причиной довольно просто. Нужно привыкнуть переходить к уравнению вида $h(x)*(f(x)-g(x))$ или вообще стараться не делить на выражения

содержащие x.

Со вторым пунктом чуть сложнее.

Рассмотрим уравнение $\lg x^2=4$.

Решим его, используя определение логарифма: $x^2=10^4$;

$x=\pm100$

Второй способ решения.

Воспользуемся одним из свойств логарифма: $2\lg x=4$; $\lg x=2$; $x=100$. Не трудно заметить, что мы потеряли один из корней. На самом деле мы сузили область определения исходного уравнения. Для уравнения $\lg x^2=4$ $x\neq0$, но для уравнения $2\lg x=4$ $x>0$. Мы выбросили огромный участок возможных решений, то есть сузили область определения. На самом деле верная формула при решении данного уравнения была бы: $2\lg|x|=4$.

При решении уравнений и их преобразовании нужно быть абсолютно уверенным в правильности применения той или иной формулы!

Задачи для самостоятельного решения.

Решить следующие уравнения:

$\sqrt{3x+4}+\sqrt{2x-3}=2$

$\ln(x+2)+\ln(x+4)=\ln(2-3x)$

$\lg x^4 = 8$

<u>ЛЕКЦИЯ 3.Общие методы решения уравнений.</u>

- Замена уравнения $h(f(x))=h(g(x))$ уравнением $f(x)=g(x)$.
- Разложение на множители.
- Введение новой переменной.
- Использование свойств и графиков функций при решении уравнений.
- Изображение на координатной плоскости множества решений уравнений с двумя переменными.
- Системы уравнений. Основные приемы их решения.

Замена уравнения $h(f(x))=h(g(x))$ уравнением $f(x)=g(x)$ применяется, если функция $h(t)$ монотонная, поэтому каждое свое значение принимает один раз. Например, $(2x+2)^7=(5x-9)^7 \Leftrightarrow 2x+2=5x-9 \Leftrightarrow x=\dfrac{11}{3}$, т.к. функция $y=t^7$ возрастает.

Если функция $h(t)$ немонотонная, то возможна потеря корней. Уравнение $(2x+2)^4=(5x-9)^4$ нельзя решать так: $2x+2=5x-9 \Leftrightarrow x=\dfrac{11}{3}$. Потерян один корень $x=1$. Надо решить так: $2x+2=5x-9 \Leftrightarrow x=\dfrac{11}{3}$ или $2x+2=-(5x-9) \Leftrightarrow x=1$.

Если правая часть уравнения равна 0, а левая часть разложена на множители, то уравнение $f(x)\cdot g(x)=0$ заменяется совокупностью $f(x)=0$ или $g(x)=0$, взять только x из ОДЗ, остальные отбросить.

ПРИМЕР $(\sqrt{x+2}-3)\cdot\left(2^{x^2+6x+5}-1\right)\cdot\ln(x-8)=0$

ОДЗ: $\begin{cases} x+2\ge 0 \\ x-8>0 \end{cases} \Rightarrow x>8$

$\sqrt{x+2}-3=0$ или $2^{x^2+6x+5}=0$ или $\ln(x-8)=0$

$x=7\notin ОДЗ$; $x=-1\notin ОДЗ$, $x=-5\notin ОДЗ$; $x=9\in ОДЗ$

Ответ: 9.

Метод введения новой переменной позволяет свести уравнение к более простому.

ПРИМЕР $\sqrt{x^2-x+2}+\sqrt{x^2-x+7}=\sqrt{2x^2-2x+21}$

Пусть $x^2-x=t$, то

$\sqrt{t+2}+\sqrt{t+7}=\sqrt{2t+21}$ ОДЗ: $\begin{cases} t\ge -2 \\ t\ge -7 \\ t\ge -10.5 \end{cases} \Rightarrow t\ge -2$

После возведения обеих частей уравнения в квадрат получим

$\sqrt{(t+2)(t+7)}=6$, затем $t^2+9t-22=0$, откуда $t=2\in ОДЗ$ и $t=-11\notin ОДЗ$

Обратная замена: $x^2 - x = 2$. Ответ: 2; -1.

Рассмотрим еще один метод решения уравнений – функционально-графический. Суть метода проста.

Пусть нам дано уравнение вида *f(x)=g(x)*. Мы строим два графика *y=f(x)* и *y=g(x)* на одной координатной плоскости и отмечаем точки, в которых наши графики пересекаются. Абсцисса точки пересечения (координата x) - это и есть решение нашего уравнения.
Так как метод называется функционально-графическим, то не всегда нужно строить графики функций. Можно пользоваться и свойствами функций. Например, вы видите явное решение уравнения в какой-то точке: если одна из функций строго возрастает, а другая строго убывает, то это и будет единственное решение уравнения. Свойства монотонности функций часто помогают при решении различных уравнений.

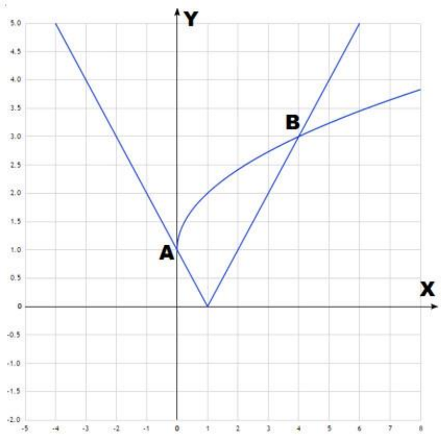
Вспомним еще один метод: если на промежутке X, наибольшее значение любой из функций *y=f(x), y=g(x)* равно A, а соответственно наименьшее значение другой функции также равно A, то уравнение *f(x)=g(x)* равносильно системе: $\begin{cases} f(x) = A \\ g(x) = A \end{cases}$

Пример.

Решить уравнение: $\sqrt{x} + 1 = |x - 1|$

Решение.

Построим графики функций, на одной координатной плоскости: $y = \sqrt{x} + 1; y = |x - 1|$



Как видно из рисунка наши графики пересекаются в двух точках с координатами: A(0;1) и B(4;3). Решением исходного уравнения будут абсциссы этих точек.
Ответ: x=0 и x=4.

Пример.
Решить уравнение: $x^7+3x-134=0$.
Решение.
Перейдем к равносильному уравнению: $x^7=134-3x$. Можно заметить, что x=2 является решением данного уравнения. Давайте докажем, что это единственный корень.
Функция $y=x^7$ – возрастает на всей области определения. Функция $y=134-3x$ – убывает на всей области определения.
Тогда графики этих функций либо вообще не пересекаются, либо пересекаются в одной точке, это точку мы уже нашли x=2.
Ответ: x=2.

Пример.

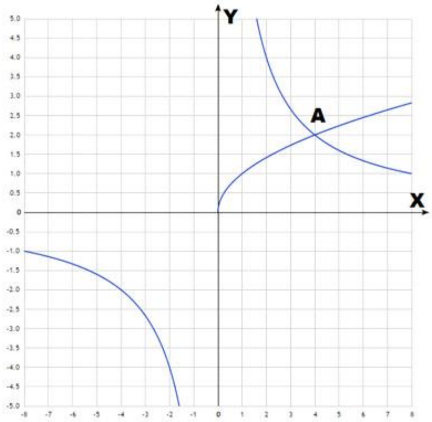
Решить уравнение: $\frac{8}{x} = \sqrt{x}$

Решение.

Данное уравнение можно решить двумя способами.

1. Опять же заметим, что x=4 – корень уравнения. На отрезке (0;+∞) гипербола убывает, а функция корня квадратного возрастает. Следовательно имеется не более одного пересечения графиков. Значит x=4 – единственный корень данного уравнения.

2. Построим два графика.



На графике видна точка пересечения графиков с координатой x=4.

Ответ: x=4.

Пример.

Решить уравнение: $\sin(\frac{\pi}{2} \cdot x) = x^2 - 6x + 10$

Решение.

Функция $y = \sin(\frac{\pi}{2} \cdot x)$ – периодическая функция с максимальным значением, равным единице.

Функция $y=x^2-6x+12$ – парабола, ветви которой смотрят вверх. Это означает, что минимальное значение функция достигает в своей вершине. Найдем вершину и значение в вершине: $x_{верш.}=-b/2a=6/2=3$.

$y_{верш.}=9-18+10=1$.

Как мы видим, минимальное значение параболы совпадает с максимальным значением синуса на всей числовой оси, тогда мы можем решить систему: $\begin{cases} \sin\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) = 1 \\ x^2 - 6x + 10 = 1 \end{cases}$

Решением данной системы является x=3. Ответ: x=3.

Задачи для самостоятельного решения:

Решить следующие уравнения:

$\sqrt{x} - 2 = |x| - 4$

$x^3 + 5x - 42 = 0$

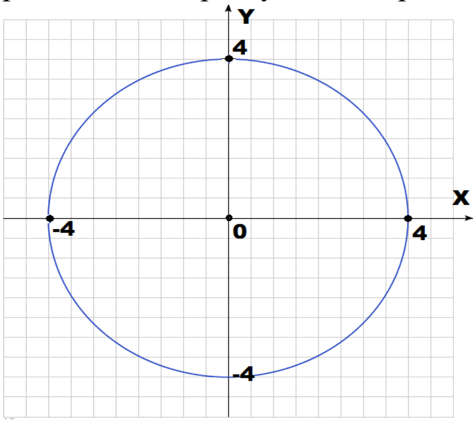
$\frac{-16}{x} = 2\sqrt{-x}$

$cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot x\right) = x^2 - 8x + 17$

Решением уравнения с двумя переменными P(x;y)=0 называется всякая пара чисел (x;y), которая обращает уравнение в верное числовое равенство.

При решении таких уравнений требуется проводить внимательный анализ уравнения и выявлять закономерности. Чаще всего, не существует общих методов решения уравнения с двумя переменными, к каждому уравнению нужен “индивидуальный подход”. Обычно решений получается бесконечно много. Но стоит отметить, что переход к геометрической модели решения – на декартовой системе координат (как раз, на которой отмечаются две переменные) изображают все множество решений, является одним из самых удобных методов решения.

Для уравнения $x^2+y^2=16$ решение удовлетворяет всякая пара чисел, такие, что они принадлежат окружности радиуса 4 и центром с координатами (0;0). Проще всего изобразить графически решение данного уравнения. В данном примере мы получили бесконечное число решений, которые удовлетворяют условию выше.



Рассмотрим другой пример $(x+2)^2+(y+4)^2=0$ Уравнение имеет всего одно решение x=-2 и y=-4, так как сумма двух не отрицательных чисел может равняться нулю, когда они одновременно равны нулю. В данном примере мы получили всего одно решение.

Если дано целое рациональное уравнение с несколькими переменными и целочисленными коэффициентами, и так же требуется найти целые (или рациональные) решения данного уравнения, то принято говорить, что задано диофантово уравнение. Диофантовы уравнения решаются довольно трудно, и не всегда сразу можно придумать ходы решения сразу, но часто помогает теория делимости целых чисел. Так же отметим, что современные методы программирования позволяют решать многие уравнения на компьютерах, используя так называемые численные методы, с которыми вы можете познакомиться в университете, если пойдете учиться на математические специальности.

Пример. Найти целочисленные решения уравнения: 5x+4y=17

Решение. В общем случае мы могли изобразить прямую, на декартовой системе координат, и получить множество всех решений, но нам требуется найти только целочисленные решения.

Воспользуемся известными предложениями теории делимости целых чисел.

Приведем наше уравнение к виду: $y=\frac{17-5x}{4}$

Целое число 17-5x должно делиться без остатка на 4. При делении на 4 возможны четыре случая:

а) остаток от деления на 4 равен нулю, то есть x=4k

б) остаток от деления на 4 равен единице, то есть x=4k+1

в) остаток от деления на 4 равен двум, то есть x=4k+2

г) остаток от деления на 4 равен трем, то есть x=4k+3, где k - целое число.

Рассмотрим каждый случай отдельно:

а) Если x=4k, то $17-5x=17-20k$ - не делится нацело на 4, т.к. каждый член разности должен делиться на 4, а число 17 не делится на 4.

б) Если x=4k+1, то $17-5x=17-20k-5=12-20k$ - делится нацело на 4.

в) Если x=4k+2, то $17-5x=17-20k-5=12-20k$ – не делится на 4.

г) Если x=4k+3, то $17-5x=17-20k-15=2-20k$ - не делится на 4.

Среди всех возможных вариантов нам подошел лишь один x=4k+1, тогда найдем y.
Целым решением нашего уравнения является любая пара чисел (4k+1;3-5k), где k – любое целое число.
Ответ: (4k+1;3-5k).

Пример. Найти целочисленные решения уравнения: $16x^2-4y^2=13$
Решение. Воспользуемся формулой разности квадратов $(4x-2y)(4x+2y)=13$

Мы получили произведение двух чисел в левой части уравнения, и в правой части уравнения заметим, что у нас записано простое число, которое делится только на себя и единицу по модулю.
Число 13 получается лишь в четырех случаях при произведении двух чисел:

а) Первый сомножитель равен 1, второй сомножитель равен 13.
б) Первый сомножитель равен 13, второй сомножитель равен 1.
в) Первый сомножитель равен -1, второй сомножитель равен -13.
г) Первый сомножитель равен -13, второй сомножитель равен -1

Значит, нам надо решить совокупность 4 систем.

а) $\begin{cases} 4x-2y=1 \\ 4x+2y=13 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 4x-2y=13 \\ 4x+2y=1 \end{cases}$ в) $\begin{cases} 4x-2y=-1 \\ 4x+2y=-13 \end{cases}$ г) $\begin{cases} 4x-2y=-13 \\ 4x+2y=-1 \end{cases}$

Решением каждой системы у нас служат пара чисел:
а) (1.75;3) **б)** (1.75;-3) **в)** (-1.75;-3) **г)** (-1.75;3)

В данном примере, целочисленных решений получается, что нет, но суть метода решения ясна.
Ответ: целочисленных решений нет.

ЛЕКЦИЯ 4. Неравенства,

- Равносильность неравенств.
- Теоремы о равносильности неравенств
- Системы и совокупности неравенств

Что такое неравенство? Выражения вида f(x)>g(x); (f(x)<g(x)) являются неравенствами. При записи неравенств в общем виде не принципиально, какой знак неравенства применять. Все свойства распространяются как на строгие, так и не строгие неравенства.
Любое значение переменой x, при котором неравенство f(x)>g(x) превращается в верное числовое неравенство, называется решением или чаще говорят частное решение. Множество всех частных решений называется общим решением.
Итак, под решением неравенства могут подразумевать следующее:
а) Частное решение – конкретное значение переменой, при которой выполняется неравенство. Например, для неравенства x>7, частным решением будет x=10 или x=999.
б) Общее решение – множество всех частных решений, т.е. все числа при которых выполняется данное неравенство. Для неравенства x>7 общее решение оно само и есть. Или мы можем записать общее решение в виде промежутка x϶(7;+∞).
в) Под решением можно понимать и сам процесс решения неравенства – выбор метода решения или какие-либо другие математические операции.

Равносильность неравенств

Определение. Два неравенства с одной переменой f(x)>g(x) и h(x)>q(x) называются равносильными, если множества решений этих неравенств совпадают, т.е. общие решения у них одинаковые.

Определение. Если решение неравенства f(x)>g(x) (1) содержится в решении неравенства h(x)>q(x) (2), то неравенство (2) является следствием неравенства (1).
Например, решением неравенства $x^2>16$ являются два промежутка $(-\infty;-4)$ и $(4;+\infty)$. Решением неравенства x>4 является промежуток $(4;+\infty)$. Решение второго неравенства является частью решения первого, а поэтому первое неравенство - это следствие второго неравенства.
Если знаки неравенства поменять местами, то уже второе неравенство станет следствием первого. Решением $x^2<16$ является промежуток $(-4;4)$, решение неравенства x<4 – промежуток $(-\infty;4)$. Решение первого неравенства является частью решения второго.
Решением неравенства, чаще всего, получаются бесконечные промежутки чисел. Поэтому полную проверку решения проводить неудобно и практически невозможно. При решении неравенств стоит применять только равносильные преобразования, которые не приведут к неравенствам следствиям. Неравенства следствия, как и в случае с уравнениями, могут привести к потере решений. Какие преобразования равносильны для неравенств?

Теоремы о равносильности неравенств

Теорема 1. Если какой-либо член неравенства перенести из одной части в другую, поменяв при этом знак на противоположный и оставив при этом знак неравенства без изменений, то получится неравенство равносильное исходному.
Теорема 2. Если обе части неравенства возвести в одну и туже нечетную степень, оставив при этом знак неравенства без изменений, то получится неравенство, равносильное данному.
Теорема 3. а) Если $a>1$, то показательное неравенство $a^{f(x)(}>a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x)>g(x)$.
б) Если $0<a<1$, то показательное неравенство $a^{f(x)(}>a^{g(x)}$ равносильно неравенству $f(x)<g(x)$. (Знак неравенства меняется на противоположный).
Теорема 4.
а) Если обе части неравенства f(x)>g(x) умножить на одно и тоже выражение h(x), положительное при всех x, из области определения неравенства f(x)>g(x), оставив при этом знак неравенства без изменений, то получится неравенство $f(x)*h(x)>g(x)*h(x)$, равносильное исходному.
б) Если обе части неравенства f(x)>g(x) умножить на одно и тоже выражение h(x), отрицательное при всех x, из области определения неравенства f(x)>g(x), изменив при этом знак неравенства на противоположный, то получится неравенство $f(x)*h(x)<g(x)*h(x)$, равносильное исходному.
Теорема 5.
Если обе части неравенства f(x)>g(x) неотрицательны на всей области определения (ОДЗ), то после возведения неравенства в одну и ту же четную степень n, получится неравенства того же знака $f(x)^n>g(x)^n$,равносильное данному.
Теорема 6. Если f(x)>0 и g(x)>0, то:
а) при $a>1$ логарифмическое неравенство $log_af(x)>log_ag(x)$ равносильно неравенству того же смысла: f(x)>g(x);
б) при $0<a<1$ логарифмическое неравенство $log_af(x)>log_ag(x)$ равносильно неравенству противоположного смысла: f(x)<g(x).

Системы и совокупности неравенств

Определение. Несколько неравенств с одной переменой образуют систему неравенств. Если надо найти все значения переменной, каждая из которых является частным решением всех заданных неравенств. Значение переменной, при котором каждое из неравенств системы обращается в верное числовое неравенство, называют частным решением системы неравенств. Множество всех частных решений системы неравенств – это общее решение системы неравенств.
Решение системы неравенств – это пересечение множеств частных решений каждого конкретного неравенства системы.

Определение. Несколько неравенств образуют совокупность неравенств, если требуется найти все значения переменной, каждое из которых является решением хотя бы одного из заданных неравенств. Каждое такое значение – частное решение совокупности неравенств. Множество всех частных решений – общее решение или просто решение совокупности неравенств.

Решение совокупности неравенств - есть объединение множеств частных решений каждого конкретного неравенства совокупности.

Системы неравенств объединяются фигурной скобкой, а совокупности неравенств – квадратной скобкой.

Пример.

Решить систему и совокупность неравенств:

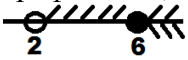
А) $\begin{cases} 3x - 2 > 4 \\ 4x - 8 \geq 16 \end{cases}$ Б) $\left[\begin{array}{l} 3x - 2 > 4 \\ 4x - 8 \geq 16 \end{array}\right.$

Решение.

а) Эти неравенства представляют собой обычные линейные неравенства, решение, которых найти не сложно:

$\begin{cases} x > 2 \\ x \geq 6 \end{cases}$

Нам нужно найти пересечение двух множеств решений. Проще всего это сделать графически, нарисовав два промежутка:



Как видно из рисунка, решение неравенства - это промежуток [6;+∞). Ответ: x∈[6;+∞).

б) Неравенства в данной совокупности полностью аналогичны пункту а). Только в этой задаче нам требуется найти объединение решений каждого неравенства. По рисунку не трудно заметить, что объединение – это промежуток (2;+∞).

Ответ: x∈(2;+∞).

При решении неравенств учитывайте: если одно из неравенств является следствием другого, о неравенства следствия можно отбрасывать.

Вернемся к логарифмическим неравенствам:

$$\boldsymbol{log_a f(x) > log_a g(x), a > 1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{f(x)} > 0 \\ \boldsymbol{g(x)} > 0 \\ \boldsymbol{f(x)} > g(x) \end{cases}$$

$$\boldsymbol{log_a f(x) > log_a g(x), 0 < a < 1} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \boldsymbol{f(x)} > 0 \\ \boldsymbol{g(x)} > 0 \\ \boldsymbol{f(x)} < g(x) \end{cases}$$

Если f(x)>g(x) и g(x)>0, тогда f(x) точно больше нуля.

Для второго случая: если f(x)<g(x) и f(x)>0, то g(x) в этом случае больше нуля.

Мы можем отбросить неравенства следствия, то есть при решении логарифмических неравенств достаточно решить:

$\boldsymbol{log_a f(x) > log_a g(x), 0 < a < 1}$ равносильно системе:

$\begin{cases} \boldsymbol{g(x)} > 0 \\ \boldsymbol{f(x)} > g(x) \end{cases}$

$\boldsymbol{log_a f(x) > log_a g(x), 0 < a < 1}$ равносильно системе:

$$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases}$$

Пример.
Решить неравенство: $\log_{x-3}(2x+3) > \log_{x-3}(3x-5)$.
Решение.
От того, каково основание логарифма зависит, какое равносильное преобразование мы можем произвести. Нам следует рассмотреть два случая:
а) $x-3>1$; б) $0<x-3<1$.
Тогда, в соответствии с уточнением, приведенным выше, имеем две системы неравенств. С учетом области допустимых значений неравенства:

а)

$$\begin{cases} x-3>1 \\ 2x+3>3x-5 \\ 3x-5>0 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} 0<x-3<1 \\ 2x+3<3x-5 \\ 2x+3>0 \end{cases},$$

а)

$$\begin{cases} x>4 \\ x<8 \\ x>5/3 \end{cases}$$

б)

$$\begin{cases} 3<x<4 \\ x>8 \\ x>-1.5 \end{cases}$$

Решением системы неравенств (а) является промежуток (4;8).
Система неравенств (б) – решений не имеет. Ответ: $x\epsilon(4;8)$.

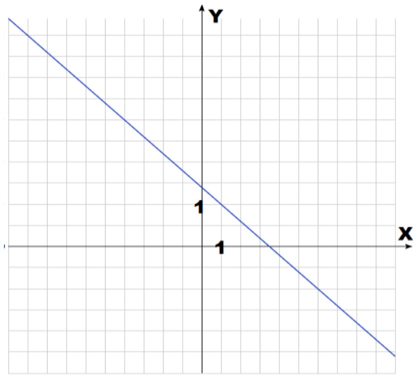
ЛЕКЦИЯ 5. Графическое решение неравенств.

- Использование свойств и графиков функций при решении неравенств.
- Изображение на координатной плоскости множества решений неравенств с двумя переменными.

Неравенства вида $p(x;y)>0$, $p(x;y)<0$ называются неравенствами с двумя переменными, где $p(x;y)$ – алгебраическое выражение.
Решением неравенства $p(x;y)>0$ называют всякую пару чисел, которые удовлетворяют данному неравенству (неравенство превращается в верное числовое неравенство). Решения неравенств с двумя переменными также проще изображать на графиках в декартовой системе координат. Рассмотрим несколько примеров.
Пример.
Решить неравенство: $2x+5y>7$.
Решение.
Для начала выразим y через x:

$$y > \frac{7-2x}{5}.$$

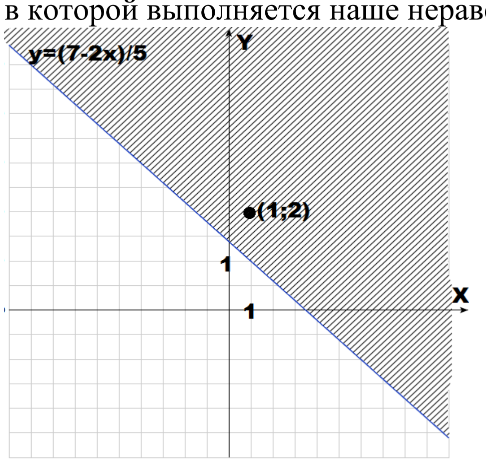
Построим прямую $y = \frac{7-2x}{5}$. Множество всех решений неравенства расположено, либо выше, либо ниже данной прямой.



Можно подставить любую пару чисел и проверить: выполнилось неравенство или нет. Если неравенство выполнилось, то мы выбираем в качестве решения ту область, которой принадлежат эти пара чисел, если не выполнилось, то выбираем противоположную область.

Давайте подставим пару (1;2): $2 > \frac{7-2}{5}$.

2>1 – верное неравенство. Значит, мы должны выбрать область выше нашей прямой, область в которой выполняется наше неравенство обычно принято изображать штриховкой.



Пример.

Решить неравенство: xy<3.

Решение.

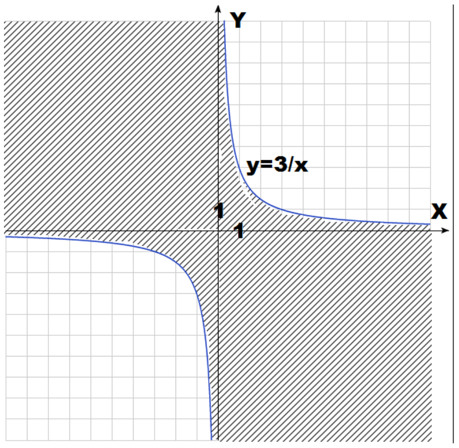
Рассмотрим три возможных случая:

а) x=0, то получаем верное неравенство 0<3. Что значит: неравенство выполняется для любых y, если x=0.

б) x>0. Перейдем к неравенству $y<\frac{3}{x}$. В правой полуплоскости данному неравенству удовлетворяют множество всех точек, расположенных ниже кривой $y=\frac{3}{x}$.

в) x<0. Перейдем к неравенству $y>\frac{3}{x}$. В левой полуплоскости данному неравенству удовлетворяют множество всех точек, расположенных выше кривой $y=\frac{3}{x}$.

Осталось построить график функции и отметить множество всех решений:



Нам осталось разобрать пример, решения системы неравенств с двумя переменными. Суть метода решений проста. Находим решение каждого неравенства в отдельности, изображаем решения на одной координатной плоскости и ищем пересечение этих решений.

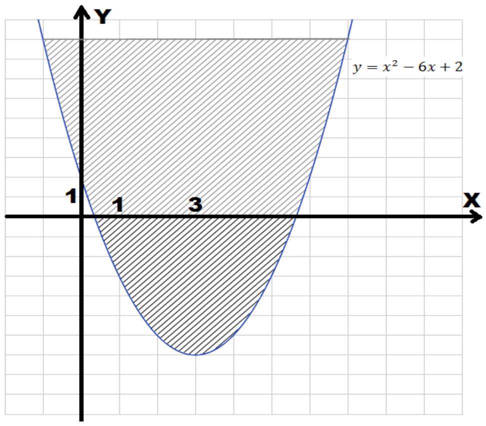
Пример.

Решить систему неравенств: $\begin{cases} y \geq x^2 - 6x + 2 \\ y \leq x + 5 \end{cases}$

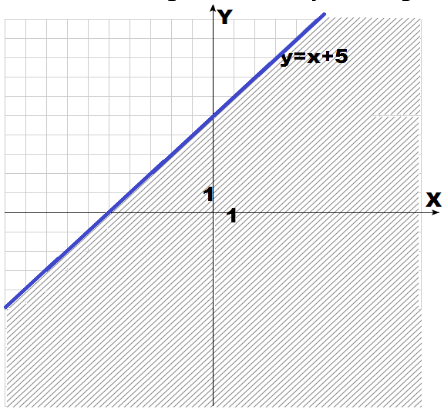
Решение.

Найдем решение каждого неравенства в отдельности.

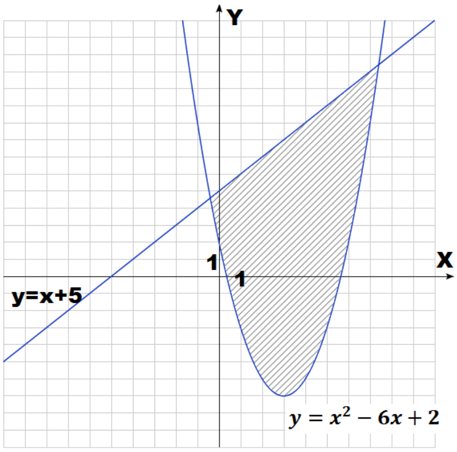
Для неравенства y≥x2−6x+2, множество всех точек расположено выше или "внутри" параболы.



Решения неравенства y≤x+5 расположены ниже прямой y=x+5.



Изобразим оба графика на одной плоскости и найдем пересечение областей.



Задачи для самостоятельного решения

1. Найти целочисленные решения уравнения: 7x+5y=15.
2. Найти целочисленные решения уравнения: 9x2−25y2=19.
3. Решить неравенство: xy>7.
4. Решить систему неравенств:

$$\begin{cases} y \geq x^2 - 6x + 2 \\ \quad y \leq x + 5 \end{cases}$$

Раздел 6. Элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики.

Тема 6.1.Элементы комбинаторики, теории вероятностей и математической статистики

ЛЕКЦИЯ 1. Элементы комбинаторики,

- Что изучает комбинаторика.
- Перестановки.
- Размещения.
- Сочетания.
- Формула бинома Ньютона.
- Биноминальные коэффициенты.
- Треугольник Паскаля.
- Свойства биноминальных коэффициентов.

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, удовлетворяющих заданным условиям, можно составить из элементов некоторого множества.

Определение. Произведение подряд идущих первых n натуральных чисел обозначают n! (n факториал) n!=1∗2∗...∗(n−1)∗n.

n факториал – состоящий из n множителей.

Заметим важное свойство факториала: n!=(n−1)!∗n.

n	1	2	3	4	5	6	7
n!	1	1·2=2	2·3=6	6·4=24	24·5=120	120·6=720	720·7=5040

Количество перестановок из n элементов можно вычислять, используя следующую теорему:

Теорема. N отличных друг от друга предметов можно расставить по одному на N разных мест ровно N! способами. P_N=N!. Где P – количество перестановок из N элементов, без повторений.

Пример.

К Ивану Васильевичу пришли гости: Александр, Алексей, Петр и Николай. За столом 5 стульев.

а) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом?
б) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если место Ивана Васильевича известно?
в) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если Петр и Николай всегда сидят рядом?
г) Сколькими способами можно рассадить гостей за столом, если Алексей и Александр не могут сидеть рядом?
Решение.
а) Способы которыми можно рассадить гостей и хозяина - это не что иное, как количество перестановок наших гостей возле разных стульев. Воспользуемся теоремой: всего гостей - 5 человек, тогда имеем 5! способов расстановки.
Ответ: 120 способов.
б) Место Иван Васильевича уже известно, тогда гости могут выбрать 4 оставшихся стула, а это 4!=24 способа выбора.
Ответ: 24.
в) Петр и Николай сидят рядом, тогда первый из них может выбрать себе место пятью способами, а вот второму останется выбор только из двух мест - рядом с первым. Остается 3 места для 3 человек: 3!=6 способов. Тогда всего способов: 5*2*6=60.
Ответ: 60.
г) Алексей может выбрать место пятью способами, но вот Александру остается для выбора всего два места, так как рядом с Алексеем он сидеть не может. Тогда способов: 5*2*3!=60.
Ответ: 60.
Пример.
В чемпионате по хоккею участвовало 8 команд, каждая команда сыграла с другой по одной игре. Сколько всего сыграно игр?
Решение.
Данную задачу можно решать различными способами. Начнем с самого очевидного, но не всегда самого простого. Составим таблицу сыгранных игр и непосредственно подсчитаем количество игр.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1		1:1	2:3	4:2	4:1	5:3	3:7	8:5
2			3:3	5:4	3:1	3:5	2:4	1:2
3				6:2	6:4	1:6	0:0	3:2
4					6:5	5:3	1:0	2:2
5						4:1	2:3	1:1
6							5:8	3:5
7								5:4
8								

Команда сама с собой играть не может (закрашенные клетки), тогда у нас остается 64−8=56 клеток. Игр у нас произошло ровно в два раза меньше, так внизу таблицы могут быть записаны те же результаты, только в обратном порядке в зависимости от победы или поражения. Всего сыграно 28 игр.

Второй способ: Пронумеруем команды. Зная номера команд, можно подсчитать, что первая команда сыграет 7 игр, второй команде уже останется сыграть 6 игр, поскольку она уже сыграла игру с первой командой и так далее, получим: 7+6+5+4+3+2+1=28.

Внимательно проанализируем нашу задачу: у нас есть 8 команд, в каждой игре участвуют 2 команды. Нам надо найти количество сочетаний или количество игр 8 команд, в каждой игре участвуют 2 команды. Порядок выбора команд совершенно не важен.

Количество сочетаний из n элементов по 2 легко вычисляется по формуле:
Теорема. Для множества, состоящего из n элементов, любые два элемента этого множества (без повторения) могут быть выбраны n(n−1)/2 способами.
Иначе говоря, число сочетаний двух объектов (без учета порядка) множества, состоящего из n элементов вычисляется:

$$C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Пример.
Ребята 11 А и 11 Б решили поиграть в шахматы. В 11 А учатся 10 человек, а в 11 Б - 8 человек. Сколькими способами:
а) могут сыграть ребята 11 А между собой?
б) могут сыграть ребята 11 Б между собой?
в) Сколько игр возможно между ребятами 11 А и 11 Б?
г) Сколько всего игр возможно?

Решение.
а) В 11 А учатся 10 человек, в шахматы играют 2 человека. Нам надо найти количество сочетаний из 10 человек по 2, порядок нам в данной задаче не важен. Воспользуемся теоремой:

$$C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{2} = 45$$

б) По аналогии с предыдущим примером:

$$C_8^2 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$$

в) Когда играют друг против друга ребята из разных классов, то тут следует считать по правилу умножения. Выбор ученика одного из классов не зависит от выбора ученика другого класса, тогда у нас для 11 А – 10 способов выбора, а для 11 Б – 8 способов. Тогда количество возможных игр: 10∗8=80.

г) Здесь нам не важен ни порядок, ни кто с кем играем, тогда это количество сочетаний из учеников обоих классов по 2:

$$C_{18}^2 = \frac{18 \cdot 17}{2} = 153.$$

Часто встречаются задачи, в которых порядок размещения элементов важен, тогда нам следует воспользоваться следующей теоремой.
Теорема. Если множество состоит из n элементов и требуется выбрать два элемента с учетом их порядка, то такой выбор можно провести n(n−1) способами.

Определение. Число всех выборов двух элементов с учетом их порядка из n данных называют числом размещений из n элементов по 2 и обозначается A_n^2
Пример.
В классе учится 20 учеников. К доске нужно вызвать двух человек, сколькими способами можно это сделать если:
а) сначала первый ученик должен решить пример на квадратные уравнения, а потом другой ученик - пример на неравенство.
б) ученики могут выйти к доске одновременно.

Решение.
а) В этой задаче порядок важен, тогда
$A_{20}^2 = 20 \cdot 19 = 380$

б) Нам порядок не важен, тогда используем формулу числа сочетаний:

$$C_{20}^{2} = \frac{20 \cdot 19}{2} = 190$$

Мы рассмотрели варианты, когда в выборе участвовало 2 элемента, а как быть в случае, когда их гораздо больше, ведь такие задачи встречаются чаще. Давайте запишем формулы для общего случая:

Число сочетаний из n элементов по k элементам (без учета порядка) вычисляется по формуле:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$$

Число размещений из n элементов по k элементам (с учетом порядка) вычисляется по формуле:

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!} = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)$$

Заметим, что: $C_n^k = \frac{A_n^k}{k!}$

Пример.

В классе учится 25 учеников, нужно выбрать 4 ученика таким образом:

а) один ученик должен подготовить доклад, второй - решить геометрическую задачу, третий - подготовить презентацию, четвертый - выучить стих.

б) 4 ученика должны подготовить выступление на школьном празднике.

Решение.

а) Здесь нам порядок важен, тогда

$$A_{25}^{4} = \frac{25!}{4!} = 25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 = 303600$$

б) Здесь нам порядок не важен, тогда

$$C_n^k = \frac{25!}{4!\,(21)!} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22}{2 \cdot 3 \cdot 4} = 12650$$

Ряд важных свойств:

1) 0!=1.

2) $C_n^n = \frac{n!}{n!\,(n-n)!} = \frac{1}{0!} = 1$

3) $C_n^0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1$

4) $C_n^0 = \frac{n!}{0!\,(n-0)!} = 1$

Давайте проверим 4 свойство:

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,(n-n+k)!} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = C_n^k$$

Задачи для самостоятельного решения

1) К Мише пришли гости: Саша, Леша, Петя, Коля, Аркаша. Торт разрезали на 6 кусков.

а) Сколькими способами каждый ребенок может выбрать кусок торта?

б) Сколькими способами каждый ребенок может выбрать кусок торта, если Миша уже выбрал себе кусочек?

в) Сколькими способами каждый ребенок может выбрать кусок торта, если Аркаша всегда выбирает соседний от куска Саши?

2) Ребята 11 А и 11 Б решили поиграть в шахматы. В 11 А учится 13 человек, а в 11 Б - 9 человек.
Сколькими способами:
а) могут сыграть ребята 11 А между собой?
б) могут сыграть ребята 11 Б между собой?
в) Сколько игр возможно между ребятами 11 А и 11 Б?
г) Сколько всего игр возможно?

3) Из 16 дежурных надо выбрать трех для столовой. Сколькими способами можно сделать этот выбор?

4) Сколькими способами могут быть распределены золотая, серебряная и бронзовая медали олимпийских игр по теннису, если в этих играх участвовало 15 стран

Теперь остановимся на одном из самых замечательных применением формулы перестановок. Числа C_n^k имеют очень красивую и знаменитую запись, которая имеет большое значение. Такая запись называется треугольником Паскаля:

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0=1 & & & & \\
 & & & C_1^0=1 & & C_1^1=1 & & & \\
 & & C_2^0=1 & & C_2^1=2 & & C_2^2=1 & & \\
 & C_3^0=1 & & C_3^1=3 & & C_3^2=3 & & C_3^3=1 & \\
C_4^0=1 & & C_4^1=4 & & C_4^2=6 & & C_4^3=4 & & C_4^4=1 \\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & & & \\
C_n^0 & C_n^1 & \ldots & \ldots & \ldots & C_n^{n-1} & C_n^n & &
\end{array}$$

Правило записи треугольника легко запомнить. Каждое число в треугольнике паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ними в предыдущей строке. Давайте распишем несколько строк:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
 & & & & & & & & & & 1 & & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & & & & \\
 & & & & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & & & & \\
 & & & & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 6 & & 15 & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 8 & & 28 & & 56 & & 70 & & 56 & & 28 & & 8 & & 1 & & \\
 & 1 & & 9 & & 36 & & 84 & & 126 & & 126 & & 84 & & 36 & & 9 & & 1 & \\
1 & & 10 & & 45 & & 120 & & 210 & & 252 & & 210 & & 120 & & 45 & & 10 & & 1
\end{array}$$

Математически свойство подсчета числа сочетаний без повторений можно записать еще вот так:

$$\boxed{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.}$$

Как оказалось треугольника Паскаля находит свое применение и в другой математической задаче. Давайте вспомним несколько правил возведения в квадрат суммы.
Самое первое правило, которое мы с вами выучили, это квадрат суммы: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$.

Довольно таки легко найти выражение и для следующей степени, используя правила перемножения многочленов:
$(a+b)^3=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
Проделаем эту же операцию и для четвертой степени:
$(a+b)^4=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.
Выпишем для наглядности все наши формулы:
$(a+b)^1=a+b$.
$((a+b)^2=a^2+2ab+b^2.a+b)$
$(a+b)^3=(a^2+2ab+b^2)(a+b)=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.
$(a+b)^4=(a^3+3a^2b+3ab^2+b^3)(a+b)=a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$.

Обратите внимание: показатель степени в левой части равен сумме показателей степеней в правой части для любого слагаемого. Для четвертой степени, очевидно, что слева показатель равен 4. В правой части показатель степени при первом слагаемом равен для a четырем, для b нулю и в сумме равен 4. Для второго слагаемого сумма показателей равна 3+1=4, для следующего - 2+2=4 и так до самого конца сумма показателей равна 4.
Посмотрите внимательно на коэффициенты в правой части. Что он вам напоминает? Правильно, коэффициенты образуют треугольник Паскаля.

Эти два замечательных свойства, замеченных выше, позволяют вычислять сумму двух одночленов в n-ой степени:

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + C_n^3a^{n-3}b^3 + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n$$

Давайте попробуем доказать нашу формулу:
Рассмотрим слагаемое, стоящее на месте под номером k+1. По написанной выше формуле получаем, вот такое слагаемое: $C_n^ka^{n-k}b^k$

Нам нужно доказать, что коэффициент при данном одночлене как раз и равен C_n^k
Для того, чтобы двучлен возвести в n-ую степень нам нужно этот двучлен умножить на себя n раз, то есть:

$$(a+b)^n = \underbrace{(a+b)(a+b)(a+b)\cdot\ldots\cdot(a+b)}_{\text{n штук}}$$

Чтобы получить требуемое слагаемое надо выбрать k штук множителей для b. Тогда получается n−k множителей для a. В каком порядке будем выбирать данные множители не важно. Эта задача есть ни что иное как: число сочетаний из n элементов по k без повторений или C_n^k. Наша формула доказана.
Полученная нами формула называется "*Бином Ньютона"*.

$$(a+b)^n = C_n^0a^n + C_n^1a^{n-1}b + C_n^2a^{n-2}b^2 + C_n^3a^{n-3}b^3 + \ldots + C_n^ka^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^nb^n$$

Коэффициенты, стоящие перед слагаемыми, это биномиальные коэффициенты.

Пример.
Раскрыть скобки: $(y+1)^7$.

Решение.
Применим нашу формулу:

$$(y+1)^7 = C_7^0y^7 + C_7^1\cdot y^6\cdot 1 + C_7^2\cdot y^5\cdot 1^2 + C_7^3\cdot y^4\cdot 1^3 + C_7^4\cdot y^3\cdot 1^4 +$$
$$+C_7^5\cdot y^2\cdot 1^5 + C_7^6\cdot y\cdot 1^6 + C_7^7\cdot 1^7$$

Вычислим все коэффициенты:

$C_7^0 = 1; C_7^1 = 7;\ C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = 21;\ C_7^3 = 35;\ C_7^4 = 35; C_7^5 = 21;\ C_7^6 = 7; C_7^7 = 1$

В итоге получаем:

$C_7^0 = 1; C_7^1 = 7;\ C_7^2 = \frac{7!}{2!5!} = 21;\ C_7^3 = 35;\ C_7^4 = 35; C_7^5 = 21;\ C_7^6 = 7; C_7^7 = 1$

Обратим вниманием на еще одно удивительное свойство.
Рассмотрим двучлен: $(x+1)^n$.
Используя Бином Ньютона получим:
При x=1 получаем:

$$(x+1)^n = C_n^0 x^n + C_n^1 x^{n-1} + C_n^2 x^{n-2} + C_n^3 x^{n-3} + \ldots + C_n^{n-2} x^2 + C_n^{n-1} x + C_n^n$$

При x=1 получаем:

$$\mathbf{2^n = C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \ldots + C_n^{n-2} + C_n^{n-1} + C_n^n}$$

Задачи для самостоятельного решения

Раскройте скобки:
а) $(x+2)^6$;
б) $(3x+2y)^4$;
в) $(2z-2t)^8$;
г) $(x-4y)^5$.

ЛЕКЦИЯ 2. Элементы теории вероятностей.

- Что изучает теория вероятностей.
- Классическое определение вероятности.
- Понятие о независимости событий.
- Операции над событиями.
- Сложение вероятностей.
- Умножение вероятностей.
- Схема испытаний Бернулли
- Закон больших чисел

Теория вероятности – раздел математики занимающийся поиском закономерностей случайностей. Теория вероятности, как раздел математики сформировался не так давно, до начала XX века он считался разделом физики.

Различного рода случайности встречаются нам повсюду. Начиная с подбрасывания монетки, заканчивая гораздо более сложными вещами. Например, давайте вспомним знаменитый роман М. А. Булгакова "Мастер и Маргарита" и его "Аннушку с маслицем" и Берлиозом. На первый взгляд, все произошло случайно. Но зная все подробности, начинаешь в этом сомневаться. Так вот, нет ничего более стабильного, постоянного или, как говорят во взрослой математике "детерминированного", чем теория вероятности. В рамках математической задачи мы предполагаем, что все возможные исходы описаны и никакие случайности невозможны.

Рассмотрим самый простой пример с подбрасыванием монетки.

В реальной жизни при подбрасывании монетки может произойти все, что угодно: монетка может упасть ребром, например, в траву, может и вовсе не упасть - кто-нибудь поймает и унесет ее с собой. На процесс могут повлиять и другие факторы, которые принято называть случайными. При построении математической задачи подбрасывания монеты мы строго оговариваем условия нашего эксперимента. Мы договариваемся, что монетка симметричная и может упасть только орлом и решкой, падает на идеально ровную поверхность. Существуют и многие другие моменты, которые также должны быть оговорены. Если добавить "усложнения" к нашей задаче, то она, скорее всего, станет не решаемой в рамках школьной математики.

Теория вероятности нашла свое применение практически во всех науках: квантовой физике, медицине, биологии, астрономии и многих других.

Как подсчитывать вероятность того или иного события?

Обратимся к классическому определению вероятности.

При проведении некоторого эксперимента вероятностью события А называют отношение количества тех событий, когда А произошло к количеству всех проведенных испытаний данного эксперимента.

Проще говоря:

$$\text{Вероятность события А} = \frac{\text{Колличество благоприятных исходов события А}}{\text{Колличество всех исходов в эксперименте}}$$

Вероятность события, как известно, обозначается буквой Р, тогда математически классическое определение вероятности запишется:

$P(A)=\frac{m}{n}$, где n – количество всевозможных исходов испытания, m – количество благоприятных исходов.

При решении задач нам следует выполнить следующие действия:

Определить все возможные исходы и подсчитать их количество, то о чем мы говорили ранее.

Определить благоприятные нам исходы и подсчитать их количество.

Найти отношение благоприятных исходов к общему количеству исходов.

Классическое определение вероятности, можно применять только в том случае, если исходы всех событий являются равновозможными.

Теория вероятности - интересный предмет. Как вы думаете, какова вероятность, выйдя на улицу встретить динозавра? Здравый смысл говорит, что это не возможно, то есть нулевая вероятность. Но мы можем построить математическую интерпретацию этой задачи так, что ответ будет 0,5. Мы либо встретим динозавра, либо нет. Но мы все таки живем в реальном мире и старайтесь решать задачи в рамках здравого смысла.

Пример.

Петя подбрасывает игральный кубик, найти вероятность того, что у него выпадет:

а) три очка;

б) нечетное число очков;

в) число очков большее четырех.

Решение.

Первое, что нам надо сделать - найти количество всех исходов. Кубик имеет шесть граней, на каждой из которой написано число. При подбрасывании кубика возможно выпадение шести чисел, значит имеется 6 возможных исходов.

а) При одном броске три очка или тройка может выпасть только один раз, значит благоприятных исходов только один. Согласно классическому определению вероятность будет равна - 1/6.

б) Нечетных чисел может выпасть три: 1, 3, 5. Тогда благоприятных исходов - 3. Вероятность выпадения нечетного числа очков - 3/6=1/2.

в) Число очков большее 4 мы получим, если выпадут цифры 5 или 6. Значит возможны два благоприятных исхода. Вероятность: 2/6=1/3.

Что такое *независимые события*? Очевидно, что два события не зависимы, если они происходят не зависимо друг от друга, результаты этих событий никак не зависят друг от друга.

Вспомним правило умножения:

Для двух независимо проведенных испытаний А и В, число всех возможных исходов равно произведению количества исходов события А на количество исходов события В.

Пример.

Петя дважды подбрасывает кубик. Найдите вероятность того, что у него в сумме выпадет 7 очков.

Решение.

Кубик подбрасывается дважды - это два события, притом независимых: сколько очков выпадет второй раз ни как не зависит, от того сколько выпало в первый раз. Воспользуемся правилом умножения. Всего исходов получается: 6*6=36.

Найдем благоприятные нам исходы, 7 очков может выпасть при таких комбинациях: (1;6), (6;1), (2;5), (5;2), (3;4), (4;3). Всего 6 благоприятных исходов.

Используем классическое определение: 6/36=1/6.

Вспомним еще несколько определений теории вероятности:

Невозможное событие – это событие, которое в рамках нашей задачи произойти не может. Например, при подбрасывании двух кубиков, выпасть больше 12 очков не может. Вероятность невозможного события равна нулю.

Достоверное событие - событие, которое в рамках задачи, происходит всегда. При подбрасывании двух кубиков – сумма очков всегда будет больше одного. Вероятность достоверного события равна единице.

Противоположное событие – событие, обратное интересующему нас событию.

В некоторых задачах проще найти противоположное событие. Противоположное событие событию А обозначается как $\overline{A}$, при чем: P(A)+P($\overline{A}$)=1.

Пример.

В нашем алфавите 33 буквы: 10 гласных, 21 согласная и 2 особенные буквы. Выбирается две буквы, независимо друг от друга. Найти вероятности:

а) выбраны разные буквы,

б) выбраны буквы: ь и ъ,

в) среди выбранных букв есть согласные,

г) выбраны соседние буквы.

Решение:

а) Первый раз мы можем выбрать любую букву алфавита, чтобы выбрать другую букву у нас остается 32 варианта. Тогда вероятность выбора разных букв: 32/33.

б) Требуемые буквы – особенные (их всего две). В условии не оговорено, что они должны быть разными, тогда одна и таже буква может быть выбрана дважды. Выбор буквы независим, тогда всего у нас исходов 33*33. Благоприятных исходов получается - 2*2 так, как и первого, так и второго благоприятны всего два исхода.

Ответ: 4/1089.

в) В данном примере нам будет проще найти вероятность того, что среди выбранных букв нет согласных. Вероятность того, что оба раза выберут не согласную букву - 12*12/33*33 (по аналогии пункту б). Тогда вероятность появления согласной буквы - 1-144/1089=945/1089≈0,87.

г) Для каждой буквы (кроме А и Я) есть сосед слева и справа, тогда букв с соседями: 33*2−2=64. (Вычитаем 2 комбинации, так как у буквы "А" нет соседа слева, а у буквы "Я" нет соседа справа.)

Тогда вероятность: 64/1089≈0,06.

Задачи для самостоятельного решения

1. Петя подбрасывает игральный кубик. Найдите вероятность того, что у него выпадет:

а) четыре очка,

б) четное число очков,

в) число очков меньше четырех,

г) число очков не меньше трех.

2. Петя дважды подбрасывает кубик. Найти вероятность:
а) в сумме выпадет 10 очков,
б) в сумме выпадет больше 11 очков,
в) произведение, выпавших очков, равно 8,
г) произведение, выпавших очков, меньше либо равно 12.

3. Иван выучил 25 вопросов к экзамену по математике. Всего 30 вопросов. Найти вероятность того, что Ивану не попадется выученный вопрос.

4. В урне 5 красных и 3 белых шара. Найти вероятность того, что наугад вытащенный шар будет белым. Найдите вероятность, что первый вытащенный шар - красный, а второй вытащенный шар - белый.

Определение: Произведением двух событий А и Б, называют такое событие, которое происходит тогда и только тогда, когда происходят события А и Б одновременно, т. е. происходит и событие А, и событие Б. Принято обозначать: А*Б.

Если событие А – стоимость некоторого товара, превышающая 100 рублей, а событие Б – стоимость товара, не превышающая 110 рублей, то одновременное событие А и Б – это стоимость товара больше 100 рублей, но меньшая 110 рублей.

Пример.

Событие А – случайное выбранное двузначное четное число. Событие Б – случайно выбранное натуральное число, которое делится на 10. Когда одновременно выполняются события А и Б?

Решение.

Событие А – это множество четных двузначных чисел, т.е. {10,12,14…96,98}.

Событие Б – это множество двузначных чисел делящихся на 10, т.е. {10,20,30,…,100,…,150…}.

Одновременное выполнение событий А и Б есть ни что иное, как пересечение двух этих множеств. А∩Б={10,20,30,40,50,60,70,80,90}.

По другому вопрос нашей задачи можно сформулировать так: найдите произведение событий А и Б. Произведение и пересечение событий практически эквивалентные понятия.

Многие разделы математики так или иначе пересекаются. Так теория множеств и теория вероятностей имеют очень схожие определения и понятия. Составим таблицу схожих понятий.

Теория Вероятности	**Теория множеств**
Испытание с N исходами	Множество из N элементов
Отдельный исход испытания	Элемент множества
Случайное событие	Подмножество
Невозможное событие	Пустое подмножество
Достоверное событие	Подмножество, совпадающее со всем множеством
Вероятность события	Доля элементов подмножества среди всех элементов множества
Сумма событий	Объединение подмножеств
Несовместные (независимые) события	Непересекающиеся подмножества
Противоположные события	Дополнение подмножества до всего множества
Произведение событий	Пересечение подмножеств

Введем точное определение независимых событий, как принято в теории вероятности.

Определение. События А и В называются независимыми, если вероятность их произведения равна произведению вероятностей этих событий: P(A*B)=P(A)*P(B).

Несовместность и независимость двух событий немного разные понятия. Несовместные события – множество возможных исходов событий, которые никак не пересекаются. Независимость – это более абстрактное понятие, результаты событий никак не зависят друг от друга, но могут иметь какие-то общие элементы.

Утверждение . Вероятность суммы двух независимых событий равна сумме вероятностей этих событий минус произведение вероятностей событий: P(A+B)=P(A)+P(B)−P(A)*P(B).

Полезно запомнить: Если при решении задач логически подразумевается конструкция "или", то следует искать вероятность суммы событий; если логически подразумевается конструкция "и", то вероятность произведения событий.

Пример.

В билете предложено решить две задачи. Вероятность решения первой задачи равна 0,8. Вероятность правильного решения второй – 0,7. Найдите вероятности следующих событий:

а) Обе задачи будут решены.

б) Обе задачи не будут решены.

в) Будет решена хотя бы одна задача.

г) Будет решена ровно одна задача.

Решение.

Давайте выделим события. Событие А – решение первой задачи: P(A)=0,8.

Событие В – решение второй задачи: P(B)=0,7. А и В независимы.

а) Если обе задачи будут решены, значит одновременно выполняются события А и В, то есть из определения – произведение событий А и В, т.к. события не зависимы:

P(A*B)=P(A)*P(B)=0,8*0,7=0,56.

б) Обе задачи не будут решены. Неправильное решение – обратное событие правильному решению, тогда мы можем рассмотреть и обратные вероятности:

P($\overline{A}$)=1−P(A)=0,2,

P($\overline{B}$)=1−P(B)=0,3.

Обратные события так же независимы: P($\overline{A}\cdot\overline{B}$)=P($\overline{A}$)$\cdot$P($\overline{B}$)=0,06.

в) Будет решена хотя бы одна задача. Это значит, что нужно решить или первую, или вторую задачу, или одновременно решить обе задачи. Т.е исключить событие: «Обе задачи не будут решены»

$$1-P\left(\overline{A}\cdot\overline{B}\right)=1-0{,}06=0{,}94$$

г) Будет решена ровно одна задача. В этом задании одновременно правильно обе задачи решить нельзя, то есть либо решили первую, но вторую не решили, либо наоборот.

$$P\left(A\cdot\overline{B}+\overline{A}\cdot B\right)=P\left(A\cdot\overline{B}\right)+P\left(\overline{A}\cdot B\right)=0{,}8\cdot 0{,}3+0{,}2\cdot 0{,}7=0{,}38$$

Также можно вернуться к пункту в) и из полученной там вероятности вычесть вероятность одновременного решения: 0,94−0,56=0,38.

Ответ: а) 0,56 б) 0,06 в) 0,94 г) 0,38.

Задачи для самостоятельного решения

Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность промаха первого равна 0,3; вероятность промаха второго – 0,15. Найти вероятности того, что:

а) Первый стрелок попадет, а второй промахнется.

б) Оба стрелка промахнутся.

в) Цель будет поражена дважды.

г) Цель будет поражена ровно один раз.

Пример.

Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет 0,7. Стрелок производит последовательно три выстрела.

Найти вероятность того, что:

а) все три выстрела будут точными;

б) все три выстрела будут не точными;

в) будет хотя бы одно попадание;

г) будет ровно одно попадание.

Решение.

Как и при решении любой задачи давайте зададим событие А – попадание в цель при первом выстреле. Вероятность события А равна 0,7; и вероятность обратного события, т.е. промаха равна 0,3. События Б и С - попадание в цель при втором и третьем выстреле соответственно. Все эти события между собой независимы.

а) Все три выстрела будут точными. Значит стрелок попал и при первом выстреле, и при втором, и при третьем выстреле. На прошлом уроке мы заметили, что логическое "и" соответствует умножению:

P(ABC)=P(A)*P(B)*P(C)=$0,7^3$=0,343.

б) По аналогии с предыдущим пунктом нам надо найти вероятность того, что будут промахи при каждом выстреле:

$$P(\overline{ABC}) = P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) \cdot P(\bar{C}) = 0.3^3 = 0.027$$

в) Будет хотя бы одно попадание. Этот случай довольно запутанный – благоприятные нам возможные исходы испытаний:

попадание ровно один раз – 3 случая,

попадание два раза (первый попал, второй попал, третий промахнулся и т.д.) - 3 случая,

попадание все 3 раза – один случай.

Вычислять вероятность для каждого случая и их складывать довольно долго. Давайте найдем обратную вероятность для данного пункта. Обратная нам задача – все три промаха. Соответствующую вероятность мы нашли в предыдущем пункте, тогда:

$$P = 1 - P(\overline{ABC}) = 1 - 0.027 = 0.973$$

г) Будет ровно одно попадание.

Тут возможно три варианта благоприятных событий:

первый попал, а двое других промахнулись (1),

первый и третий промахнулись, второй попал (2),

первый и второй промахнулись, третий попал (3).

Может произойти или (1), или (2), или (3) – вероятность суммы данных событий. Помним про несовместность всех наших событий.

$$P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot B \cdot \bar{C} + \bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) = P(A \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot B \cdot \bar{C}) + P(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot C) =$$
$$= 0.7 \cdot 0.3 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.7 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.3 \cdot 0.7 = 3 \cdot 0.7 \cdot 0.3^2 = 0.189$$

В общем случае наша задача представляет собой модель следующего события: одно и то же испытание (эксперимент) проводится несколько раз, причем возможно всего два исхода испытания (попадание или не попадание). Такая модель называется "схемой Бернулли". Якоб Бернулли – швейцарский математик, который первым предложим способ вычисления вероятности модели, описанной выше. Рассмотрим схему более подробно.

Дано некоторое случайное событие А, совершенно любое, тогда вероятность этого события обозначим P(A). В нашей модели или схеме будем считать, что возможны всего два исхода: событие А произошло или событие А не произошло - $\bar{A}^{-}$.

Для краткости и удобства: "успех" - событие А, обозначим вероятность P(A)=p; "неудача" - событие $\bar{A}$. Вероятность неудачи обозначим q и тогда:

q=1−P(A)=1−p.

Теорема (схема испытаний Бернулли).

Пусть $P_n(k)$ – вероятность наступления ровно k "успехов" в серии из n независимых повторений одного и того же события. Тогда:

$P_n(k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$, где p – вероятность "успеха", q=1−p вероятность "неудачи".

Доказательство теоремы довольно таки громоздкое. Но данная схема оказала огромное влияние на развитие теории вероятности и оказалась применима во многих практических задачах.

Пример.

Для каждой задачи найти: n – количество всех испытаний, к – количество успехов, р - вероятность успеха, q - вероятность неудачи и требуемую вероятность в постановки задачи.

а) Какова вероятность того, что если 10 раз подбрасывать монеты, орел выпадет ровно 9 раз?

б) 20 человек просят выбрать наугад любой месяц года. Успешным выбором будем считать все месяцы лета и ноябрь с декабрем. Остальные месяцы будем считать не удачными. Какова вероятность того, что удачные месяцы выберут ровно 8 человек?

в) Игральный кубик бросают 30 раз. Удачным считается выпадение единицы или шестерки. Какова вероятность, что удачно выпадет кубик ровно 10 раз?

Решение.

а) Всего испытаний 10, значит n=10. Успешных испытаний должно быть 9, значит k=9. Вероятность выпадения орла или решки одинаковая и равна 0,5, то есть p=q=0,5. Воспользуемся схемой Бернулли:

$$P_{10}(9) = C_{10}^{9} \cdot p^9 \cdot q^{10-9} = \frac{10!}{9!\,1!} \cdot (0.5)^9 \cdot 0.5 = 10 \cdot (0.5)^{10}$$

б) Всего у нас 20 человек, n=20. Удачные месяцы должны выбрать 8 человек, k=8.

Найдем вероятность успеха. Всего у нас 12 месяцев в году, благоприятных нам: 3 месяца лета + ноябрь и декабрь. Тогда по классической формуле вероятности:

$$p = \frac{5}{12} \qquad q = 1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$$

Воспользуемся схемой Бернулли:

$$P_{20}(8) = C_{20}^{8} \cdot p^8 \cdot q^{20-8} = \frac{20!}{12!\,8!} \cdot \left(\frac{5}{12}\right)^8 \cdot \left(\frac{7}{12}\right)^{12}$$

в) Очевидно, что n=30,k=10, p=2/6, q=4/6.

$$P_{30}(10) = C_{30}^{10} \cdot p^{10} \cdot q^{20} = \frac{30!}{10!\,20!} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{20}$$

Теорема Бернулли оказала существенное влияние на развитие теории вероятности и математической статистики. Фактически она показала связь между классическим определением вероятности и статистическим определением вероятности. В теории вероятности есть теорема "Закон больших чисел". Кратко объясним ее смысл.

Предположим, мы проводим некоторое испытание, например, подбрасываем монетку. Монетку мы подбрасываем ровно n раз. Выпадение "орла" - k раз, а выпадение "решки" - (n−k) раз. Статистически вероятность выпадения "орла" – k/n, а выпадения "решки" - (n−k)/n. Согласно классическому определению вероятности выпадения "орла" и "решки" будут равны 0,5. При большом количестве проведенных испытаний, то есть чем больше n, тем больше статистическая вероятность будет стремиться к классической вероятности.

Закон больших чисел.

Теорема. При большом числе независимых повторений одного и того же испытания частота появления случайного события А со все большей точностью приближенно равна вероятности события А: k/n≈P(A).

Методы математической статистики позволяют вычислять достоверность и устойчивость полученных результатов.

Например, если n≥2000, то достоверность полученных результатов получена с точностью до 0,03. Если опросили 2000 человек, и из них 520 дали требуемый ответ, то статистическая вероятность дачи требуемого ответа: 520/2000=0,26. Можно утверждать, что если будет опрошено много больше, чем 2000 человек, то вероятность будет отличаться от исходной не больше чем на 0,03. То есть получится число из промежутка [0,23;0,29]. Такое явление называется статистической устойчивостью.

Схема Бернулли позволяет находить приближенное значение вероятности события, для тех случаев когда ее невозможно подсчитать напрямую.

Задачи для самостоятельного решения

Для каждой задачи найти: n – количество всех испытаний, к – количество успехов, р - вероятность успеха, q - вероятность неудачи и требуемую вероятность в постановки задачи.

а) Монету подбрасывают 30 раз. Какова вероятность того, что "орел" выпадет ровно 15 раз?

б) 30 человек просят выбрать наугад время года. Успешным выбором считается лето, остальные времена будем считать не удачными. Какова вероятность того, что удачно выберут ровно 12 человек?

в) Игральный кубик бросают 50 раз. Удачным считается выпадение единицы, двойки, четверки или шестерки. Какова вероятность, что удачно выпадет кубик ровно 25 раз?

В теории вероятности ключевым является понятие "случайность", которое является понятием абстрактным. Казалось бы, если некоторое событие случайно, то как и что для него можно подсчитать? Но некоторые закономерности существуют, также существуют числовые характеристики для этих событий и способы их вычисления.

В рамках конкретной задачи случайное событие может быть абсолютно любым: выпадение орла или решки при подбрасывании монетки, выпадение стороны кубика, вытаскивание какой-либо карты из колоды, вызов такси и приезд какой-либо марки машины, падение метеорита на какой-либо участок территории и многое другое.

Случайное событие мы вправе выбирать сами, но строго в рамках конкретной задачи.

Давайте разберем, как формулы комбинаторики могут помочь при вычислении вероятности событий.

Отметим, что при решении вероятностных задач, первоначально следует определить, сколько всего исходов возможно в рамках данной задачи, то есть все варианты исходов данной задачи.

Пример.

Из колоды (36 карт) случайным образов вытаскивают 4 карты. Найти вероятность того:

а) "король червей" не попался,

б) вытащили "короля червей".

Решение.

Сначала нам нужно определить, сколько всего исходов. В колоде 36 карт, из которых случайным образом выбирается 4 карты. Нам надо найти количество выборов карт из 36 по 4 штук - это количество перестановок без повторений элементов, то есть

$$n = C_{36}^{4}$$

а) "Король червей" не попался, то есть попалась любая другая карта. Благоприятных нам карт осталось 35, то есть нам надо найти количество комбинаций из 35 карт по 4 вытащенным картам, без повторений среди вытащенных карт. Используя формулы комбинаторики:

$$m = C_{35}^{4} = \frac{35!}{4!\,(35-4)!} = \frac{31! \cdot 32 \cdot 33 \cdot 34 \cdot 35}{4! \cdot 31!}$$

Найдем вероятность, используя классическую формулу:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{C_{35}^{4}}{C_{36}^{4}} = \frac{35!}{4!\,31!} \cdot \frac{4!\,32!}{36!} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}$$

б) В этом пункте нас просят найти вероятность события, обратного событию предыдущей задачи. Так как сумма вероятностей противоположных событий равна 1, тогда проще вычислить вероятность следующим образом:

$$P = 1 - \frac{8}{9} = \frac{1}{9}$$

Пример.

В урне лежат красные и синие шары. Известно, что красных шаров - 8 штук, а синих - 5 штук. Случайным образом вытаскивают 3 шара, найдите вероятность следующих случайных событий:

а) Среди вытащенных шаров оказалось два синих.

б) Среди вытащенных шаров оказался как минимум один красный.

в) Синих шаров вытащили больше красных.

Решение.

Сначала определим: сколько всего исходов возможно в рамках данной задачи. Получается, что в урне лежат 8 красных плюс 5 синих или 13 шаров. Так как вытаскивают 3 шара, то необходимо найти все возможные комбинации 3 шаров из 13 данных. При вытаскивании шары не кладутся обратно, то есть повторения не возможны. Значит надо найти количество комбинаций из 13 шаров по 3 без повторений.

Используем известную формулу:

$$n = C_{13}^3 = \frac{13!}{3!\,10!} = \frac{10! \cdot 11 \cdot 12 \cdot 13}{6 \cdot 10!} = 11 \cdot 2 \cdot 13 = 286$$

Итак, всего у нас возможно 286 комбинаций. Перейдем к решению данной задачи.

а) Мы вытаскиваем 3 шара, из них два шара должны быть синими и один - красным. Количество комбинаций для синих шаров - C_5^2 а для красных - C_8^1. Используя правило умножения, можно найти количество благоприятных комбинаций m.

$$m = C_5^2 \cdot C_8^1 = \frac{5!}{2!\,3!} \cdot \frac{8!}{7!\,1!} = \frac{4 \cdot 5}{2} \cdot 8 = 80$$

Используем классическое определение вероятности:

$$P = \frac{m}{n} = \frac{80}{286} \approx 0.28$$

б) Посмотрим внимательно на условие: среди вытащенных шаров должно быть не меньше одного красного. Это значит, что возможны следующие варианты: вытащен один красный шар, вытащено два красных шара и вытащено три красных шара.

В этой задаче будет проще найти вероятность события противоположного требуемому, то есть вероятность того, что было вытащено менее одного красного шара или все вытащенные шары оказались синими. Найдем данную вероятность.

Количество комбинаций 3 синих шаров из 5:

$$C_5^3 = \frac{5!}{3!\,2!} = \frac{4 \cdot 5}{2} = 10$$

Вероятность, что все вытащенные шары синие:

$$P = \frac{10}{286} = 0.035$$

Тогда вероятность того, что среди вытащенных шаров не меньше одного красного: P=1−0,035=0,965.

в) Вероятность того, что синих шаров вытащили больше, чем красных означает, что было вытащено либо 2 синих шара и 1 красный - событие A, либо все 3 шара синие – событие B.

Тогда нам надо найти вероятность события C, состоящего из суммы событий A и B.

P(C)=P(A+B)=P(A)+P(B).

Обратим внимание, что указанная выше формулы справедлива только для независимых событий A и B

Вероятность события A мы уже подсчитали в пункте а) данной задачи. P(A)=0,28.

Вероятность события B мы уже подсчитали в пункте б) данной задачи. P(B)=0,035.

Осталось сложить требуемые вероятности и получить ответ: P(C)=P(A)+P(B)=0,28+0,035=0,315.

Ответ: а) 0,28; б) 0,965; в) 0,315.

Отметим, что вероятностные задачи решать тяжелее, чем просто комбинаторные. В процессе решения нам следует выделить следующие пункты:

а) Определить все возможные исходы в рамках данной задачи.

б) Найти количество всех этих исходов или комбинации всех возможных исходов.

в) Определить благоприятные исходы для данной задачи.

г) Найти количество благоприятных исходов или их комбинаций.

д) Найти вероятность требуемого события.

Задачи для самостоятельного решения

1. Из колоды (36 карт) случайным образов вытаскивают 6 карты. Найти вероятность того, что:

а) "шестерка пик" не попалась,

б) попалась любая шестерка.

2. В урне лежат красные и синие шары. Известно, что красных шаров - 10 штук, а синих - 7 штук. Случайным образом вытаскивают 5 шаров, найдите вероятность следующих случайных событий:

а) Среди вытащенных шаров окажется 3 синих.

б) Среди вытащенных шаров окажется не больше 3 красных.

в) Красных шаров вытащили больше синих или равное количество.

ЛЕКЦИЯ 3. Элементы математической статистики.

- Случайные величины.
- Дискретная и непрерывная случайная величина.
- Распределение случайной величины.
- Числовые характеристики дискретной случайной величины.
- Представление данных (таблицы, диаграммы, графики).
- Генеральная совокупность, выборка, среднее арифметическое, медиана.
- Понятие о задачах математической статистики.

Переходим к изучению нового раздела, связанного с вопросами обработки данных различных экспериментов. Теория вероятности и математическая статистика находят свое применение практически во всех областях жизни.

Рассмотрим пример, где нам пригодиться обработка информации.

Пусть у нас есть десять футболистов - основной состав некоторой команды. Наши футболисты пробивают по десять пенальти и результаты каждого игрока записываются. После окончания серии пенальти есть некоторый набор результатов, на первый взгляд просто набор чисел. Что можно сделать с этими числами? Какую пользу они нам могут принести?

В первую очередь надо сгруппировать и упорядочить полученную информацию. Группировать информацию можно различными способами, все зависит от поставленной задачи. В нашем случае мы можем сгруппировать данные по фамилии игрока или по номеру игрока команды.

Сгруппируем по номеру игрока.

Номер Игрока	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Количество Забитых Голов	3	7	6	5	5	4	4	7	8	6

Сгруппируем по количеству забитых голов.

Количество Забитых Голов	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Количество игроков забивших голы	0	0	0	1	2	2	2	2	1	0	0

Представим первую таблицу графически.

На координатной плоскости по оси абсцисс отложим номер игрока, а по оси ординат - количество забитых голов.

Полученная кривая называется многоугольником распределения.

Теперь построим гистограмму: она позволяет наглядно представить значения нашего ряда распределений. Мы строим прямоугольники с "центром" в значениях нашего ряда. Получаются такие прыгающие столбики.

Нам осталось построить еще один тип диаграммы – круговую. Предположим, что наш круг включает все 100% забитых голов (55), тогда игрок с номером два займет 3/55 площади круга, игроки с номерами 5 и 6 займут 1/11 часть круга, так как 5/55=1/11. Давайте построим для всех игроков круговую диаграмму.

Мы научились обрабатывать данные. Давайте напишем небольшой алгоритм первичной обработки данных:

Упорядочить и сгруппировать данные.

Составить таблицу распределения данных.

Графическое представление данных. В зависимости от задачи построить один из графиков распределения: Многоугольник распределения, Гистограмму или круговую диаграмму.

На этом обработка информации не заканчивается, для нашего ряда распределения можно найти многие числовые характеристики.

Первая числовая характеристика - это объем выборки, в нашем случае он равен десяти, так как мы рассматривали десять футболистов.

Размах измерения – разница между наибольшим и наименьшим значениями выборки. Больше всего голов забил игрок под номером 10 – 8 голов. Меньше всего, игрок под номером 2 – 3 гола. Тогда размах нашего измерения: 8−3=5.

Самое популярное или наиболее часто встречаемое значение называется модой выборки. В нашем примере мода равна 10 – игрок, забивший наибольшее количество голов. В реальности тренер команды мог назначить этого игрока штатным пенальтистом.

Среднее значение выборки. Суммируя все результаты и поделив на объем выборки, можно получить среднее значение. Для подсчета среднего значения удобнее использовать данные второй построенной таблицы.

$$\frac{0\cdot0+1\cdot0+2\cdot0+3\cdot1+4\cdot2+5\cdot2+6\cdot2+7\cdot2+8\cdot1+9\cdot0+10\cdot0}{10}=5{,}5$$

Округлив до целых, получим, что в среднем игроки забивали по шесть голов. Тренер команды мог бы запомнить данное значение, и через некоторое время провести еще раз такой эксперимент и проверить растут ли показатели команды или нет.

Варианта измерения – каждое число, встретившиеся в результате измерения. В нашем случае для первой таблицы – количество забитых голов, для второй – количество игроков, забивших гол.

Медиана измерения – среднее варианта, встречающиеся в выборке. Она делит нашу выборку пополам. Для второй выборки медиана равняется 5, так как это значение делит наш ряд ровно пополам. Если число вариант четно, как в первой выборке, то берутся два средних значения и делятся пополам: (6+7)/2=6,5.

Кратность или абсолютная частота варианты – то сколько раз встречается конкретная варианта. Для второй таблица кратность 0 равна 0, кратность 4 равна 2, кратность 8 равна 1.

При составлении таблицы, не всегда получается, что варианты расположены через равные промежутки. Варианта измерения может принимать фактически любые значения: и положительные, и отрицательные. Кратность варианты всегда больше нуля, если кратность равна нулю, то фактически в нашем эксперимента данное значение не встретилось, поэтому вторую таблицу "Распределения целесообразней" записать в таком виде:

Количество Забитых Голов	3	4	5	6	7	8
Количество игроков забивших голы	1	2	2	2	2	1

Частота варианты – числовая характеристика, показывающая часть или долю которую составляет варианта от всей выборки, которая равна:

$$\text{Частота варианты} = \frac{\text{Кратность варианты}}{\text{Обьем выборки}}$$

$$\text{Частота варианты \%} = \frac{\text{Кратность варианты}}{\text{Обьем выборки}} \cdot 100\%$$

Перепишем нашу вторую таблицу с учетом частот и объема выборки:

Количество Забитых Голов	3	4	5	6	7	8	Объем
Количество игроков забивших голы	1	2	2	2	2	1	10
Частота	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	0,1	
Частота, %	10%	20%	20%	20%	20%	10%	

Сумма всех частот всегда равна 1, а сумма частот в процентах всегда равна 100%.

Вернемся к среднему значению, данная числовая характеристика часто является очень полезной, но не во всех задачах имеет смысл ее вычислять. В нашем примере эта числовая характеристика показывала, сколько в среднем забивает команда. Со временем можно делать выводы об эффективности или неэффективности методов тренировки. Если среднее значение забитых голов растет, то видимо и тренировка эффективна, если - не растет, а даже падает то видимо, методы тренировки неэффективны.

Еще одна важная числовая характеристика – дисперсия или разброс значений вокруг среднего значения. Чем меньше дисперсия, тем плотнее результаты эксперимента сосредоточены около своего среднего значения. Подсчет дисперсии довольно таки трудоемкая операция, опишем алгоритм поиска дисперсии.

Пусть нам даны данные измерений: $x_1, x_2, .., x_n$

1. Найдем среднее значение M:

$$M = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

2. Отклонение данных от среднего:

$$x_1 - M, x_2 - M, \ldots, x_n - M$$

3. Квадраты отклонений найденных на предыдущем шаге:

$$(x_i - M)^2 \ (i = 1..n)$$

4. Среднее значение всех квадратов отклонений и есть дисперсия:

$$D = \frac{(x_1 - M)^2 + (x_2 - M)^2 + \cdots + (x_n - M)^2}{n}$$

$\delta = \sqrt{D}$ –среднее квадратическое отклонение.

Вычислим дисперсию для нашего примера:
1. Вспомним, среднее значение у нас равнялось 5,5.
2. Вычислим каждое отклонение и квадрат отклонения.

Номер Игрока	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Количество Забитых Голов	3	7	6	5	5	4	4	7	8	6
Отклонение от среднего	-2,5	1,5	0,5	-0,5	-0,5	-1,5	-1,5	1,5	2,5	0,5
Квадрат отклонения	6,25	2,25	0,25	0,25	0,25	2,25	2,25	2,25	6,25	0,25

3. Вычислим дисперсию.

$$D = \frac{6{,}25 + 2{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 0{,}25 + 2{,}25 + 2{,}25 + 2{,}25 + 6{,}25 + 0{,}25}{10} = 2{,}25$$

Методы математической статистики позволяют обрабатывать практически любые данные, главное подходить к обработке данных обдуманно и исходя из здравого смысла.

Домашнее задание:
Игроки команды провели повторный эксперимент с пенальти, результаты 10 игроков:

Номер Игрока	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
Количество Забитых Голов	4	6	7	5	4	7	5	8	9	7

Составить различные ряды распределений, представить данные графически, вычислить числовые характеристики: Объем, разброс, моду, медиану, среднее, дисперсию, частоту выборки.

Геометрия

Раздел 7. Геометрия
Тема 7.1.Прямые и плоскости в пространстве

ЛЕКЦИЯ 1. Аксиомы стереометрии.

- Что изучает стереометрия.
- Основные фигуры пространства.

- Аксиома, теорема.
- Аксиомы планиметрии.
- Аксиомы стереометрии.
- Следствия из аксиом.
- Задачи на доказательство.
  Геометрия – это наука, которая изучает свойства геометрических фигур.
  Геометрическая фигура – это любая совокупность точек. Геометрия подразделяется на планиметрию и на стереометрию, которую мы начинаем изучать.

Основными фигурами стереометрии являются точка, прямая, плоскость. Примеры стереометрических фигур: шар, сфера, конус, цилиндр, параллелепипед и т.д.

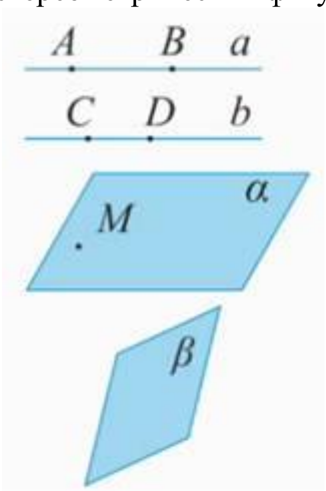


Рис.1

A, B, C, D – точки. Точки обозначаются прописными латинскими буквами.
AB =*a* , CD = b – прямые. Прямые обозначаются строчными латинскими буквами.
α, β – плоскости. Плоскости обозначаются греческими буквами. .

Рассмотрим прямую *a*. На ней лежат точки A и B. Прямая может быть также обозначена как AB.

Рассмотрим прямую b, на ней лежат точки C и D. Прямая b может быть также обозначена как CD.

Специфика всей стереометрии заключается в том, что пространственные фигуры мы будем изображать на плоскости.

Так же, как и в планиметрии, важен знак принадлежности, $\in$. Например, точка A принадлежит прямой : $A \in a$.

Рассмотрим плоскость α . Точка M принадлежит плоскости : $M \in \alpha$. А вот прямая *a* не принадлежит плоскости : $a \notin \alpha$.

Аксиомы стереометрии.

Аксиома 1 (А1). *Через любые три точки, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна.*

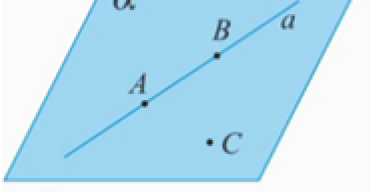


Рис. 2.

Рассмотрим три точки: A, B, C, причем точка C не принадлежит прямой AB: (Рис. 2). Тогда через три точки A, B, C, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость , и притом только одна.
Плоскость можно также обозначить тремя точками (ABC).

<u>Аксиома 2 (А2).</u> *Если две точки прямой лежат в плоскости, то все точки прямой лежат в этой плоскости.*

По-иному говорят, что прямая лежит в плоскости или что плоскость проходит через прямую.
Рассмотрим плоскость α, точки A, B прямой принадлежат плоскости (Рис. 3).

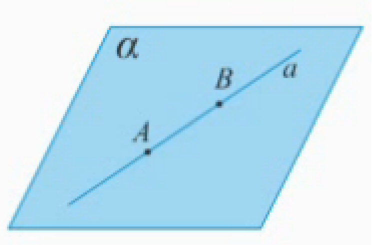


Рис. 3.
Аксиома утверждает – все точки прямой *a* (прямой AB) принадлежат плоскости α, т.е. вся прямая лежит в плоскости или плоскость α проходит через прямую . Смысл заключается в следующем: из того, что только две точки принадлежат плоскости, вытекает, что бесчисленное множество точек прямой лежат в этой плоскости.

Следствие: Может ли быть только три общие точки у прямой и плоскости? Нет, не может быть. Может быть две точки, и тогда вся прямая лежит в плоскости.
Если у прямой и плоскости одна общая точка M, то тогда говорят, что прямая *a* и плоскость α пересекаются в точке M (Рис. 4). Этот факт записывается следующим образом: $a \cap \alpha = M$.

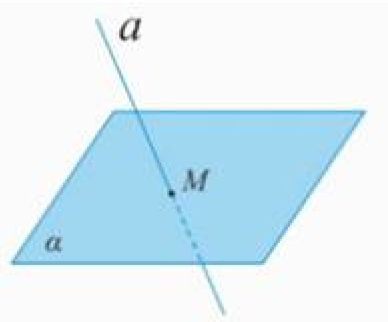


Рис. 4.
<u>Аксиома 3 (А3)</u> *Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей. Говорят, что плоскости пересекаются по прямой.*
Имеем разные плоскости: плоскость α, плоскость β. Известно, что они имеют общую точку M, точка M принадлежит плоскости α и плоскости β. (Рис. 5)

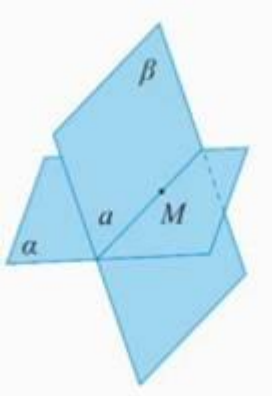


Рис. 5.
Отсюда вытекает, что существует прямая , которая проходит через точку М, которая одновременно принадлежит и плоскости α, и плоскости β. Вот в этом случае и говорят, что плоскости пересекаются по прямой a.
Смысл аксиом разъясняется в многочисленных вопросах и задачах. Вот некоторые из них.

Дан тетраэдр ABCD (Рис. 6). Даны следующие точки: точка E – внутренняя точка ребра AB, точка P – внутренняя точка отрезка ED, точки M и K, соответственно, на ребрах BD и DC.

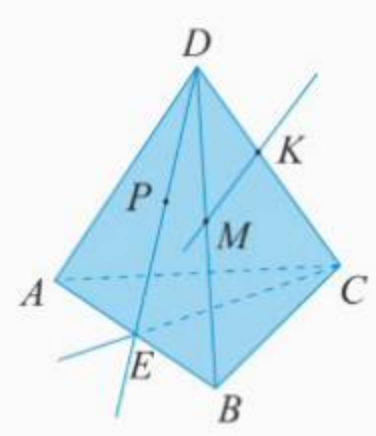


Рис. 6.
Задача 1

а) В какой плоскости лежит прямая PE?
Ответ: . Прямая PE лежит в плоскости ABD, так как в этой плоскости лежат две точки этой прямой. Точка E лежит в плоскости ABD и точка P лежит в этой же плоскости. Значит, по второй аксиоме все точки прямой PE лежат в плоскости ABD.

б) В какой плоскости лежит прямая MK?
Ответ: Прямая MK лежит в плоскости DBC, так как в этой плоскости лежат две точки этой прямой. Точка M лежит в плоскости DBC и точка K лежит в плоскости DBC. По второй аксиоме все точки прямой MK лежат в плоскости DBC.

в) В каких плоскостях лежит прямая BD ?
Ответ: Прямая BD лежит в плоскости BDA и в плоскости BDC. Значит, прямая BD одновременно лежит в двух плоскостях. Прямая BD есть линия пересечения двух плоскостей. Говорят, что грани ABD, BDC пересекаются по прямой BD. Это можно записать так:

$$\begin{matrix} BD \in BDC \\ BD \in BDA \end{matrix} \Rightarrow BD = BDC \cap BDA$$

г) В каких гранях лежит прямая AB?

Ответ: Прямая AB лежит в грани ABC и в грани ABD. Значит, прямая AB есть линия пересечения двух этих граней.

д) В каких гранях лежит прямая EC?
Ответ: Прямая EC лежит в плоскости ABC и в плоскости ECD, так как точки E и C лежат одновременно в плоскости ABC и в плоскости ECD. Значит, прямая EC есть линия пересечения этих плоскостей.

Задача 2.

а) Найдите точку пересечения прямой DK с плоскостью ABC.
Решение:
Прямая DK содержит точку C. Плоскость ABC содержит точку C. Значит, прямая DK и плоскость ABC пересекаются в точке C.

б) Найдите точку пересечения прямой CE с плоскостью ADB.
Решение:
Точка E принадлежит и прямой CE, и плоскости ADB. Значит, Прямая CE пересекается с плоскостью ADB в точке E.

Задача 3.
а) Найдите точки, лежащие одновременно в плоскостях ADB и DBC.
Решение:
Точка B и точка D одновременно лежат и в ADB, и в DBC. Значит, . Все точки прямой DB являются ответом.

б) Найдите прямые, по которым пересекаются плоскость ADB и DBC.
Решение:
Точка B и точка D одновременно лежат и в ADB, и в DBC. Значит, прямая DB есть прямая, по которой пересекаются заданные плоскости.

в) Назовите прямые, по которым пересекаются плоскости ADB и CDA.
Решение:
Точки A, D лежат в плоскости ADB, а также точки A, D лежат в другой плоскости CDA. Значит, AD – линия их пересечения: .

г) Назовите прямые, по которым пересекаются плоскости PDC и ABC.
Решение:
Плоскость PDC совпадает с плоскостью EDC. Точка E и точка C одновременно лежат в двух плоскостях: PDC и ABC. Значит, CE – это линия пересечения двух плоскостей.
Теорема 1. *Через прямую и не лежащую на ней точку проходит плоскость, и притом только одна.*

Иллюстрация теоремы 1. (Рис. 4.)

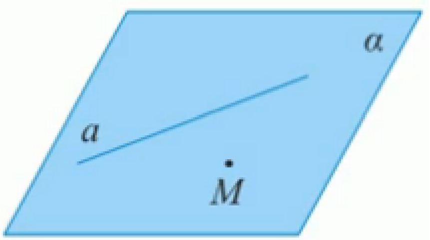


Рис. 4.
Теорема 2. *Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна.*

Иллюстрация теоремы 2. (Рис. 5.)

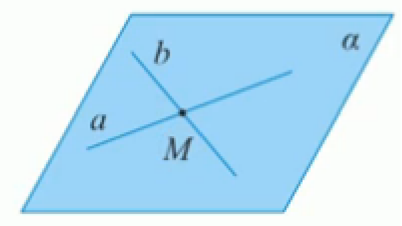


Рис. 5.

<u>Задача 1.</u>
Даны две прямые, которые пересекаются в точке М. Докажите, что все прямые, не проходящие через точку М и пересекающие данные прямые, лежат в одной плоскости (Рис. 6.).

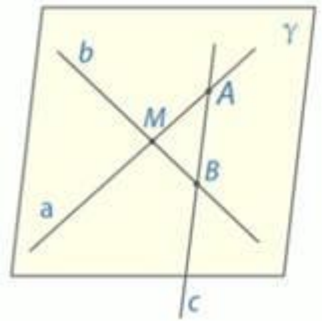


Рис. 6.

Решение:

Нам даны две прямые a и b, которые пересекаются в некоторой точке М. Возьмем произвольную прямую c, которая не проходит через точку М, но пересекает исходные прямые a и b в точках A, B, соответственно.

Через две пересекающиеся прямые проходит плоскость, и притом только одна, согласно 2 теореме. Значит через пересекающиеся прямые a и b проходит единственная плоскость, обозначим ее γ.

Две разные точки A и B прямой c принадлежат плоскости . А из того, что две точки прямой принадлежат плоскости, вытекает, что все точки прямой принадлежат плоскости, т.е. вся прямая лежит в плоскости. Значит, прямая c принадлежит этой плоскости.
Таким образом, мы доказали, что все прямые, пересекающие A и B, но не проходящие через M, лежат в одной плоскости.

<u>Задача 2.</u>
Три данные точки соединены попарно отрезками. Докажите, что все отрезки лежат в одной плоскости.

Решение:
Пусть нам даны три точки: A, B, и C. Нужно доказать, что отрезки AB, BC, CA лежат в одной плоскости (Рис. 7.).

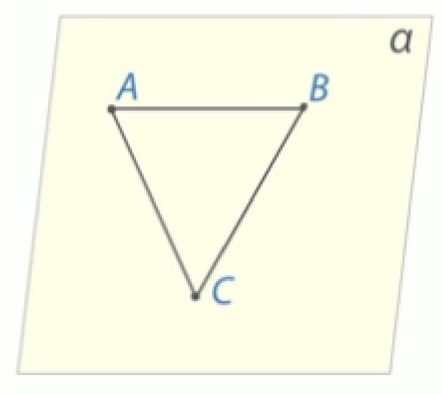


Рис. 7.

Если точка С лежит на прямой АВ, то ответ очевиден. Предположим, что точка С не принадлежит прямой АВ. Тогда через три точки А, В, С, не лежащие на одной прямой, проходит плоскость, и притом только одна, в силу аксиомы 1. Обозначим эту плоскость α
Прямая АВ целиком лежит в плоскости , потому что две ее точки лежат в этой плоскости.
Но, значит, и отрезок АВ лежит в плоскости α.
Аналогично и с другими отрезками. Прямая ВС лежит в плоскости α α , потому что две ее точки В и С лежат в плоскости, значит, и отрезок ВС лежит в плоскости .
И аналогично, отрезок АС лежит в плоскости α . Что и требовалось доказать.

ЛЕКЦИЯ 2. Параллельность прямых.

- Параллельные прямые в пространстве (определение).
- Скрещивающиеся прямые (определение).
- Взаимное расположение прямых в пространстве.
- Признак параллельности прямых .
- Решение задач.

Определение: *Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются (Рис. 1.).*
Обозначение параллельных прямых: a || b.

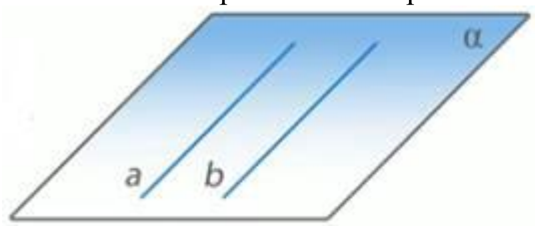


Рис. 1.
Теорема 1.*Через любую точку пространства, не лежащую на данной прямой, проходит прямая, параллельная данной, и притом только одна.*

Дано: прямая *a*, $M \notin a$ (Рис. 2.)
Доказать: существует единственная прямая b || *a*, $M \in b$

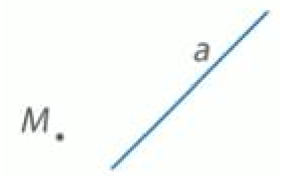


Рис. 2.
Доказательство:
Через прямую *a* и точку *M* , не лежащую на ней, можно провести единственную плоскость α (Рис. 3.). В плоскости α можно провести единственную прямую b, параллельную *a*,

проходящую через точку М (из аксиомы планиметрии о параллельных прямых). Существование такой прямой доказано.

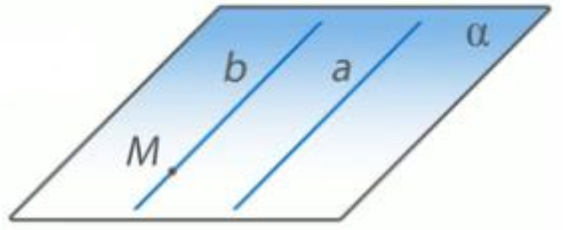


Рис. 3.

Докажем единственность такой прямой. Предположим, что существует другая прямая *с*, проходящая через точку М и параллельная прямой а. Пусть параллельные прямые *а* и *с* лежат в плоскости *β*. Тогда плоскость β проходит через точку М и прямую *а*. Но через точку М и прямую *а* проходит единственная плоскость (в силу теоремы 2). Значит, плоскости β и α совпадают. Из аксиомы параллельных прямых, следует, что прямые b и *с* совпадают, так как в плоскости существует единственная прямая, проходящая через данную точку и параллельная заданной прямой. Единственность доказана.

Лемма. *Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.*

Дано: a || b, $a \cap \alpha = M$

Доказать: $b \cap \alpha = N$

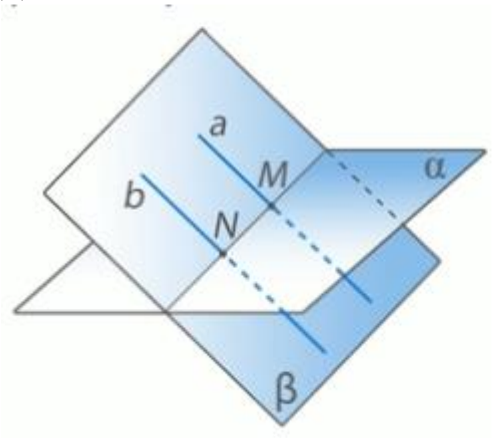


Рис. 4.

Доказательство: (Рис. 4.)

Существует некоторая плоскость β, в которой лежат параллельные прямые a и b. Точка М принадлежит и плоскости α, и прямой *а*, которая лежит в плоскости β. Значит, М – общая точка плоскостей α и β. А по третьей аксиоме, существует прямая MN, по которой пересекаются эти две плоскости.

Прямая MN пересекается с прямой b.(так как в противном случае, получается, что прямые MN и b параллельные, то есть *a* = MN, что невозможно, так как прямая а пересекается с плоскостью α в точке М по условию). То есть точка N – это точка пересечения прямой *b* и плоскости α. $b \cap \alpha = N$.

Докажем, что N - это единственная общая точка прямой b и плоскости α. Допустим, что есть другая точка, но тогда прямая b принадлежит плоскости α (по второй аксиоме). То есть MN = b, что невозможно, так как прямые a и b параллельны, а прямая *a* должна пересекаться с прямой MN. Лемма доказана.

Теорема 2.*Если две прямые параллельны третьей, то они параллельны.*

Дано: $a||c; b||c$
Доказать: $a||b$.

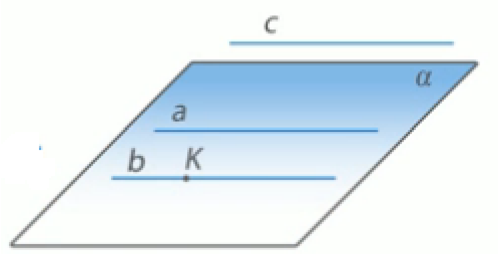


Рис. 5.

Доказательство: (Рис. 5.)

Выберем произвольную точку K на прямой b. Тогда существует единственная плоскость α, проходящая через точку K и прямую a. Докажем, что прямая b лежит в плоскости α.

Предположим противное. Пусть прямая b не лежит в плоскости α. Тогда прямая b пересекает плоскость α в точке K. Так как прямые b и c параллельны, то, согласно лемме, прямая c также пересекает плоскость α. Прямые *a* и c также параллельны, значит, по лемме, прямая *a* также пересекает плоскость α, но это невозможно, так как прямая *a* лежит в плоскости α. Получили противоречие. То есть, предположение было неверным, а значит, прямая b лежит в плоскости α.

Докажем, что прямые *a* и b не пересекаются. Предположим противное. Пусть прямые *a* и b пересекаются в некоторой точке M. Но тогда получается, что через точку M проходят две прямые *a* и b, параллельные прямой *c*, что невозможно в силу теоремы 1. Получили противоречие. Значит, прямые *a* и b не пересекаются.

Мы доказали, что прямые *a* и b не пересекаются и что существует плоскость α, в которой лежат прямые *a* и b. Значит, прямые *a* и b параллельны (по определению), что и требовалось доказать.

Скрещивающиеся прямые

Определение. *Две прямые называются скрещивающимися, если они не лежат в одной плоскости.*
Теорема (признак скрещивающихся прямых). *Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не лежащей на этой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.*
Доказательство:

Пусть нам дана плоскость α. Прямая AB лежит в плоскости α, а прямая DC пересекается с плоскостью α в точке C, которая не лежит на прямой AB (Рис. 1.). Докажем, что прямые AB и DC являются скрещивающимися.

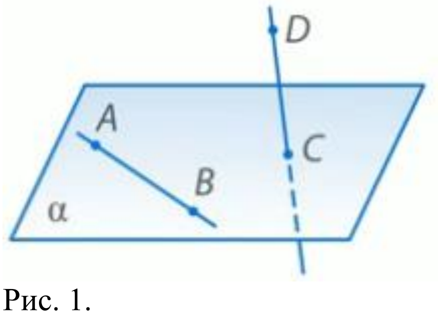
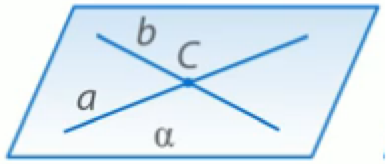


Рис. 1.

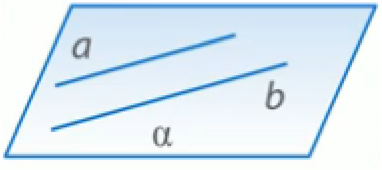
Используем метод от противного. Предположим, что существует плоскость β, в которой лежит, и прямая AB и прямая DC. Тогда в плоскости β лежит прямая AB и точка C. Через прямую и точку, не лежащую на ней, проходит единственная плоскость - α. Значит, такой плоскости β, в которой лежит, и прямая AB и прямая DC, не существует. То есть, прямые AB и DC – скрещивающиеся. Теорема доказана.

Возможные случаи расположения прямых в пространстве:

1) Прямые *a и b* пересекаются в некоторой точке C. Как мы знаем, через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

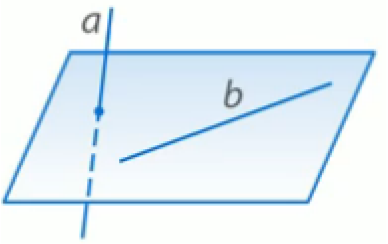


2) Прямые *a* и b параллельны: a || b . Если прямые параллельны, то они лежат в одной плоскости и не пересекаются.



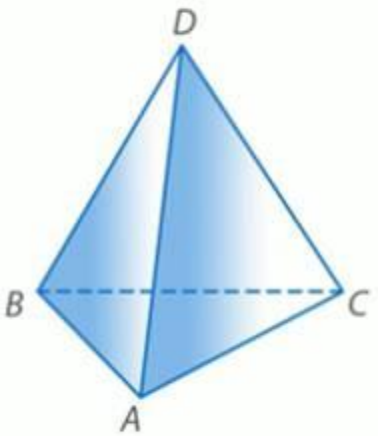
Заметим, что и в первом, и во втором случае прямые лежали в одной плоскости.

3) Прямые *a* и b скрещиваются . То есть прямые *a* и b не лежат в одной плоскости.



Пример скрещивающихся прямых в треугольной пирамиде

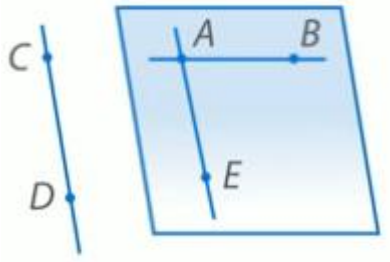
Дана треугольная пирамида ABCD, ABC – плоскость основания, точка D не лежит в плоскости ABC . Почему прямые AB и DC скрещивающиеся?



Прямая DC пересекает плоскость ABC в точке C, не лежащей на прямой AB, а прямая AB лежит в плоскости ABC. Значит, по признаку, прямые AB и DC – скрещивающиеся. То есть противоположные ребра треугольной пирамиды лежат на скрещивающихся прямых.
Теорема . *Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит плоскость, параллельная другой прямой, и притом только одна.*

Доказательство.

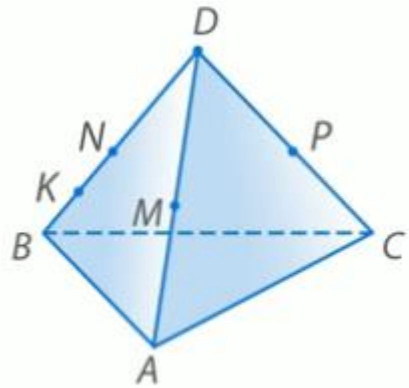
Пусть нам даны две скрещивающиеся прямые AB и CD. Докажем, что через прямую AB проходит плоскость, параллельная прямой CD, и притом только одна.



Проведем через точку A прямую AE, параллельную прямой DC . По теореме о параллельных прямых, такая прямая существует и единственная. Тогда через две пересекающиеся прямые AB и AE можно провести единственную плоскость α. Так как прямая DC, которая не лежит в плоскости α, параллельна прямой AE, лежащей в плоскости α, значит, что прямая DC параллельна плоскости α, по признаку параллельности прямой и плоскости. Существование доказано.

Докажем единственность такой плоскости. Пусть существует другая плоскость β, которая проходит через прямую AB и параллельна прямой DC. Тогда прямая AE пересекает плоскость β, а значит и параллельная ей прямая DC пересекает плоскость β, по лемме. То есть, прямая DC не параллельна плоскости β. Получили противоречие. Следовательно, плоскость α – единственная. Теорема доказана.

Задача *Точка D не лежит в плоскости треугольника ABC, точки M, N, P – середины отрезков DA, DB и DC соответственно, точка K лежит на отрезке BN . Выясните взаимное расположение прямых:*



1) ND и AB.

Прямая ND - это другое обозначение прямой BD. Прямая BD и прямая AB лежат в плоскости ABD и пересекаются.

2*) PK и BC.*

Прямые PK и BC лежат в одной плоскости. Значит, они либо параллельные, либо пересекаются. Проведем среднюю линию NP (N, P – середины отрезков DB и DC соответственно). По свойству средней линии, прямая NP параллельна прямой BC. Через точку P можно провести только одну прямую, параллельную прямой BC, и это прямая NP. Значит, любая другая прямая, проходящая через точку P, не параллельна прямой BC. Значит, PK и BC пересекаются.

3) MN и AB.

В треугольнике ABD точки M и N – середины сторон AD и BD. Значит, MN – средняя линия. По свойству средней линии, MN параллельна AB.

4) MP и AC.

В треугольнике ADC точки M и P – середины сторон AD и CD. Значит, MP – средняя линия. По свойству средней линии, MP параллельна AC.

5) KN и AC.

Прямая KN и прямая BD – это одна и та же прямая. Прямая AC лежит в плоскости ABC, прямая BD пересекает плоскость ABC в точке, не лежащей на прямой AC. Значит, по признаку, прямые BD и AC – скрещивающиеся. То есть, прямые KN и AC- скрещивающиеся.

6) MD и BC.

Прямая MD и прямая AD – это одна и та же прямая. Прямая BC лежит в плоскости ABC, прямая AD пересекает плоскость ABC в точке, не лежащей на прямой BC. Значит, по признаку, прямые AD и BC – скрещивающиеся. То есть, прямые MD и BC – скрещивающиеся.

Задача*. Докажите, что если AB и CD скрещиваются, то AD и BC тоже скрещиваются.*

Доказательство:

Предположим, что прямые AD и BC не скрещивающиеся, то есть лежат в одной плоскости. Значит, все точки A, B, C, D лежат в этой плоскости, значит прямые AB и CD тоже лежат в этой плоскости. Но прямые AB и CD скрещивающиеся по условию. Получили противоречие. Значит, прямые AD и BC – скрещивающиеся.

<u>ЛЕКЦИЯ 3. Параллельность прямых и плоскостей.</u>

- Взаимное расположение прямой и плоскости.
- Определение прямой, параллельной плоскости.
- Признак параллельности прямой и плоскости.
- Взаимное расположение плоскостей.
- Определение параллельных плоскостей.
- Признак параллельности плоскостей.
- Свойства параллельных плоскостей.

Аксиома А2: *Если две точки прямой принадлежат плоскости, то и вся прямая принадлежит плоскости.*

Отсюда следуют три случая взаимного расположения прямой и плоскости в пространстве.
1. Прямая лежит в плоскости (рис. 1).

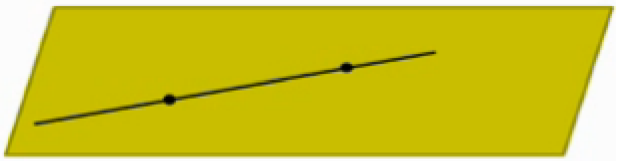


Рис. 1

2. Прямая и плоскость имеют только одну общую точку, то есть пересекаются (рис. 2).

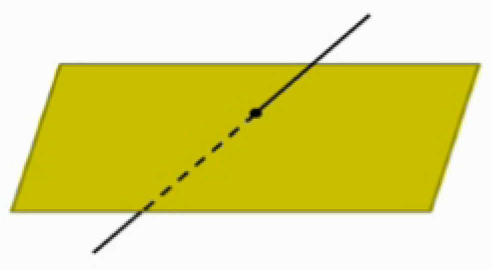


Рис. 2

3. Прямая и плоскость не имеют ни одной общей точки (рис. 3).

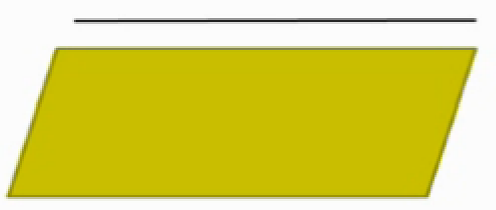


Рис. 3

Определение параллельности прямой и плоскости. *Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек*.

Параллельность прямой *a* и плоскости α обозначается так: $a \parallel \alpha$ (рис. 4)

Рис. 4 Плоскость параллельная прямой

Примеры из жизни параллельности прямой и плоскости

Наглядное представление о прямой, параллельной плоскости дают натянутые троллейбусные или трамвайные провода. В идеале, они параллельны плоскости земли (рис. 5).

Рис. 5

Другой пример дает линия пересечения стены и потолка (рис. 6). Эта линия параллельна плоскости пола. А пол - это плоскость параллельная прямой. Заметим, что в плоскости пола имеется прямая, параллельная этой линии. Такой прямой является, например, прямая пересечения пола с той же самой стеной. На рисунке указанные прямые обозначены как *a* и b.

Рис. 6

Оказывается, что если в плоскости α имеется прямая b, параллельная прямой a, не лежащей в плоскости α, то прямая a и плоскость α параллельны (рис. 7). Другими словами, наличие в плоскости α прямой b, параллельной прямой a, является признаком, по которому можно сделать вывод о параллельности прямой a и плоскости α. Сформулируем это утверждение в виде теоремы.

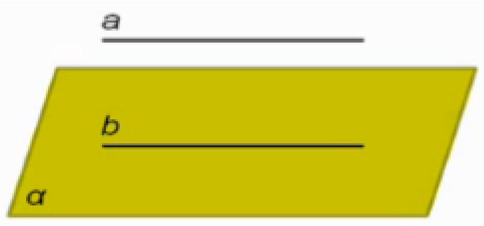


Рис. 7

Теорема (признак параллельности прямой и плоскости) :

Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

Доказательство:

Рассмотрим плоскость α и две параллельные прямые a и b, прямая b лежит в плоскости α, а прямая *a* не лежит в этой плоскости (рис. 7). Докажем, что прямая *a* параллельна плоскости α.

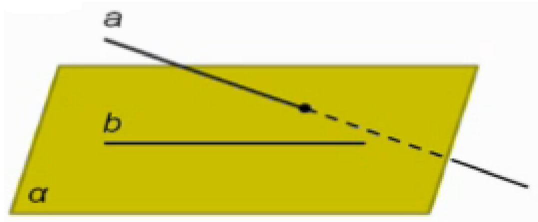


Рис. 8

Предположим, это не так, то есть что прямая *a* пересекается с плоскостью α (рис. 8). Значит, по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми (лемма приведена ниже), прямая b тоже пересекается с плоскостью α. Но это невозможно, так как прямая b по условию лежит в плоскости α. Итак, прямая *a* не пересекает плоскость α, поэтому она параллельна плоскости. Теорема доказана.

Лемма: *Если одна из двух параллельных прямых пересекает данную плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость.*

Докажем еще два утверждения, которые часто используются при решении задач.
Утверждение 1 *Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.*

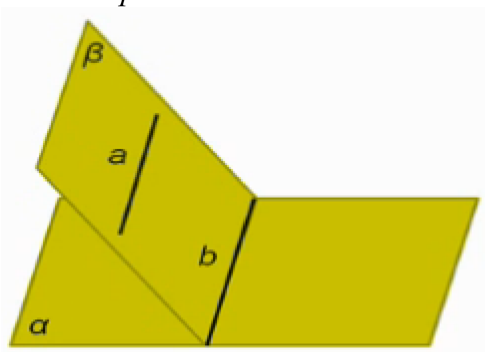


Рис. 9

Доказательство:

Итак, пусть через прямую *a,* параллельную плоскости α, проходит плоскость , пересекающая плоскость α по прямой b (рис. 9). Докажем, что прямые *a и* b параллельны.

Действительно, прямые *a, b* лежат в одной плоскости и не пересекаются, ведь в противном случае прямая *a* пересекала бы плоскость α, что невозможно, так как по условию прямая *a* параллельна плоскости α. Значит прямые *a* и b параллельны, что и требовалось доказать.

Утверждение 2 *Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости*.

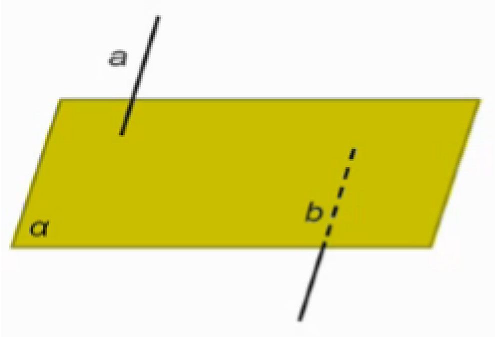


Рис. 10

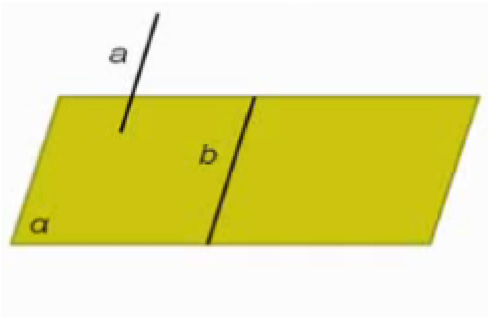


Рис. 11

Доказательство:

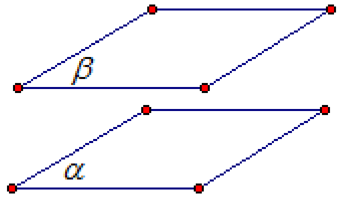
Пусть *a* и b – параллельные прямые, причем прямая *a* параллельна плоскости α. Следовательно, прямая *a* не пересекает плоскость α. Тогда, по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми, прямая *b* тоже не пересекает плоскость α. А это значит, что прямая b либо параллельна плоскости α (рис. 10), либо лежит в ней (рис. 11), что и требовалось доказать.

Параллельные плоскости

Определение. *Две плоскости называются параллельными, если они не пересекаются*.

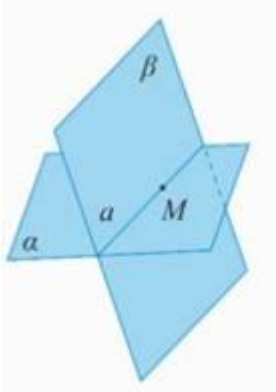
Обозначение: $\alpha \parallel \beta$.

Иллюстрация параллельных плоскостей



Существуют ли параллельные плоскости?

Вспомним аксиому А3.*Если две плоскости имеют общую точку, то они имеют общую прямую, на которой лежат все общие точки этих плоскостей*



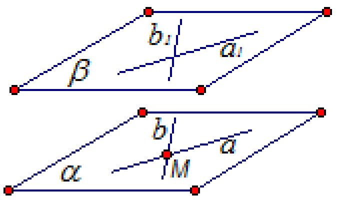
То есть, еще остается случай, если две плоскости не имеют общей точки. Такие плоскости называются параллельными.

Теорема (Признак параллельности двух плоскостей)

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то плоскости параллельны.

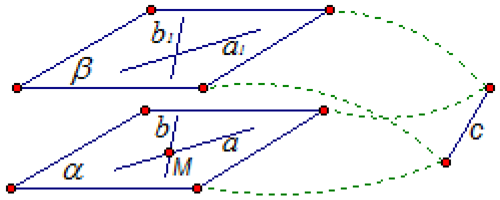
Доказательство

Проведем в плоскости α две пересекающиеся прямые *a* и b в точке M, а в плоскости β пересекающиеся прямые a_1, b_1, причем прямая $a_1 \parallel a; b_1 \parallel b$ Докажем, что плоскости α и β параллельны.



Прямая *a* принадлежит плоскости α, прямая a_1 принадлежит плоскости $\beta, a_1 \parallel a$. Значит, прямая *a* параллельна плоскости β, по признаку параллельности прямой и плоскости. Аналогично, прямая b параллельна прямой b_1 из плоскости β. Значит, прямая b параллельна плоскости β.

Предположим, что плоскости α и β не являются параллельными, то есть они пересекаются по некоторой прямой, назовем ее *c* (см. рис.).

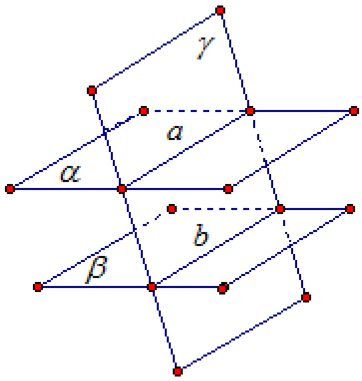


Плоскость α проходит через прямую a, параллельную плоскости β, и пересекает эту плоскость по прямой c. Тогда прямая *a* параллельна прямой c. Аналогично, плоскость β проходит через прямую b, параллельную плоскости α , и пересекает эту плоскость по прямой c. Тогда прямая b параллельна прямой c. Получаем, что через одну точку M проходит две прямые, параллельные прямой c, что невозможно. Получили противоречие. Значит, предположение о том, что плоскости пересекаются, было неверным. Значит, плоскости не пересекаются, то есть параллельны, что и требовалось доказать.

Свойства параллельных плоскостей

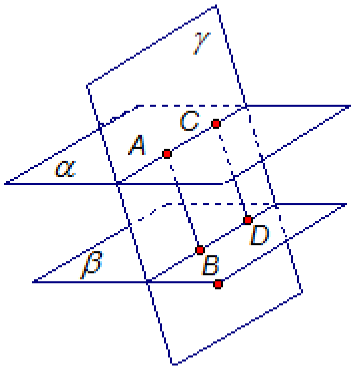
Свойство 1 *Если две параллельные плоскости пересечены третьей, то линии их пересечения параллельны.*
Доказательство

Пусть даны параллельные плоскости α и β и плоскость γ , которая пересекает плоскости α и β по прямым *a* и b соответственно



Прямые *a* и b лежат в одной плоскости, а именно в плоскости γ. Докажем, что прямые *a* и b не пересекаются.
Если бы прямые *a* и b пересекались, то есть имели бы общую точку, то эта общая точка принадлежала бы двум плоскостям и , α и β, что невозможно, так как они параллельны по условию.
Итак, прямые *a* и b параллельны, что и требовалось доказать.

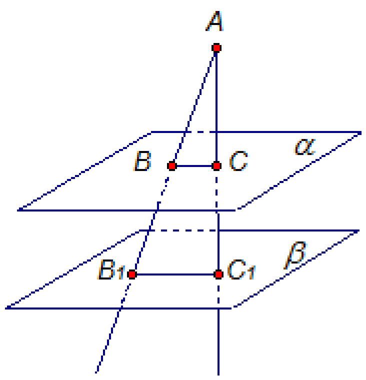
Свойство 2 *Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.*



Доказательство

Пусть даны параллельные плоскости α и β и параллельные прямые AB и CD, которые пересекают эти плоскости. Докажем, что отрезки AB и CD равны.
Две параллельные прямые AB и CD образуют единственную плоскость γ, γ = (ABDC).
Плоскость γ пересекает параллельные плоскости α и β по параллельным прямым (по первому свойству). Значит, прямые AC и BD параллельны.
Прямые AB и CD также параллельны (по условию). Значит, четырехугольник ABDC – параллелограмм, так как его противоположные стороны попарно параллельны.
Из свойств параллелограмма следует, что отрезки AB и CD равны, что и требовалось доказать.
Свойство 3 *Параллельные плоскости рассекают стороны угла на пропорциональные части.*

Доказательство
Пусть нам даны параллельные плоскости α и β, которые рассекают стороны угла A. Нужно доказать, что $\frac{AB}{AC}=\frac{BB_1}{CC_1}$.



Параллельные плоскости α и β рассечены плоскостью угла A. Назовем линию пересечения плоскости угла A и плоскости α – BC, а линию пересечения плоскости угла A и плоскости β – B1C1. По первому свойству, линии пересечения BC и B1C1 параллельны.
Значит, треугольники ABC и AB1C1 подобны. Получаем:

$$\frac{AB_1}{AB}=\frac{AC_1}{AC}\Leftrightarrow\frac{AB+BB_1}{AB}=\frac{AC+CC_1}{AC}\Leftrightarrow 1+\frac{BB_1}{AB}=1+\frac{CC_1}{AC}\Leftrightarrow\frac{BB_1}{AB}=\frac{CC_1}{AC}$$

$$\Leftrightarrow\frac{AB}{AC}=\frac{BB_1}{CC_1}$$

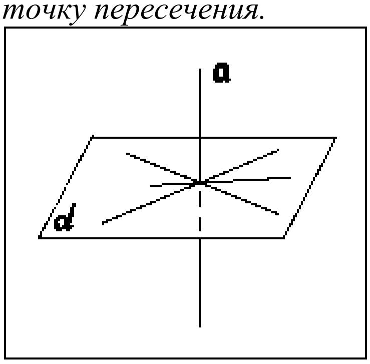
Свойство доказано.

<u>ЛЕКЦИЯ 4. Перпендикулярность прямых и плоскостей.</u>

- Определение перпендикулярных прямых.
- Определение перпендикулярных прямой и плоскости.
- Признак перпендикулярности прямой и плоскости.
- Свойства перпендикулярных прямой и плоскости.
- Перпендикуляр и наклонная.
- Теорема о трех перпендикулярах.
- Расстояние между скрещивающимися прямыми.

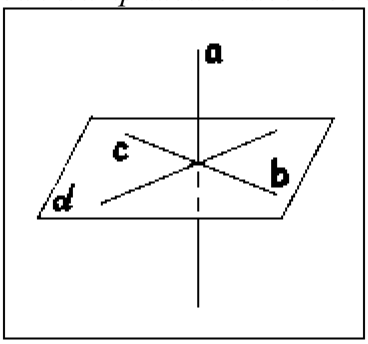
Определение

Прямая, пересекающая плоскость, называется перпендикулярной этой плоскости, если она перпендикулярна каждой прямой, которая лежит в данной плоскости и проходит через точку пересечения.

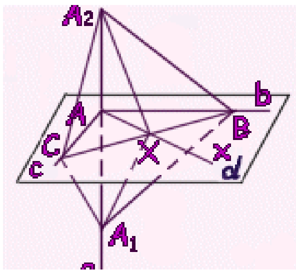


Теорема

Признак перпендикулярности прямой и плоскости. *Если прямая, пересекающая плоскость, перпендикулярна двум прямым в этой плоскости, проходящим через точку пересечения данной прямой и плоскости, то она перпендикулярна плоскости.*



Доказательство:



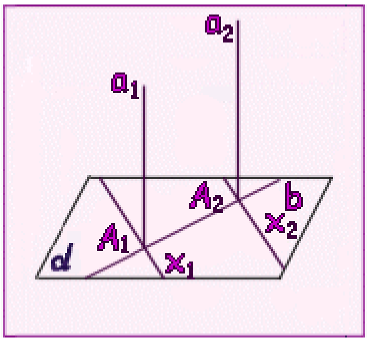
Пусть *a* прямая, перпендикулярная прямым *b* и *c* в плоскости α. Тогда прямая a проходит через точку A пересечения прямых b и c. Докажем, что прямая *a* перпендикулярна плоскости α.

Проведем произвольную прямую *x* через точку А в плоскости α и покажем, что она перпендикулярна прямой *a*. Проведем в плоскости α произвольную прямую, не проходящую через точку А и пересекающую прямые *b, c* и *x*. Пусть точками пересечения будут B, C и X. Отложим на прямой *a* от точки А в разные стороны равные отрезки AA_1 и AA_2. Треугольник A_1CA_2 равнобедренный, так как отрезок АС является высотой по условию теоремы и медианой по построению ($AA_1=AA_2$). по той же причине треугольник A_1BA_2 тоже равнобедренный. Следовательно, треугольники A_1BC и A_2BC равны по трем сторонам. Из равенства треугольников A_1BC и A_2BC следует равенство углов A_1BX и A_2BX и, следовательно равенство треугольников A_1BX и A_2BX по двум сторонам и углу между ними. Из равенства сторон A_1X и A_2X этих треугольников заключаем, что треугольник A_1XA_2 равнобедренный. Поэтому его медиана ХА является также высотой. А это и значит, что прямая х перпендикулярна *a*. По определению прямая *a* перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана

<u>Свойства перпендикулярных прямой и плоскости</u>.

Теорема

1 - ое. Свойство перпендикулярных прямой и плоскости
Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.



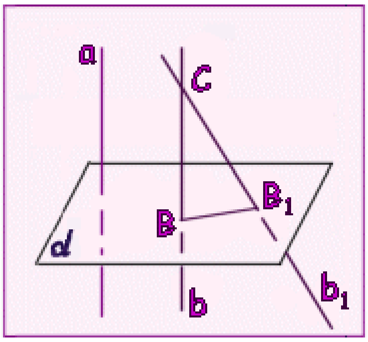
Доказательство: Пусть a_1 и a_2 - 2 параллельные прямые и α плоскость, перпендикулярная прямой a_1. Докажем, что эта плоскость перпендикулярна и прямой a_2. Проведем через точку A_2 пересечения прямой a_2 с плоскостью α произвольную прямую x_2 в плоскости α. Проведем в плоскости α через точку A_1 пересечения прямой a_1 с α прямую x_1, параллельную прямой x_2. Так как прямая a_1 перпендикулярна плоскости α, то прямые a_1

и

x_1

перпендикулярны. А по [теореме 1](#) параллельные им пересекающиеся прямые a_2 и x_1 тоже перпендикулярны. Таким образом, прямая a_2 перпендикулярна любой прямой x_2 в плоскости α. А это ([по определению](#))значит, что прямая a_2 перпендикулярна плоскости α. Теорема доказана.

Теорема
2 - ое. Свойство перпендикулярных прямой и плоскости.
Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.



Доказательство:

Пусть a и b - 2 прямые, перпендикулярные плоскости α. Допустим, что прямые а и b не параллельны.

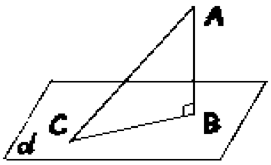
Выберем на прямой b точку C, не лежащую в плоскости α. Проведем через точку C прямую b_1, параллельную прямой a. Прямая b_1 перпендикулярна плоскости α по теореме 2. Пусть B и B_1 - точки пересечения прямых b и b_1 с плоскостью α. Тогда прямая BB_1 перпендикулярна пересекающимся прямым b и b_1. А это невозможно. Мы пришли к противоречию. Теорема доказана.

Перпендикуляр и наклонная.

Пусть даны плоскость и не лежащая на ней точка.

***Перпендикуляром**, опущенным из данной точки на данную плоскость, называется отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости и лежащий на прямой, перпендикулярной плоскости*. Конец этого отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием перпендикуляра*.

На рисунке из точки A проведены к плоскости α перпендикуляр AB и наклонная AC. Точка B - основание перпендикуляра, точка C - основание наклонной, BC - проекция наклонной AC на плоскость α.



***Наклонной**, проведенной из данной точки к данной плоскости, называется любой отрезок, соединяющий данную точку с точкой плоскости, не являющийся перпендикуляром к плоскости.* Конец отрезка, лежащий в плоскости, называется *основанием наклонной*.

*Отрезок, соединяющий основания перпендикуляра и наклонной, проведенных из одной и той же точки, называется **проекцией наклонной***.

Так как в прямоугольном треугольнике ABC катет AB меньше гипотенузы AC, то справедливо следующее утверждение: *перпендикуляр, опущенный из точки на плоскость, меньше любой наклонной, проведенной из той же точки к этой плоскости*.

Для перпендикуляра и наклонных, проведенных через одну точку к одной плоскости, справедливы следующие утверждения:

1) перпендикуляр меньше любой наклонной;

2) наклонные равны тогда и только тогда, когда равны их проекции;

3) одна наклонная меньше другой наклонной тогда и только тогда, когда проекция первой наклонной меньше проекции второй наклонной.

Длина перпендикуляра, опущенного из точки A на плоскость α, называется ***расстоянием от точки А до плоскости***. Расстояние от точки, лежащей в плоскости α, до плоскости α считается равным нулю.

В случае, когда прямая параллельна плоскости, расстояние от произвольной точки прямой до плоскости называется ***расстоянием между прямой и плоскостью***. Расстояние между пересекающимися прямой и плоскостью равно нулю.

Можно доказать, что если две плоскости параллельны, то все точки одной плоскости равноудалены от другой плоскости. Поэтому ***расстоянием между параллельными плоскостями*** называется расстояние от произвольной точки одной из них до другой.

Расстоянием между скрещивающимися прямыми называется расстояние между параллельными плоскостями, в которых лежат эти прямые.

Теорема о трех перпендикулярах.

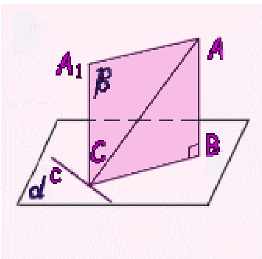
Теорема. *Прямая, проведенная в плоскости через основание наклонной, перпендикулярна этой наклонной тогда и только тогда, когда она перпендикулярна проекции наклонной.*

Доказательство:

Пусть AB - перпендикуляр плоскости α, АС - наклонная и c - прямая в плоскости α, проходящая через основание C (рис. 2). Проведем прямую CA_1, параллельную прямой AB. Она перпендикулярна плоскости α. Проведем через прямые AB и CA_1 плоскость β. Прямая c перпендикулярна прямой CA_1. Если она перпендикулярна прямой CB, то она перпендикулярна плоскости β, а значит, и прямой AC.

Аналогично. Если прямая с перпендикулярна наклонной АС то она, будучи перпендикулярна и прямой CA_1 перпендикулярна плоскости β, а значит, и проекции наклонной CB.

Теорема доказана.



<u>ЛЕКЦИЯ 5. Перпендикулярность плоскостей.</u>

- Угол между прямой и плоскостью.
- Ортогональное проектирование.
- Площадь проекции многоугольника.
- Угол между скрещивающимися прямыми.
- Двугранный угол. Угол между плоскостями.
- Определение перпендикулярных плоскостей
- Признак перпендикулярности плоскостей.
- Геометрические преобразования пространства.

Угол между прямой и плоскостью.

Пусть MN - наклонная, проведенная из точки M к плоскости γ, а M_1N - ее проекция на плоскость γ (рис.1). Тогда угол MNM_1 - называется ***углом между прямой*** MN ***и плоскостью*** γ**.** Таким образом определяется угол между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной ей.

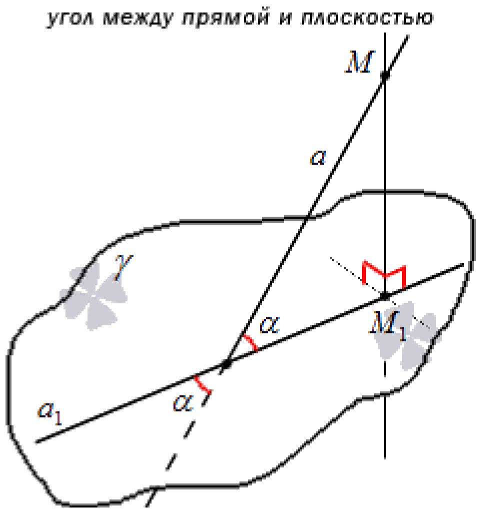


Рис.1.

Определение.

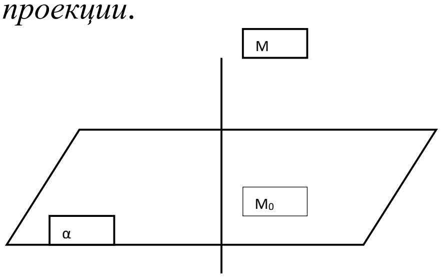
Угол между прямой и плоскостью, пересекающей эту прямую и не перпендикулярной к ней, - это угол между прямой и ее проекцией на эту плоскость.

Определение угла между прямой и плоскостью позволяет заключить, что угол между прямой и плоскостью представляет собой угол между двумя пересекающимися прямыми: самой прямой и ее проекцией на плоскость. Следовательно, угол между прямой и плоскостью есть острый угол.

Угол между перпендикулярными прямой и плоскостью считают равным $90°$, а угол между параллельными прямой и плоскостью либо не определяют вовсе, либо считают равным $0°$.

Проекция точки и проекция прямой.

Ортогональной проекцией точки на плоскость называется основание перпендикуляра, опущенного из данной точки на данную плоскость, если точка не лежит в плоскости. Если точка лежит в плоскости, то она сама является своей проекцией на эту плоскость. Очевидно, что каждой точке М пространства существует единственная ортогональная проекция M_0 этой точки на данную плоскость α. Плоскость α называется *плоскостью проекции*.



Проекцией прямой на данную плоскость называется множество всех точек, являющихся проекциями точек данной прямой на эту плоскость. Аналогично определяются проекции луча и отрезка.

Рассмотрим некоторые *свойства проекций прямых*.

1) Если прямая не перпендикулярна плоскости, то ее проекция на эту плоскость есть прямая, которая является пересечением плоскости проекции и перпендикулярной ей плоскости, проходящей через данную прямую.

2) Если прямая параллельна плоскости проекции, то она параллельна своей проекции.

3) Проекции двух параллельных прямых, не перпендикулярных плоскости проекции, - параллельные прямые.

4) Отношение длин проекций на плоскость двух параллельных отрезков, не перпендикулярных плоскости проекции, равно отношению длин этих отрезков.

Проекция фигуры.

Проекцией фигуры на данную плоскость называется множество всех точек, являющихся проекциями точек данной фигуры на эту плоскость.

Площадь ортогональной проекции многоугольника.

Теорема. *Площадь ортогональной проекции многоугольника на плоскость равна произведению площади этого многоугольника на косинус угла между плоскостью многоугольника и плоскостью проекции.*

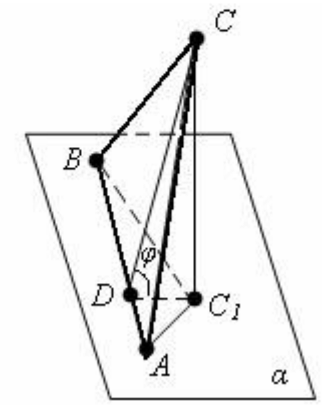


Рис. 3

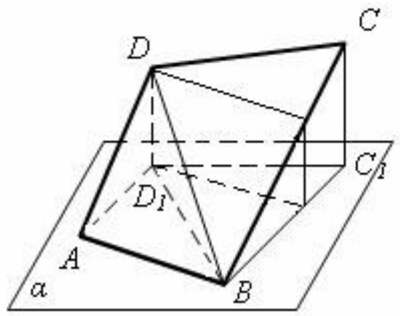


Рис. 4

Доказательство:

Пусть есть треугольник *ABC* и его проекция ABC_1 на плоскость α (рис.3). Проведем высоту *CD* треугольника *ABC*. По теореме о трех перпендикулярах отрезок C_1D – высота треугольника ABC_1. Угол CDC_1 равен углу φ между плоскостью треугольника *ABC* и плоскостью проекции α.

$$C_1D = CD\cos\varphi$$

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}AB\cdot CD,\quad S_{ABC_1} = \frac{1}{2}AB\cdot C_1B$$

$$S_{ABC_1} = S_{ABC}\cos\varphi$$

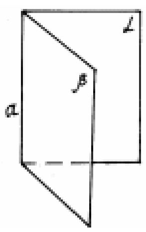
Следовательно, для треугольника теорема верна.

Пусть теперь есть многоугольник ABCD (рис. 4). Разобьем его на треугольники. Каждый треугольник, у которого нет стороны, параллельной плоскости проекции, разобьем на два треугольника с общей стороной, параллельной плоскости проекции. Получаем что для каждого треугольника Δ и его проекции Δ` в плоскости α верно равенство $S_{\Delta`} = S_{\Delta}\cos\varphi$. Сложим все эти равенства почленно. Получим

$$S_{ABC_1D_1} = S_{ABCD}\cos\varphi$$

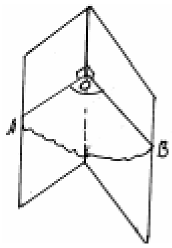
Теорема доказана.

Определение. Двугранным углом называется фигура, образованная прямой а и двумя полуплоскостями с общей границей а, и не принадлежащими одной плоскости.



а - ребро двугранного угла, полуплоскости - грани его.

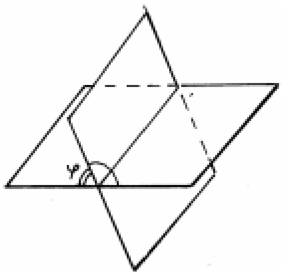
рис. 1



Угол АОВ - линейный угол двугранного угла. Чтобы его построить, нужно выбрать произвольную точку О на ребре, а лучи ОА и ОВ должны быть перпендикулярны к ребру.

рис. 2

Определение. Градусной мерой двугранного угла называется градусная мера любого из его линейных углов.



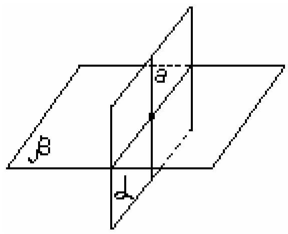
Двугранный угол называется прямым (острым, тупым), если он равен 90^o (меньше 90^o, больше 90^o).

Пусть ϕ - тот из углов, который не превосходит любого из трёх остальных углов. Тогда угол между пересекающимися плоскостями равен ϕ. ($0^o<\phi\leq 90^o$)

рис. 3

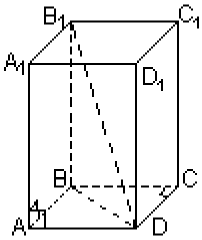
Определение. Две пересекающиеся плоскости называются перпендикулярными, если угол между ними равен 90^o.

Признак перпендикулярности двух плоскостей.



Если одна из двух плоскостей (α) проходит через прямую (а), перпендикулярную другой плоскости (β), то такие плоскости перпендикулярны.

рис. 4



Прямоугольный параллелепипед. Параллелепипед называется прямоугольным, если его боковые ребра перпендикулярны к основаниям, а основания представляют собой прямоугольники.

рис. 5

Свойства.

1. В прямоугольном параллелепипеде все шесть граней представляют собой прямоугольники.
2. Все двугранные углы прямоугольного параллелепипеда являются прямыми
3. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трёх его измерений.

Тема 7.2 Координаты и векторы

ЛЕКЦИЯ 1. Декартовы координаты в пространстве.

- Прямоугольная система координат в пространстве.
- Расстояние между точками.
- Координаты середины отрезка.

Прямоугольная (декартовая) система координат в пространстве.

Прямоугольная система координат в пространстве образуется тремя взаимно перпендикулярными осями координат OX, OY и OZ. Оси координат пересекаются в точке

O, которая называется началом координат, на каждой оси выбрано положительное направление, указанное стрелками, и единица измерения отрезков на осях. Единицы измерения обычно одинаковы для всех осей. OX — ось абсцисс, OY — ось ординат, OZ — ось аппликат.

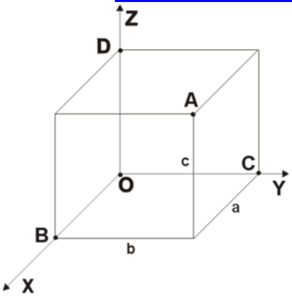


Рис. 2

Положение точки A в пространстве определяется тремя координатами x, y и z. Координата x равна длине отрезка OB, координата y — длине отрезка OC, координата z — длине отрезка OD в выбранных единицах измерения. Отрезки OB, OC и OD определяются плоскостями, проведёнными из точки A параллельно плоскостям YOZ, XOZ и XOY соответственно.

Координата x называется абсциссой точки A,
координата y — ординатой точки A,
координата z — аппликатой точки A.

Символически это записывают так:

$$A(x,\ y,\ z)$$

или

$$A = (x,\ y,\ z)$$

или привязывают запись координат к конкретной точке с помощью индекса:

$$x_A,\ y_A,\ z_A$$

и т. п.

Каждая ось рассматривается как числовая прямая, т. е. имеет положительное направление, а точкам, лежащим на отрицательном луче приписываются отрицательные значения координаты (расстояние берется со знаком минус). То есть, если бы, например, точка B лежала не как на рисунке — на луче OX, а на его продолжении в обратную сторону от точки O (на отрицательной части оси OX), то абсцисса x точки A была бы отрицательной (минус расстоянию OB). Аналогично и для двух других осей.

Пусть *A* и *B* - две точки плоскости, координаты которых в декартовой системе координат: $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, тогда

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Указанная формула, по существу, является теоремой Пифагора, записанной в координатной форме. В самом деле, пусть A_1 и B_1 -- соответственно проекции точек А и В на ось абсцисс, *M* - проекция *A* на прямую BB_1.

Имеем: *AB* -- гипотенуза прямоугольного треугольника с катетами *AM* и *BM*, но *AM* = $A_1 B_1 = |x_2 - x_1|$. Точно так же $BM = |y_2 - y_1|$.

Следовательно,

$AB^2 = AM^2 + BM^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$ и формула доказана.

ЛЕКЦИЯ 2. Векторы в пространстве.

- Определение вектора.
- Направление вектора. Начало вектора. Конец вектора.
- Модуль вектора.
- Равные векторы.
- Координаты вектора.
- Равные векторы имеют равные координаты.
- Модуль вектора через его координаты.

Понятие вектора в стереометрии вводится так же, как и в планиметрии.

Рассмотрим упорядоченную пару (A, B) несовпадающих точек. Она определяет направленный отрезок с началом A и концом B (рис. 1). С помощью пары (A, B) зададим преобразование пространства. Каждой точке M поставим в соответствие точку N, которая получится в результате следующего построения.

Приняв точку M за начало, проводим луч m, сонаправленный с лучом AB (рис.2). На луче m имеется единственная точка N, удаленная от M на расстояние $|AB|$. Это построение задает преобразование пространства, отображающего точку M на точку N.

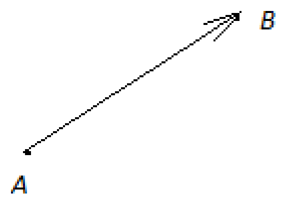


Рис. 1.

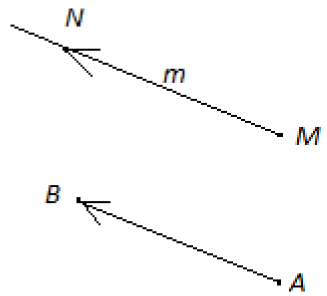


Рис. 2.

Определение. ***Вектором*** *(параллельным переносом), определяемым парой (A, B) несовпадающих точек, называется преобразование пространства, при котором каждая точка M отображается на такую точку N, что луч MN сонаправлен с лучом AB и расстояние* $|MN|$ *равно расстоянию* $|AB|$.

Вектор, заданный парой (A, B) несовпадающих точек, обозначается символом $\overrightarrow{AB}$. Направление, определяемое лучом AB, называется *направлением вектора* $\overrightarrow{AB}$, а расстояние $|AB|$ - *длиной вектора* $\overrightarrow{AB}$.

Условимся, что любая пара совпадающих точек задает тождественное преобразование, которое мы будем называть теперь *нулевым вектором*. Длина нулевого вектора равна нулю, понятие направления для него не вводится. Нулевой вектор, заданный парой (А, А), обозначают символом $\overrightarrow{AA}$.

Применяются и иные обозначения: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}...$ - векторы; $|\vec{a}|$ или a - длина вектора $\vec{a}$; $\vec{0}$ - нулевой вектор.

Каждый вектор, отличный от нулевого, вполне характеризуется своим направлением и длиной. Поэтому, если ненулевые векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ сонаправлены и имеют равные длины, то эти векторы равны (совпадают): $\vec{a} = \vec{b}$.

Два вектора $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называются коллинеарными, если они расположены на параллельных прямых или на одной прямой.

Нулевой вектор $\vec{0}$ коллинеарен любому вектору.

ЛЕКЦИЯ 3-4. Действия над векторами.

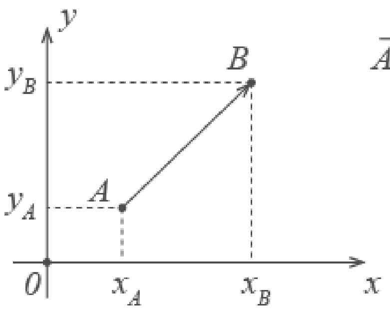
- Сложение векторов.
- Вычитание векторов.
- Умножение вектора на число.
- Линейная комбинация векторов.
- Скалярное произведение векторов.
- Компланарные векторы.
- Разложение вектора по трем некомпланарным векторам.

Действия над векторами.

Удобнее всего работать с векторами в прямоугольной системе координат — той самой, в которой рисуем графики функций. Каждой точке в системе координат соответствуют два числа — ее координаты по x и y, абсцисса и ордината. Вектор также задается двумя координатами: $\vec{a}(x_a; y_a)$

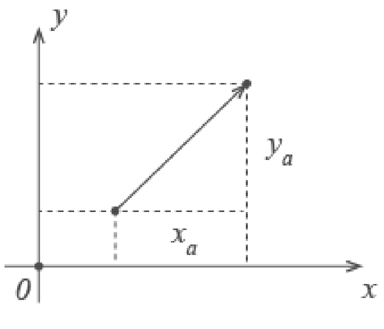
Здесь в скобках записаны координаты вектора $\vec{a}$ — по x и по y.

Находятся они просто: координата конца вектора минус координата его начала.



$$\overrightarrow{AB}(x_B - x_A\,,\; y_B - y_A)$$

Если координаты вектора заданы, его длина находится по формуле

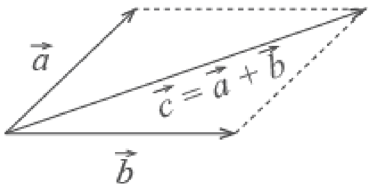


$$|\vec{a}| = \sqrt{x_a^2 + y_a^2}$$

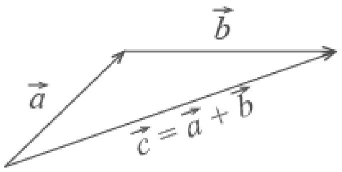
Сложение векторов

Для сложения векторов есть два способа.

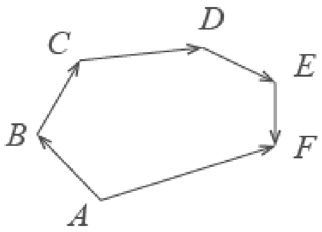
1. Правило параллелограмма. Чтобы сложить векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, помещаем начала обоих в одну точку. Достраиваем до параллелограмма и из той же точки проводим диагональ параллелограмма. Это и будет сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



2. Второй способ сложения векторов — правило треугольника. Возьмем те же векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. К концу первого вектора пристроим начало второго. Теперь соединим начало первого и конец второго. Это и есть сумма векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$.



По тому же правилу можно сложить и несколько векторов. Пристраиваем их один за другим, а затем соединяем начало первого с концом последнего.



$$\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF}$$

Представьте, что вы идете из пункта A в пункт B, из B в C, из C в D, затем в E и в F. Конечный результат этих действий — перемещение из A в F.

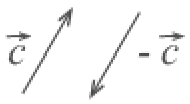
При сложении векторов $\vec{a}(x_a; y_a)$ и $\vec{b}(x_b; y_b)$ получаем:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$$

$$\vec{c} = (x_a + x_b) + (y_a + y_b)$$

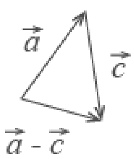
Вычитание векторов

Вектор $\overrightarrow{-c}$ направлен противоположно вектору $\vec{c}$. Длины векторов $\vec{c}$ и $\overrightarrow{-c}$ равны.



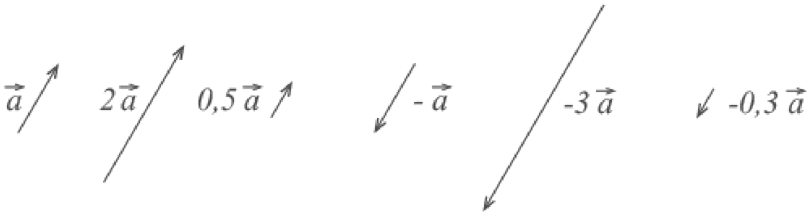
Теперь понятно, что такое вычитание векторов. Разность векторов $\vec{a}$ и $\vec{c}$ — это сумма вектора $\vec{a}$ и вектора $\overrightarrow{-c}$.

$$\vec{a} - \vec{c} = \vec{a} + (-\vec{c})$$



Умножение вектора на число

При умножении вектора $\vec{a}$ на число k получается вектор, длина которого в k раз отличается от длины $\vec{a}$. Он сонаправлен с вектором $\vec{a}$, если k больше нуля, и направлен противоположно $\vec{a}$, если k меньше нуля.



Скалярным произведением двух ненулевых векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$. и называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a}\,\vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \left(\cos \vec{a}, \vec{b}\right).$$

Определение.

1) **Базисом** в пространстве называются любые 3 некомпланарных вектора, взятые в определенном порядке.

2) **Базисом** на плоскости называются любые 2 неколлинеарные векторы, взятые в определенном порядке.

3)**Базисом** на прямой называется любой ненулевой вектор.

Векторы называются ***компланарными***, если они параллельны оной и той же плоскости. Таким образом, векторы называются компланарными, если равные им векторы, отложенные от одной точки, лежат в одной плоскости.

В противном случае векторы называются *некомпланарными*.

Любые три некомпланарных вектора в пространстве, взятые в определенном порядке, называются ***базисом***.

Определение. Если $\overline{e_1}, \overline{e_2}, \overline{e_3}$ - базис в пространстве и $\overrightarrow{OM}$, то числа a, b и g - называются **компонентами или координатами** вектора $\vec{a}$ в этом базисе.

В связи с этим можно записать следующие **свойства**:

- равные векторы имеют одинаковые координаты,
- при умножении вектора на число его компоненты тоже умножаются на это число,

$\overrightarrow{AB} = (\lambda\alpha)\overline{e_1} + (\lambda\beta)\overline{e_2} + (\lambda\gamma)\overline{e_3}$.

- при сложении векторов складываются их соответствующие компоненты.

$\vec{a} = \alpha_1\overrightarrow{e_1} + \alpha_2\overrightarrow{e_2} + \alpha_3\overrightarrow{e_3}$; $\vec{a} = \beta_1\overrightarrow{e_1} + \beta_2\overrightarrow{e_2} + \beta_3\overrightarrow{e_3}$;

$\vec{a} + \vec{b} = (\alpha_1 + \beta_1)\overline{e_1} + (\alpha_2 + \beta_2)\overline{e_2} + (\alpha_3 + \beta_3)\overline{e_3}$.

Тема 7.3.Многогранники

<u>ЛЕКЦИЯ 1-2. Многогранники. Призма.</u>

- Многогранник (определение).
- Выпуклый многогранник.
- Правильный многогранник.

- Вершины, ребра, грани многогранника.
- Призма (определение).
- Основания, боковые ребра, боковые грани призмы.
- Треугольная, четырехугольная, n-угольная призмы.
- Параллельность оснований и боковых ребер призмы.
- Поверхность призмы.
- Боковая поверхность призмы.
- Высота призмы.
- Диагональ призмы.
- Прямая призма.
- Наклонная призма.
- Правильная призма.
- Боковая поверхность призмы.
- Площадь боковой поверхности прямой призмы.
- Параллелепипед.
- Свойства параллелепипеда.
- Центр симметрии параллелепипеда.
- Прямоугольный параллелепипед.
- Куб.
- Сечения призмы.

Многогранники, в известном смысле, является пространственным аналогом многоугольника. Тем не менее, для строго его определения нам понадобятся несколько вспомогательных понятий.

В школьных учебниках геометрии многогранниками обычно называются тела, поверхности которых состоят из конечного числа многоугольников, называемых гранями многогранника. Стороны и вершины этих многоугольников называются соответственно ребрами и вершинами многогранника.

Правильные многогранники

Выпуклый многогранник называется правильным, если его гранями являются равные правильные многоугольники, и все многогранные углы равны.

Рассмотрим возможные правильные многогранники и прежде всего те из них, гранями которых являются правильные треугольники. Наиболее простым таким правильным многогранником является треугольная пирамида, гранями которой являются правильные треугольники (рис. 1). В каждой ее вершине сходится по три грани. Имея всего четыре грани, этот многогранник называется также правильным тетраэдром, или просто тетраэдром, что в переводе с греческого языка означает четырехгранник.

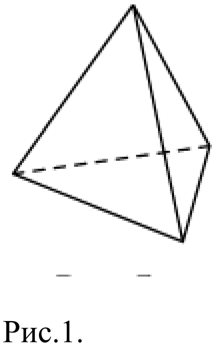


Рис.1.

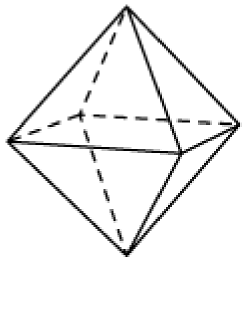


Рис.2.

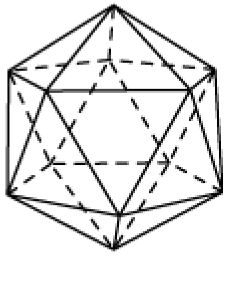


Рис.3.

Многогранник, гранями которого являются правильные треугольники, и в каждой вершине сходится четыре грани, изображен на рисунке 2. Его поверхность состоит из восьми правильных треугольников, поэтому он называется октаэдром.

Многогранник, в каждой вершине которого сходится пять правильных треугольников, изображен на рисунке 3. Его поверхность состоит из двадцати правильных треугольников, поэтому он называется икосаэдром.

Заметим, что поскольку в вершинах выпуклого многогранника не может сходиться более пяти правильных треугольников, то других правильных многогранников, гранями которых являются правильные треугольники, не существует.

Аналогично, поскольку в вершинах выпуклого многогранника может сходиться только три квадрата, то, кроме куба (рис. 4), других правильных многогранников, у которых гранями являются квадраты не существует. Куб имеет шесть граней и поэтому называется также гексаэдром.

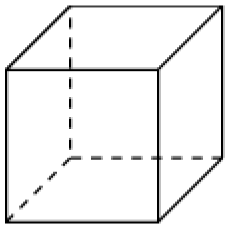


Рис.4.

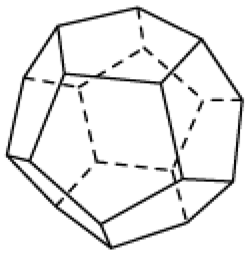


Рис.5.

Многогранник, гранями которого являются правильные пятиугольники, и в каждой вершине сходится три грани, изображен на рисунке 5. Его поверхность состоит из двенадцати правильных пятиугольников, поэтому он называется додекаэдром.

Рассмотрим понятие правильного многогранника с точки зрения топологии науки, изучающей свойсва фигур, не зависящих от различных деформаций без разрывов. С этой точки зрения, например, все треугольники эквивалентны, так как один треугольник всегда может быть получен из любого другого соответствующим сжатием или растяжением сторон. Вообще все многоугольники с одинаковым числом сторон эквивалентны по той же причине.

Многогранник называется *выпуклым*, если он является выпуклой фигурой, т.е. вместе с любыми двумя своими точками содержит и соединяющий их отрезок

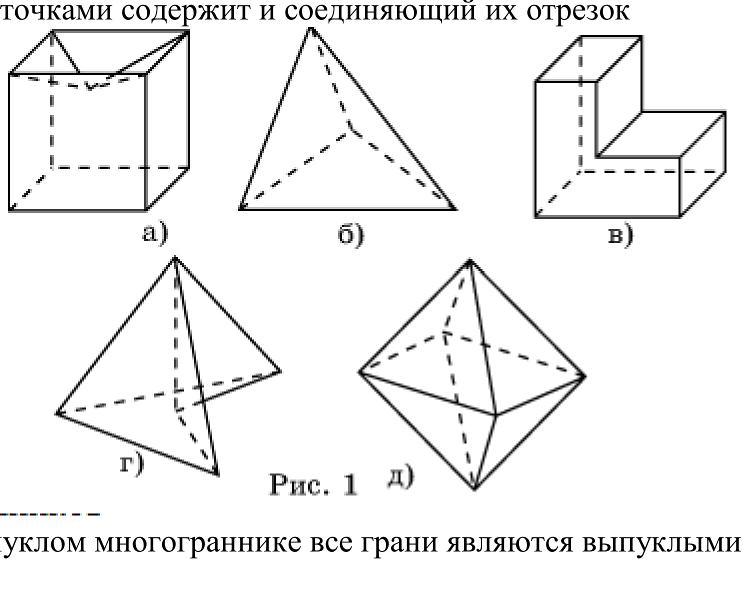


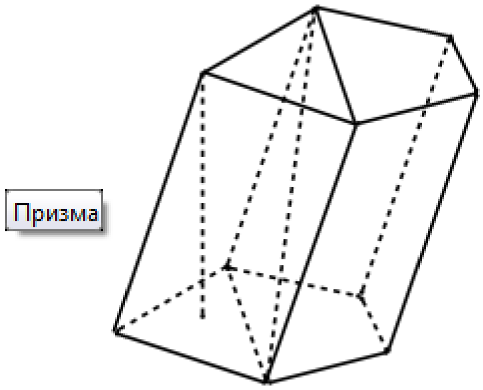
Рис. 1

Свойство 1. В выпуклом многограннике все грани являются выпуклыми многоугольниками.

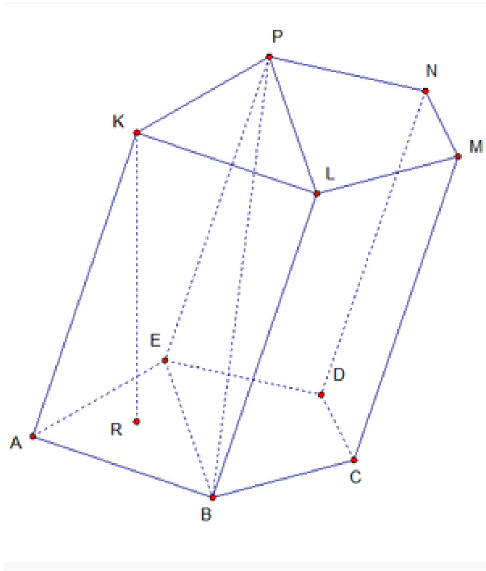
Свойство 2. Выпуклый многогранник может быть составлен из пирамид с общей вершиной, основания которых образуют поверхность многогранника.

Свойство 3. Выпуклый многогранник лежит по одну сторону от плоскости каждой своей грани.

Призма (от др.-греч. πρίσμα (лат. prisma) «нечто отпиленное») - многогранник, две грани которого являются конгруэнтными (равными) многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях, а остальные грани - параллелограммами, имеющими общие стороны с этими многоугольниками. Или (равносильно) - это многогранник, в основаниях которого лежат равные многоугольники, а боковые грани - параллелограммы.



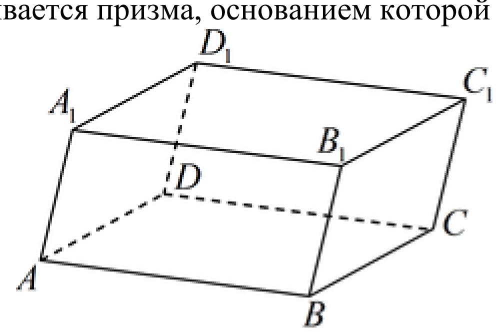
Название	Определение	Обозначения на чертеже	Чертеж
Основания	Две грани, являющиеся конгруэнтными многоугольниками, лежащими в параллельных плоскостях.	ABCDE,	
Боковые грани	Все грани, кроме оснований. Каждая боковая грань обязательно является параллелограммом.	ABLK, BCML , CDNM, DEPN, EAKP	
Боковая поверхность	Объединение боковых граней.		
Полная поверхность	Объединение оснований и боковой поверхности.		
Боковые ребра	Общие стороны боковых граней.	AK,BL,CN, DM ,EP	
Высота	Отрезок, соединяющий плоскости, в которых лежат основания призмы и перпендикулярный этим плоскостям.	KR	
Диагональ	Отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани.	BP	
Диагональная	Плоскость,		

плоскость	проходящая через пересекающиеся диагональ основания и боковое ребро призмы.		
Диагональное сечение	Пересечение призмы и диагональной плоскости. В сечении образуется параллелограмм, в том числе его частные случаи — ромб, прямоугольник, квадрат.	EBLP	
Перпендикулярное (ортагональное) сечение	Пересечение призмы и плоскости, перпендикулярной ее боковому ребру.		

Свойства призмы

1. Основания призмы являются равными многоугольниками.
2. Боковые грани призмы являются параллелограммами.
3. Боковые ребра призмы параллельны и равны.
4. Объём призмы равен произведению её высоты на площадь основания: $V = S \cdot h$
5. Площадь полной поверхности призмы равна сумме площади её боковой поверхности и удвоенной площади основания.
6. Площадь боковой поверхности произвольной призмы $S = P \cdot l$, где P - периметр перпендикулярного сечения, l - длина бокового ребра.
7. Площадь боковой поверхности прямой призмы $S = P \cdot h$, где P - периметр основания призмы, h - высота призмы.
8. Перпендикулярное сечение перпендикулярно ко всем боковым рёбрам призмы.
9. Углы перпендикулярного сечения - это линейные углы двугранных углов при соответствующих боковых рёбрах.
10. Перпендикулярное сечение перпендикулярно ко всем боковым граням.

Параллелепипедом называется призма, основанием которой служит параллелограмм.



Параллелограммы, из которых составлен параллелепипед, называются его гранями, их стороны — *ребрами*, а вершины параллелограммов — *вершинами* параллелепипеда. У параллелепипеда все грани — параллелограммы.

Параллелепипеды, как и всякие призмы, могут быть *прямые* и *наклонные*.

Обычно выделяют какие-нибудь две противоположные грани и называют их основаниями, а остальные грани — боковыми гранями параллелепипеда. Ребра параллелепипеда, не принадлежащие основаниям, называют боковыми ребрами.

Две грани параллелепипеда, имеющие общее ребро, называются смежными, а не имеющие общих ребер — противоположными.

Отрезок, соединяющий две вершины, не принадлежащие одной грани, называется диагональю параллелепипеда.

Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называется прямоугольным параллелепипедом. У прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники.

Длины не параллельных ребер прямоугольного параллелепипеда называются его линейными размерами (измерениями). У прямоугольного параллелепипеда три линейных размера.

Свойства параллелепипеда:

1. Противоположные грани параллелепипеда равны и параллельны.
2. Все четыре диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и делятся этой точкой пополам.
3. Боковые грани прямого параллелепипеда — прямоугольники.
4. Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений.

Сечение призмы

1. Сечение призмы плоскостью, параллельной основанию. В сечении образуется многоугольник, равный многоугольнику, лежащему в основании.

2. Сечение призмы плоскостью, проходящей через два не соседних боковых ребра. В сечении образуется параллелограмм. Такое сечение называется диагональным сечением призмы. В некоторых случаях может получаться ромб, прямоугольник или квадрат.

Рассмотрение правильной призмы возможно только после введения понятия правильный многоугольник. Однако с правильной треугольной призмой можно познакомить учащихся гораздо раньше. А с правильной четырехугольной призмой мы знакомы еще из курса математики 5–6-х классов, так как она представляет собой прямоугольный параллелепипед с квадратами в основаниях. Правильная призма — прямая призма, основаниями которой являются правильные многоугольники.

Свойства правильной призмы

1. Основания правильной призмы являются правильными многоугольниками.
2. Боковые грани правильной призмы являются равными прямоугольниками.
3. Боковые ребра правильной призмы равны.

Сечение правильной призмы

1. Сечение правильной призмы плоскостью, параллельной основанию. В сечении образуется правильный многоугольник, равный многоугольнику, лежащему в основании.

2. Сечение правильной призмы плоскостью, проходящей через два не соседних боковых ребра. В сечении образуется прямоугольник. В некоторых случаях может образоваться квадрат.

ЛЕКЦИЯ 3. Пирамида.

- Пирамида (определение).
- Вершины, ребра, грани пирамиды.

- Вершина пирамиды, основание, боковые ребра, боковые грани пирамиды.
- Треугольная, четырехугольная, *n*-угольная пирамиды.
- Тетраэдр.
- Поверхность пирамиды.
- Боковая поверхность пирамиды.
- Высота пирамиды.
- Сечения пирамиды плоскостями, проходящими через вершину.
- Диагональные сечения.
- Сечения пирамиды плоскостями, параллельными основанию.
- Построение сечений, проходящих через заданные точки.
- Усеченная пирамида.
- Основания, боковые грани усеченной пирамиды.
- Правильная пирамида.
- Ось правильной пирамиды.
- Апофема.
- Боковая поверхность правильной пирамиды.
- Усеченная правильная пирамида, ее апофема и боковая поверхность.
- Правильные многогранники: правильный тетраэдр, куб, октаэдр, додекаэдр, икосаэдр.

Пирамида

Рассмотрим многоугольник $A_1, A_2, ..., A_n$ и точку *P*, не лежащую в плоскости этого многоугольника. Соединив точку *P* отрезками с вершинами многоугольника, получим n треугольников (рис.1.): $PA_1A_2, PA_2A_3, ...PA_nA_1$.

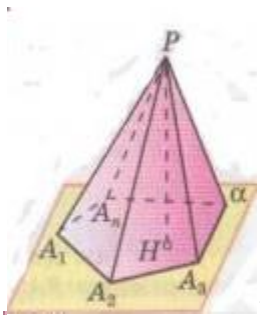
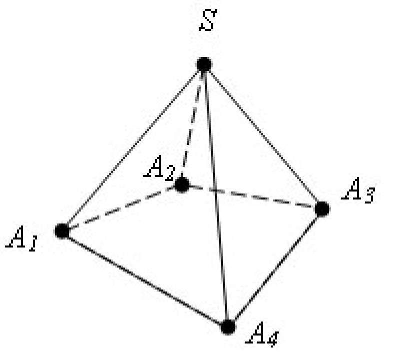


рис.1.

Многогранник, составленный из n - угольника $A_1, A_2, ..., A_n$ и n треугольников $PA_1A_2, PA_2A_3, ...PA_nA_1$, называется ***пирамидой***. Многоугольник $A_1, A_2, ..., A_n$ называется основанием, а треугольники $PA_1A_2, PA_2A_3, ...PA_nA_1$ - *боковыми гранями* пирамиды. Точка *P* – вершиной пирамиды, а отрезки $PA_1, PA_2, ...PA_n$ - ее *боковыми ребрами*. Пирамиду с основанием $A_1, A_2, ..., A_n$ и вершиной P обозначают так: $PA_1A_2...A_n$ - и называют n – угольной пирамидой.

На рисунке 2 изображены четырехугольная и шестиугольная пирамиды. Ясно, что треугольная пирамида – это *тетраэдр*.



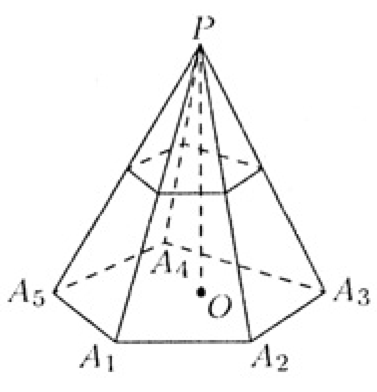


Рис.2.

Перпендикуляр, проведенный из вершины пирамиды к плоскости основания, называется высотой пирамиды. На (рис 1) отрезок PH является высотой пирамиды.

Площадью полной поверхности пирамиды называется сумма площадей всех ее граней (т.е. основания и боковых граней), а площадью боковой поверхности пирамиды – сумма площадей ее боковых граней. Очевидно, $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$.

Правильная пирамида

Пирамида называется правильной, если

1) ее основание – правильный многоугольник;

2) ее высота – отрезок, соединяющий вершину пирамиды с ее центром.

Одним из примеров правильной пирамиды являются египетские пирамиды. Это четырехугольные пирамиды.

Свойства правильной пирамиды.

Все боковые ребра правильной пирамиды равны, а боковые грани являются равными равнобедренными треугольниками.

Доказательство данных фактов проводится устно:

1. Любое боковое ребро представляет собой гипотенузу прямоугольного треугольника, одним катетом которого служит высота пирамиды, а другим – радиус описанной около основания окружности. Эти прямоугольные треугольники равны. Следовательно, равны их гипотенузы.
2. Так как боковые ребра правильной пирамиды равны, то ее боковые грани - равнобедренные треугольники. Так как $A_1, A_2, ..., A_n$ - правильный многоугольник, то основания этих треугольников также равны друг другу. Значит, боковые грани равны (по трем сторонам).

Апофема.

Апофема – высота боковой грани правильной пирамиды, проведенная из ее вершины. Данный термин употребляется для правильной пирамиды, хотя у неправильной пирамиды также могут быть равны высоты боковых граней.

Теорема: Площадь боковой поверхности правильной пирамиды равна половине произведения периметра снования на апофему.

Доказательство

Боковые грани правильной пирамиды – равные равнобедренные треугольники, основания которых – стороны основания пирамиды, а высоты равны апофеме. Площадь S боковой поверхности пирамиды равна сумме произведений сторон основания на половину апофемы d. Вынося множитель $0,5d$ за скобки, получим в скобках сумму сторон основания пирамиды, т.е. его периметр. Теорема доказана.

Сечение правильной пирамиды

1. Сечение правильной пирамиды плоскостью, параллельной основанию. В сечении образуется правильный многоугольник, подобный многоугольнику, лежащему в основании.

2. Сечение правильной пирамиды плоскостью, проходящей через два не соседних боковых ребра. В сечении образуется равнобедренный треугольник. В некоторых случаях может образоваться равносторонний треугольник.

Усеченная пирамида

***У**сеченной пирамидой* называется многогранник, у которого вершинами служат вершины основания и вершины ее сечения плоскостью, параллельной основанию.

Свойства усеченной пирамиды:

1. Основания усеченной пирамиды — подобные многоугольники.
2. Боковые грани усеченной пирамиды — трапеции.
3. Боковые ребра правильной усеченной пирамиды равны и одинаково наклонены к основанию пирамиды.
4. Боковые грани правильной усеченной пирамиды — равные между собой равнобедренные трапеции и одинаково наклонены к основанию пирамиды.
5. Двугранные углы при боковых ребрах правильной усеченной пирамиды равны.

Площадь поверхности и объём усеченной пирамиды

Пусть CH — высота усеченной пирамиды, P_1 и P_2 — периметры оснований усеченной пирамиды, S_1 и S_2 — площади оснований усеченной пирамиды, $S_{\text{бок}}$ — площадь боковой поверхности усеченной пирамиды, $S_{\text{полн}}$ — площадь полной поверхности усеченной пирамиды, V — объем усеченной пирамиды. Тогда имеют место следующие соотношения:

$$S_{\text{полн}} = S_1 + S_2 + S_{\text{бок}}$$

$$V = \frac{1}{3}CH(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2}).$$

Если все двугранные углы при основании усеченной пирамиды равны β, а высоты всех боковых граней пирамиды равны $h_{\text{бок}}$, то

$$S_{\text{бок}} = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)h_{\text{бок}}$$

$$S_{\text{бок}} = \frac{|S_1 - S_2|}{\cos\beta}.$$

Определение правильного многогранника.

Многогранник называется правильным, если: он выпуклый; все его грани – равные друг другу правильные многоугольники; в каждой его вершине сходится одинаковое число ребер; все его двугранные углы равны.

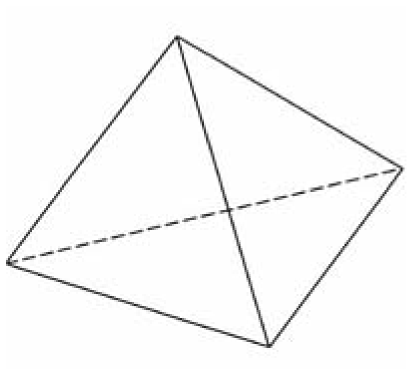
Теорема: Существует пять различных (с точностью до подобия) типов правильных многогранников: правильный тетраэдр, правильный гексаэдр (куб), правильный октаэдр, правильный додекаэдр и правильный икосаэдр.

Таблица 1. Некоторые свойства правильных многогранников приведены в следующей таблице.

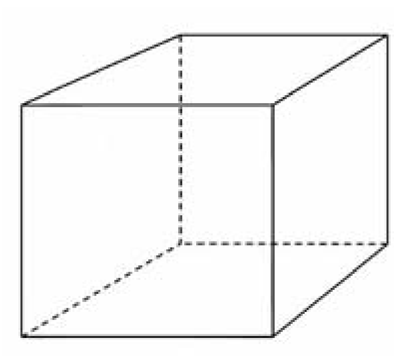
Вид грани	Плоский угол при вершине	Вид многогранного угла при вершине	Сумма плоских углов при вершине	В	Р	Г	Название многогранника
Правильный треугольник	60°	3-гранный	180°	4	6	4	Правильный тетраэдр
Правильный треугольник	60°	4-гранный	240°	6	12	8	Правильный октаэдр
Правильный треугольник	60°	5-гранный	300°	12	30	20	Правильный икосаэдр
Квадрат	90°	3-гранный	270°	8	12	6	Правильный гексаэдр (куб)
Правильный треугольник	108°	3-гранный	324°	20	30	12	Правильный додекаэдр

Рассмотрим виды многогранников:

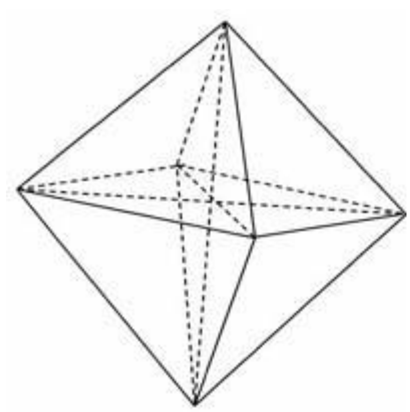
Правильный тетраэдр



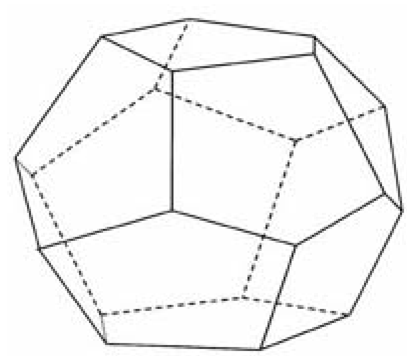
Правильный октаэдр



Правильный икосаэдр



Правильный гексаэдр (куб)



Правильный додекаэдр

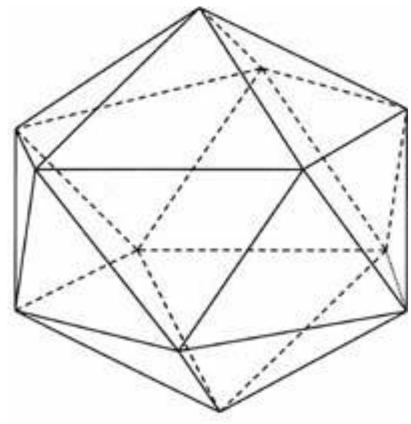


Таблица 2. Формулы для нахождения объемов правильных многогранников.

Вид многогранника	Объем многогранника
Правильный тетраэдр	$\frac{a^3\sqrt{2}}{12}$
Правильный октаэдр	$\frac{a^3\sqrt{2}}{3}$
Правильный икосаэдр	a^3
Правильный гексаэдр (куб)	$\frac{5a^3\left(3+\sqrt{5}\right)}{12}$
Правильный додекаэдр	$\frac{a^3\left(15+7\sqrt{5}\right)}{4}$

Тема 7.4.Тела и поверхности вращения

ЛЕКЦИЯ 1. Цилиндр и конус.

- Круговой цилиндр (определение).
- Основания цилиндра. Радиус цилиндра.
- Образующие цилиндра.
- Ось и высота цилиндра.
- Свойства оснований и образующих цилиндра.
- Цилиндрическая поверхность.
- Сечения цилиндра плоскостями, параллельными оси и параллельными основаниям.
- Круговой конус (определение).
- Основание конуса. Радиус конуса.
- Вершина конуса.
- Образующие конуса.
- Ось и высота конуса.
- Коническая поверхность.
- Сечения конуса плоскостями, параллельными основаниям и плоскостями, проходящими через вершину.

Цилиндрическая поверхность образуется при движении прямой (AB, рис.1), сохраняющей своё направление и пересекающейся с заданной линией (кривой) MN. Линия MN называется направляющей. Прямые, соответствующие различным положениям прямой AB при её движении (A'B', A"B" и т.д., рис.2), называются образующими цилиндрической поверхности.

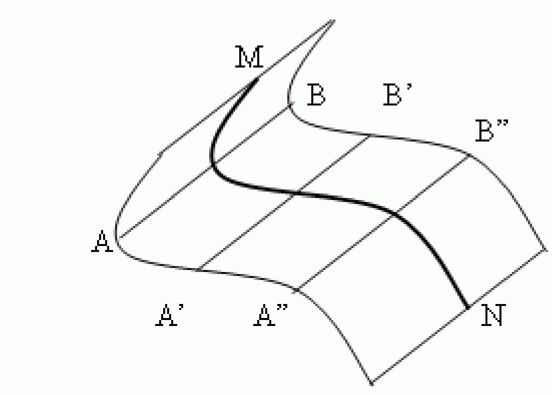


Рис.1.

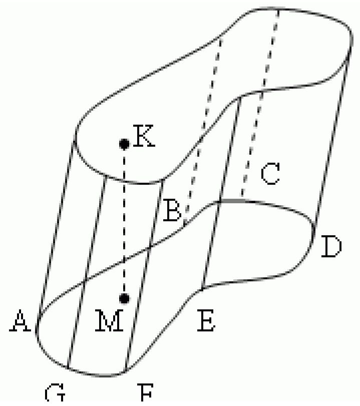
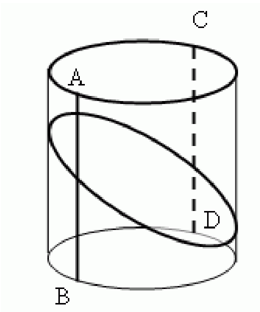


Рис.2

Цилиндр. Тело, ограниченное цилиндрической поверхностью с замкнутой направляющей и двумя параллельными плоскостями, называется цилиндром (рис.2). Части этих плоскостей (ABCDEFG и abcdefg) называются основаниями цилиндра. Расстояние между основаниями (KM, рис.2) – высота цилиндра. Цилиндр – прямой, если его образующие перпендикулярны основанию; в противном случае цилиндр – наклонный. Цилиндр называется круговым, если его основание – круг. Если цилиндр является одновременно и прямым, и круговым, то он называется круглым. Призма является частным случаем цилиндра(почему?).

Цилиндрические сечения боковой поверхности кругового цилиндра (рис.3). Сечения, параллельные основанию - круги того же радиуса. Сечения, параллельные образующим цилиндра - пары параллельных прямых (AB || CD). Сечения, которые не параллельны ни основанию, ни образующим - эллипсы.



Площадь боковой поверхности цилиндра

Площадь боковой поверхности цилиндра равна произведению высоты цилиндра на длину окружности основания.

Формула для вычисления боковой поверхности цилиндра:

$$S_{бок} = 2\pi Rh,$$

где R - радиус окружности основания, h - высота цилиндра.

Полная площадь поверхности цилиндра равна сумме боковой поверхности цилиндра и двойной площади основания цилиндра.

Формула для вычисления полной площади поверхности цилиндра:

$$S_{бок} = 2\pi Rh + 2\pi R^2,$$
где R - радиус окружности основания, h - высота цилиндра.

Коническая поверхность образуется при движении прямой (AB, рис.1), проходящей всё время через неподвижную точку (S), и пересекающей за данную линию MN, называемую направляющей. Прямые, соответствующие различным положениям прямой AB при её движении (A’B’, A”B” и т.д.), называются образующими конической поверхности; точка S – её вершиной. Коническая поверхность состоит из двух частей: одна описывается лучом SA, другая – его продолжением SB. Обычно в качестве конической поверхности рассматривают одну из её частей.

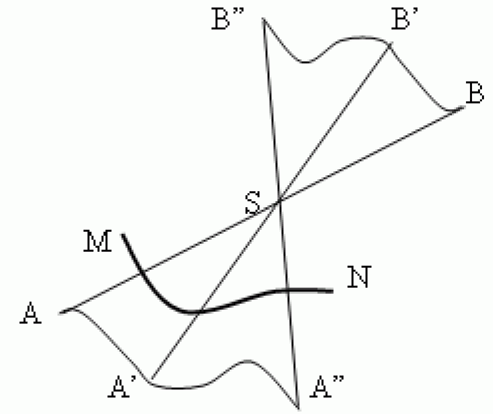


Рис.1

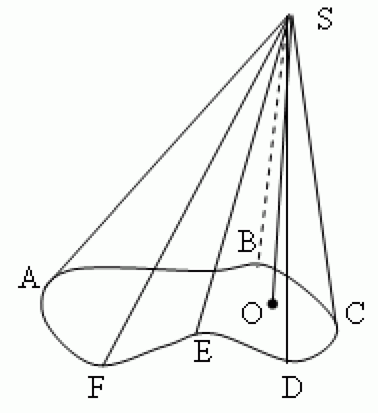
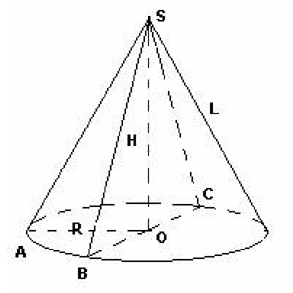
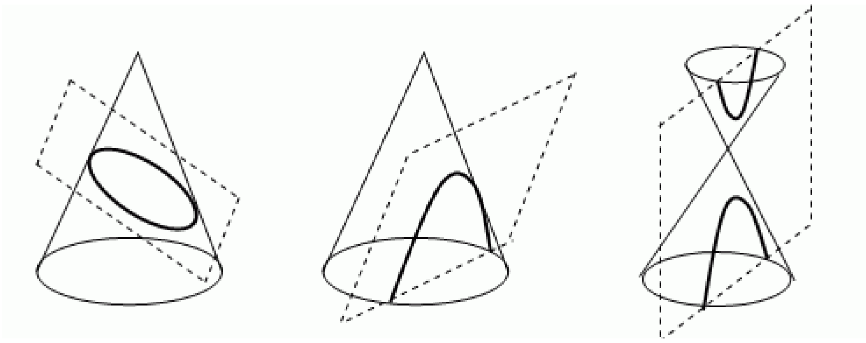


Рис.2

Конус – это тело, ограниченное одной из частей конической поверхности с замкнутой направляющей и пересекающей коническую поверхность плоскостью (ABCDEF, рис.2), не проходящей через вершину S. Часть этой плоскости, расположенной внутри конической поверхности, называется основанием конуса. Перпендикуляр SO, опущенный из вершины S на основание, называется высотой конуса. Пирамида является частным случаем конуса (почему?). Конус называется круговым, если его основанием является круг. Прямая SO, соединяющая вершину конуса с центром основания, называется осью конуса. Если высота кругового конуса совпадает с его осью, то такой конус называется *круглым*.



Конические сечения. Сечения кругового конуса, параллельные его основанию - круги. Сечение, пересекающее только одну часть кругового конуса и не параллельное ни одной его образующей - эллипс (рис.3). Сечение, пересекающее только одну часть кругового конуса и параллельное одной из его образующих - парабола (рис.4). Сечение, пересекающее обе части кругового конуса, в общем случае является гиперболой, состоящей из двух ветвей (рис.5).В частности, если это сечение проходит через ось конуса, то получаем пару пересекающихся прямых (образующих конуса).



Конические сечения представляют большой интерес как в теоретическом, так и в практическом отношении. Так, они широко используются в технике (эллиптические зубчатые колёса, параболические прожекторы и антенны); планеты и некоторые кометы движутся по эллиптическим орбитам; некоторые кометы движутся по параболическим и гиперболическим орбитам.

Площадь боковой поверхности конуса

Площадь боковой поверхности конуса равна произведению числа π на радиус окружности основания и на длину образующей конуса.

Формула площади боковой поверхности конуса: $S_{бок} = \frac{\pi l^2}{360}\alpha,$

где r - радиус окружности основания, l - длина образующей конуса.

$2\pi r = \frac{\pi l}{180}\alpha\ , \alpha = \frac{360r}{l}\ .$

$$S_{бок} = \pi rl$$

Площадь полной поверхности конуса равна сумме площадей основания конуса и его боковой поверхности. Основанием конуса является круг.

Формула площади полной поверхности конуса:

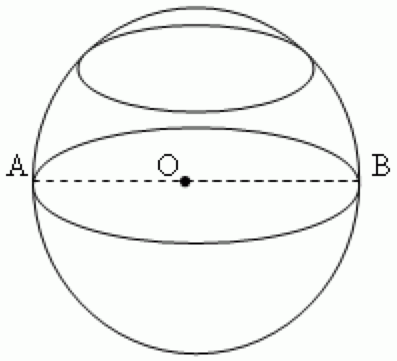
$$S_{бок} = \pi Rl + \pi R^2,$$

где r - радиус окружности основания, l - длина образующей конуса.

ЛЕКЦИЯ 2. Шар и сфера.

- Шар (определение).
- Центр радиус и диаметр шара.
- Сфера – шаровая поверхность.
- Сечения шара плоскостью.
- Сечения сферы плоскостью.
- Диаметральная плоскость.
- Большой круг и большая окружность.
- Плоскость симметрии и центр симметрии шара.
- Касательная плоскость к шару.
- Пересечение двух сфер.
- Вписанные и описанные многогранники.

Сферическая поверхность – это геометрическое место точек (т.е. множество всех точек) в пространстве, равноудалённых от одной точки О, которая называется центром сферической поверхности (рис.1). Радиус AO и диаметр AB определяются так же, как и в окружности.



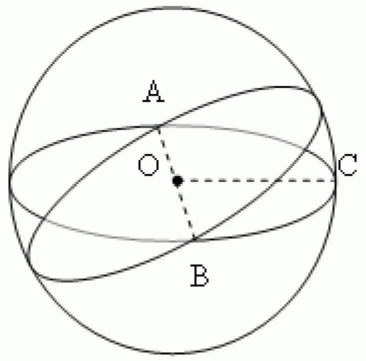
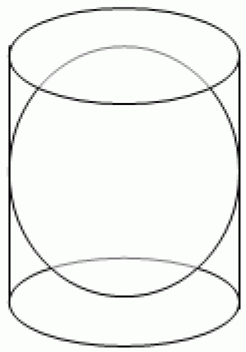


Рис.1 Рис.2

Шар (сфера) - это тело, ограниченное сферической поверхностью. Можно получить шар, вращая полукруг (или круг) вокруг диаметра. Все плоские сечения шара – круги (рис.1). Наибольший круг лежит в сечении, проходящем через центр шара, и называется большим кругом. Его радиус равен радиусу шара. Любые два больших круга пересекаются по диаметру шара (АВ, рис.2). Этот диаметр является и диаметром пересекающихся больших кругов. Через две точки сферической поверхности, расположенные на концах одного диаметра (А и В, рис.2), можно провести бесчисленное множество больших кругов. Например, через полюса Земли можно провести бесконечное число меридианов.

Объём шара в полтора раза меньше объёма описанного вокруг него цилиндра (рис.3), а поверхность шара в полтора раза меньше полной поверхности того же цилиндра (теорема Архимеда):



$$S_{шара} = \frac{2}{3} S_{цил} ,$$

$$V_{шара} = \frac{2}{3} V_{цил} .$$

Рис.3

Здесь S шара и V шара - соответственно поверхность и объём шара;
S цил и Vцил - полная поверхность и объём описанного цилиндра.

Части шара. Часть шара (сферы), отсекаемая от него какой-либо плоскостью (АВС, рис.4), называется шаровым (сферическим) сегментом. Круг АВС называется основанием шарового сегмента. Отрезок MN перпендикуляра, проведенного из центра N круга АВС до пересечения со сферической поверхностью, называется высотой шарового сегмента. Точка М называется вершиной шарового сегмента.

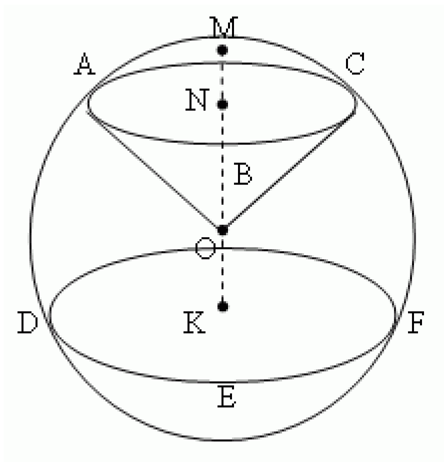


Рис.4

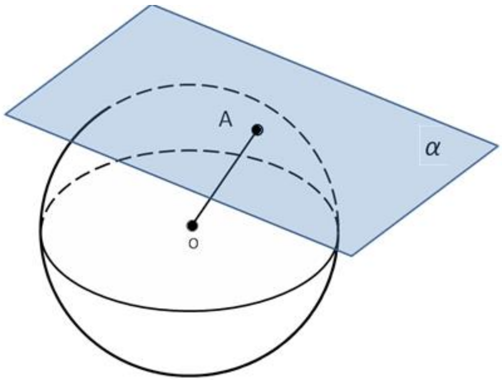
Часть сферы, заключённая между двумя параллельными плоскостями ABC и DEF, пересекающими сферическую поверхность (рис.4), называется шаровым слоем; кривая поверхность шарового слоя называется шаровым поясом (зоной). Круги ABC и DEF – основания шарового пояса. Расстояние NK между основаниями шарового пояса – его высота. Часть шара, ограниченная кривой поверхностью сферического сегмента (AMCB, рис.4) и конической поверхностью OABC, основанием которой служит основание сегмента (ABC), а вершиной – центр шара O, называется шаровым сектором.

Уравнение сферы

В прямоугольной системе координат уравнение сферы радиуса R с центром C(x_0, y_0, z_0) имеет вид $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=R^2$.

Касательная плоскость к сфере

Плоскость, имеющая со сферой только одну общую точку, называется касательной плоскостью к сфере, а их общая точка называется точкой касания плоскости и сферы.



На рисунке плоскость α - касательная к сфере с центром O, A – точка касания. Касательная плоскость к сфере обладает свойством, аналогичным свойству касательной к окружности. Оно выражено в следующей теореме:

Теорема: Радиус сферы, проведенный в точку касания сферы и плоскости, перпендикулярен к касательной плоскости.

Доказательство:

Рассмотрим плоскость α, касающуюся сферы с центром O в точке A. Докажем, что радиус OA является наклонной к плоскости α, и, следовательно, расстояние от сферы до плоскости α меньше радиуса сферы. Поэтому сфера и плоскость пересекаются по окружности. Но это противоречит тому, что плоскость α - касательная, т.е. сфера и плоскость α имеют только одну общую точку. Полученное противоречие доказывает, что радиус OA перпендикулярен к плоскости α. Теорема доказана.

Теорема: Если радиус сферы перпендикулярен к плоскости, проходящей через его конец, лежащей на сфере, то эта плоскость является касательной к сфере.

Доказательство:

Из условия теоремы следует, что данный радиус является перпендикуляром, проведенным из центра сферы к данной плоскости. Поэтому расстояние от центра сферы до плоскости равно радиусу сферы, и, следовательно, сфера и плоскость имеют одну общую точку. Это означает, что данная плоскость является касательной к сфере. Теорема доказана.

Площадь сферы

За площадь сферы примем предел последовательности площадей поверхностей описанных около сферы многогранников при стремлении к нулю наибольшего размера каждой грани.

Площадь сферы: $S = 4\pi R^2$.

Тема 7.5.Измерения в геометрии

<u>ЛЕКЦИЯ 1. Объемы многогранников.</u>

- Понятие объема.
- Свойства объемов тел.
- Объем прямоугольного параллелепипеда.
- Объем наклонного параллелепипеда.
- Объем призмы.
- Равновеликие тела.
- Объем пирамиды.
- Объем усеченной пирамиды.

Тела равновеликие. Пространство, занимаемое каким-нибудь телом, или вместимость этого тела наз. его объемом. Могут быть такие тела, которые имеют одинаковый объем, но различный вид, так что хотя они и занимают одинаковое пространство, но нельзя вложить одно тело в другое так, чтобы они совместились. Возьмем напр. две прямые треугольные призмы AB и EF (рис.1.), которых основания и высоты равны;

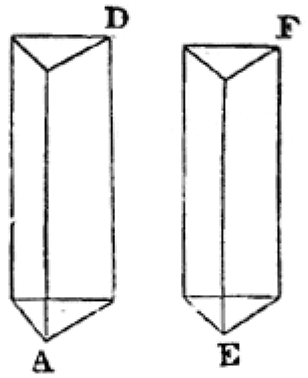


Рис.1.

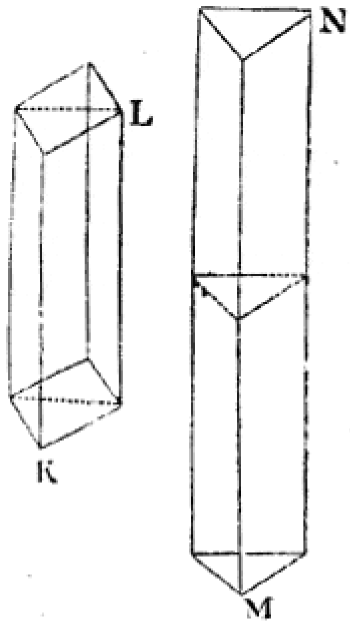


Рис.2.

мы можем приставить эти призмы одну к другой так, что образуется одна призма MN (рис.2.), которой основание то же самое, а высота вдвое больше; можем также составить из них параллелепипед KL; объем параллелепипеда. будет, очевидно, равен объему призмы MN, так как оба эти тела состоят из одних и тех же призм; но параллелепипед, конечно, не может совместиться с призмой. Тела, имеющие равный объем, наз. равновеликими.

Единица для измерения объемов.

Измерить объем какого-нибудь тела, значит найти, сколько раз в нем может поместиться другое тело, объем которого принимается за единицу. Такой единицей служит куб, которого каждое ребро = линейной единице, напр., сажени, аршину и т. под.

Таким образом, определить объем или вместимость комнаты значит узнать, сколько поместится в ней кубических саж., куб. арш. и т. под. Для этого надо бы поставить в комнате одну куб. саж. или один куб. арш. рядом с этой единицей поставить другой такой куб, потом третий и т. д., пока вся комната не наполнится. Но такое измерение будет и неудобно, и весьма продолжительно; мы покажем сейчас, каким образом можно измерять объемы тел, не помещая в них куб. мер.

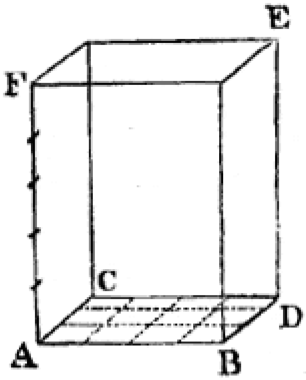
Свойство объемов:

1. Равные тела имеют равные объемы.
2. Если тело составлено из нескольких тел, то его объем равен сумме объемов этих тел.

Объем прямоугольного параллелепипеда.

Итак, чтоб определить объем прямоугольного параллелепипеда, надо измерить одной и той же линейной единицей три ребра его, выходящие из общей вершины, и полученные числа перемножить; произведение покажет, сколько содержится в пар-де соответствующих кубических единиц. В прямоугольном параллелепипеде три ребра, идущие из одной вершины, называется измерениями этого параллелепипеда; поэтому предыдущее правило об определении объема короче выражают так: объем прямоугольного параллелепипеда произведению трех его измерений.

Можно сказать также, что объем прямоугольного параллелепипеда произведению площади его основания на высоту.



Следствие 1. Объем прямоугольного параллелепипеда равен произведению площади основания на высоту.

$$V=Sh,$$

где S – площадь основания, h – высота параллелепипеда.

*Следствие 2.*Объем прямой призмы, основанием которой является прямоугольный треугольник, равен произведению площади основания на высоту.

$$V = S_{ABC} \cdot h$$

Объем пирамиды.

Всякая пирамида составляет 1/3 призмы того же основания и той же высоты. Чтобы проверить это, возьмем ящик А, имеющий вид призмы (рис.3.), и пирамиду В, внутри пустую; основание её такое же, как у призмы, и высота такая же; насыплем в нее песку или нальем воды (для этого, разумеется, ее надо обернуть вершиной вниз) так, чтобы наполнить ее; потом выльем эту воду в призму; затем опять наполним пирамиду и опять выльем; мы увидим, что надо три раза перелить воду из пирамиды в призму - и тогда только призма наполнится. Поэтому *объем пирамиды=1/3 произведения площади её основания на высоту.*

$$V = \frac{1}{3} S \cdot h$$

Объем усеченной пирамиды, высота которой равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1})$$

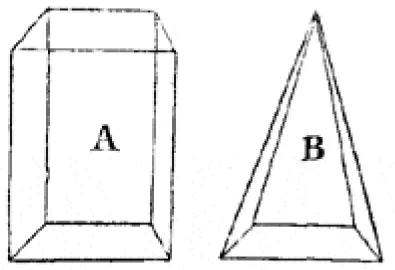


Рис.3.

ЛЕКЦИЯ 2. Объемы круглых тел.

- Объем цилиндра.
- Объем усеченного конуса.
- Объем конуса.
- Объем шара.
- Части шара: шаровой сегмент и шаровой сектор.
- Объем шарового сегмента и шарового сектора.

Объем цилиндра.

Цилиндр можно считать за призму, у которой в основании не многоугольник, а круг; следовательно, объем цилиндра определяется точно так же, как и объем призмы; т.е. объем = произведению площади основания на высоту.

$$V = S \cdot h$$

Объем конуса.

Конус можно считать за правильную пирамиду, у которой в основании круг, а не многоугольник; поэтому объем конуса определяется так же, как и объем пирамиды; т.е. объем = одной трети произведения площади основания на высоту.

$$V = \frac{1}{3}S \cdot h$$

Объем усеченного конуса, высота которой равна h, а площади оснований равны S и S_1, вычисляется по формуле

$$V = \frac{1}{3}h(S + S_1 + \sqrt{S \cdot S_1}).$$

Объем шара.

Поверхность шара можно считать состоящей из чрезвычайно большого количества весьма малых плоских фигур, напр. треугольников; если мысленно соединим вершины этих треугольников с центром шара, то получим множество пирамид, которые все вместе и составляют объем шара; все эти пирам. имеют одну высоту, именно радиус шара, а основания их составляют поверхность шара. Но чтобы найти объем пирамиды, должно площадь её основания умножить на 1/3 высоты; следовательно, мы найдем сумму объемов всех пирамид, или объем шара, если умножим сумму всех оснований или поверхность шара, на треть радиуса. Итак, объем шара = поверхности шара, умноженной на треть радиуса.

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3$$

ЛЕКЦИЯ 3. Подобные тела.

- Подобные тела – определение.

- Отношение площадей поверхностей и объемов подобных тел.

Два тела подобны, если одно из них может быть получено из другого путём увеличения (или уменьшения) всех его линейных размеров в одном и том же отношении. Автомобиль и его модель – подобные тела. Два тела (фигуры) зеркально подобны, если одно из них подобно зеркальному отражению другого. Например, картина и её фотонегатив зеркально подобны друг другу.

В подобных и зеркально подобных фигурах все соответственные углы (линейные и двугранные) равны.

В подобных телах многогранные и телесные углы равны; в зеркально подобных телах они зеркально равны.

Если два тетраэдра (две треугольные пирамиды) имеют соответственно пропорциональные рёбра (или соответственно подобные грани), то они подобны или зеркально подобны. Например, если грани первой пирамиды вдвое больше, чем у второй, то высоты, апофемы, радиус описанного круга первой пирамиды также вдвое больше, чем у второй. Эта теорема не имеет места для многогранников с большим числом граней. Предположим, что мы соединили все рёбра куба в его вершинах посредством шарниров; тогда мы можем изменить форму этой фигуры, не растягивая её стержни, и получить из начального куба параллелепипед.

Две правильные призмы или пирамиды с одинаковым числом граней подобны, если радиусы их оснований пропорциональны их высотам. Два круглых цилиндра или конуса подобны, если радиусы их оснований пропорциональны их высотам.

Если два и более тел подобны, то площади всех соответствующих плоских и кривых поверхностей этих тел пропорциональны квадратам любых соответствующих отрезков.

Если два и более тел подобны, то их объёмы, а также объёмы любых их соответствующих частей, пропорциональны кубам любых соответствующих отрезков.

П р и м е р. Чашка диаметром 8 см и высотой 10 см вмещает 0.5 литра воды. Каких размеров должна быть подобная чашка, вмещающая 4 литра воды?

Р е ш е н и е. Поскольку чашки – подобные цилиндры, то отношение их объёмов равно отношению кубов соответствующих отрезков (в нашем случае – высот и диаметров чашек). Следовательно, высота h новой чашки находится из отношения:

$(h/10)^3 = 4/0.5$, то есть $h^3 = 8 \cdot 10^3$, откуда $h = 20$ см;

аналогично, для диаметра d получим:

$(d/8)^3 = 4/0.5$, то есть $d^3 = 8 \cdot 8^3$, откуда $d = 16$ см .

Раздел 8.Обобщающее повторение.
Тема 8.1. Обобщающее повторение

ЛЕКЦИЯ 1-3 Решение задач по всем разделам курса.

Повторение теоретического материала и решение тренировочных вариантов итогового экзамена:

Тренировочная работа по математике (2 семестр)

Вариант 1

1. Вычислите $\frac{\sqrt[5]{32}}{\sqrt{49}} + 81^{0,5} - 0,25^{-1}$.
2. Решите уравнение $\log_3(x-4) = 2$.

3. Найдите область определения функции $f(x)=\sqrt{3^x-9}$.

4. Найдите производную функции $y=7\ln x+4x^2$.

5. Найдите точки экстремума функции $f(x)=x^2\cdot e^{x-2}$.

6. Вычислите $\int\limits_1^{e^6}\frac{16}{x}dx.$

7. Вася бросает игральный кубик. Найдите вероятность того, что выпадет четное число, большее 3-х.

8. Площадь боковой поверхности куба равна 16. Найдите объем куба.

9. Решите уравнение $\log_{10}(\sin 2x-\cos x+100)=2$.

Тренировочная работа по математике (2 семестр)
Вариант 2

1. Вычислите $3^{1-\log_3 6}$.

2. При каком значении аргумента x значение функции $f(x)=2\cdot 11^{2-x}$ равно 242?

3. Решите неравенство $\log_{0,9}(x+4)>\log_{0,9}(5-x)$.

4. Найдите производную функции $y=3e^x+4^x$.

5. Найдите точку минимума функции . $f(x)=x^8\cdot e^{1-x}$

6. Вычислите. $\int\limits_e^{e^5}\frac{11}{x}dx$

7. В сборнике билетов по математике всего 40 билетов, в 8 из них встречается вопрос по тригонометрии. Найдите вероятность того, что в случайно выбранном билете школьнику не достанется вопроса по тригонометрии?

8. Осевое сечение цилиндра – квадрат, диагональ которого равна 4 дм. Найдите объем цилиндра.

9. Решите уравнение $3^{5\sin x+\cos 2x-1}=\frac{1}{27}$.

Литература:

А.Г.Мордкович. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч 1. Учебник для учащихся образовательных учреждений (базовый уровень) – 13-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2012. -. 400 с.: ил.ISBN 978-5-346-01992-3.

Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы. В 2 ч. Ч 2. Задачник для учащихся образовательных учреждений (базовый уровень) под ред. А.Г.Мордковича. – 13-е изд., стер. – М. : Мнемозина, 2012 – 271 с.: ил. ISBN 978-5-346-01993-0.

Погорелов, Алексей Васильевич. Геометрия: 10 - 11 классы : учебник для общеобразовательных организаций: : базовый и профильный уровни / А. В. Погорелов .— 13-е изд. — Москва : Просвещение, 2014 .— 175 с. : ил. — Библиогр.: с. 172-173 .— ISBN 978-5-09-032026-9.

Дополнительные источники:

Башмаков М.И. Математика: учебник для начального и сред. проф. образования./ М.И. Башмаков. - - 9-е изд. стер. — М.: Академия, 2014 – 251 с. ил. – (Профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины) ISBN 978-5-4468-0742-0.

Башмаков, М.И. Математика. Задачник: учебное пособие для начального профессионального и среднего профессионального образования / М. И. Башмаков .— 4-е изд., стер. — Москва : Академия, 2014 .— 414 с. : ил., табл. — (Профессиональное образование. Общеобразовательные дисциплины) .— ISBN 978-5-4468-0722-2.

Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы: учебник для образовательных организаций с приложением на электронном носителе. Под ред. Колмогорова А.Н., 22-е изд. – М.: Просвещение, 2013. – 384 с.,ISBN 978-5-09-031301-8, -. ISBN 978-5-09-031129-8 (CD-ROM).