Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение

высшего образования(ВлГУ)

«Владимирский государственный университет

имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Колледж инновационных технологий и предпринимательства

Методические указания к практическим занятиям по учебной дисциплине Математика

Пояснительная записка.

Настоящие материалы разработаны с учетом рабочей программы, составленной на основе федерального государственного образовательного стандарта (ФГОС) среднего профессионального образования.

В процессе практического занятия согласно рабочей программы дисциплины «математика», студенты выполняют практические занятия под руководством преподавателя в соответствии с изучаемым содержанием учебного материала.

Выполнение студентами практических занятий направлено на:

— обобщение, систематизацию, углубление теоретических знаний;

— формирование умений применять полученные знания в практической деятельности;

— развитие аналитических, проектировочных, конструктивных умений;

— выработку самостоятельности, ответственности, точности и творческой инициативы.

Практические занятия выполняются по следующим темам дисциплины «Математика»:

Раздел 1. Линейная алгебра.

Раздел 2. Основы математического анализа.

Раздел 3. Основы теории комплексных чисел.

Раздел 4. Теория вероятностей и математическая статистика.

.

Цель и задачи практических занятий:

В результате выполнения практических занятий обучающийся должен

уметь:

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

знать:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы;

- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;

- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории вероятностей и математической статистики;

- основы интегрального и дифференциального исчисления.

Практические занятия - один из видов практического обучения, имеющий целью закрепление теоретических знаний и формирование практических умений и навыков.

Практическая работа по математике заключается в выполнении студентами под руководством преподавателя комплекса учебных заданий, направленных на усвоение основ учебной дисциплины «математика», приобретение практических навыков решения примеров и задач. Выполнение практической работы студенты производят в письменном виде, оформляя отчеты в отдельной тетради для практических работ. Отчет предоставляется преподавателю, ведущему данную дисциплину для проверки.

Практические занятия способствуют более глубокому пониманию теоретического материала учебного курса, а также развитию, формированию и становлению различных уровней составляющих профессиональной компетентности студентов, пониманию межпредметных связей. Основой практикума выступают типовые задачи, которые должен уметь решать студент, изучающий дисциплину «математика».

Для лучшего усвоения студентами изучаемого материала и получения уверенных навыков решения примеров и задач при проведении практических занятий целесообразно использовать различные методы и приемы:

- рассмотрение решения типовых примеров в форме видеолекции;
- исследовательская работа при решении примеров и практических задач;
- работа в группах;
- применение компьютерных программ для решения математических задач.

Содержанием практических занятий являются

— Выполнение вычислений, расчетов;

— Работа со справочниками, таблицами.

Необходимые структурные элементы практического занятия:

— Инструктаж, проводимый преподавателем;

— Самостоятельная деятельность студентов;

— Анализ и оценка выполненных работ и степени овладения студентами запланированных умений.

Перед выполнением практического занятия проводится проверка знаний студентов на предмет их готовности к выполнению задания.

Методические указания к выполнению практических работ содержат :

- Тему занятия;
- Цель занятия;
- Задачи;
- Обеспечение практической работы:
- Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач.
- Пояснения (основные формулы, необходимые для выполнения практического занятия);
- Порядок выполнения занятия;

- Используемую литературу.

Оценки за выполнение являются показателями текущей успеваемости студентов по дисциплине «Математика».

Критерии оценки практических заданий.

Отметка «5» ставится, если:

работа выполнена полностью;

в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробелов и ошибок;

в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Отметка «4» ставится, если:

работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки);

допущена одна существенная ошибка или два-три несущественных ошибки.

Отметка «3» ставится, если:

допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но учащийся владеет обязательными умениями по проверяемой теме; при этом правильно выполнено не менее половины работы.

Отметка «2» ставится, если:

допущены существенные ошибки, показавшие, что учащийся не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Отметка «1» ставится, если:

работа показала полное отсутствие у учащегося обязательных знаний и умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.

К категории *существенных ошибок* следует отнести ошибки, связанные с незнанием, непониманием учащимися основных положений теории и с неправильным применением методов, способов, приемов решения практических заданий, предусмотренных программой.

К категории *несущественных ошибок* следует отнести погрешности, связанные с небрежным выполнением записей, рисунков, графиков, чертежей, а также погрешности и недочеты, которые не приводят к искажению смысла задания и его выполнения.

При наличии существенной ошибки задание считается невыполненным.

ПРАКТИЧЕСКИЕ РАБОТЫ по предмету «Математика»

Практическое занятие № 1.

Тема: Операции над матрицами. Вычисление определителей.

Цель: Приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики. Проверка усвоения знаний по вычислению определителей 2-го и 3-го порядков, выполнения действий над матрицами, нахождению алгебраических дополнений. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

Задачи:

• развитие творческого профессионального мышления;
• познавательная мотивация;
• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
• углубление теоретической и практической подготовки;
• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Обеспечение практической работы:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.
Учебники: Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2009.
Омельченко В.П., Э.В. Курбатова. Математика, – Серия: Среднее профессиональное образование. - Ростов-на-Дону «Феникс»,2010-380с.
Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Ход практического занятия.

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;
2.Проверка готовности студентов к занятию;
3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:
› Изучить теоретический материал по теме «Операции над матрицами. Вычисление определителей.»
› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.
› Выполнить самостоятельную работу №1.
› Ответить на контрольные вопросы.

**Теоретические сведения и методические рекомендации
по решению задач.**

Матрицей размером $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов. Эту таблицу обычно заключают в круглые скобки. Например, матрица может иметь вид:

$$\begin{pmatrix} 2 & -\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \pi & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & \sqrt{2} & 0 \\ 1.5 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad (4)$$

$$2\times 2 \qquad\qquad 3\times 3 \qquad\qquad 3\times 1 \qquad 1\times 1$$

Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, A или B.

В общем виде матрицу размером $m\times n$ записывают так

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами a_{ij}: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, a_{23} – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной,* причём число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. В приведённых выше примерах квадратными являются вторая матрица – её порядок равен 3, и четвёртая матрица – её порядок 1.

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной*. В примерах это первая матрица и третья.

Различаются также матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица, у которой всего одна строка $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}$, называется *матрицей – строкой* (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец, *матрицей – столбцом*.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается (0), или просто 0. Например,

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}, \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Главной диагональю квадратной матрицы назовём диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & -1 \\ 0 & \underline{2} & -2 \\ 4 & 1 & \underline{3} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется *треугольной* матрицей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной* матрицей. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной* матрицей и обозначается буквой Е. Например, единичная матрица 3-го порядка имеет вид $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ.

Равенство матриц. Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$. Так если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то $A=B$, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ и $a_{22} = b_{22}$.

Транспонирование. Рассмотрим произвольную матрицу A из m строк и n столбцов. Ей можно сопоставить такую матрицу B из n строк и m столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы A с тем же номером (следовательно, каждый столбец является строкой матрицы A с тем же номером). Итак, если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу B называют *транспонированной* матрицей A, а переход от A к B *транспонированием*.

Таким образом, транспонирование – это перемена ролями строк и столбцов матрицы. Матрицу, транспонированную к матрице *A*, обычно обозначают A^T.

Связь между матрицей *A* и её транспонированной можно записать в виде $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Пример. Найти матрицу, транспонированную данной.

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$
2. $B = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$

Сложение матриц. Пусть матрицы *A* и *B* состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, т.е. имеют <u>одинаковые размеры</u>. Тогда для того, чтобы сложить матрицы *A* и *B* нужно к элементам матрицы *A* прибавить элементы матрицы *B*, стоящие на тех же местах. Таким образом, суммой двух матриц *A* и *B* называется матрица *C*, которая определяется по правилу, например,

$$A + B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

или

$$(c_{ij}) = (a_{ij} + b_{ij})$$

Примеры. Найти сумму матриц:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}.$
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. размеры матриц различны.
3. $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$

Легко проверить, что сложение матриц подчиняется следующим законам: коммутативному $A+B=B+A$ и ассоциативному $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу *A* на число *k* нужно каждый элемент матрицы *A* умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы A на число k есть новая матрица, которая определяется по правилу

$$kA = k\cdot\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ ka_{31} & ka_{32} \end{pmatrix}$$ или $(c_{ij}) = (ka_{ij})$.

Для любых чисел a и b и матриц A и B выполняются равенства:

1. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
2. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
3. $(\alpha+\beta)A = \alpha A + \beta A$.

Примеры.

1. $$-2\cdot\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & -8 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}.$$
2. Найти 2A-B, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

$$2A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & -4 & -5 \end{pmatrix}.$$

3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $C=-3A+4B$.

Матрицу C найти нельзя, т.к. матрицы A и B имеют разные размеры.

Умножение матриц. Эта операция осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего, заметим, что размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы. Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй). *Произведением* матрицы A не матрицу B называется новая матрица $C=AB$, элементы которой составляются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, например, чтобы получить у произведения (т.е. в матрице C) элемент, стоящий в 1-ой строке и 3-м столбце c_{13}, нужно в 1-ой матрице взять 1-ую строку, во 2-ой – 3-й столбец, и затем элементы строки умножить на соответствующие элементы столбца и полученные произведения сложить. И другие элементы матрицы-произведения получаются с помощью аналогичного произведения строк первой матрицы на столбцы второй матрицы.

В общем случае, если мы умножаем матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m\times n$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $n\times p$, то получим матрицу C размера $m\times p$, элементы которой вычисляются следующим образом: элемент c_{ij} получается в результате произведения элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и их сложения.

Из этого правила следует, что всегда можно перемножать две квадратные матрицы одного порядка, в результате получим квадратную матрицу того же порядка. В частности, квадратную матрицу всегда можно умножить саму на себя, т.е. возвести в квадрат.

Другим важным случаем является умножение матрицы–строки на матрицу–столбец, причём ширина первой должна быть равна высоте второй, в результате получим матрицу первого порядка (т.е. один элемент). Действительно,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \end{pmatrix}.$$

Примеры.

1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = AB.$

   Найти элементы c_{12}, c_{23} и c_{21} матрицы C.

   $c_{12} = 0 - 2 + 3 = 1, \quad c_{23} = 0 + 0 + 1 = 1, \quad c_{21} = 0 - 3 + 1 = -2.$

2. Найти произведение матриц.

   $$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+2 & 4+1 \\ 3+2+2 & 6+1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 9 \end{pmatrix}.$$

3. $$\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2-2+2 & -3-2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

4. $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. ширина первой матрицы равна 2-м элементам, а высота второй – 3-м.

5. Пусть $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$

   Найти AB и BA.

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & -1\end{pmatrix}.$$

6. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}.$

   Найти *AB* и *BA*.

   $AB=\begin{pmatrix}-3\\ -7\end{pmatrix}$, *B·A* – не имеет смысла.

ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

Пусть дана матрица второго порядка – квадратная матрица, состоящая из двух строк и двух столбцов $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

Определителем второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число, получаемое следующим образом: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель обозначается символом $|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Итак, для того чтобы найти определитель второго порядка нужно из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов по второй диагонали.

Примеры. Вычислить определители второго порядка.

1. $\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-8-15=-23$
2. $\begin{vmatrix}0 & -3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=0+6=6$.
3. Вычислить определитель матрицы *D*, если *D*= -*A*+2*B* и

$$A=\begin{pmatrix}11 & -2\\ -3 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}5 & -1\\ 7 & 2\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}-11 & 2\\ 3 & -4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}10 & -2\\ 14 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 17 & 0\end{pmatrix},\quad |D|=0.$$

Аналогично можно рассмотреть матрицу третьего порядка и соответствующий ей определитель.

Определителем третьего порядка, соответствующим данной квадратной матрице третьего порядка, называется число, обозначаемое и получаемое следующим образом:

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, эта формула даёт разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки a_{11}, a_{12}, a_{13} и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителей второго порядка.

Примеры. Вычислить определитель третьего порядка.

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 3\cdot(-1) - 4\cdot 2 = 3.$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 + 2\cdot 4 = 9$$

Задания для совместной работы.

1. Найдите матрицу C = A + B, если A = $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
2. Найдите матрицу C = A + B, если A = $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Вычислите: 2A + 3B – C, если A = $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, B = $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, C = $\begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$.
4. Произведите умножение двух матриц а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

   б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.
5. Вычислите определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$.

6. Вычислите определитель третьего порядка $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

7. Запишите все миноры определителя $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

8. Найдите алгебраические дополнения A_{13}, A_{21}, A_{31} для определителя $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

9. Разложите определитель $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ по:

а) элементам первой строки;

б) элементам второго столбца.

10. Найдите обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Самостоятельная работа №1 по теме 1.1.

Вариант 1.

1. Найдите матрицу $C = A^2 + 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -7 & 4 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$.
2. Найдите: $A \cdot B - B \cdot A$, где $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Вычислите: $3A \cdot 2B$, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Найдите обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 4 & -1 & -3 \end{pmatrix}$.

Вариант 2.

1. Найдите матрицу $C = A^2 + 2B$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -4 & 7 \\ -3 & 5 \end{pmatrix}$.
2. Найдите: $A \cdot B - B \cdot A$, где $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
3. Вычислите: $3A \cdot 2B$, если $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.
4. Найдите обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -6 \\ 3 & 2 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$.

Контрольные вопросы по теме.

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей-строкой, матрицей столбцом?
3. Какие матрицы называются прямоугольными, квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется треугольной?
9. Что значит транспонировать матрицу?
10. Что называется суммой матриц?
11. Что называется произведением матрицы на число?
12. Как найти произведение двух матриц?
13. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?
14. Что называется определителем матрицы?
15. Как вычислить определитель третьего порядка по схеме треугольников?
16. Что называется минором?
17. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?
18. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?
19. Перечислите свойства определителя.
20. Какая матрица называется невырожденной?
21. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?
22. Каков алгоритм нахождения обратной матрицы?

Практическое занятие №2.

Тема: Решение систем линейных уравнений по формулам Крамера.

Цель: приобретение базовых знаний в области фундаментальных разделов математики. Проверка усвоения знаний по системам n линейных уравнений с n переменными по формулам Крамера. Повторить и систематизировать знания по данной теме.

Задачи:
• развитие творческого профессионального мышления;
• познавательная мотивация;
• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
• углубление теоретической и практической подготовки;
• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Обеспечение практической работы:
Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.
Учебники: Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2009.
Омельченко В.П., Э.В. Курбатова. Математика, – Серия: Среднее профессиональное образование. - Ростов-на-Дону «Феникс»,2008-380с.
Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Ход практического занятия.

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;
2.Проверка готовности студентов к занятию;
3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:
› Изучить теоретический материал по теме «Системы n линейных уравнений с n переменными».
› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.
› Выполнить самостоятельную работу №2 по решению СЛАУ.
› Ответить на контрольные вопросы.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач.

Метод Крамера.

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера):

<u>Теорема.</u> *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

$\Delta = \det A$, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}...a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}...a_{1n} \\ a_{21}...a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}...a_{2n} \\ ... & ... & ... \\ a_{n1}...a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}...a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$\mathrm{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$x_1 = \Delta_1/\det A$; $x_2 = \Delta_2/\det A$; $x_3 = \Delta_3/\det A$;

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2;$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3.$

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Задания для совместной работы.

1. Решите систему линейных уравнений методом Крамера.

а) $\begin{cases} 5x + 3y = 12, \\ 2x - y = 7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x - 5y = 2. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 3, \\ 5x - 2y - 2z = 3, \\ x + y - z = -2. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y + z = 6, \\ x - 2y + z = 9, \\ x - 4y - 2z = 3. \end{cases}$

2. Решите систему 4-х линейных уравнений с четырьмя неизвестными методом Крамера

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -1; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

Индивидуальная самостоятельная работа №2.

Вариант – 1.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 2z = 8 \\ y - 3z = 3 \\ 3x - y + z = 1 \end{cases};$$

Вариант –2.

$$\begin{cases} x - y + 4z = 0 \\ x + y - 2z = 6; \\ y + z = 7 \end{cases}$$

Вариант –3.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 9 \\ x - y + 3z = -1; \\ y - 2z = 4 \end{cases}$$

Вариант –4.

$$\begin{cases} x + 2y - 5z = 9 \\ 3x - y = 2z = 2; \\ y - 5z = 1 \end{cases}$$

Вариант –5.

$$\begin{cases} 5x - 2y + 3z = 1 \\ x + y - 5z = 3 \quad ; \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}$$

Вариант –6.

$$\begin{cases} x + y - 3z = 5 \\ x - 2z = 0 \quad ; \\ x + 2y - 6z = 8 \end{cases}$$

Вариант –7.

$$\begin{cases} y - 3z = 3 \\ 2x + y - 2z = 8; \\ x + y - 4z = 4 \end{cases}$$

Вариант –8.

$$\begin{cases} 2x + 3z = 7 \\ x - y + z = -3; \\ 3x - y + z = 1 \end{cases}$$

Вариант –9.

$$\begin{cases} 3x - y + z = 1 \\ x + y - 2z = 6; \\ y + 2z = 8 \end{cases}$$

Вариант –10.

$$\begin{cases} x = y + 5z = 1 \\ 2x + y - 3z = 7; \\ y - 3z = 3 \end{cases}$$

Вариант –11.

$$\begin{cases} 3x - y + 3z = 3 \\ x + 2y - 4z = 10. \\ y - z = 5 \end{cases}$$

Контрольные вопросы по теме.

1. Системы линейных алгебраических уравнений: основные понятия и определения.
2. Матричная запись СЛАУ.
3. Решение СЛАУ по формулам Крамера
4. Методом обратной матрицы
5. Методом Гаусса.
6. Общее решение СЛАУ.
7. Однородные СЛАУ, свойства их решений.
8. Условия существования ненулевых решений однородных СЛАУ.

Практическое занятие № 3.

Тема: Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах.

Цель: отработка умений и навыков выполнения действий над комплексными

числами, заданными в тригонометрической и показательной формах.

Задачи:

• развитие творческого профессионального мышления;
• познавательная мотивация;
• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
• углубление теоретической и практической подготовки;
• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Обеспечение практического занятия:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Ход практического занятия.

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;
2.Проверка готовности студентов к занятию;
3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:
› Изучить теоретический материал по теме «Действия над комплексными числами в тригонометрической и показательной формах».

› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

› Выполнить самостоятельную работу №4.
› Ответить на контрольные вопросы.

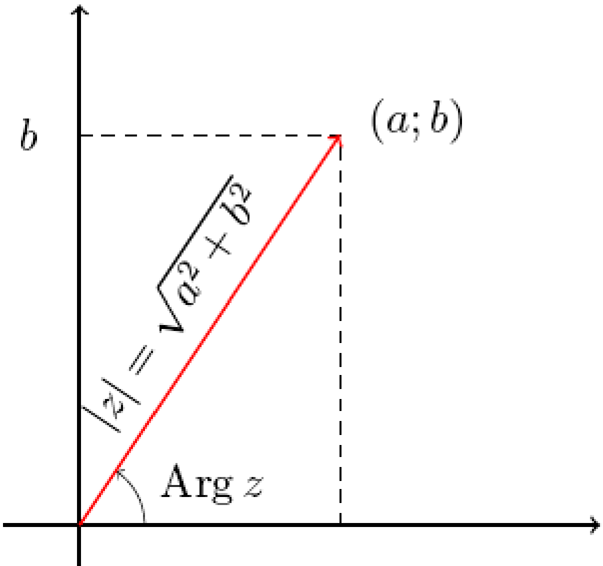
Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач.

Комплексное число — это выражение вида $a + bi$, где a, b — действительные числа, а i — так называемая *мнимая единица*, символ, квадрат которого равен –1, то есть $i^2 = -1$. Число a называется *действительной частью*, а число b — *мнимой частью* комплексного числа $z = a + bi$. Если $b = 0$, то вместо $a + 0i$ пишут просто a. Видно, что действительные числа — это частный случай комплексных чисел.

Арифметические действия над комплексными числами те же, что и над действительными: их можно складывать, вычитать, умножать и делить друг на друга. Сложение и вычитание происходят по правилу $(a + bi) \pm (c + di) = (a \pm c) + (b \pm d)i$, а умножение — по правилу $(a + bi) \cdot (c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)i$ (здесь как раз используется, что $i^2 = -1$). Число $\overline{z} = a - bi$ называется *комплексно-сопряженным* к $z = a + bi$. Равенство $z \cdot \overline{z} = a^2 + b^2$ позволяет понять, как делить одно комплексное число на другое (ненулевое) комплексное число:

$$\frac{a+bi}{c+di} = \frac{(a+bi)\cdot(c-di)}{(c+di)\cdot(c-di)} = \frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

(Например, $\frac{3+4i}{1+2i} = \frac{11}{5} - \frac{2}{5}i$.)

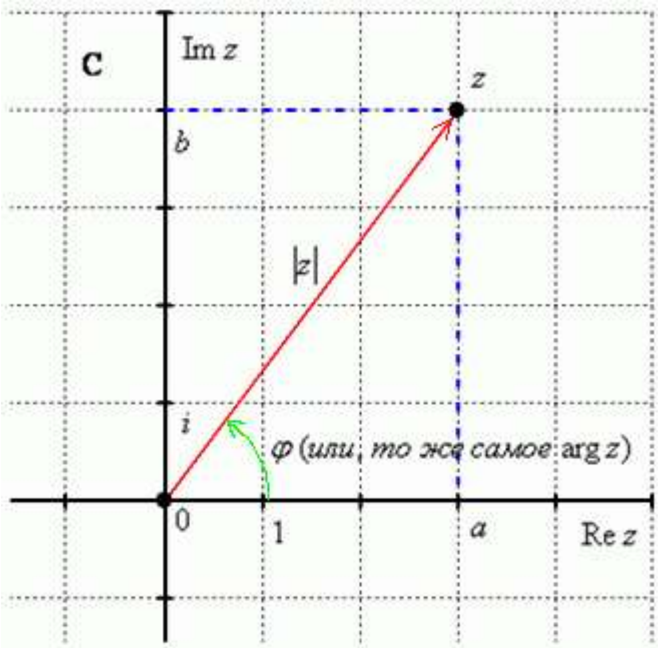


У комплексных чисел есть удобное и наглядное геометрическое представление: число $z = a + bi$ можно изображать вектором с координатами $(a; b)$ на декартовой плоскости (или, что почти то же самое, точкой — концом вектора с этими координатами). При этом сумма двух комплексных чисел изображается как сумма соответствующих векторов (которую можно найти по правилу параллелограмма). По теореме Пифагора длина вектора с координатами $(a; b)$ равна $\sqrt{a^2 + b^2}$. Эта величина называется *модулем* комплексного числа $z = a + bi$ и обозначается $|z|$. Угол, который этот вектор образует с положительным направлением оси абсцисс (отсчитанный против часовой стрелки), называется *аргументом* комплексного числа z и обозначается Arg z. Аргумент определен не однозначно, а лишь с точностью до прибавления величины, кратной 2π радиан (или 360°, если считать в градусах) — ведь ясно, что поворот на такой угол вокруг начала координат не изменит вектор. Но если вектор длины r образует угол φ с положительным направлением оси абсцисс, то его координаты равны $(r \cdot \cos \varphi; r \cdot \sin \varphi)$. Отсюда получается *тригонометрическая форма записи* комплексного числа: $z = |z| \cdot (\cos(\text{Arg } z) + i \sin(\text{Arg } z))$. Часто бывает удобно записывать комплексные числа именно в такой форме, потому что это сильно упрощает выкладки. Умножение комплексных чисел в тригонометрической форме выглядит очень просто: $z_1 \cdot z_2 =$

$|z_1| \cdot |z_2| \cdot (\cos(\mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2) + i \sin(\mathrm{Arg}\, z_1 + \mathrm{Arg}\, z_2))$ (при умножении двух комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются). Отсюда следуют *формулы Муавра*: $z^n = |z|^n \cdot (\cos(n \cdot (\mathrm{Arg}\, z)) + i \sin(n \cdot (\mathrm{Arg}\, z)))$. С помощью этих формул легко научиться извлекать корни любой степени $n \in \mathbb{Z}$ из комплексных чисел. *Корень n-й степени из числа z* — это такое комплексное число *w*, что $w^n = z$. Видно, что $|w| = \sqrt[n]{|z|}$, а $\mathrm{Arg}\, w = \frac{1}{n} \mathrm{Arg}\, z + \frac{2\pi k}{n}$, где *k* может принимать любое значение из множества $\{0, 1, ..., n-1\}$. Это означает, что всегда есть ровно *n* корней *n*-й степени из комплексного числа (на плоскости они располагаются в вершинах правильного *n*-угольника).

Любое комплексное число (кроме нуля) $z = a + bi$ можно записать в тригонометрической форме:
$z = |z| \cdot (\cos\varphi + i \sin\varphi)$, где $|z|$ – это **модуль комплексного числа**, а φ – **аргумент комплексного числа**.

Изобразим на комплексной плоскости число $z = a + bi$. Для определённости и простоты объяснений расположим его в первой координатной четверти, т.е. считаем, что $a > 0, b > 0$:



Модулем комплексного числа z называется расстояние от начала координат до соответствующей точки комплексной плоскости. Попросту говоря, **модуль – это длина** радиус-вектора, который на чертеже обозначен красным цветом.

Модуль комплексного числа z стандартно обозначают: $|z|$ или r

По теореме Пифагора легко вывести формулу для нахождения модуля комплексного числа: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Данная формула справедлива **для любых** значений «а» и «бэ».

Примечание*: модуль комплексного числа представляет собой обобщение понятия* ***модуля действительного числа****, как расстояния от точки до начала координат.*

Аргументом комплексного числа z называется **угол** φ между <u>положительной полуосью</u> действительной оси $\mathrm{Re}\, z$ и радиус-вектором, проведенным из начала координат к соответствующей точке. Аргумент не определён для единственного числа: $z=0$.

Аргумент комплексного числа z стандартно обозначают: φ или $\arg z$

Из геометрических соображений получается следующая формула для нахождения аргумента:

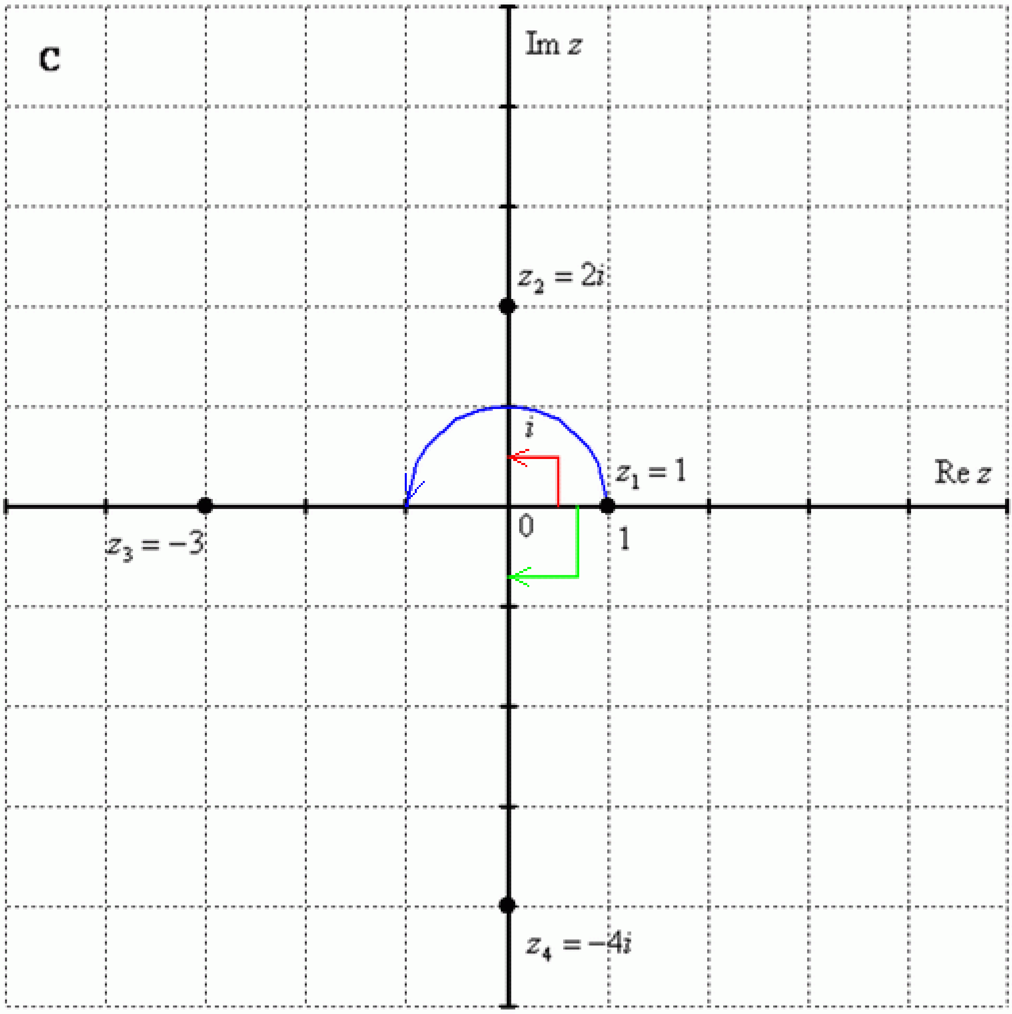
$\arg z = arctg\frac{b}{a}$. **Внимание!** Данная формула работает только в правой полуплоскости! Если комплексное число располагается не в 1-ой и не 4-ой координатной четверти, то формула будет немного другой. Эти случаи мы тоже разберем.

Но сначала рассмотрим простейшие примеры, когда комплексные числа располагаются на координатных осях.

<u>Пример 1.</u>

Представить в тригонометрической форме комплексные числа: $z_1=1$, $z_2=2i$, $z_3=-3$, $z_4=-4i$.

Выполним чертёж:



На самом деле задание устное. Для наглядности перепишу тригонометрическую форму комплексного числа: $z = |z| \cdot (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Запомним, модуль – **длина** (которая всегда неотрицательна), аргумент – **угол**.

1) Представим в тригонометрической форме число $z_1 = 1$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_1| = 1$. Формальный расчет по формуле: $|z_1| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{1^2 + 0^2} = \sqrt{1} = 1$.
Очевидно, что $\varphi_1 = 0$ (число лежит непосредственно на действительной положительной полуоси). Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_1 = \cos 0 + i\sin 0$.

Ясно, обратное проверочное действие: $z_1 = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$

2) Представим в тригонометрической форме число $z_2 = 2i$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_2| = 2$. Формальный расчет по формуле: $|z_2| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2$.
Очевидно, что $\varphi_2 = \dfrac{\pi}{2}$ (или 90 градусов). На чертеже угол обозначен красным цветом.
Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_2 = 2\left(\cos\dfrac{\pi}{2} + i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$.

Используя *таблицу значений тригонометрических функций*, легко обратно получить алгебраическую форму числа (заодно выполнив проверку):

$$z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) = 2(0 + i \cdot 1) = 2i$$

3) Представим в тригонометрической форме число $z_3 = -3$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_3| = 3$. Формальный расчет по формуле:
$|z_3| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{(-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9} = 3$.
Очевидно, что $\varphi_3 = \pi$ (или 180 градусов). На чертеже угол обозначен синим цветом.
Таким образом, число в тригонометрической форме: $z_3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Проверка: $z_3 = 3(\cos\pi + i\sin\pi) = 3(-1 + i \cdot 0) = -3$

4) И четвёртый интересный случай. Представим в тригонометрической форме число $z_4 = -4i$. Найдем его модуль и аргумент. Очевидно, что $|z_4| = 4$. Формальный расчет по формуле: $|z_4| = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{0^2 + (-4)^2} = \sqrt{16} = 4$.

Аргумент можно записать двумя способами: Первый способ: $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ (270 градусов), и, соответственно: $z_4 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$. Проверка:

$$z_4 = 4\left(\cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2}\right) = 4(0 + i\cdot(-1)) = -4i$$

Однако более стандартно следующее правило: **Если угол больше 180 градусов**, то его записывают со знаком минус и противоположной ориентацией («прокруткой») угла: $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$ (минус 90 градусов), на чертеже угол отмечен зеленым цветом. Легко заметить, что $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$ и $\varphi_4 = -\frac{\pi}{2}$ – это один и тот же угол.

Таким образом, запись принимает вид: $z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)$

Внимание! Ни в коем случае нельзя использовать четность косинуса, нечетность синуса и проводить дальнейшее «упрощение» записи:

$$z_4 = 4\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) \cancel{\neq 4\left(\cos\frac{\pi}{2} - i\sin\frac{\pi}{2}\right)}$$

<u>Пример 2.</u>

Представить в тригонометрической форме комплексные числа: , $z_2 = -2 + 4i$, $z_4 = 1 - \sqrt{3}i$.

Представим в тригонометрической форме число $z_2 = -2 + 4i$. Найдем его модуль и аргумент.

$$|z_2| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$

Поскольку $a < 0, b > 0$ (случай 2), то

$$\arg z_2 = \pi + arctg\frac{b}{a} = \pi + arctg\frac{4}{-2} = \pi + arctg(-2) = \pi - arctg2$$

– вот здесь нечетностью арктангенса воспользоваться нужно. К сожалению, в таблице отсутствует значение $arctg2$, поэтому в подобных случаях аргумент приходится оставлять в громоздком виде:

$z_2 = 2\sqrt{5}(\cos(\pi - arctg2) + i\sin(\pi - arctg2))$ – число z_2 в тригонометрической форме

Представим в тригонометрической форме число $z_4 = 1 - \sqrt{3}i$. Найдем его модуль и аргумент.

$$|z_4| = \sqrt{1^2 + (-\sqrt{3})^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

Поскольку $a > 0$ (случай 1), то $\arg z_4 = arctg\frac{b}{a} = arctg\frac{-\sqrt{3}}{1} = -arctg\sqrt{3} = -\frac{\pi}{3}$ (минус 60 градусов).

Таким образом:
$z_4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ – число z_4 в тригонометрической форме.

А вот здесь, как уже отмечалось, минусы <u>не трогаем</u>.

Используем *таблицу значений тригонометрических функций*, при этом учитываем, что угол $-\frac{\pi}{3}$ – это в точности табличный угол $2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}$ (или 300 градусов):
$z_4 = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right) = 2\left(\frac{1}{2} + i\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\right) = 1 - \sqrt{3}i$ – число z_4 в исходной алгебраической форме.

Любое комплексное число (кроме нуля) $z = a + bi$ можно записать в показательной форме: $z = |z|\cdot e^{i\varphi}$, где $|z|$ – это модуль комплексного числа, а φ – аргумент комплексного числа.

Что нужно сделать, чтобы представить комплексное число в показательной форме? Почти то же самое: выполнить чертеж, найти модуль и аргумент. И записать число в виде $z = |z|\cdot e^{i\varphi}$.

Например, для числа $z_2 = -2 + 4i$ предыдущего примера у нас найден модуль и аргумент: $|z_2| = 2\sqrt{5}$, $\arg z_2 = \pi - arctg2$. Тогда данное число в показательной форме запишется следующим образом: $z_2 = 2\sqrt{5}\cdot e^{i(\pi - arctg2)}$.

Число $z_4 = 1 - \sqrt{3}i = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$ в показательной форме будет выглядеть так: $z_4 = 2\cdot e^{i\left(-\frac{\pi}{3}\right)}$

Число $z_1 = 3 + \sqrt{3}i = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ – так: $z_1 = 2\sqrt{3}\cdot e^{i\cdot\frac{\pi}{6}}$

И т.д.

Единственный совет – **не трогаем показатель** экспоненты, там не нужно переставлять множители, раскрывать скобки и т.п. Комплексное число в показательной форме записывается **строго** по форме $z = |z|\cdot e^{i\varphi}$.

Пример 3.

Дано комплексное число $z = 3 + \sqrt{3}i$, найти z^{20}.

Что нужно сделать? Сначала нужно представить данной число в тригонометрической форме.

$$z = 2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Тогда, по формуле Муавра:

$$z^{20} = (2\sqrt{3})^{20}\cdot\left(\cos\left(20\cdot\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(20\cdot\frac{\pi}{6}\right)\right) = (2\sqrt{3})^{20}\cdot\left(\cos\frac{10\pi}{3} + i\sin\frac{10\pi}{3}\right)$$

Не нужно считать на калькуляторе $(2\sqrt{3})^{20}$, а вот угол в большинстве случае следует упростить. Как упростить? Образно говоря, нужно избавиться от лишних оборотов. Один оборот составляет 2π радиан или 360 градусов. Выясним сколько у нас оборотов в аргументе $\frac{10\pi}{3}$. Для удобства делаем дробь правильной: $\frac{10\pi}{3} = 3\frac{1}{3}\pi$, после чего становится хорошо видно, что можно убавить один оборот: $\frac{10\pi}{3} - 2\pi = \frac{4\pi}{3}$. Понятно, что $\frac{10\pi}{3}$ и $\frac{4\pi}{3}$ – это один и тот же угол.

Таким образом, окончательный ответ запишется так:

$$z^{20} = (2\sqrt{3})^{20}\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right).$$

Можно переписать ответ в виде:

$$z^{20} = (2\sqrt{3})^{20}\cdot\left(\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right)$$

(т.е. убавить еще один оборот и получить значение аргумента в стандартном виде).

Хотя $z^{20} = (2\sqrt{3})^{20}\cdot\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$ – ни в коем случае не ошибка.

Пример 4.

Дано комплексное число $z = 1 - \sqrt{3}i$, найти z^{30}. Полученный аргумент (угол) упростить, результат представить в алгебраической форме.

Отдельная разновидность задачи возведения в степень – это возведение в степень чисто мнимых чисел.

Пример 5.

Возвести в степень комплексные числа i^{10}, i^{33}, $(-i)^{21}$

Здесь тоже всё просто, главное, помнить знаменитое равенство.

Если мнимая единица возводится в четную степень, то техника решения такова:
$i^{10} = (i^2)^5 = (-1)^5 = -1$

Если мнимая единица возводится в нечетную степень, то «отщипываем» одно «и», получая четную степень:
$i^{33} = i \cdot i^{32} = i \cdot (i^2)^{16} = i \cdot (-1)^{16} = i \cdot 1 = i$

Если есть минус (или любой действительный коэффициент), то его необходимо предварительно отделить:
$(-i)^{21} = (-1)^{21} \cdot i^{21} = -i \cdot i^{20} = -i \cdot (i^2)^{10} = -i \cdot (-1)^{10} = -i$

Извлечение корней из комплексных чисел.
Квадратное уравнение с комплексными корнями.

<u>Пример 6.</u>

Решить квадратное уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$

Вычислим дискриминант:
$D = 36 - 136 = -100$

Дискриминант отрицателен, и в действительных числах уравнение решения не имеет. Но корень можно извлечь в комплексных числах!
$\sqrt{D} = \pm 10i$

По известным школьным формулам получаем два корня:
$$z_{1,2} = \frac{6 \pm 10i}{2}$$
$z_{1,2} = 3 \pm 5i$ – сопряженные комплексные корни

Таким образом, уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$ имеет два сопряженных комплексных корня:
$z_1 = 3 - 5i$, $z_2 = 3 + 5i$

Теперь вы сможете решить любое квадратное уравнение!

И вообще, любое уравнение с многочленом «энной» степени $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \ldots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ имеет ровно n корней, часть из которых может быть комплексными.

Простой пример для самостоятельного решения:

<u>Пример 7.</u>

Найти корни уравнения $4z^2+1=0$ и разложить квадратный двучлен на множители.

Разложение на множители осуществляется опять же по стандартной школьной формуле.

Как извлечь корень из произвольного комплексного числа?

Рассмотрим уравнение $z^n = w$, или, то же самое: $z=\sqrt[n]{w}$. Здесь «эн» может принимать любое натуральное значение, которое больше единицы. В частности, при $n=2$ получается квадратный корень $z=\sqrt{w}$

Уравнение вида $z=\sqrt[n]{w}$ имеет ровно n корней $z_0, z_1, z_2, \dots z_{n-1}$, которые можно найти по формуле:

$z_k=\sqrt[n]{|w|}\cdot\left(\cos\left(\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)+i\sin\left(\dfrac{\varphi+2\pi k}{n}\right)\right)$, где $|w|$ – это модуль комплексного числа w, φ – его аргумент, а параметр k принимает значения: $k=\{0;1;2;\dots;n-1\}$

Пример 8.

Найти корни уравнения $z^2=1+\sqrt{3}i$

Перепишем уравнение в виде $z=\sqrt{1+\sqrt{3}i}$

В данном примере $w=1+\sqrt{3}i$, $n=2$, поэтому уравнение будет иметь два корня: z_0 и z_1. Общую формулу можно сразу немножко детализировать:

$z_k=\sqrt{|w|}\cdot\left(\cos\left(\dfrac{\varphi+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\varphi+2\pi k}{2}\right)\right)$, $k=\{0;1\}$

Теперь нужно найти модуль и аргумент комплексного числа $w=1+\sqrt{3}i$:

$|w|=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$

Число w располагается в первой четверти, поэтому:

$\varphi=arctg\dfrac{\sqrt{3}}{1}=arctg\sqrt{3}=\dfrac{\pi}{3}$

Напоминаю, что при нахождении тригонометрической формы комплексного числа всегда желательно сделать чертеж.

Еще более детализируем формулу:

$$z_k=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\dfrac{\dfrac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\dfrac{\pi}{3}+2\pi k}{2}\right)\right),\ k=\{0;1\}$$

На чистовик так подробно оформлять, конечно, не нужно, это сделано мной для того, чтобы вам было понятно, откуда что взялось.

Подставляя в формулу значение $k=0$, получаем первый корень:

$$z_0=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{2}\right)\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Подставляя в формулу значение $k=1$, получаем второй корень:

$$z_1=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{2}\right)\right)=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

Ответ: $z_0=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$, $z_1=\sqrt{2}\cdot\left(\cos\frac{7\pi}{6}+i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$

При желании или требовании задания, полученные корни можно перевести обратно в алгебраическую форму.

Пример 9: ***Решение:***

$$z_1+z_2=5+2i+2-5i=7-3i$$

$$z_1-z_2=5+2i-(2-5i)=5+2i-2+5i=3+7i$$

$$z_1\cdot z_2=(5+2i)\cdot(2-5i)=10+4i-25i+10=20-21i$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{5+2i}{2-5i}=\frac{(5+2i)(2+5i)}{(2-5i)(2+5i)}=\frac{10+4i+25i-10}{4+25}=\frac{29i}{29}=i$$

Пример 10: ***Решение:***

Представим в тригонометрической форме число $z_1=3+\sqrt{3}i$*. Найдем его модуль и аргумент.* $|z_1|=\sqrt{3^2+(\sqrt{3})^2}=\sqrt{9+3}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}$*. Поскольку* $a>0$ *(случай 1), то* $\arg z_1=arctg\frac{b}{a}=arctg\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{\pi}{6}$*. Таким образом:* $z_1=2\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ *– число* z_1 *в тригонометрической форме.*

Представим в тригонометрической форме число $z_3=-2-2i$*. Найдем его модуль и аргумент.* $|z_3|=\sqrt{(-2)^2+(-2)^2}=\sqrt{4+4}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$*. Поскольку* $a<0, b<0$ *(случай 3), то* $\arg z_3=-\pi+arctg\frac{b}{a}=-\pi+arctg\frac{-2}{-2}=-\pi+arctg1=-\pi+\frac{\pi}{4}=-\frac{3\pi}{4}$*. Таким образом:* $z_3=2\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right)\right)$ *– число* z_3 *в тригонометрической форме.*

Пример 11: ***Решение:*** *Представим число в тригонометрической форме:*

$z = 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right)$. *Используем формулу Муавра* $z^n = |z|^n\cdot(\cos(n\varphi)+i\sin(n\varphi))$:

$$z^{30} = 2^{30}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\cdot 30\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\cdot 30\right)\right) = 2^{30}(\cos(-10\pi)+i\sin(-10\pi)) =$$

$$= 2^{30}(\cos 0+i\sin 0) = 2^{30}(1+i\cdot 0) = 2^{30}$$

Пример 12: ***Решение:***

$$(-2i)^7 = (-2)^7\cdot i^7 = -128\cdot i\cdot i^6 = -128i\cdot(i^2)^3 = -128i\cdot(-1)^3 = 128i$$

$$\left(\frac{i}{2}\right)^8 = \frac{i^8}{2^8} = \frac{(i^2)^4}{256} = \frac{(-1)^4}{256} = \frac{1}{256}$$

Пример 13: ***Решение:***

$$4z^2 = -1$$

$$z^2 = -\frac{1}{4}$$

$$z_1 = -\frac{i}{2},\ z_2 = \frac{i}{2}$$

Разложим квадратный двучлен на множители:

$$4z^2+1 = 4\left(z+\frac{i}{2}\right)\left(z-\frac{i}{2}\right) = (2z+i)(2z-i)$$

Самостоятельная работа.

Вариант – 1.

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а) $z = 5i$;
б) $z = 1 + i$.

2. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а) $z = 3(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$;
б) $z = 5(\cos\frac{11\pi}{6}+i\sin\frac{11\pi}{6})$.

3. Даны комплексные числа $z_1 = 3(\cos 330^\circ + i\sin 330^\circ)$ и $z_2 = 2(\cos 60^\circ + i\sin 60^\circ)$.

Найти: а) $z_1\cdot z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) z_2^4; г) $\sqrt[3]{z_1}$.

Вариант – 2.

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а) $z = -6$;
б) $z = 1 - i$.

2. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а) $z = 2{,}5(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2})$;

б) $z = 8(\cos\frac{15\pi}{4}+i\sin\frac{15\pi}{4})$.

3. Даны комплексные числа $z_1 = 3\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$ и $z_2 = 5(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2})$.

Найти: а) $z_1 \cdot z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) z_2^4; г) $\sqrt[3]{z_1}$.

Вариант – 3.

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а) $z = -2 - 2i$;

б) $z = 3$.

2. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а) $z = 10(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3})$;

б) $z = 8(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4})$.

3. Даны комплексные числа $z_1 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$ и $z_2 = 5(\cos\pi + i\sin\pi)$.

Найти: а) $z_1 \cdot z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) z_2^4; г) $\sqrt[3]{z_1}$.

Вариант – 4.

1. Записать комплексные числа в тригонометрической и в показательной формах:

а) $z = -2i$;

б) $z = -3\sqrt{3} + 3i$.

2. Представьте в алгебраической и показательной формах комплексные числа:

а) $z = 4(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2})$;

б) $z = (\cos\pi+i\sin\pi)$.

3. Даны комплексные числа $z_1 = 0{,}5\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$ и $z_2 = 2(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6})$.

Найти: а) $z_1 \cdot z_2$; б) $\frac{z_1}{z_2}$; в) z_2^4; г) $\sqrt[3]{z_1}$.

Контрольные вопросы по теме.

1. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?
   Как записывается комплексное число в показательной форме? Формула Эйлера.
2. Сформулируйте правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и обратно.
3. Сформулируйте правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к показательной и обратно.
4. Как перейти от тригонометрической формы комплексного числа к показательной и обратно.
5. Как умножаются комплексные числа, записанные в тригонометрической форме.
6. Как умножаются комплексные числа, записанные в показательной форме?
7. Сформулируйте правило деления комплексных чисел в тригонометрической форме.
8. Сформулируйте правило деления комплексных чисел в показательной форме.
9. Как возвести в степень комплексное число, записанное в тригонометрической форме.
10. Как возвести в степень комплексное число, записанное в показательной форме?

11. Сформулируйте правило извлечения корня n –й степени из комплексного числа, записанного в тригонометрической форме.
12. Сформулируйте правило извлечения корня n –й степени из комплексного числа, записанного в показательной форме.
13. Сколько значений имеет корень n-й степени из комплексного числа?

Практическая занятие № 4.

<u>Тема</u>: Нахождение производных элементарных и сложных функций. Вычисление производных и дифференциалов высших порядков.

<u>Цель</u>: Проверить на практике знание понятия производной функции, умение находить производные элементарных функций, сложных функций, пользуясь таблицей производных и правилами дифференцирования, понятием сложная функция. Закрепить навык нахождения производной и дифференциалов высшего порядка.

Обеспечение практического занятия:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Задачи:

• развитие творческого профессионального мышления;
• познавательная мотивация;
• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
• углубление теоретической и практической подготовки;
• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Ход практического занятия.

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;
2.Проверка готовности студентов к занятию;
3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:
› Изучить теоретический материал по теме «Нахождение производных элементарных и сложных функций. Вычисление производных и дифференциалов высших порядков.»
› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.
› Выполнить самостоятельную работу №5.
› Ответить на контрольные вопросы.

Теоретический материал и примеры нахождения производной элементарных функций, сложной функции, производных и дифференциалов высших порядков

Определение: Производной функции f(x) ($f'(x_0)$) в точке x_0 называется число, к которому стремится разностное отношение $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$ при Δx, стремящемся к нулю.

Производные элементарных функций.

f(x)	f'(x)
c – const	0
x^{α}	$\alpha x^{\alpha - 1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\mathrm{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$

Правила дифференцирования.

Если у функций f(x) и g(x) существуют производные, то

$$1)\ (f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$$
$$2)\ (cf(x))' = c \cdot f'(x),\ \text{где}\ c - const$$
$$3)\ (f(x) \cdot g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$$
$$4)\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$$

Производная сложной функции

Теперь можно установить важное в практических приложениях правило, позволяющее вычислить производную сложной функции, если известны производные составляющих ее функций.

Теорема 7.3.1. *Пусть задана сложная функция* $z = F(x) = f(\varphi(x))$*; функция* φ *имеет производную в точке* x_0*, а функция* f *имеет производную в точке* $y_0 = \varphi(x_0)$*. Тогда функция* F *имеет производную в точке* x_0 *и*

$$F'(x_0) = f'(y_0)\varphi'(x_0).$$

Доказательство. Так как функция $z = f(y)$ дифференцируема в точке y_0, то

$$\Delta z(\Delta y) = f'(y_0)\Delta y + \varepsilon(\Delta y)\Delta y,$$

где $\varepsilon(\Delta y) \to 0$ при $\Delta y \to 0$. Если положить $\varepsilon(0) = 0$, то функция $\varepsilon(\Delta y)$ непрерывна в точке $\Delta y = 0$.

Придадим переменной x в точке x_0 малое приращение Δx; оно влечет приращение зависимой переменной z: $\Delta z(\Delta y(\Delta x))$. Итак,

$$\Delta F(x_0) = \Delta z(\Delta y(\Delta x)) = f^{'}(y_0)\Delta y(\Delta x) + \varepsilon(\Delta y(\Delta x))\Delta y(\Delta x).$$

Разделив на $\Delta x \neq 0$, получим

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = f^{'}(y_0)\frac{\Delta y(\Delta x)}{\Delta x} + \varepsilon(\Delta y(\Delta x))\frac{\Delta y(\Delta x)}{\Delta x}. \qquad (7.3.1)$$

Так как существует $\varphi^{'}(x_0)$, то функция $\varphi(x)$ непрерывна в точке x_0 и, следовательно, $\Delta y(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$ и так как $\Delta y(0) = 0$, то функция $\Delta y(\Delta x)$ непрерывна в точке $\Delta x = 0$. Отсюда сложная функция, как суперпозиция непрерывных функций $\varepsilon(\Delta y(\Delta x))$, непрерывна в точке $\Delta x = 0$.

Теперь, переходя к пределу в (7.3.1) при $\Delta x \to 0$, получим

$$F^{'}(x_0) = f^{'}(y_0)\varphi^{'}(x_0).$$

Пример. $z = F(x) = e^{\sin x}$,

$$F(x) = f(\varphi(x)), z = e^y = f(y), y = \varphi(x) = \sin x.$$

Тогда

$$F^{'}(x) = e^y(\sin x)^{'} = e^{\sin x}\cos x.$$

Пример. Найдем дифференциал функции $z = \arcsin \ln(x^2 + a^2)$:

$$
\begin{aligned}
dz &= \frac{d \ln(x^2 + a^2)}{\sqrt{1 - \ln^2(x^2 + a^2)}} = \\
&= \frac{d(x^2 + a^2)}{\sqrt{1 - \ln^2(x^2 + a^2)}\,(x^2 + a^2)} = \\
&= \frac{2x dx}{\sqrt{1 - \ln^2(x^2 + a^2)}\,(x^2 + a^2)}.
\end{aligned}
$$

Производные высших порядков

Если функция $f(x)$ дифференцируема при всех $x \in (a;b)$, то мы можем рассмотреть функцию $f' : (a;b) \to \mathbb{R}$, сопоставляющую каждой точке x значение производной $f'(x)$. Эта функция f' называется производной функции f, или *первой производной* от f. (Иногда саму исходную функцию f называют *нулевой производной* и обозначают тогда $f^{(0)}$.) Функция $g_1(x) = f'(x)$, в свою очередь, может иметь производную во всех (или некоторых) точках x интервала $(a;b)$, которую мы обозначим $g_1'(x) = f''(x)$ и назовём *второй производной* функции $f(x)$. Если предположить, что вторая производная $g_2(x) = f''(x)$ существует во всех точках $x \in (a;b)$, то она может также иметь производную $g_2'(x) = f'''(x)$, называемую *третьей производной* функции $f(x)$, и т. д. Вообще, n-*й производной* функции $f(x)$ называется производная от предыдущей, $(n-1)$-й производной $g_{n-1}(x) = f^{(n-1)}(x)$:

$$f^{(n)}(x) = g_{n-1}'(x) = (f^{(n-1)}(x))',$$

если эта производная существует. n-я производная называется также *производной* n*-го порядка*, а её номер n называется *порядком производной*.

При $n = 1; 2; 3$ первую, вторую и третью производные принято обозначать штрихами: $f'(x), f''(x), f'''(x)$ или y', y'', y'''; при прочих n -- числом в скобках в верхнем индексе: $f^{(4)}(x), f^{(5)}(x), \dots$ или $y^{(4)}, y^{(5)}, \dots$.

Физический смысл производной второго порядка проясняется из того, что если первая производная $f'(x)$ задаёт мгновенную скорость изменения значений $f(x)$ в момент времени x, то вторая производная, то есть производная от $f'(x)$, задаёт мгновенную скорость изменения значений мгновенной скорости, то есть *ускорение* значений $f(x)$. Следовательно, третья производная -- это скорость изменения ускорения (или, что то же самое, ускорение изменения скорости, поскольку, как очевидно следует из определения, $(f''(x))' = (f'(x))''$).

Пример 1. Найдём вторую производную функции $f(x) = \sin^3 x$. Первая производная равна

$$f'(x) = (\sin^3 x)' = 3\sin^2 x \cos x;$$

далее находим

$$f''(x) = 3(\sin^2 x \cos x)' = 3(2\sin x \cos^2 x - \sin^3 x) = 3\sin x(2\cos^2 x - \sin^2 x).$$

Пример 2. Пусть $y = f(x) = e^{kx}$. Тогда

$$y' = e^{kx} \cdot k = ke^{kx}; y'' = k(e^{kx})' = ke^{kx} \cdot k = k^2 e^{kx}; \dots; y^{(n)} = k^n e^{kx}; \dots.$$

При $k = 1$ все производные оказываются равными исходной функции: $(e^x)^{(n)} = e^x.$

Пример 3. Рассмотрим функцию $y = f(x) = \sin x$. Тогда

$$y' = \cos x,\ y'' = -\sin x,\ y''' = -\cos x,\ y^{(4)} = \sin x.$$

Поскольку четвёртая производная $y^{(4)}$ совпала с исходной функцией y, то далее значения производных начнут повторяться с шагом 4: при $k = 0; 1; 2; \dots$ получаем

$$y^{(4k)}(x) = \sin x; y^{(4k+1)}(x) = \cos x; y^{(4k+2)}(x) = -\sin x; y^{(4k+3)}(x) = -\cos x.$$

Заметим также, что

$$y' = \cos x = \sin(x + \frac{\pi}{2}),$$

$$y'' = -\sin x = \sin(x + 2\frac{\pi}{2}),$$

$$y''' = -\cos x = \sin(x + 3\frac{\pi}{2}),$$

$$y^{(4)} = \sin x = \sin(x + 4\frac{\pi}{2}).$$

Легко видеть, что имеет место общая формула:

$$y^{(n)} = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + n\frac{\pi}{2}).$$

Дифференциалы высших порядков.

Напомним, что дифференциал функции $f(x)$ (называемый также *первым дифференциалом*, или *дифференциалом первого порядка*) задаётся формулой

$$df(x; dx) = f'(x)dx.$$

Рассмотрим это выражение (при фиксированном приращении dx аргумента x) как функцию переменного x и найдём её дифференциал $d(df(x; dx)) = d^2 f(x; dx)$:

$$d^2 f(x; dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Этот дифференциал от первого дифференциала называется *вторым дифференциалом* от функции $f(x)$, или *дифференциалом второго порядка*. Аналогично, дифференциал от второго дифференциала называется *третьим дифференциалом*; он задаётся формулой

$$d^3 f(x; dx) = (f''(x)(dx)^2)'dx = f'''(x)(dx)^3.$$

Вообще, n*-й дифференциал* $d^n f(x; dx)$, или *дифференциал* n*-го порядка*, определяется как дифференциал от $(n-1)$-го дифференциала (при постоянном приращении dx); для него имеет место формула:

$$d^n f(x; dx) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Примеры.

1. Найти значение производной функции

$y = \sin(4x - \frac{\pi}{6})$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{12}$

Решение.

Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = \left(\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)\right)' = \left(4x - \frac{\pi}{6}\right)' \cdot \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$$
$$y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

<u>Примеры</u>.

1.Если $y = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$, то $y' = (3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}})' = 3(x^{-1/2})' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}$.

2.$y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$. Найдем $y'(-1)$.

$y' = 3x^2 - 6x + 5$. Следовательно, $y'(-1) = 14$.

3.$y = \ln x \cdot \cos x$, то $y' = (\ln x)' \cos x + \ln x (\cos x)' = 1/x \cdot \cos x - \ln x \cdot \sin x$.

4. $y = \frac{x^3}{\cos x}$, $y' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}$.

$$y = tgx,$$
$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

Контрольные вопросы по теме.

1. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?
2. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает?
3. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.

4. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируйте зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
5. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?
6. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
7. Выпишите в таблицу основные правила и формулы дифференцирования функций.
8. Повторите определение сложной функции. Как найти ее производную?
9. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
10. В чем заключается механический смысл производной?
11. Что называется производной второго порядка и, каков ее механический смысл?
12. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?

Самостоятельная работа .

Вариант – 1.

1. Найдите производную следующих функций:

а) $y = x^2 + 4x + 3;$

б) $y = \frac{6}{x} + 2\sqrt{x};$

в) $y = \frac{x^6 - 4x + 1}{x};$

г) $y = \frac{3x - 4}{3};$

д) $y = \frac{3x - 4}{7 - 2x};$

е) $y = 3sin2x;$

ж) $y = \sqrt{x^2 - 4x};$

з) $y = (3 + 2x)(2x - 3), y'(0{,}25) - ?$

2. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

а) $y = x^3;$

б) $y = cos^2x;$

в) $y = \ln(3x^2 - 2x + 5).$

Вариант – 2.

1. Найдите производную следующих функций:

а) $y = x^6 - 3x + 8;$

б) $y = 4\sqrt{x} - \frac{2}{x};$

в) $y = \frac{x^5 - 3x^2 + 2}{x};$

г) $y = \frac{8 - 6x}{5};$

д) $y = \frac{5x + 2}{x - 3};$

е) $y = 5cos3x;$

ж) $y = \sqrt{3x - x^2}$;
з) $y = (x^2 - 3)(x^2 + 3), y'(\frac{1}{2}) - ?$

2. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

а) $y = sinx$;
б)$y = (5x + 2)^4$;
в) $y = 10^{5-3x}$.

Вариант – 3.

1. Найдите производную следующих функций:

а) $y = 3x^4 - 6x^2 + 5$;
б) $y = \frac{4}{x} + 4\sqrt{x}$;
в) $y = \frac{x^3 - 9x^2 + 5}{x}$;
г) $y = \frac{6x^2 - 7x}{3}$;
д) $y = \frac{5x+1}{3-2x}$;
е) $y = 2tg5x$;
ж) $y = \sqrt{8x - 7}$;
з)) $y = (4x - 1)(4x + 1), y'(0{,}25) - ?$

2. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

а) $y = x^4$;
б) $y = \sqrt{1 + cosx}$;
в) $y = xlnx$.

Вариант – 4.

1. Найдите производную следующих функций:

а) $y = x^7 - 4x^2 + 9$;
б) $y = 6\sqrt{x} - \frac{5}{x}$;
в) $y = \frac{4x + 523}{4}$;
г) $y = \frac{3x^2 - x + 1}{x}$;
д) $y = \frac{3+7x}{4-x}$;
е) $y = 5sin6x$;
ж) $y = \sqrt{3x - 1}$;
з) $y = (2x + 1)(2x - 1), y'(3) - ?$

2. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

а) $y = 2^x$;
б) $y = arcsin\frac{x}{2}$;

в) $y = \sqrt{1 + \sqrt[5]{x}}$.

Практическая занятие № 5.

Тема: Исследование функций и построение их графиков.

Цель: Проверить на практике умение находить промежутки возрастания и убывания функции, экстремумы, промежутки выпуклости, точки перегиба, асимптоты функции, применять полученные знания при построении графика функции и исследовании функции по общей схеме.

Задачи:

- развитие творческого профессионального мышления;
- познавательная мотивация;
- овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
- овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
- углубление теоретической и практической подготовки;
- развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Обеспечение практического занятия:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Ход практического занятия.

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;

2.Проверка готовности студентов к занятию;

3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

› Изучить теоретический материал по теме «Исследование функций и построение их графиков.»

› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.

› Выполнить самостоятельную работу №6.

› Ответить на контрольные вопросы.

Теоретический материал и примеры применения производной к исследованию функции.

Общая схема исследования функции и построения её графика.

1. Находят область определения функции;
2. Проверяют функцию на четность и нечетность (заметим, что графики четных функций симметричны относительно оси (ОУ), а нечетных – относительно начала координат); проверяют функцию на периодичность;

3. Находят точки пересечения графика с координатными осями (ось OX имеет уравнение $y=0$, ось ОУ имеет уравнение $x=0$);
4. Находят асимптоты графика функции;
5. Исследуют функцию на монотонность и находят точки экстремума;
6. Находят интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба;
7. Строят график.

Для применения данной схемы, вспомним некоторые основные понятия и определения. Прямая $y=kx+b$ называется ***наклонной асимптотой*** для графика функции $y=f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x)-kx-b)=0$ (1)

Числа k и b в уравнении асимптоты находятся из условий:

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx) \qquad (2)$$

Если $k=0$, то прямая $y{=}b$ называется ***горизонтальной асимптотой***.

Прямая $x=a$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y=f(x)$, если

$$\lim_{x\to a-0} f(x)=\infty \quad \textit{или} \quad \lim_{x\to a+0} f(x)=\infty.$$

Заметим, что при нахождении вертикальных асимптот графика функции $y=f(x)$ в качестве точки a, через которую может проходить вертикальная асимптота, следует рассматривать точку разрыва данной функции.

Правило нахождения интервалов монотонности и точек экстремума:

1. Найти область определения функции.
2. Вычислить производную функции $f'(x)$;
3. Найти критические точки функции, т.е. точки в которых $f'(x)=0$ или не существует;
4. Исследовать знак производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции этими критическими точками;
5. Если в рассматриваемом интервале

   $f'(x)\prec 0$, то на этом интервале функция убывает;

   $f'(x)\succ 0$, то на этом интервале функция возрастает.
6. Если x_0 - критическая точка и при переходе через нее $f'(x)$ меняет знак с «+» на « - », то x_0 - точка максимума; если же она меняет знак с « - » на «+», то x_0 - точка минимума.

Правило нахождения интервалов выпуклости графика функции и точек перегиба:

1. Вычислить вторую производную функции $f''(x)$;
2. Найти у функции критические точки 2-го рода, т.е. точки в которых $f''(x)=0$ или не существует;
3. Исследовать знак второй производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции критическими точками 2-го рода;
4. Если в рассматриваемом интервале

   $f''(x) \prec 0$, то на этом интервале график функции выпуклый вверх;

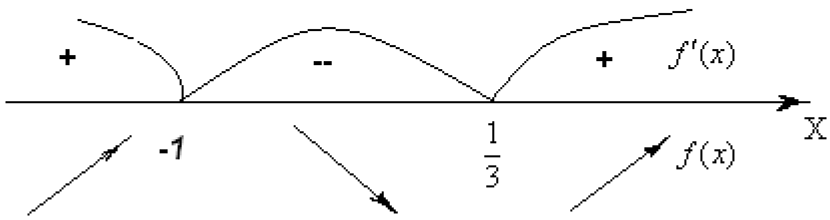
   $f''(x) \succ 0$, то на этом интервале график функции выпуклый вниз;

5. Если x_0 - критическая точка 2-го рода и при переходе через нее $f''(x)$ меняет знак, то x_0 - точка перегиба.

Пример 1: Исследовать функцию $y = x^3 + x^2 - x - 1$ и построить ее график.

Решение: исследуем функцию по схеме:

1. D(y)=R;
2. $y(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - (-x) - 1 = -x^3 + x^2 + x - 1 = -(x^3 - x^2 - x + 1)$ - функция не будет ни четной, ни нечетной; функция непериодическая;
3. Найдем точки пересечения с (ОХ): $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$. Перебирая делители свободного члена, находим целые нули функции: $x = -1 \quad и \quad x = 1$.
   Найдем точки пересечения графика функции с осью (ОУ): если $x = 0$, то $y = -1$;
4. Асимптот нет;
5. Для нахождения интервалов монотонности функции найдем ее производную: $y' = 3x^2 + 2x - 1$. Найдем критические точки функции: $y' = 3x^2 + 2x - 1 = 0$. Получим: $x_1 = -1 \quad и \quad x_2 = \frac{1}{3}$. Найдем интервалы возрастания и убывания функции:



Из чертежа имеем, что функция возрастает на $(-\infty;-1)\ и\ (\frac{1}{3};+\infty)$, убывает на $(-1;\frac{1}{3})$. Найдем экстремумы функции:

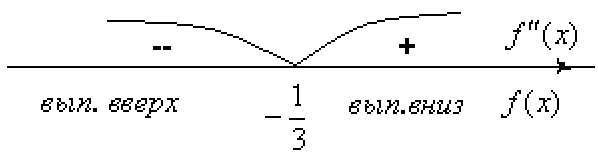
$\max f(x) = f(-1) = 0$. Значит, точка максимума имеет координаты $(-1;\ 0)$

$\min f(x) = f(\frac{1}{3}) = -1\frac{5}{27}$. Значит, точка минимума имеет координаты $(\frac{1}{3};-1\frac{5}{27})$

6. Для нахождения интервалов выпуклости графика функции вычислим вторую производную: $y'' = 6x + 2$. Найдем критические точки 2 рода функции:

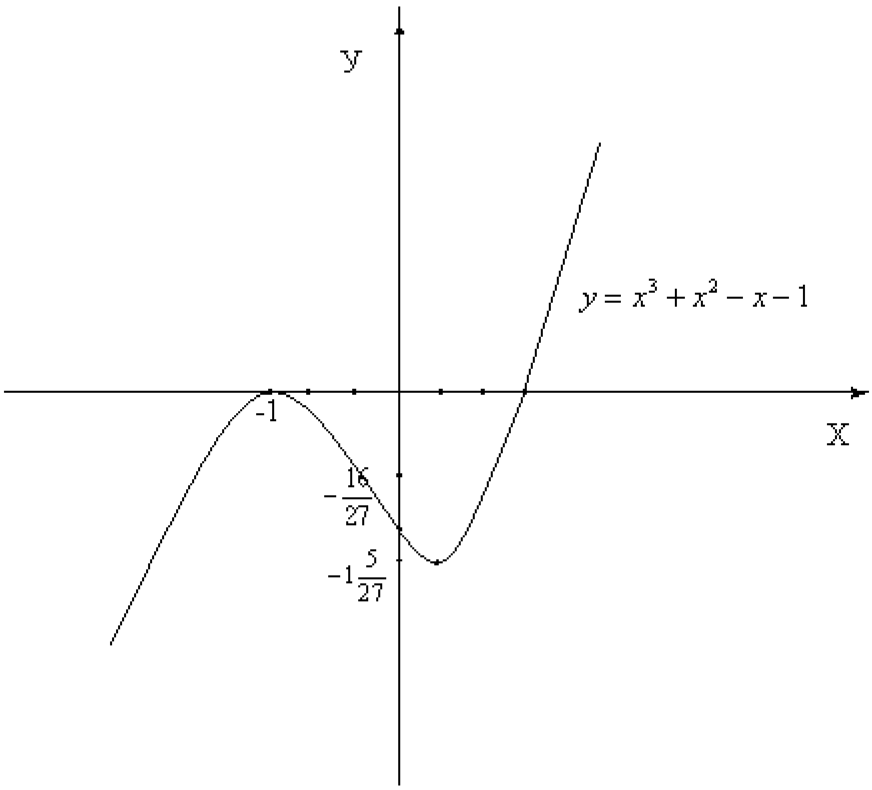
$6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$. Определим знак второй производной в интервалах, на которые разбивается область определения

19



Значит, график функции будет выпуклым вверх на $(-\infty;-\frac{1}{3})$ и выпуклым вниз на $(-\frac{1}{3};+\infty)$. Т.к. вторая производная меняет знак при переходе через точку $x = -\frac{1}{3}$, то в ней график будет иметь перегиб. Вычислим: $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{16}{27}$. Значит, точка перегиба $(-\frac{1}{3};-\frac{16}{27})$.

7. Построим график:



Пример 2. Построить график функции у = $\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Решение:

1. Найдем область определения функции. Она задается условиями $x \neq 1$, $x \neq -1$ (при значениях $x \neq 1$, $x \neq -1$ знаменатель дроби обращается в нуль). Итак,

D(*f*)=(-∞;1)(-1:1)(1;+∞).

2. Исследуем функцию на честность:

$$f\,(-x) = \frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1} = \frac{x^2+1}{x^2-1} = f(\text{x})$$

Значит, заданная функция четна, ее график симметричен относительно оси ординат, а потому можно для начала ограничиться построением ветвей графика при $x \geq 0$.

3. Точек пересечения графика функции с осью ОХ нет,

Найдем точки пересечения графика функции с осью ОУ: если $x = 0$ *то* $y = -1$

20

4. Найдем асимптоты графика. Вертикальной асимптотой является прямая x = 1, поскольку при этом значении x знаменатель дроби обращается в нуль, а числитель отличен от нуля. Для отыскания горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{x^2}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}}{\dfrac{x^2}{x^2}-\dfrac{1}{x^2}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{1-\dfrac{1}{x^2}} = 1.$$

Значит, y = 1 – горизонтальная асимптота графика функции.

5. Найдем критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции:

$$y'\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)' = \frac{\left(x^2+1\right)'\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2} = \frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

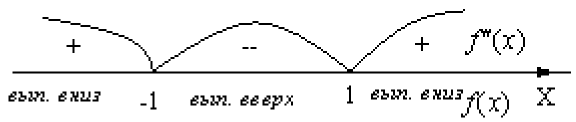
Критические точки найдем из соотношения $y' = 0$. Получаем $-4x = 0$, откуда находим, что $x = 0$. При $x < 0$ имеем $y' > 0$, а при $x > 0$ имеем $y' < 0$. Значит, x = 0 – точка максимума функции, причем $y_{max} = f(0) = \dfrac{0^2+1}{0^2-1} = -1.$

При $x > 0$ имеем $y' < 0$, но следует учесть наличие точки разрыва x = 1. Значит, вывод о промежутках монотонности будет выглядеть так: на промежутке [0;1) функция убывает, на промежутке (1;+∞) функция также убывает.

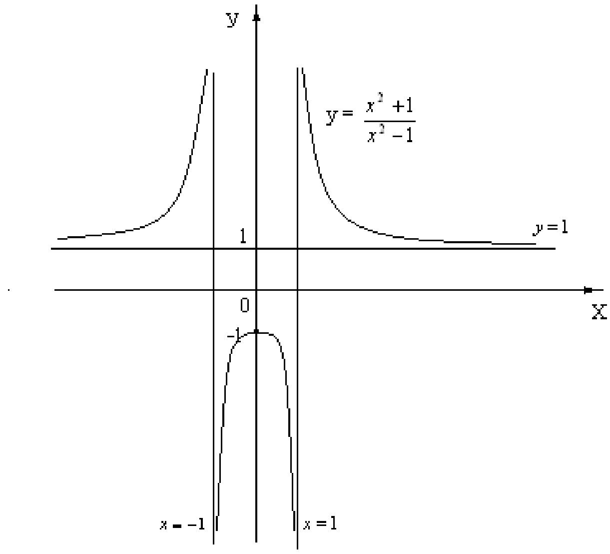
6. Вычислим вторую производную

$$f''(x) = \left(\frac{-4x}{(x^2-1)^2}\right)' = \frac{-4(x^2-1)^2 + 4x \cdot 2(x^2-1) \cdot 2x}{(x^2-1)^4} = \frac{-4(x^2-1) + 16x^2}{(x^2-1)^3} = \frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

$f''(x)$ нигде не обращается в ноль, критическими точками будут только точки $x = \pm 1$. Определим знак $f''(x)$ в интервалах:



7. Отметим (0;-1) – точку максимума, построим прямые y = 1 – горизонтальную асимптоту, что x = 1 и x = - 1– вертикальные асимптоты,



Самостоятельная работа №6.

Вариант – 1.

1. Найти промежутки монотонности функции $y = e^x - x$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 6x^2$+9x+3.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3$ на промежутке $[2; 3]$.
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$.

Вариант – 2.

1. Найти промежутки монотонности функции $y = \frac{2x}{e^x}$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = -x^3 - 3x^2$+24x-4.

3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 1$ на промежутке $[-1; 2]$.
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции
$y = x^4 - 10x^3 + 36x^2 - 100$.

Вариант – 3.

1. Найти промежутки монотонности функции $y = 2xe^x$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 3x^2$-9x-4.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = -x^3 - 3x^2 + 9x - 2$ на промежутке $[-2; 2]$.
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции
$y = x^4 - 8x^3 + 18x^2 - 48x + 31$.

Вариант – 4.

1. Найти промежутки монотонности функции $y = e^{\frac{1}{x}} + 1$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = -x^3 + 6x^2$+15x+1.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 3x^2 - 9x - 4$ на промежутке $[-4; 4]$.
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции
$y = x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 10$.

Расчетно-графическая работа.

Исследуйте и постройте график данной функции.

Вариант – 1.

$y = 2x^3 - 6x + 5$.

Вариант – 2.

$y = x^3 - x^2 - x + 3$.

Вариант – 3.

$y = x^4 - 10x^2 + 9$.

Вариант – 4.

$$y = -x^4 + 2x^2 + 3.$$

Контрольные вопросы по теме.

5. Повторите определения возрастающей и убывающей функций. В чем заключается признак возрастания и убывания функций?
6. В чем заключаются необходимый и достаточный признаки существования экстремума? Перечислите порядок операций для отыскания максимума и минимума функции с помощью первой производной.
7. В чем различие между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее наибольшего и наименьшего значений?
8. Как пишется наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке?
9. Как определяются геометрически и по знаку второй производной выпуклость и вогнутость кривой?
10. Что называется точкой перегиба и каковы необходимый и достаточный признаки ее существования? Сформулируйте правило нахождения точки перегиба.
11. Какой схемой рекомендуется пользоваться при построении графика функции?

Практическая занятие № 6.

Тема: **Приложения определённого интеграла в геометрии. Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов.**

Цель: Проверить на практике понятие определённого интеграла, умение вычислять определённый интеграл по формуле Ньютона-Лейбница. Умение вычислять площадь фигур с помощью определенных интегралов. Закрепление умений и навыков решения прикладных задач с помощью определённого интеграла.

Задачи:

• развитие творческого профессионального мышления;
• познавательная мотивация;
• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
• углубление теоретической и практической подготовки;
• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Обеспечение практического занятия:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Ход практического занятия.

1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;
2.Проверка готовности студентов к занятию;
3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:
› Изучить теоретический материал по теме «Приложения определённого интеграла в геометрии. Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов.»

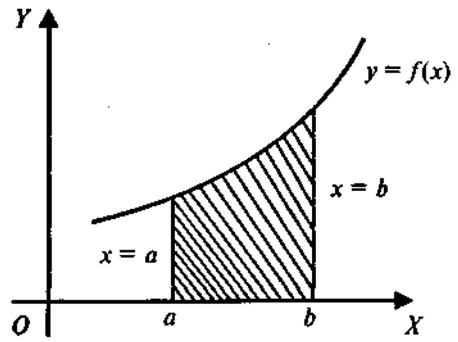
› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.
› Выполнить самостоятельную работу №7.
› Ответить на контрольные вопросы.

Теоретический материал и примеры вычисления определённого интеграла.

Геометрический смысл определённого интеграла

Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f\ (x)$, где $f\ (x) > 0$, осью OX и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1), выражается определённым интегралом:

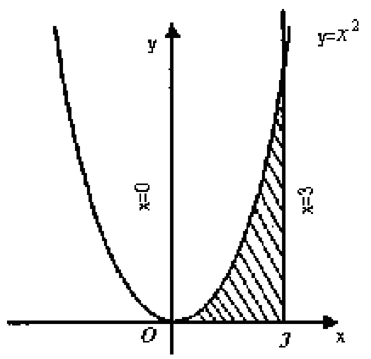
$$S = \int_a^в f(x)dx$$



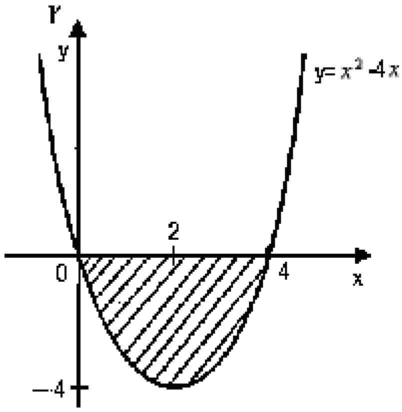
Примеры:

1. Определить площадь S фигуры, заключённой между ветвью кривой $y = x^2$, осью OX и прямыми $x = 0, x = 3$ (рис.2).

Решение: $S = \int_0^3 x^2 dx = \left.\frac{x^3}{3}\right| = 9(кв.ед.)$



2) Найти площадь S фигуры, заключённой между осью OX и кривой $y = x^2 - 4x$ (рис.3)



36

Решение: рассмотрим точки пересечения кривой $y = x^2 - 4x$ с осью OX:

$y = 0$; $\Leftrightarrow$ $x^2 - 4x = 0$ $\Leftrightarrow$ $x\,(x - 4) = 0$; $\Leftrightarrow$ $x_1 = 0$ или $x_2 = 4$.

Найдём производную функции $y' = 2x - 4$, и точки экстремума:

$y' = 0$ $\Leftrightarrow$ $2x - 4 = 0$; $\Leftrightarrow$ $x = 2$; $y'' = 2 > 0$; $\Leftrightarrow$ $x = 2$ – точка *min*; $y(2) = -4$.

Искомая площадь ограничена сверху осью *OX* , снизу графиком функции $y = x^2 - 4x$, слева прямой $x = 0$, справа прямой $x = 4$. Так как на отрезке $[0; 4]$ $y < 0$, то

$$S = \left|\int_0^4 \left(x^2 - 4x\right)dx\right| = \left|\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\Big|_0^4\right| = \left|\frac{64}{3} - 32\right| = \left|21\frac{1}{2} - 32\right| = \left|-10\frac{2}{3}\right| = 10\frac{2}{3} \text{ (кв.ед.)}$$

3) Найти площадь фигуры, заключённой между линиями $y = x^3$, $x = -1$. $x = 2$ и осью *OX*

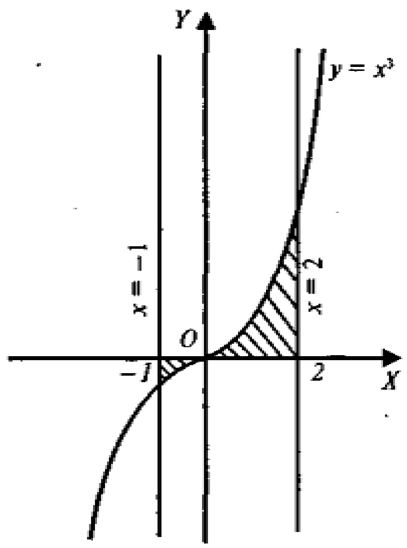


рис.4

Решение: найдем точки пересечения графика функции $y = x^3$ с осью OX(см. рис 4):

$y = x^3$; $y = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$; Вычислим производную функции: $y' = 3x^2$; $y' = 0$ $\Leftrightarrow$ $x = 0$. Найдем значение второй производной в точке $x=0$: $y'' = 6x$; $y''(0) = 0$. Вычислим *y"(-1) = -=6*; *y"(1) = 6*; $\Leftrightarrow$ Т.к. *y"* меняет знак при переходе через *x =0* $\Leftrightarrow$ т. *(0;0)* – точка перегиба. Искомая площадь состоит из двух частей, поэтому:

$$S = \int_0^2 x^3 dx + \left|\int_{-1}^0 x^3 dx + \right| = \frac{x^4}{4}\Big|_0^2 + \left|\frac{x^4}{4}\Big|_{-1}^0\right| = 4 + \left|0 - \frac{1}{4}\right| = 4\frac{1}{4} \ (кв.ед.)$$

3. Расчетно-графическая работа

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями. Выполните рисунок.

Вариант – 1.

1. $y = -x^2 + 4; y = 0.$
2. $y = sinx; x = 0; y = 0.$
3. $y = x^2; y = 9.$

Вариант – 2.

1. $y = x^2 + 3; x = 0; x = 2;\ y = 0.$
2. $y = cosx; x = 0; x = \frac{\pi}{4}; y = 0.$
3. $y = -x^2 + 6; y = 2.$

Вариант – 3.

1. $y = x^2 - 2x; x = 2; x = 4;\ y = 0.$
2. $y = sinx; x = \frac{\pi}{6}; x = 3; y = 0.$
3. $y = x^2 + 2; y = x + 4.$

Вариант – 4.

1. $y = -x^2 + 4x; x = 2;\ y = 0.$
2. $y = cosx; x = -\frac{\pi}{6}; x = \frac{\pi}{6}; y = 0.$
3. $y = x^2; y = x + 2.$

Контрольные вопросы по теме.

1. Что такое определенный интеграл?

2. Что в записи $\int_a^b f(x)$ означают: а) числа a и b; б) x; в) $f(x)$; г) $f(x)dx$?

3. Зависит ли приращение $F(b) - F(a)$ от выбора первообразной?

4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.

5. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?

6. Перечислите все пять случаев применения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур.
7. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю и почему?
8. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

Практическое занятие 7.

Тема: **Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка.**

Цель: отработка умений и навыков решения простейших дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Задачи:
• развитие творческого профессионального мышления;
• познавательная мотивация;
• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
• углубление теоретической и практической подготовки;
• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Обеспечение практического занятия:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Ход практического занятия.
1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;
2.Проверка готовности студентов к занятию;
3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:
› Изучить теоретический материал по теме «Решение дифференциальных уравнений 1-го порядка.»
› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.
› Выполнить самостоятельную работу.
› Ответить на контрольные вопросы.

Теоретический материал и примеры решения дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Уравнения с разделяющимися переменными

Дифференциальное уравнение первого порядка $y' = f(x,y)$ называется *уравнением с разделяющимися переме*
если функцию $f(x,y)$ можно представить в виде произведения двух функций, зависящих только от x и y:

$$f(x,y) = p(x)h(y),$$

где $p(x)$ и $h(y)$ − непрерывные функции.

Рассматривая производную y' как отношение дифференциалов $\frac{dy}{dx}$, перенесем dx в правую часть и разделим
уравнение на $h(y)$:

$$\frac{dy}{dx} = p(x)h(y), \Rightarrow \frac{dy}{h(y)} = p(x)dx.$$

Разумеется, нужно убедиться, что $h(y) \neq 0$. Если найдется число x_0, при котором $h(x_0) = 0$, то это число буде
являться решением дифференциального уравнения. Деление на $h(y)$ приводит к потере указанного решения

Обозначив $q(y) = \frac{1}{h(y)}$, запишем уравнение в форме:

$$q(y)dy = p(x)dx.$$

Теперь переменные разделены и мы можем проинтегрировать дифференциальное уравнение:

$$\int q(y)dy = \int p(x)dx + C,$$

где C − постоянная интегрирования.

Вычисляя интегралы, получаем выражение

$$Q(y) = P(x) + C,$$

описывающее общее решение уравнения с разделяющимися переменными.

Однородные уравнения

Определение однородного дифференциального уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

называется *однородным*, если правая часть удовлетворяет соотношению

$$f(tx,ty) = f(x,y)$$

для всех значений t. Другими словами, правая часть должна являться однородной функцией нулевого порядка по отношению к переменным x и y:

$$f(tx,ty) = t^0 f(x,y) = f(x,y).$$

Однородное дифференциальное уравнение можно также записать в виде

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right),$$

или через дифференциалы:

$$P(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0,$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ − однородные функции одинакового порядка.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение линейного уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + a(x)y = f(x),$$

где $a(x)$ и $b(x)$ − непрерывные функции x, называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Проверочные задания из практического занятия.

Решите дифференциальные уравнения.

Вариант – 1.

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{x-1}$;
2. $y' = x$, если $y = 0$ при $x = 2$;
3. $(1 + x^3)dy = 3x^2 ydx.$

Вариант – 2.

1. $e^x dx = 2ydy$;
2. $2ydx = (1 + x)dy$, если $y(1) = 4$;
3. $(1 + x^2)$dy-2xydx=0.

Контрольные вопросы по теме.

4. Какое уравнение называется дифференциальным?
5. Какая функция называется решением дифференциального уравнения?
6. Какое решение дифференциального уравнения называется общим и какое называется частным?
7. Каков геометрический смысл общего и частного решений дифференциального уравнения?
8. Может ли дифференциальное уравнение иметь конечное число решений?
9. Что такое порядок дифференциального уравнения и как его определить?
10. Сколько постоянных интегрирования имеет общее решение дифференциального уравнения первого, третьего порядка?

11. Как проверить, правильно ли найдено решение дифференциального уравнения?
12. Чем отличается дифференциальное уравнение от алгебраического уравнения?
13. Назовите известные вам типы дифференциальных уравнений.
14. Каков общий вид дифференциальных уравнений первого порядка с разделенными и разделяющимися переменными?
15. Как решается уравнение с разделенными переменными?
16. Чем отличается уравнение с разделяющимися переменными от уравнения с разделенными переменными? Как разделяют переменные?
17. Каков алгоритм решения уравнения с разделяющимися переменными?
18. В чем заключается задача Коши? Каков его геометрический смысл?
19. Каков общий вид линейных дифференциальных уравнений первого порядка?
20. Какими величинами являются и от чего зависят коэффициенты p и q в линейном дифференциальном уравнении первого порядка?
21. С помощью какой подстановки решается линейное дифференциальное уравнение первого порядка и к какому уравнению сводится его решение?

Практическое занятие № 8.

<u>Тема:</u> Решение комбинаторных задач, вычисление вероятностей событий. Решение практических задач с применением вероятностных методов.

<u>Цель:</u> отработка умений и навыков в решении комбинаторных задач. Уметь вычислять вероятность событий. Научить применять вероятностные методы для решения практических задач.

Задачи:
• развитие творческого профессионального мышления;
• познавательная мотивация;
• овладение языком науки, навыки оперирования понятиями;
• овладение умениями и навыками постановки и решения задач;
• углубление теоретической и практической подготовки;
• развитие инициативы и самостоятельности студентов.

Обеспечение практического занятия:

Теоретический материал методической рекомендации к практической работе.

Учебник. Богомолов Н.В. «Математика». – М.: Дрофа, 2012.

Индивидуальные карточки с вариантом практической работы.

Ход практического занятия.
1.Формулирование темы занятия, пояснение связи темы с другими темами учебной дисциплины;
2.Проверка готовности студентов к занятию;
3.Проведение непосредственно занятия согласно тематике и в соответствии с рабочей программой дисциплины:

› Изучить теоретический материал по теме «Решение комбинаторных задач, вычисление вероятностей событий. Решение практических задач с применением вероятностных методов.»
› Рассмотреть примеры решения типовых заданий.
› Выполнить самостоятельную работу №10.
› Ответить на контрольные вопросы.

Теоретические сведения и методические рекомендации по решению задач.

Основы комбинаторики.

Комбинаторика, это раздел математики в котором изучается вопрос о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям можно составить из конечного числа различных элементов.
Комбинации, отличающиеся друг от друга составом элементов или их порядком называются соединениями различают три вида соединений.

Предварительно познакомимся с понятием факториала.
Произведение всех натуральных чисел от 1 до n включительно, называют n- факториалом и пишут
$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$

Размещениями называются соединения составленные из n-различных элементов по m-элементам, которые отличаются друг от друга либо составом эл-тов либо их порядком.

$$A_n^m = \frac{n!}{(n-m)!}$$

Перестановки называют соединения составленные из одних и тех же n-элементов, которые отличаются друг от друга только их порядком размещения

$$P_n = n!$$

$$\bar{P}_{n_1,n_2,\ldots,n_k} = \frac{n!}{n_1!n_2!\ldots n_k!}$$

Сочетаниями называются соединения составленные из n-различных элементов по m-элементам, которые отличаются друг от друга хотя бы одним элементом.

$$C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

Сочетания с повторениями это такие соединения состоящие из n-различных элементов по m-элементам отличающиеся друг от друга или хотя бы одним элементом или тем что хотя бы один элемент входит различное число раз

$$\overline{C_n^m} = C_{n+m-1}^m \frac{(n+m-1)!}{m!(n-1)!}$$

Правило суммы

Если некоторый объект A может быть выбран из совокупности объектов M способами, а объект B N способами, то выбор либо объекта A либо объекта B может быть осуществлен M+N способами.

Правило произведения

Если объект A может быть выбран из совокупности объектов M способами, а после такого выбора объект B может быть выбран N способами, то пара объесков A и B могут быть выбраны A*B способами.

Основные понятия теории вероятностей

Событием называется любой исход опыта, различают следующие виды событий:
- случайные

- достоверные
- невозможные

Понятие достоверного и невозможного события используется для количественной оценки возможности появления того или иного явления, а с количественной оценкой связана вероятность.

События называется **несовместными** в данном опыте если появление одного из них исключает появление другого.

События называется **совместными** если появление одного из них не исключает появление остальных.

Несколько событий образуют **полную группу** событий если в результате опыта обязательно появится хотя бы одно из них.

Если два несовместных события образуют полную группу они называются **противоположными**

События называется **равновозможными** если появление ни одного из них не является объективно более возможным чем другие.

Пример. В урне находится 8 пронумерованных шаров (на каждом шаре поставлено по одной цифре от 1 до 8). Шары с цифрами 1, 2, 3 красные, остальные – черные. Появление шара с цифрой 1 (или цифрой 2 или цифрой 3) есть событие, благоприятствующее появлению красного шара. Появление шара с цифрой 4 (или цифрой 5, 6, 7, 8) есть событие, благоприятствующее появлению черного шара.

Вероятностью события А называют отношение числа m благоприятствующих этому событию исходов к общему числу n всех равновозможных несовместных элементарных исходов, образующих полную группу

Два события называются равновероятными (или равновозможными), если нет никаких объективных причин считать, что одно из них может наступить чаще, чем другое.

Так, например, появления герба или надписи при бросании монеты представляют собой равновероятные события.

Свойство 1. Вероятность достоверного события равна единице.
Свойство 2. Вероятность невозможного события равна нулю.
Свойство 3. Вероятность случайного события есть положительное число, заключенное между нулем и единицей.

Итак, вероятность любого события удовлетворяет двойному неравенству .

Пример. В урне 10 пронумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превосходит 10?

Решение. Пусть событие А = (Номер вынутого шара не превосходит 10). Число случаев благоприятствующих появлению события А равно числу всех возможных случаев m=n=10. Следовательно, P(A)=1. Событие А достоверное

События называются **неравновозможными** если появление хотя бы одного из них является более возможным чем другие.

Случаями называются несовместные равновозможные и образующие полную группу события.

Вычисление вероятностей

1. классический способ
2. геометрический
3. статистический

Первые два способа называются способами непосредственного подсчета вероятности, а классический основан на подсчете числа опытов благоприятствующих данному событию среди всех его возможных исходах.

Основы теории вероятности

Суммой событий A_i называется событие С состоящее в появлении события А или события В или их обоих вместе.
Суммой события А и В называется событие С заключенное в выполнении хотя бы одного из названых событий.
Произведением нескольких событий называется событие заключающееся в совместном выполнении всех этих событий.

Теорема умножения вероятностей.

Событие А называется зависимым от события В если его вероятность меняется в зависимости от того произошло событие В или нет.
Для независимых событий условная и безусловная вероятность совпадают.
Вероятность появления двух зависимых событий равна произведению вероятностей одного из них на вероятность другого вычисленную при условии, что первое событие имело место.

$P(A*B)=P(A)*P(B/A)=P(B)*P(B/A)$

Вероятность произведения нескольких событий равна произведению вероятностей этих событий причем вероятность каждого следующего события вычисляется при условии, что все предыдущие имели место.

$P(A_1;A_2.A_n)=P(A_1)*P(A_2/A_1)*.$
$*P(A_n/A_1,A_2.A_{n-1})$

Теорема сложения вероятностей совместных событий

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления.

$P(A)+P(B)=P(A)+P(B)-P(A*B)$

Вероятность появления хотя бы одного события

Вероятность появления события А заключающееся в наступлении хотя бы одного из независимых совокупностей событий $.A_1,A_2.A_n$
равна разности между единицей и произведением вероятности противоположных событий $A_1,A_2.A_n$

$P(A)=1-q^1*q^2*.*q^n$

Формула полной вероятности

Пусть событие А может появиться вместе с одним из образующих полную группу попарнонесовместных событий $H_1,H_2.H_n$
называемых гипотезами, тогда вероятность события А вычисляется как сумма произведений вероятностей каждой гипотезы на вероятность события А при этой гипотезе

$$\sum_{i=1}^{n} P(H_i)*P(A/H_i)$$

Формула Бейса

Пусть имеется полная группа попарнонесовместных гипотез H_1,H_2
$.H_n$ с известными вероятностями появления. В результате проведения опыта появилось некоторое события А, требуется переоценить вероятности гипотез при условии, что событие А произошло

$$P(H_i / A) = \frac{P(H_i) * P(A/H_i)}{P(A)}$$

Повторение опытов

Несколько опытов называются независимыми, если вероятность одного или иного из исходов каждого их опытов не зависит от того какие исходы имели другие опыты.

Теорема. Если производится n независимых опытов в каждом из которых событие А появляется с одинаковой вероятностью р, причем то тогда вероятность того, что событие А появится ровно m раз определяется по формуле.

Формула Бернули

$$P_n(m) = C_n^m * p^m * q^{n-m}$$

формула Бернули применяется в тех случаях, когда число опытов невелико, а вероятности появления достаточно велики.

Решение комбинаторных задач.

1. Охарактеризовать события, о которых идет речь в приведенных заданиях как достоверные, невозможные или случайные.

1) Ученик задумал натуральное число. Событие состоит в следующем:

а) задумано четное число (случайное);

б) задумано нечетное число (случайное);

в) задумано число, не являющееся ни четным, ни нечетным (невозможное, так как любое натуральное число либо четное, либо нечетное);

г) задумано число, являющееся четным или нечетным (достоверное).

2) В мешке лежат 10 шаров: 3 синих, 3 белых и 4 красных. Охарактеризовать следующее событие:

а) из мешка вынули 4 шара и они все синие (невозможное, в мешке только 3 синих шара);

б) из мешка вынули 4 шара и они все красные (случайное);

в) из мешка вынули 4 шара, и все они оказались разного цвета (невозможное, в мешке шары только трех разных цветов);

г) из мешка вынули 4 шара, и среди них не оказалось шара черного цвета (достоверное – в мешке нет черных шаров).

2. Бросают игральный кубик, то есть небольшой куб, на гранях которого нанесены очки 1, 2, 3, 4, 5, 6. При бросании игрального кубика на его верхней грани может выпасть одно очко, два очка, три очка и т. д. Каждый из этих исходов является случайным. Какова на ваш взгляд вероятность выпадения 4 очков?

Решение: P(A) = m/n, P(A) = 1/6).

3. Какова вероятность появления четных очков при одном бросании игрального кубика?

Решение: Пусть А – событие «выпадет четное число» n =6, так как число возможных исходов 6 (1; 2; 3; 4; 5; 6); n =3, так как только 3 четных очка (2; 4; 6;). Значит Р(А) = 3:6 = 0,5.

4. Из карточек составили слово «статистика». Какую карточку с буквой вероятнее всего вытащить? Какие события равновероятные?

Решение: Всего в слове статистика 10 букв. Буква «с» встречается 2 раза – Р(с) = 2/10 = 1/5; буква «т» встречается 3 раза – Р(т) = 3/10; буква «а» встречается 2 раза – Р(а) = 2/10 = 1/5; буква «и» встречается 2 раза – Р(и) = 2/10 = 1/5; буква «к» встречается 1 раз – Р(к) = 1/10. Вероятнее всего вытащить карточку с буквой «т». Вероятность одинакова у букв «с», «а», «и»: Р(с) = Р(а) = Р(и) = 2/10 = 1/5.

Какими двумя способами решаются комбинаторные задачи?

Геометрический способ:

- способ перебора различных комбинаций (дерево возможных вариантов)

Правило умножения:

- при помощи логических рассуждений.

Задачи на перебор возможных комбинаций называется комбинаторными.

Комбинаторика – раздел математики, посвященный решению задач на перебор различных вариантов, удовлетворяющим каким-либо правилам или условиям.

5. Запишите все трехзначные числа, для записи которых употребляются только цифры 1 и 2.

Решение: В записи числа на первом месте может стоять цифра 1 или 2, на втором месте также одна из двух цифр 1 и 2. На третьем месте также можно записать либо 1 либо 2. получили восемь чисел:

111, 112, 121, 122, 122, 212, 221, 222

6. Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трех горизонтальных полос одинаковой ширины разных цветов: красного, белого, зеленого. Сколько стран могут использовать такую символику?

Решение:

1 способ. Построим дерево различных вариантов.

1 полоса б к з

2 полоса	к з	б з	б к
3 полоса	з к	з б	к б

Итого получилось 6 вариантов.

2 способ. Для первой полосы есть 3 варианта, для второй полосы – 2 варианта, для третьей – 1 вариант. Если умножить 3 на 2 на 1, то получится 6. Такой же ответ получился при помощи дерева вариантов. Про второй способ рассуждений говорят так: мы использовали правило умножения (или правило произведения).

7. Сколькими способами можно завернуть 2 подарка в обёрточную бумагу, если есть неограниченное количество этой бумаги серебристого, золотого, красного и голубого цветов и для каждого подарка можно взять бумагу только одного цвета.

Решение:

1 способ – 12 вариантов, дерево возможный вариантов.

1 подарок	с	з	к	г
2 подарок	с з к г	с з к г	с з к г	с з к г

2 способ - правило умножения 4х3 = 12.

Правило умножения:

Пусть 1 элемент можно выбрать К способами, 2 элемент можно выбрать М способами. Тогда пару чисел можно выбрать К*М способами.

Если есть тройка элементов: 1 – К, 2 – М, 3 – Л, то тройку элементов можно выбрать К*М*Л способами.

8. Сколько предложений можно составить из слов: я, смогу, решить, задачу?

Я смогу решить задачу.Решить задачу я смогу.

Я смогу задачу решить.Решить задачу смогу я.

Я решить задачу смогу.Решить я смогу задачу.

Я решить смогу задачу.Решить я задачу смогу.

Я задачу смогу решить.Решить смогу я задачу.

Я задачу решить смогу.Решить смогу задачу я.

Смогу я решить задачу.Задачу решить смогу я.

Смогу я задачу решить.Задачу решить я смогу.

Смогу решить я задачу.Задачу смогу я решить.

Смогу решить задачу я.Задачу смогу решить я.

Смогу задачу решить я.Задачу я смогу решить.

Смогу задачу я решить.Задачу я решить смогу.

9. Несколько стран решили использовать для своего государственного флага символику в виде трех полос разного цвета – белого, синего, красного. Сколько стран могут использовать такую символику при условии, что у каждой страны свой флаг?

Таблица вариантов

КБСКСБ
БСКБКС
СБКСКБ

Дерево вариантов

3.Правило умножения

1 полоса 3 способа

2 полоса 2 способа

3 полоса 1 способ

$3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$

Ответ: 6 способов.

10. Восемь друзей решили провести турнир по шашкам так, чтобы каждый сыграл с каждым одну партию. Сколько партий будет сыграно?

Решение: Каждый игрок должен сыграть по 7 партий. Рассмотрим случаи, когда игроки не повторяются. Первый должен сыграть 7 партий (со 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 игроками), второй – 6 партий (с 3, 4, 5, 6, 7, 8 игроками), третий – 5 партий (с 4, 5, 6, 7, 8 игроками), четвертый – 4 партии (с 5, 6, 7, 8 игроками), пятый – 3 партии (с 6, 7, 8 игроками), шестой – 2 партии (с 7, 8 игроками), седьмой – 1 партия (с 8-м игроком). Отсюда, количество партий: 7+6+5+4+3+2+1=28.

11. Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1, 3, 5, 7, используя в записи числа каждую из них не более одного раза?

Первая цифра1 3 5 7
Вторая цифра3 5 7 1 5 7 1 3 7 1 3 5
Третья цифра 573735571715371713351513

11. Имеется девять различных книг, четыре из которых – учебники. Сколькими способами можно расставить эти книги на полке так, чтобы все учебники стояли рядом?

Решение: Сначала будем рассматривать учебники как одну книгу. Тогда на полке надо расставить не 9, а 6 книг это можно сделать Р6 способами. В каждой из полученных комбинаций можно выполнить Р4 перестановок учебников. Значит, искомое число способов расположения книг на полке равно произведению $P6 \cdot P4 = 6! \cdot 4! = 720 \cdot 24 = 17280$.

Ответ: 17280 способов.

12. В столовой имеются три первых блюда, пять вторых блюд и два третьих. Сколькими способами, ученик может выбрать обед, состоящий из первого, второго и третьего блюд?

Решение. Первое блюдо можно выбрать 3 способами. Для каждого выбора первого блюда существует 5 возможностей выбора второго блюда. Значит, первые два блюда можно выбрать $3 \cdot 5$ способами. Наконец, для каждого выбора третьего блюда, т.е. существует $3 \cdot 5 \cdot 2$ способов составления обеда из трех блюд. Итак, обед из трех блюд может быть составлен 30 способами.

13. Ослик ИА решил пригласить к себе на День рожденья Винни-Пуха, Сову, Пятачка, Кота Матроскина, Шарика, Дядю Фёдора и почтальона Печкина. Сколько существует вариантов последовательного написания пригласительных билетов, если учесть, что Шарик, Кот Матроскин и Дядя Фёдор живут в одном доме и получат один пригласительный билет, а Сова получила приглашение в устной форме?

Введём обозначения

Винни – Пух Пятачок Дядя Федор

Почтальон Печкин

14.Сколько трехзначных чисел можно составить из цифр 1;4;7?

Решение:

Для того чтобы не пропустить и не повторить ни одно из чисел, будем выписывать их в порядке возрастания. Сначала запишем числа, начинающиеся с цифры 1, затем с цифры 4 и, наконец, с цифры 7. Получаем следующий расклад.

111417
414447
717477

147;174;417;471;714;741

15. (ЕГЭ) В урне лежат одинаковые шары: 5 белых, 3 красных и 2 зелёных. Саша вынимает один шар. Найдите вероятность того, что он окажется зелёным.

Решение: Всего в урне лежит 5+3+2=10 шаров, из них 2 – зелёных. Вероятность того, что вынутый шар окажется зелёным, равна 2:10=0,2.

16. (ЕГЭ) В коробке находятся 7 красных шаров, 13 белых шаров и 6 голубых шаров. Определите вероятность того, что наудачу взятый из коробки шар окажется белым.

Решение: Всего в коробке 7+13+6=26 шаров, из них13 – белых. Вероятность того, что наудачу взятый из коробки шар окажется белым, равна 13:26=1:2=0,5.

17. (ЕГЭ) Из города А в город В можно добраться поездом, самолётом и на автомобиле. Из города В в город С можно добраться только поездом и самолётом. Пассажир выбирает для себя транспорт случайным образом. Какова вероятность того, что этот пассажир, добравшийся из города А в город В, воспользовался в обоих случаях самолётом?

Решение:

По правилу произведения получаем, что добраться из города А в город С через город В можно 3·2=6 способами. Вероятность того, что пассажир, добравшийся из города А в город В, воспользовался в обоих случаях самолётом, равна 1:6.

18. (ЕГЭ) В заключительном этапе велосипедной гонки участвуют равные по профессиональной квалификации спортсмены: 5 велосипедистов общества «Динамо», 4 велосипедиста общества «Буревестник», 6 велосипедистов общества «Зенит». Найдите вероятность того, что первым финиширует спортсмен общества «Зенит».

Решение: Всего в велосипедной гонке участвуют 5+4+6=15 спортсменов. Из них 6 – велосипедистов общества «Зенит». Вероятность того, что первым финиширует спортсмен общества «Зенит», равна 6:15=2:5=0,4.

ЗАДАЧИ С РЕШЕНИЯМИ.

Задача №1.

В урне находится 10 шаров, из них 6 белых и 4 черных шара. Вынули из урны 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара - белые?

Решение: Рассмотрим событие А – оба вынутых шара белого цвета.

Число всевозможных исходов равно количеству выборок 2 шаров из 10. Выборка без возвращения и без повторения, поэтому $n = C_{10}^2 = \frac{10!}{2!\cdot 8!} = 45$. Число исходов, благоприятствующих наступлению события А равно числу вариантов извлечения 2 белых шаров из 6, поэтому $m = C_6^2 = \frac{6!}{2!\cdot 4!} = 15$. Тогда $p(A) = \frac{15}{45} = \frac{1}{3} = 0,33$.

Ответ: $p(A) = \frac{1}{3} = 0,33$.

Задача №2.

В секретном замке на общей оси 4 диска, каждый из которых разделен на 5 секторов, на которых написаны различные цифры. Замок открывается, если диски установлены так, что цифры на них составляют определенное четырехзначное число. Найти вероятность того, что при произвольной установке дисков замок будет открыт.

Решение: Рассмотрим событие А – замок будет открыт. Это событие равносильно тому, что цифры на дисках составляют определенное число.

Так как варианты набора цифр на дисках образуют выборку с возвращением (цифры могут повторяться) упорядоченную (при смене порядка цифр получается другое число), $n = \overline{A}_5^4 = 5^4 = 625.$ Благоприятный исход у этого события только один, поэтому

$m = 1$. Тогда $p(A) = \frac{1}{625}.$

Задача №3.

Набирая номер телефона, абонент забыл последние 3 цифры и, помня лишь, что эти цифры различны, набрал их на удачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

Решение: Пусть событие А – набран верный номер. Тогда число всевозможных исходов равно числу трехзначных чисел, составленных из различных цифр. Так как в этом случае мы имеем выборку без возвращения (цифры различны), но упорядоченную (меняя цифры местами, получаем новое число), то $n = A_{10}^3 = \frac{10!}{7!} = 720.$ Исход, благоприятствующий наступлению события А только 1. Поэтому $p(A) = \frac{1}{720}.$

Задача №4.

В почтовом отделении имеются открытки 6 видов. Какова вероятность того, что среди 4 проданных открыток все открытки различны?

Решение: Пусть событие А - все проданные открытки различны.

Тогда число всевозможных исходов равно числу вариантов выбора 4 открыток. Эта выборка с возвращением (выбранные открытки могут быть одинаковые), неупорядоченная (так как важен лишь состав выборки, а не то, в каком порядке отобраны открытки). Значит $n = \overline{C}_6^4 = \frac{9!}{4!\,5!} = 126.$ Число исходов, благоприятствующих наступлению события А, есть число способов, которыми можно выбрать 4 различные открытки из 6 видов. Так как открытки теперь различны, то эта неупорядоченная выборка без повторения, значит $m = C_6^4 = 15.$ Тогда $p(A) = \frac{5}{42} \approx 0{,}12.$

Ответ: $p(A) = \frac{5}{42} \approx 0{,}12.$

Проверочные задания для практического занятия .

Вариант – 1.

1. Вычислите:

а) $\frac{52!}{50!}$; б) C_{15}^{13}; в) $A_7^3 + A_6^3 + A_5^3$; г) $\frac{10!-8!}{89}$.

2. Решите уравнения:

а) $A_{n-2}^3 = 4A_{n-3}^2$; б) $A_7^3 = 42x$; в) $\frac{A_x^2+A_x^4}{A_x^2} = 13$.

3. Проверьте равенства:

а) $C_{10}^5 + C_{10}^6 = C_{11}^6$; б) $C_{20}^{12} = \frac{A_{20}^8}{P_8}$.

Вариант – 2.

1. Вычислите:

а) $\frac{62!}{60!}$; б) $C_6^4 + C_5^0$; в) $A_5^2 \cdot A_4^2 \cdot A_3^2$; г) $\frac{5!+6!}{4!}$.

2. Решите уравнения:

а) $20A_{n-2}^3 = A_n^5$; б) $\frac{x}{A_x^3} = \frac{1}{12}$; в) $A_{2x}^3 = 14A_x^3$.

3. Проверьте равенства:

а) $C_{14}^9 + C_{14}^{10} = C_{15}^{10}$; б) $C_{15}^4 - C_{15}^3 = \frac{C_{16}^4}{2}$.

Вариант – 3.

1. Вычислите:

а) $\frac{42!}{40!}$; б) C_{17}^{14}; в) $A_8^4 + A_7^4 + A_6^4$; г) $\frac{12!-10!}{131}$.

2. Решите уравнения:

а) $A_{n-2}^3 = 5A_{n-3}^2$; б) $A_n^4 = 15A_{n-2}^3$; в) $\frac{A_x^3+A_x^2}{A_x^2} = 15$.

3. Проверьте равенства:

а) $C_n^6 = \frac{A_n^{n-6}}{P_{n-6}}$; б) $C_{15}^6 = C_{15}^9$.

Вариант – 4.

1. Вычислите:

а) $\frac{72!}{70!}$; б) $C_5^3 + C_6^0$; в) $A_7^2 \cdot A_6^2 + A_5^2$; г) $\frac{7!+5!}{4!}$.

2. Решите уравнения:

а) $A_n^5 = 30A_{n-2}^4$; б) $\frac{A_x^5}{A_x^4} = \frac{1}{2}$; в) $A_6^3 = 60x$.

3. Проверьте равенства:

а) $C_{11}^4 + C_{11}^5 = C_{12}^5$; б) $C_{18}^{10} = \frac{A_{18}^8}{P_8}$.

Контрольные вопросы по теме.

1. Что называется, n-факториалом?
2. Перечислите основные задачи комбинаторики.
3. Что называется, перестановками?
4. Запишите формулу для числа перестановок из m элементов.
5. Что называется, размещениями?
6. Запишите формулу числа размещений из m элементов по n.
7. Что называется, сочетаниями?
8. Запишите формулу числа сочетаний из m элементов по n.
9. Какие события называются достоверными? Приведите примеры.
10. Какие события называются невозможными? Приведите примеры.
11. Что называется, вероятностью события?
12. Какие события называются несовместными? Приведите примеры.
13. Чему равна сумма несовместных событий?
14. Какие события, называются противоположными? Приведите примеры.
15. Как формулируется теорема сложения вероятностей?
16. Чему равна сумма вероятностей противоположных событий?
17. Как формулируется теорема умножения вероятностей?
18. Какая величина называется случайной?
19. Какая случайная величина называется дискретной?
20. Что называется, законом распределения случайной величины?
21. Какой закон распределения называется биномиальным?
22. Что называется, математическим ожиданием дискретной случайной величины?
23. Что называется, дисперсией случайной величины?
24. Что понимается под законом больших чисел?

Список используемой литературы:

Основные источники:

1. Дадаян А. А. Математика: Учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 544 с.: 60x90 1/16. - (Профессиональное образование). (переплет)ISBN 978-5-91134-460-3, 2000 экз.
2. Шипачев В. С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие / В.С. Шипачев. - 10-е изд., стер. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 304 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010071-5
3. Шипачев В. С. Начала высшей математики [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2013. — 382 с. — ISBN- 978-5-8114-1476-5

Дополнительные источники:

1. Григорьев С.Г. Математика: учебник для студ. Сред .проф.учреждений/ С.Г. Григорьев, С.В. Задулина; под ред. В.А. Гусева. -4-е изд., стер.- М.: Издательский центр "Академия",2009-384 с. ISBN 978-5-7695-6325-7 .

2. Спирина. М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. -4-е изд.– М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 352 с. ISBN: 978-5-7695-9711-

Интернет-ресурсы

1. www.fcior.edu.ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).
2. www.school-collection.edu.ru (Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов).
3. http://www.studentlibrary.ru/ Электронно-Библиотечная Система «Консультант Студента».
4. http://e.lanbook.com/ Электронная библиотечная система издательства «Лань».
5. http://www.biblio-online.ru/ Электронно-библиотечная система.
6. http://znanium.com/ Электронно-библиотечная система.
7. http://www.iprbookshop.ru/ Электронно-библиотечная система.