

Министерство образования и науки Российской Федерации
**Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования**
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

Кафедра «Технология машиностроения»

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ
ПО ДИСЦИПЛИНЕ «ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА»**

Для студентов обучающихся по специальности
15.02.07 «Автоматизация технологических процессов и производств
(по отраслям)».

Составил:
асс. Кириллов А.В.

Владимир 2017г.

Введение

Курс лекций подготовлен согласно рабочей программе, разработанной в соответствии с учебным планом подготовки студентов направления 20.02.04 «Пожарная безопасность» и требований ФГОС СПО.

Целью изучения курса «Технической механики» раздела «Теоретическая механика» обучение общим закономерностям механического движения материальных точек и механических систем, взаимодействия между ними, основным методам исследования равновесия и движения механических систем.

В разделе «Сопротивление материалов» обучение основным принципам расчета конструкций на прочность, жесткость и устойчивость.

Теоретическая механика логически связана с физикой и математикой, общетехническими и профессиональными дисциплинами. Это позволяет решать широкий круг задач механики и техники.

Настоящий курс лекций разработан на основе учебного пособия:

Новожилов А.И. Краткий курс теоретической механики: учеб. пособие / А.И. Новожилов ; под ред. В.Н. Филимонова. – 2-е изд., перераб. и доп.; Владимир. гос. ун-т. – Владимир: Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006. – 240 с. – ISBN 5-89368-643-8.

Беляев Б.А. Техническая механика. Основы сопротивления материалов. Теория механизмов и машин. Основы деталей машин: учеб. пособие / Б. А. Беляев; Владим. гос. ун-т имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых. – Владимир: Изд-во ВлГУ, 2012. – 154 с. - ISBN 978-5-9984-0207-4.

Содержание

Введение

- Лекция 1.** Введение. Предмет теоретическая механика. Исторические этапы развития механики. Основные понятия. Аксиомы статики. Связи и реакции связей. Система сходящихся сил. Определение равнодействующей системы сходящихся сил. Условия равновесия.
- Лекция 2.** Момент силы относительно точки. Понятие о паре сил. Момент пары сил. Свойство пар сил. Сложение пар сил.
- Лекция 3.** Система сил произвольно расположенных на плоскости. Приведение сил к центру. Главный вектор и главный момент. Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил. Теорема Вариньона. Распределенные силы.
- Лекция 4.** Центр тяжести тела. Способы нахождения центра тяжести.
- Лекция 5.** Кинематика точки. Способы задания движения. Уравнения траектории точки. Определение скорости и ускорения точки при разных способах задания движения.
- Лекция 6.** Поступательное движение твердого тела. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Уравнения вращения. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Скорость и ускорение тела при вращении тела вокруг неподвижной оси.
- Лекция 7.** Динамика точки. Основные понятия и определения. Законы механики. Две основные задачи динамики.
- Лекция 8.** Работа силы. Работа постоянной силы. Работа сил тяжести и упругости. Работа силы, приложенной к вращающемуся телу. Мощность силы.
- Лекция 9.** Кинетическая энергия системы. Вычисление кинетической энергии твердого тела при различных случаях его движения. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы.
- Лекция 10.** Основные задачи сопротивления материалов. Деформации упругие и пластические. Основные гипотезы и допущения. Классификация нагрузок и элементов конструкции. Силы внешние и внутренние. Напряжение полное, нормальное, касательное.
- Лекция 11.** Внутренние силовые факторы при растяжении и сжатии. Эпюры продольных сил. Нормальное напряжение. Эпюры нормальных напряжений. Продольные и поперечные деформации. Закон Гука. Коэффициент Пуассона. Определение осевых перемещений поперечных сечений бруса.
Испытания материалов на растяжение и сжатие при статическом нагружении. Механические характеристики материалов.

Напряжения предельные, допускаемые и расчетные. Коэффициент запаса прочности. Условие прочности, расчеты на прочность. Статически неопределимые системы.

Лекция 12. Срез, основные расчетные предпосылки, расчетные формулы, условие прочности.

Допускаемые напряжения. Примеры расчетов.

Лекция 13. Статические моменты сечений. Осевые, центробежные и полярные моменты инерции. Главные оси и главные центральные моменты инерции. Осевые моменты инерции простейших сечений. Определение главных центральных моментов инерции составных сечений, имеющих ось симметрии.

Лекция 14. Кручение. Чистый сдвиг. Закон Гука при сдвиге. Модуль сдвига. Внутренние силовые факторы при кручении. Эпюры крутящих моментов. Кручение бруса круглого поперечного сечения. Расчеты на прочность и жесткость при кручении. Угол закручивания.

Лекция 15. Изгиб. Основные понятия и определения. Классификация видов изгиба. Внутренние силовые факторы при прямом изгибе. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Нормальные напряжения при изгибе. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом, поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки. Расчеты на прочность при изгибе. Рациональные формы поперечных сечений балок из пластичных и хрупких материалов. Понятие о касательных напряжениях при изгибе. Расчеты на жесткость.

Лекция 16. Сочетание основных деформаций. Изгиб с растяжением или сжатием. Изгиб и кручение. Гипотезы прочности. Напряженное состояние в точке упругого тела. Главные напряжения. Максимальные касательные напряжения. Виды напряженных состояний. Упрощенное плоское напряженное состояние. Назначение гипотез прочности. Эквивалентное напряжение. Расчет бруса круглого поперечного сечения при сочетании основных деформаций.

Лекция 17. Сопротивление усталости. Циклы напряжений. Усталостное разрушение, его причины и характер. Кривая усталости, предел выносливости. Факторы, влияющие на величину предела выносливости.

Лекция 18. Прочность при динамических нагрузках. Понятие о динамических нагрузках. Силы инерции при расчете на прочность.

Лекция 1.

Тема занятий: Введение. Предмет теоретическая механика. Исторические этапы развития механики. Основные понятия. Аксиомы статики. Связи и реакции связей. Система сходящихся сил. Определение равнодействующей системы сходящихся сил. Условия равновесия.

ВВЕДЕНИЕ

Теоретическая механика – одна из самых древних наук. Возникла она во времена Аристотеля, основоположника первой Академии. Он впервые попытался сформулировать основы механики и дал название этой науке – *механика*. Последующее развитие механики было вызвано потребностями человеческого общества, ростом уровня производства и техники.

Механикой занимались известные ученые прошлого: Архимед, Галилей, Ньютон. А после Ньютона началось ее бурное развитие. Много сделали известные ученые Даламбер, Лагранж и наши, российские, Л. Эйлер, М. Ломоносов, М. Остроградский, С. Ковалевская, И. Мещерский, Н. Жуковский, А. Ляпунов и др.

Механика развивалась не только в теории, но и в прикладных науках. Теоретическая механика лежит в основе сопротивления материалов, строительной механики, теории упругости, гидромеханики, аэродинамики, теории машин и механизмов и пр.

Теоретическая механика дает методы исследования движения тел и системы тел. Устанавливает основные закономерности движения механических систем. Позволяет составить их математические модели, с помощью которых затем анализируются возможные решения и проектируются реальные машины и конструкции, объясняются многие физические явления.

В то же время теоретическая механика стимулирует развитие и высшей математики, требуя новые и точные методы расчета, в том числе и компьютерные.

Теоретическая механика, опирающаяся на известные законы Ньютона, является классической механикой в отличие от релятивистской механики, основанной на специальной теории относительности Эйнштейна. Но поскольку инженерные науки исследуют движение деталей механизмов и конструкций со скоростями, гораздо меньшими скорости света, закономерности, установленные классической, теоретической механикой вполне устраивают современную технику.

Хотя теоретическая механика формулирует свои законы, принципы, теоремы, используя некоторые гипотезы и специальные абстрактные понятия (сила, момент силы, материальная точка, абсолютно твердое тело, количество движения и т.п.), она позволяет достаточно правильно описывать и рассчитывать движение механических систем и реальных конструкций.

При обучении студентов, курс теоретической механики делят на три части: статику, кинематику и динамику.

В статике устанавливаются правила сложения сил, приложенных к телу, и исследуются условия равновесия конструкций под действием этих сил.

В кинематике рассматриваются различные виды движения тел. Но без учета причин, вызывающих эти движения. Исследуются заданные законы движения, определяются характеристики этого движения (траектории, скорости, ускорения точек тела).

В динамике решаются более важные и сложные задачи, определяется движение тел под действием сил и других обстоятельств.

Статика. Основные определения и понятия. Аксиомы статики. Связи и реакции связей

В разделе «Статика» исследуется равновесное состояние тел, устанавливаются условия, обеспечивающие такое состояние.

Для этого потребуется ввести несколько определений и понятий, которые позволят сформулировать такие условия.

1. *Твердое тело*. В статике и вообще в теоретической механике все тела считаются абсолютно твердыми. То есть предполагается, что эти тела не деформируются, не изменяют свою форму и объем, какое бы действие на них не было оказано.

Исследованием движения нетвердых тел – упругих, пластичных, жидких, газообразных – занимаются другие науки (сопротивление материалов, теория упругости, гидродинамика и т.д.).

2. Будем рассматривать тела находящиеся в *равновесии*. Это такое состояние тела, при котором все его точки всё время остаются неподвижными.

3. *Сила*. Силой будем называть действие одного тела на другое, которое стремится вывести тело из состояния равновесия или, наоборот, сохранить его.

Сила – есть вектор (рис. 1.1). Действие силы на тело характеризуется: а) величиной, которая измеряется в ньютонах, а на чертеже изображается отрезком прямой в определенном масштабе; б) линией действия – прямой, вдоль которой направлено действие силы; в) направлением действия, которое указывается стрелкой; г) точкой приложения силы – обычно начало вектора.

В тексте вектор силы обозначается латинскими буквами F , R , P и др. с черточками или знаком вектора над ними. Если черточки нет, значит, у силы известен только ее модуль*.

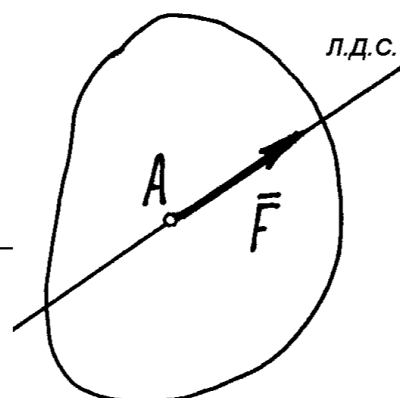


Рис. 1.1

Предполагается, что действие силы на тело не изменится, если ее перенести по линии действия в любую точку тела (конечно – твердого тела). Поэтому вектор силы называют *скользящим вектором*. Если силу перенести в точку, не расположенную на этой линии, действие ее на тело будет совсем другим.

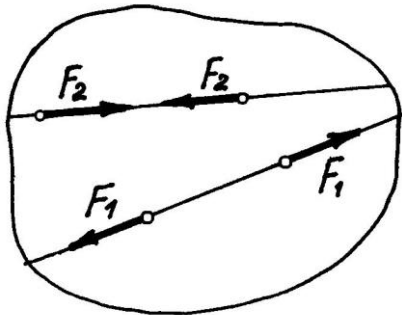


Рис. 1.2

4. Две силы считаются *уравновешивающимися*, если они равны по величине, направлены по одной прямой в противоположные стороны и приложены к одному и тому же телу (рис. 1.2). Под действием таких сил тело находится в равновесии. Естественно, если к телу приложить еще какие-нибудь уравновешивающиеся силы или убрать их, равновесие тела не нарушится.

5. *Равнодействующая*. Равнодействующей будем называть такую силу R , которая может заменить несколько сил, то есть оказывает на тело такое же действие, как эти силы. Таким образом, равнодействующая – это сила, эквивалентная нескольким силам.

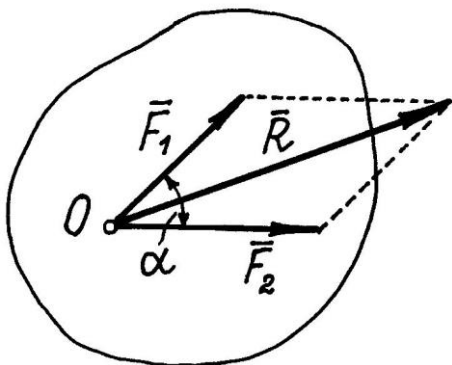


Рис. 1.3

Равнодействующая двух сил, приложенных к одной точке тела, находится построением параллелограмма на этих силах (рис. 1.3) и определяется как их векторная сумма:

$$R = F_1 + F_2.$$

Модуль равнодействующей, как диагональ параллелограмма,

$$R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1 F_2 \cos \alpha}.$$

Конечно, $R \neq F_1 + F_2$. Такое равенство будет соблюдаться только при условии, что эти силы направлены по одной прямой в одну сторону. Если же векторы сил окажутся перпендикулярными, то $R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2}$.

6. Нам потребуется третий закон Ньютона, который запишем так:

При действии одного тела на другое возникают две силы, равные по величине, направленные по одной прямой в противоположные стороны и приложенные к телам в точке касания.

Конечно, эти силы не уравновешиваются, потому что они приложены к разным телам.

7. *Свободное и несвободное тело*. Свободным телом будем называть тело, которое может быть перемещено из данного положения в любом направлении. Если хотя бы в одном направлении движение тела ограничено, то оно называется несвободным.

Материальные тела или устройства, которые ограничивают перемещение тела, называются *связями*.

Например, тело лежащее на столе – несвободное тело. Связью его является плоскость стола, которая препятствует перемещению тела вниз.

Очень важен так называемый *принцип освобожденности*, которым будем пользоваться в дальнейшем. Записывается он так.

Любое несвободное тело можно сделать свободным, если связи убрать, а действие их на тело заменить силами, такими, чтобы тело оставалось в равновесии.

Эти силы, заменяющие связи, называются *реакциями этих связей*.

Так, у тела, лежащего на столе, связь – стол. Тело несвободное. Сделаем его свободным – стол уберем, а чтобы тело осталось в равновесии, заменим стол силой, направленной вверх и равной, конечно, весу тела.

На рис. 1.4 даны наиболее типичные виды связей и их реакции.

Несколько замечаний к этому рисунку.

а) Реакцию нити (или стержня, прикрепленного к телам шарнирами) обозначают S и направляют по нити (или стержню) *от тела*. Если даже заранее можно догадаться, что реакция направлена к телу, все равно ее надо направить от тела. Таково правило. Оно избавляет от лишних и ненужных предположений и, как убедимся далее, помогает установить, сжат стержень или растянут.

б) Реакцию поверхности (нормальная реакция N) всегда надо направлять *к телу* перпендикулярно касательной к этой поверхности и прикладывать к телу в точке соприкосновения.

Если поверхности негладкие, надо добавить еще одну силу – силу трения $F_{\text{тр}}$, которая направлена перпендикулярно нормальной реакции N в сторону, противоположную возможному скольжению тела.

в) Шарнирно-подвижная опора A препятствует движению тела только в направлении, перпендикулярном плоскости скольжения опоры. Поэтому реакция направляется перпендикулярно этой плоскости.

г) Направление реакции шарнирно-неподвижной опоры B предугадать трудно. Поэтому рассматривают ее как сумму взаимно перпендикулярных

сил X_B и Y_B .

д) Тело, неподвижно прикрепленное к поверхности (заделка). Эта связь препятствует и перемещению во всех направлениях, и повороту тела. Поэтому ее реакция состоит из двух взаимно перпендикулярных сил и пары, которая препятствует вращению (понятие о паре будет дано ниже).

е) При определении реакций связи других конструкций надо установить, разрешает ли она двигаться вдоль трех взаимно перпендикулярных осей и вращаться вокруг этих осей. Если препятствует какому-либо движению, показать соответствующую силу, если препятствует вращению – пару с соответствующим моментом.

8. Иногда приходится исследовать равновесие нетвердых тел. При этом будем пользоваться предположением, что если это нетвердое тело находится

в равновесии под действием сил, то его можно рассматривать как твердое тело, используя все правила и методы статики.

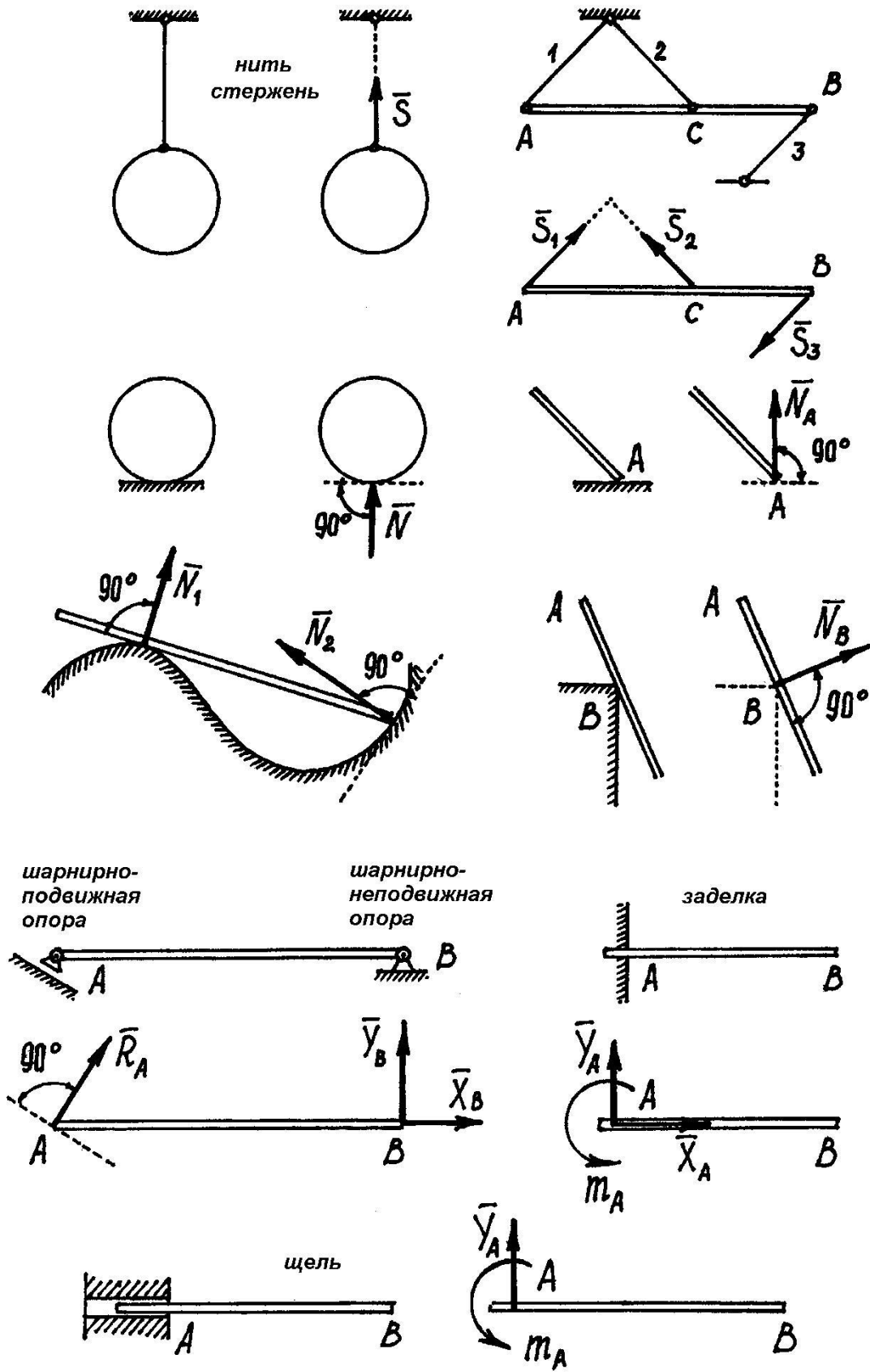


Рис. 1.4
Система сходящихся сил

Система сходящихся сил – это силы, приложенные к телу, линии действия которых пересекаются в одной точке.

Сложение системы сходящихся сил

Пусть на тело действует несколько сил, линии действия которых пересекаются в одной точке O (ограничимся тремя силами, чтобы чертеж получился попроще). Силы приложены в точках A_1, A_2, A_3 и расположены не в одной плоскости, а, как говорят, в пространстве (рис. 2.1). Перенесем все силы по линиям действия в точку O . Получим «пучок» сил.

Сложим сначала две силы F_1 и F_2 , приложенные к одной точке (см. I, п. 3), построением параллелограмма $OABD$. Равнодействующая их

R_1 складываем таким же способом с силой F_3 .

$R_1 = F_1 + F_2$. Затем эту силу

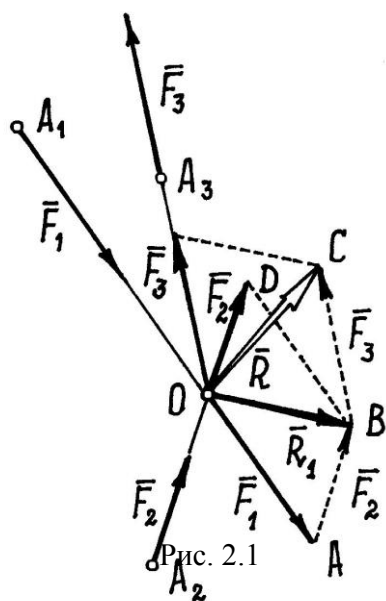
$R = R_1 + F_3$

Найдем их равнодействующую

$+ F_3$. Это будет равно-

действующая всех заданных здесь сил. Если бы сил было больше, то и их равнодействующую можно найти таким же способом.

Таким образом, делаем вывод: в результате сложения сходящихся сил получится сила, равнодействующая их, линия действия которой проходит через точку пересечения линий действия заданных сил, и равная векторной сумме всех сил:



$$R = \sum_{i=1}^n F_i, \quad (2.1)$$

где n – число сил.

Из рис. 2.1 видно, что равнодействующую

двух первых сил R_1 можно было не определять, а находить равнодействующую сразу всех сил построением многоугольника $OABC$, стороны которого равны и параллельны векторам заданных сил. Этот пространственный многоугольник, сторонами которого являются векторы сил, называется *многоугольником сил*.

Нетрудно заметить, что если конец последней силы (точка C в нашем примере) окажется в точке O , равнодействующая будет равна нулю. Это будет означать, что эти сходящиеся силы уравниваются, и тело, к которо-

му они приложены, будет находиться в равновесии. А так как $R = \sum F_i$, то условием, при котором сходящиеся силы уравниваются, или проще – условием равновесия системы сходящихся сил является необходимость и достаточность замкнутости многоугольника сил или равенство нулю векторной суммы всех сил:

$$\sum F_i = 0 .$$

Аналитический способ определения равнодействующей системы сходящихся сил. Уравнения равновесия

Дадим сначала определение проекции вектора силы на ось.

Если вектор силы F_1 и ось x расположены в одной плоскости (рис. 2.2), то, как видно из рисунка, проекцией силы на ось будет отрезок оси X_1 , равный

$$X_1 = F_1 \cdot \cos \alpha .$$

Так как между линией действия силы и осью имеются два угла α и β , то, чтобы правильно вычислить проекцию, следует пользоваться таким правилом.

Проекция силы на ось определяется как произведение модуля силы на косинус острого угла между осью и линией действия силы. Проекция считается положительной, если вектор силы и ось направлены в одну сторону от перпендикуляра H к оси (см. рис. 2.2).

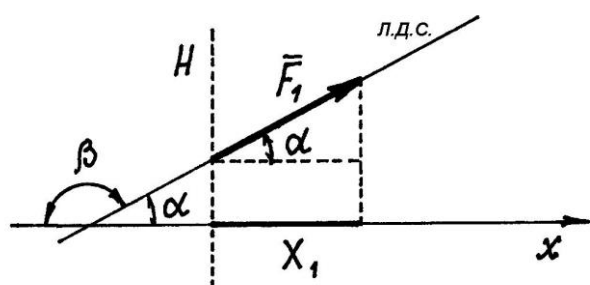


Рис. 2.2

Конечно, если вектор силы перпендикулярен оси ($\alpha = \frac{\pi}{2}$), проекция силы равна нулю.

Если найти сумму проекций всех действующих сил на тело на каждую из осей, и эти суммы будут равны нулю, значит, система сил находится в равновесии. Это условие называется *условие равновесия системы сил*. Для плоской системы сил это условие будет выглядеть следующим образом:

$$\sum X_i = 0; \quad \sum Y_i = 0;$$

Лекция 2

Тема занятий: Момент силы относительно точки. Понятие о паре сил. Момент пары сил. Свойство пар сил. Сложение пар сил.

Момент силы относительно точки

Если к телу приложить силу F в точке A (рис. 3.1), оно начнет вращаться вокруг шарнира O . Вращательный эффект будет определяться величиной силы и расстоянием

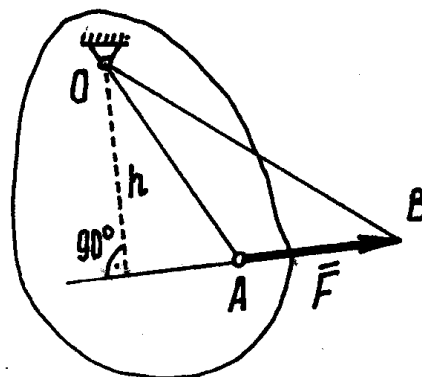


Рис. 3.1

от точки O до линии действия силы, т.е. произведением

$$M_O(F) = F \cdot h,$$

которое называется *моментом силы F относительно точки O* , а кратчайшее расстояние h от точки до линии действия силы – *плечом силы*.

Чтобы момент силы определял не только эффективность вращательного действия, но и направление вращения, условились ставить знак (+) или (-). Если сила стремится повернуть тело против часовой стрелки, (+); если по направлению вращения часовой стрелки, (-).

Если плечо $h = 0$, то есть линия действия силы проходит через точку O , момент силы равен нулю.

Заметим, что площадь треугольника ΔOAB равна

$$\frac{1}{2} F \cdot h = \frac{1}{2} M_O(F)$$

Значит, момент силы относительно точки численно равен двум площадям такого треугольника:

$$M_O(F) = 2 \text{пл.} \Delta OAB. \quad (3.1)$$

Для того чтобы момент силы определял еще и плоскость, в которой происходит вращение, будем изображать его вектором, направленным перпендикулярно плоскости, в которой расположены точка и сила. И направлять в такую сторону, что если смотреть оттуда, увидим вращение тела вокруг точки против часовой стрелки (рис. 3.2). Нетрудно доказать, что вектор момента силы относительно точки есть векторное произведение радиуса-вектора r точки приложения силы на вектор силы F :

$$M_O(F) = r \times F,$$

(радиус-вектор r – это вектор, проведенный из точки O и определяющий положение точки, расположенной на его конце).

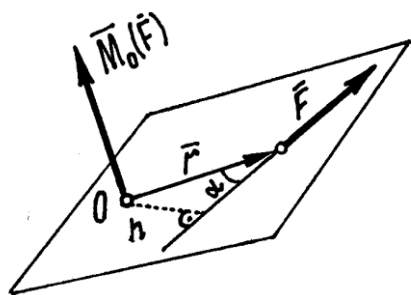


Рис. 3.2

Действительно, модуль векторного произведения $|r \times F| = r \cdot F \cdot \sin \alpha = Fh = M_O(F)$, и

направлен этот вектор $r \times F$ (по правилу определения направления вектора векторного произведения)

так же, как вектор $M_O(F)$.

Пара сил. Момент пары

Парой сил (или просто парой) называются две силы, равные по величине, параллельные и направленные

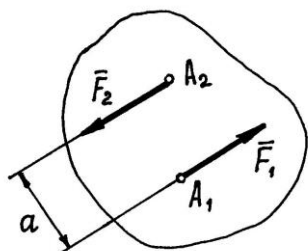


Рис.4.1

в противоположные стороны (рис. 4.1). Очевидно, $F_1 = F_2$, $F_1 = -F_2$ и

$$F_1 + F_2 = 0.$$

Несмотря на то, что векторная сумма сил равна нулю, эти силы не уравновешиваются. Под действием этих сил, пары сил, тело начнет вращаться. И вращательный эффект будет определяться *моментом пары*

$$m = F_1 \cdot a = F_2 \cdot a.$$

Кратчайшее расстояние a между параллельными линиями действия сил называется *плечом пары*.

Если пара вращает тело против часовой стрелки, момент ее считается положительным (см. рис. 4.1), если по часовой стрелке – отрицательным.

Для того чтобы момент пары указывал и плоскость, в которой происходит вращение, его представляют вектором.

Вектор момента пары m направляется перпендикулярно плоскости, в которой расположена пара, в такую сторону, что если посмотреть оттуда, увидим вращение тела против часовой стрелки (см. рис. 4.2)

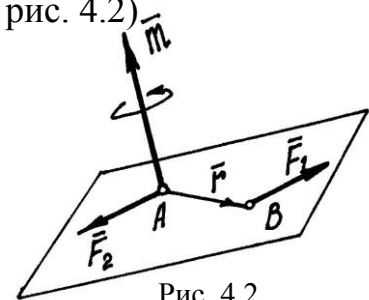


Рис. 4.2

Нетрудно доказать, что вектор момента пары

есть вектор векторного произведения $m = r \times F_1$ (см. рис. 4.2). И заметим, что он равен вектору

момента силы F_1 относительно точки A , ТОЧКИ

приложения второй силы: $m = M_A(F_1)$.

О точке приложения вектора m будет сказано ниже. Пока приложим его к точке A .

Свойства пар

1. Проекция пары сил на любую ось равна нулю. Это следует из определения пары.

2. Найдем сумму моментов сил F_1 и F_2 , составляющих пару, относительно какой-либо точки O (рис. 4.3).

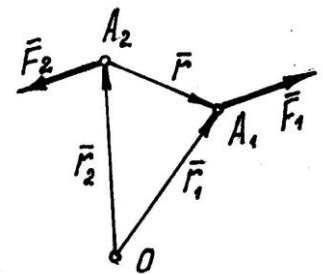


Рис. 4.3

Покажем радиусы-векторы точек A_1 и A_2 и вектор r , соединяющий эти точки. Тогда момент пары сил относительно точки O

$$M_O(F_1, F_2) = M_O(F_1) + M_O(F_2) = r_1 \times F_1 + r_2 \times F_2.$$

Но $r_1 = r_2 + r$. Поэтому $M_O(F_1, F_2) = (r_2 + r) \times F_1 +$

$+ r_2 \times F_2 = r_2 \times (F_1 + F_2) + r \times F_1$. Но $F_1 + F_2 = 0$, а $r \times F_1 = m$. Значит,

$$M_O(F_1, F_2) = m.$$

Момент пары сил относительно любой точки равен моменту этой пары.

Отсюда следует, что, во-первых, где бы не находилась точка O и, во-вторых, где бы не располагалась эта пара в теле и как бы она не была повернута в своей плоскости, действие ее на тело будет одинаково. Так как момент сил, составляющих пару, в этих случаях один и тот же, равный моменту этой пары m .

Поэтому можно сформулировать еще два свойства.

3. Пару можно перемещать в пределах тела по плоскости действия и переносить в любую другую параллельную плоскость.

4. Так как действие на тело сил, составляющих пару, определяется лишь величиной момента, произведением одной из сил на плечо, то у пары можно изменять силы и плечо, но так, чтобы момент пары остался прежним.

Все эти свойства можно объединить и сделать вывод, что пары с одинаковыми векторами момента m и неважно где расположенные на теле, оказывают на него равное действие. То есть такие пары эквивалентны.

Поэтому на расчётных схемах пару можно изображать в виде дуги со стрелкой, указывающей направление вращения, и рядом написать величину момента m . Или, если это пространственная конструкция, показывать только вектор момента этой пары. И вектор момента пары можно прикладывать к любой точке тела. Значит, вектор момента пары m – свободный вектор.

Сложение пар

Пусть даны две пары с моментами m_1 и m_2 , расположенные в пересекающихся плоскостях (рис. 4.4).

Сделаем у пар плечи одинаковыми, равными $a = AB$. Тогда модули сил, образующих первую пару, должны быть равны $F_1 = F_1' = \frac{m_1}{a}$, а образующих вторую пару: $F_2 = F_2' = \frac{m_2}{a}$.

Эти пары показаны на рис. 4.4, где $F_1' = -F_1$, $F_2' = -F_2$. И расположены они в своих плоскостях так, что плечи пар совпадают с прямой AB на линии пересечения плоскостей.

Сложив силы, приложенные к точкам A и B , построением параллелограммов получим их равнодействующую $R_B = F_1 + F_2$ и $R_A = F_1' + F_2'$. Так

как $R_B = -R_A$, то эти силы R_A и R_B будут образовывать пару, с моментом

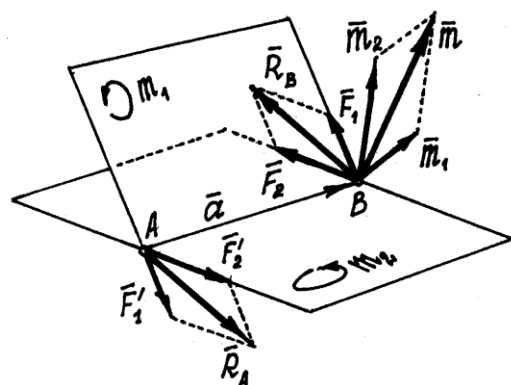


Рис. 4.4

$m = a \times RB$, где a – радиус-вектор точки B , совпадающий с AB .

Так как $RB = F_1 + F_2$, то момент полученной пары

$$m = a \times (F_1 + F_2) = a \times F_1 + a \times F_2 = m_1 + m_2.$$

Следовательно, в результате сложения пар, расположенных в пересекающихся плоскостях, получится пара сил. Момент ее будет равен векторной сумме моментов слагаемых пар.

При сложении нескольких пар, действующих в произвольных плоскостях, получим пару с моментом $m \equiv \sum m_i$.

Конечно, эта результирующая пара будет располагаться в плоскости, перпендикулярной вектору m .

Равенство нулю момента результирующей пары будет означать, что пары, действующие на тело, уравновешиваются. Следовательно, условие равновесия пар $\sum m_i = 0$.

Если пары расположены в одной плоскости, векторы моментов их будут параллельны. И момент результирующей пары можно определить как алгебраическую сумму моментов пар.

Лекция 3.

Тема занятий: Система сил произвольно расположенных на плоскости. Приведение сил к центру. Главный вектор и главный момент. Уравнения равновесия произвольной плоской системы сил. Теорема Вариньона.

Произвольная система сил. Приведение силы к точке

Ранее мы установили, что вектор силы можно переносить по линии действия в любую точку тела.

Попробуем силу F (рис. 5.1) перенести в какую-нибудь точку O , не расположенную на линии действия.

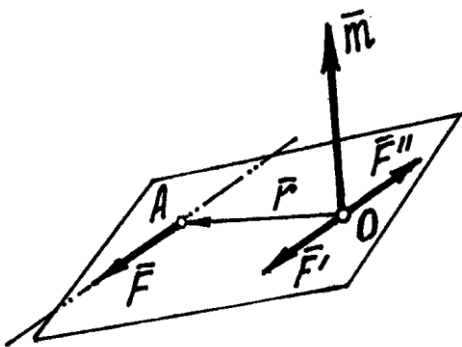


Рис. 5.1

Приложим к этой точке две уравновешивающиеся силы F' и F'' , параллельные силе F и равные ей по величине, $F' = F'' = F$.

В результате получим силу F' , равную силе F и приложенную к точке O . То есть мы как бы перенесли заданную силу F из точки A в точку O , но при этом появилась пара, образованная силами F и F'' . Момент этой пары $m = r \times F = M_0(F)$, равен моменту заданной силы F относительно точки O .

Процесс замены силы F равной ей силой F' , приложенной к точке O , и парой называется приведением этой силы к точке O .

Точка O называется точкой приведения; сила F' , приложенная к точке приведения, - приведенной силой. Появившаяся пара – присоединенной парой.

Сложение произвольно расположенных сил

Пусть дана система, состоящая из нескольких произвольно расположенных сил (на рис. 5.2 показаны три силы F_1, F_2, F_3). Требуется сложить эти силы и посмотреть, что в результате получится.

Приведем все силы к произвольно выбранной точке O , центру приведения. Получим систему приведенных сил, приложенных к точке O , равных заданным силам: $F_1' = F_1$,

$F_2' = F_2$, $F_3' = F_3$, и систему присоединенных пар, моменты которых равны векторам моментов заданных сил относительно центра приведения O :

$$m_1 = M_O(F_1), \quad m_2 = M_O(F_2),$$

$m_3 = M_O(F_3)$ (на рис. 5.2 самих пар нет, показаны только векторы их моментов).

Сложив первую систему, систему сходящихся приведенных сил, например, построением многоугольника сил $OABC$, получим их равнодействующую R' , которая равна векторной сумме этих приведенных сил, а значит, и заданных сил, потому что они векторно равны,

$$R' = \sum F_i' = \sum F_i. \quad (5.1)$$

А сложив систему пар, например, построением многоугольника их век-

торов моментов $OA'B'C'$, получим пару, момент которой M_O равен векторной суммой моментов присоединенных пар или суммой моментов заданных сил относительно центра приведения

$$M_O = \sum m_i = \sum M_O(F_i). \quad (5.2)$$

Сила R' , равная векторной сумме заданных сил, называется *главным вектором* этих сил. Приложена эта сила к центру приведения.

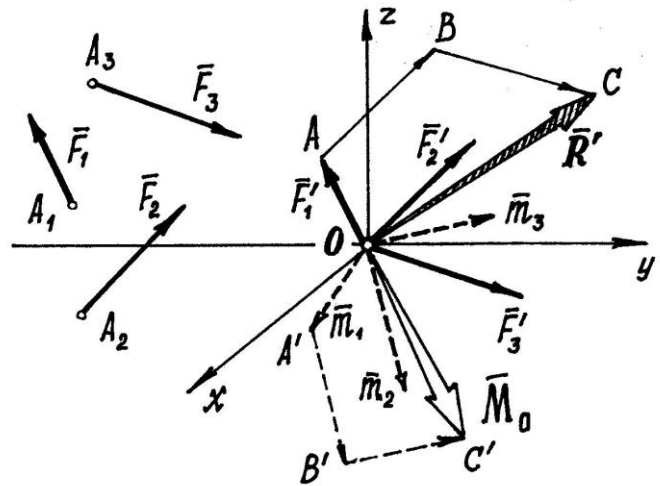


Рис. 5.2

Момент M_O , равный векторной сумме моментов заданных сил относительно центра приведения, называется *главным моментом* этих сил относительно центра приведения.

Теорема Вариньона

Пусть на тело действует несколько сил F_i ($i=1, 2, \dots, n$) и у них существует равнодействующая $R = \sum F_i$, приложенная к центру приведения O (рис. 5.3).

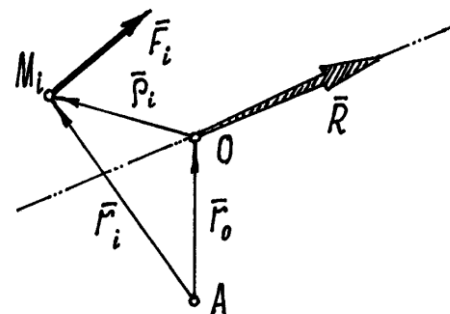


Рис. 5.3

Покажем радиусы-векторы, проведенные из некоторой точки A : r_O – радиус-вектор точки приложения равнодействующей; ρ_i – точек M_i , точек приложения сил F_i , где $i=1, 2, \dots, n$. И добавим векторы ющие точку O с точками M_i .

Момент сил F_i относительно точки A : $M_A(F_i) = r_i \times F_i$. А так как $r_i = r_O + \rho_i$, то $M_A(F_i) = r_O \times F_i + \rho_i \times F_i = M_O(F_i) + M_{AO}(F_i)$.

Сумма моментов всех действующих сил F_i относительно точки A : $M_A(R) = \sum (r_O \times F_i + \rho_i \times F_i) = r_O \times \sum F_i + \sum \rho_i \times F_i = M_O(R) + \sum M_{AO}(F_i)$. А сумма $\sum M_{AO}(F_i) = M_{AO}(R)$, равна главному моменту сил относительно точки O , который в этом частном случае равен нулю. Поэтому

$$\sum M_A(F_i) = M_A(R).$$

Если у системы сил имеется равнодействующая, то момент равнодействующей относительно любой точки A равен векторной сумме моментов всех сил относительно этой точки

$$M_A(R) = \sum M_A(F_i). \quad (5.8)$$

Следствие. Если спроектировать это векторное равенство на какую-нибудь ось, например z , проходящую через точку A , то, имея в виду доказанный ранее результат (3.4), получим теорему Вариньона в другой форме.

Если у системы сил имеется равнодействующая, то момент ее относительно любой оси равен алгебраической сумме моментов всех сил относительно этой оси

$$M_z(R) = \sum M_z(F_i) \quad (5.9)$$

Условия равновесия произвольной плоской системы сил

Для произвольной плоской системы сил, уравнения равновесия выглядят следующим образом:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0; \\ \sum Y_i &= 0; \\ \sum M_0(F_i) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

Также, для плоской системы сил можно составить и два, и три уравнения моментов. Поэтому возможны три других варианта:

$$\left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0, \\ \sum Y_i &= 0, \\ \sum M_{Ai} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{I} \quad \left. \begin{aligned} \sum X_i &= 0, \\ \sum M_{Ai} &= 0, \\ \sum M_{Bi} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{II} \quad \left. \begin{aligned} \sum M_{Ai} &= 0, \\ \sum M_{Bi} &= 0, \\ \sum M_{Ci} &= 0. \end{aligned} \right\} \text{III} \quad (5.12)$$

Распределённые силы

Ранее мы рассматривали действие на тело лишь сосредоточенных сил, сил приложенных к одной точке. Но можно привести ряд примеров, когда силы распределяются по всему объёму тела, по площади или по длине. Кстати, вес тела, сила тяжести, это тоже распределённая сила, распределённая по объёму тела, потому что на каждую точку его действует сила, её вес. А при решении задач мы вес тела показываем в виде сосредоточенной силы \vec{P} , равнодействующей всех сил, приложенной к центру тяжести.

Можно встретить силы распределённые по плоскости, по поверхности (например, снег, лежащий на крыше; давление газа или жидкости на поверхность сосуда). И силы, которые распределяются по линии.

Все эти распределённые силы характеризуются их интенсивностью – силой q , действующей на единицу объёма, площади или длины тела. Размерность интенсивности - $\text{Н} \cdot \text{м}^{-3}$, $\text{Н} \cdot \text{м}^{-2}$, $\text{Н} \cdot \text{м}^{-1}$, соответственно.

Действие таких сил на тело заменяем одной силой \vec{Q} , равнодействующей этих распределённых сил.

Проще всего определить её для параллельных сил, распределённых по длине, по прямой линии AB (рис.6.8).

Выделим на расстоянии x участок линии длиной dx . На этом участке на тело действует dQ элементарная сила $dQ = q \cdot dx$.

И, интегрируя по всей длине $AB = l$, получим равнодействующую $Q = \int_0^l dQ = \int_0^l q dx$. Значит, величина равнодействующей равна площади заключённой между линией $q = q(x)$ и осью x .

Точку приложения силы \vec{Q} или, лучше, линию действия её, можно найти с помощью теоремы Вариньона.

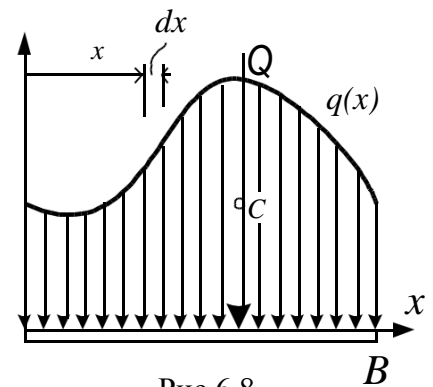


Рис.6.8

Момент равнодействующей $M_A(Q) = Q \cdot xc$, а сумма моментов элементарных сил dQ относительно той же точки A равна $\sum M_A(dQ) = \int_0^l dQ \cdot x$.

Приравняв их, получим $x = \frac{\int_0^l dQ \cdot x}{Q}$, но по аналогичной формуле (6.4) определяется координата центра тяжести рассматриваемой площади. Значит, точка приложения силы Q к телу и линия действия её определяются центром тяжести этой площади.

Если распределение нагрузки определяется линейным законом, модуль равнодействующей Q и линия действия её находится довольно просто (рис.6.9,а и b).

А при распределении по закону трапеции (рис.6.9,с) её нужно разделить на треугольник и прямоугольник и находить соответственно две силы

$$Q_1 = \frac{1}{2} q_1 l \quad \text{и} \quad Q_2 = q_2 l.$$

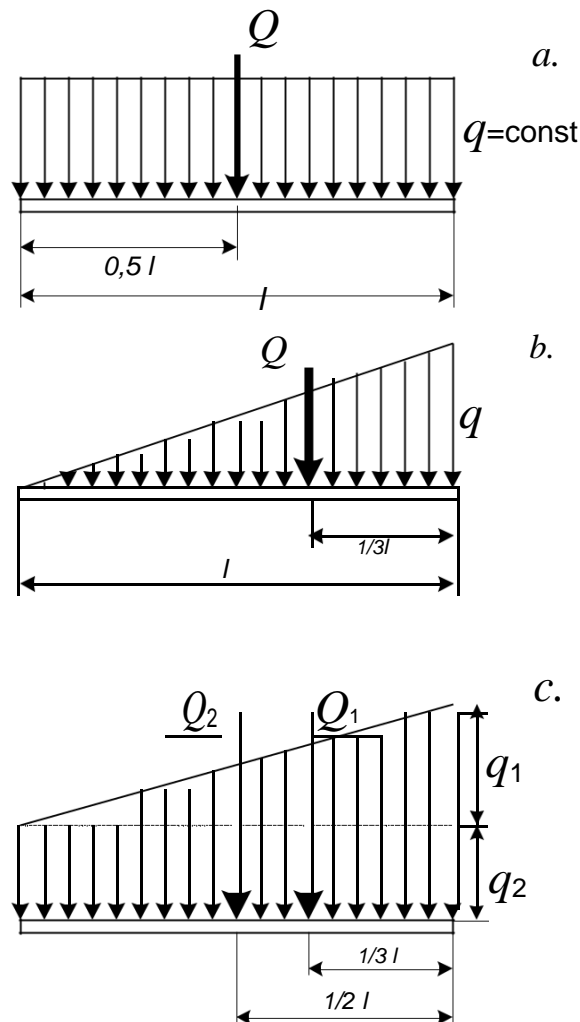


Рис.6.9

Рис. 6.9.

Лекция 4.

Тема занятий: Центр тяжести тела. Способы нахождения центра тяжести. Распределенные силы.

Сложение параллельных сил. Центр параллельных сил

Пусть даны две параллельные силы F_1 и F_2 , направленные в одну сторону и приложенные к точкам A_1 и A_2 (рис. 6.1).

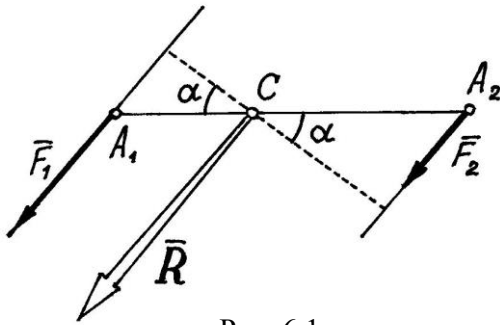


Рис. 6.1

Отсюда $\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}$. То есть точка приложения равнодействующей де-

лит расстояние между точками A_1 и A_2 на части, обратно пропорциональные силам.

Если параллельные силы направлены в противоположные стороны (рис. 6.2), то аналогично можно доказать, что равнодействующая по величине будет равна разности сил: $R = F_2 - F_1$ (если $F_2 > F_1$), параллельна им, направлена в сторону большей силы и расположена за большей силой – в точке C . А расстояния от точки C до точек приложения сил обратно пропорциональны силам: $\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}$.

$$\frac{A_1C}{A_2C} = \frac{F_2}{F_1}$$

Следует заметить, что если точка приложения равнодействующей расположена на одной прямой с точками A_1 и A_2 , точками приложения сил, то при повороте этих сил в одном направлении на одинаковый угол равнодействующая также повернется вокруг точки приложения C в том же направлении и останется параллельной им.

Такая точка приложения равнодействующей называется *центром параллельных сил*.

Конечно, если хотя бы одну из сил перенести по своей линии действия в другую точку, то и точка приложения равнодействующей, центр параллельных сил, тоже переместится по линии действия.

Следовательно, положение центра параллельных сил зависит от координат точек приложения сил.

Конечно, величина их равнодействующей $R = F_1 + F_2$. Вектор ее параллелен силам и направлен в ту же сторону. С помощью теоремы Вариньона (5.8) найдем точку приложения равнодействующей – точку C . По этой теореме

$$M_C(R) = \sum M_C(F_i). \text{ Значит,}$$

$$0 = F_1 \cdot A_1C \cdot \cos \alpha - F_2 \cdot A_2C \cdot \cos \alpha.$$

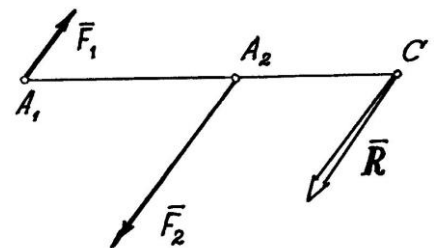


Рис. 6.2

2.

Центром нескольких параллельных сил, найденным последовательным сложением каждой двух сил, будем называть точку C , радиус-вектор которой определяется формулой

$$r_c = \frac{\sum F_i \cdot r_i}{\sum F_i} = \frac{\sum F_i \cdot r_i}{R}, \quad (6.1)$$

где r_i – радиусы-векторы точек приложения сил; $R = \sum F_i$ – величина равнодействующей параллельных сил, равная алгебраической сумме этих сил (знак силы определяется направлением, которое заранее выбирается и считается положительным).

Используя равенство (6.1), нетрудно найти координаты центра параллельных сил. Если радиусы-векторы откладывать из начала координат, то проекции радиусов-векторов точек на оси будут равны координатам этих точек. Поэтому, проектируя векторное равенство (6.1) на оси, получим

$$x_c = \frac{\sum F_i x_i}{R}; \quad y_c = \frac{\sum F_i y_i}{R}; \quad z_c = \frac{\sum F_i z_i}{R}, \quad (6.2)$$

где x_i, y_i, z_i – координаты точек приложения сил.

Центр тяжести тел

На все точки тела, находящегося вблизи поверхности Земли, действуют силы – силы тяжести этих точек или их вес P_i . Вообще эти силы будут сходящимися – линии действия их пересекаются в центре Земли. Но если пренебречь размерами тела в сравнении с размерами Земли, то можно считать их параллельными.

Центр этих параллельных сил, сил тяжести точек, называется *центром тяжести* тела.

Значит, находить центр тяжести тел можно как центр параллельных сил по формулам (6.1) или (6.2). Например, координаты его

$$x_c = \frac{\sum P_i x_i}{P}; \quad y_c = \frac{\sum P_i y_i}{P}; \quad z_c = \frac{\sum P_i z_i}{P}, \quad (6.3)$$

где P_i – вес каждой точки тела, а $P = \sum P_i$ – вес всего тела.

При определении центра тяжести полезны несколько теорем.

1. Если однородное тело имеет плоскость симметрии, то центр тяжести его находится в этой плоскости.

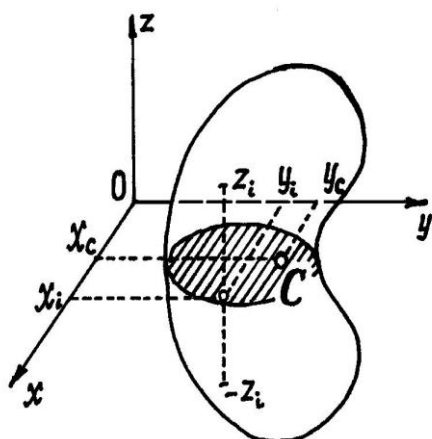


Рис. 6.3

Если оси x и y расположить в этой плоскости симметрии (рис. 6.3), то для каждой точки с координатами x_i, y_i, z_i можно отыскать точку с координатами $x_i, y_i, -z_i$. И координата z_c по формуле (6.3) будет равна нулю, т.к. в сумме $\sum P_i z_i$ все члены, имеющие противоположные

знаки, попарно уничтожаются. Значит, центр тяжести расположен в плоскости симметрии.

2. Если однородное тело имеет ось симметрии, то центр тяжести тела находится на этой оси.

Действительно, в этом случае, если ось z провести по оси симметрии, для каждой точки с координатами x_i, y_i, z_i можно отыскать точку с координатами $-x_i, -y_i, z_i$ и координаты x_c и y_c , вычисленные по формулам (6.3), окажутся равными нулю.

Аналогично доказывается и третья теорема.

3. Если однородное тело имеет центр симметрии, то центр тяжести тела находится в этой точке.

И еще несколько замечаний.

Первое. Если тело можно разделить на части, у которых известны вес и положение центра тяжести, то незачем рассматривать каждую точку тела, и в формулах (6.3) P_i – можно определять как вес соответствующей части, а x_i, y_i, z_i – как координаты ее центра тяжести.

Второе. Если тело однородное, то вес отдельной части его $P_i = V_i \cdot \gamma$, где γ – удельный вес материала, из которого сделано тело, а V_i – объем этой части тела. И формулы (6.3) примут более удобный вид. Например, $x_c = \frac{\sum P_i x_i}{P} = \frac{\sum V_i \cdot \gamma \cdot x_i}{V \cdot \gamma} = \frac{\sum V_i x_i}{V}$. И аналогично $y_c = \frac{\sum V_i y_i}{V}$, $z_c = \frac{\sum V_i z_i}{V}$, где $V = \sum V_i$ – объем всего тела.

Третье замечание. Если тело состоит из однородных пластин одинаковой, малой толщины, то объем каждой пластины $V_i = S_i \cdot d$, где S_i – площадь пластины, d – толщина. И координаты центра тяжести будут определяться только с помощью площадей:

$$x_c = \frac{\sum S_i x_i}{S}; \quad y_c = \frac{\sum S_i y_i}{S}; \quad z_c = \frac{\sum S_i z_i}{S}, \quad (6.4)$$

где x_i, y_i, z_i – координаты центра тяжести отдельных пластин; $S = \sum S_i$ – общая площадь тела.

Четвертое замечание. Если тело состоит из стержней, прямых или криволинейных, однородных и постоянного сечения, то вес их $P_i = l_i \cdot \rho$, где l_i – длина, ρ – вес единицы длины (погонного метра), а координаты центра тяжести будут определяться с помощью длин отдельных участков:

$$x_c = \frac{\sum l_i x_i}{L}; \quad y_c = \frac{\sum l_i y_i}{L}; \quad z_c = \frac{\sum l_i z_i}{L},$$

где $x_i; y_i; z_i$ – координаты центра тяжести i -го участка; $L = \sum l_i$.

Лекция 5.

Тема занятий: Кинематика точки. Способы задания движения. Уравнения траектории точки. Определение скорости и ускорения точки при разных способах задания движения.

Кинематика точки

Способы задания движения точки

Прежде чем заняться исследованием движения точки, определением характеристик этого движения, надо научиться определять положение точки в пространстве в нужный момент времени.

Для этого существует несколько способов задания движения.

1. Естественный способ

Чтобы определить движение точки естественным способом, должны быть заранее заданы (рис.8.1): траектория движения точки (линия, по которой точка движется); начало отсчёта (точка O , от которой по траектории отсчитывается расстояние s до движущейся точки M); направление, в котором откладываются положительные значения характеристик движения (указывается стрелкой либо знаками $+$ и $-$); закон движения $s = s(t)$.

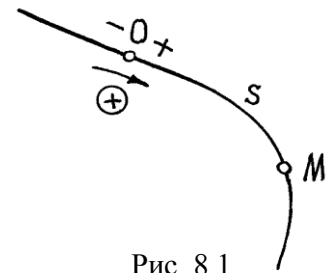


Рис. 8.1

2. Координатный способ

Этим способом положение точки в какой-либо системе координат определяется её координатами x , y , z (рис. 8.3). При движении точки эти координаты изменяются. Поэтому, чтобы определить положение точки в нужный момент времени, должны быть заданы координаты как функции времени t :

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t).$$

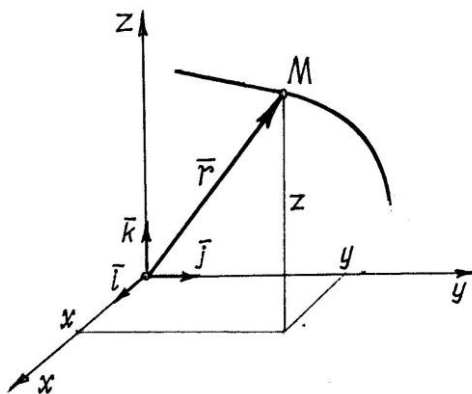


Рис. 8.3

Эти функции называются *уравнениями движения точки*.

Уравнения движения позволяют определить не только положение точки в любой момент времени, но и все характеристики движения, в том числе и траекторию движения.

Чтобы получить уравнение траектории, надо из уравнений движения исключить параметр t .

3. Векторный способ

Положение точки можно определить заданием вектора r , проведённого из неподвижной точки O , предполагая, что точка M находится на конце этого вектора (рис. 8.3). Этот вектор называется *радиусом-вектором точки M* . Конечно, чтобы определить положение точки в любой момент времени, радиус-вектор должен быть задан как функция времени $r = r(t)$.

Нетрудно установить зависимость между векторным и координатным способами задания движения.

Разложим вектор r на составляющие по осям координат:

$r = r_x i + r_y j + r_z k$, где r_x, r_y, r_z – проекции вектора на оси; i, j, k – единичные векторы, направленные по осям, орты осей. Так как начало r вектора находится в начале координат, то проекции вектора будут равны координатам точки M . Поэтому

$$r = x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k. \quad (8.1)$$

Траектория движения точки M – это линия, которую описывает конец изменяющегося радиуса-вектора. Эта линия называется *годографом вектора r* .

Скорость точки

Известно, что при движении точки по прямой линии с постоянной скоростью, равномерно, скорость её определяется делением пройденного расстояния s на время $v = \frac{s}{t}$. При неравномерном движении эта формула не годится. И метод определения скорости зависит от способа задания движения.

1) *Скорость точки при векторном способе задания движения* Пусть точка M за малое время Δt

перешла из положения M в M_1 . При этом радиус-вектор её изменится на

$\Delta r = r_1 - r$ (рис. 8.5). Так как время Δt мало, можно предположить, что часть траектории MM_1 почти прямая, равна хорде Δr и движение близко к равномерному. Тогда приближённо скорость

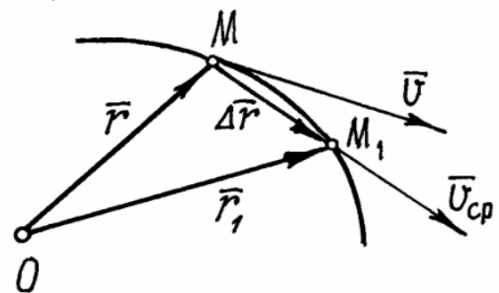


Рис. 8.5

точки можно найти так: $v_{\text{нб}} = \frac{\Delta r}{\Delta t}$ (так как Δr – вектор, то и $v_{\text{нб}}$ – вектор).

Конечно, чем меньше время Δt , тем ближе будет значение скорости к истинному. Поэтому

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} v_{\text{нб}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{dr}{dt}.$$

Итак, скорость точки есть производная от радиуса-вектора точки по времени

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}.$$

Направление вектора скорости \vec{v} находим как предельное направление $\vec{v}_{\text{нб}}$ при $\Delta t \rightarrow 0$, то есть при приближении точки M_1 к точке M . Но такой процесс определяет касательную в точке M . Следовательно, вектор скорости \vec{v} направлен по касательной к траектории и в сторону движения. И наоборот, вектор скорости определяет направление движения точки в данный момент времени.

2. Скорость точки при координатном способе задания движения

Как уже установлено, $\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$. Учитывая (8.1), получим

$$\vec{v} = \frac{d}{dt} (x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}) = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j} + \frac{dz}{dt}\vec{k}. \quad (8.2)$$

Вектор скорости как всякий вектор можно разложить на составляющие по осям

$$\vec{v} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} + v_z\vec{k}. \quad (8.3)$$

Сравнивая (8.2) и (8.3), устанавливаем, что проекции вектора скорости на оси есть первые производные от соответствующих координат по времени:

$$v_x = \frac{dx}{dt} = \dot{x}; \quad v_y = \frac{dy}{dt} = \dot{y}; \quad v_z = \frac{dz}{dt} = \dot{z}.$$

И модуль скорости

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2} = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}. \quad (8.4)$$

Направление вектора скорости можно определить графическим способом, откладывая в масштабе соответствующие составляющие вектора параллельно осям с учетом знака, или с помощью направляющих косинусов: $\cos \alpha = \frac{v_x}{v}$; $\cos \beta = \frac{v_y}{v}$; $\cos \gamma = \frac{v_z}{v}$, где α, β, γ – углы между вектором \vec{v} и направлениями осей x, y, z соответственно.

3. Скорость точки при естественном способе задания движения

Величину скорости (см. п.1) можно определить как предел (Δr – длина хорды MM_1):

$$v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta t} \cdot \frac{\Delta s}{\Delta s} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta r}{\Delta s} \cdot \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

где Δs – длина дуги MM_1 . Первый предел равен единице, второй предел – производная $\frac{ds}{dt}$.

Следовательно, скорость точки есть первая производная по времени от закона движения

$$v = \frac{ds}{dt} = s.$$

Направлен вектор скорости, как было установлено ранее, по касательной к траектории. Если величина скорости в данный момент будет больше нуля, то вектор скорости направляется в положительном направлении (см. §1, п.1).

Ускорение точки

Ускорение точки – это характеристика движения точки, которая определяет изменение вектора скорости по величине и по направлению.

Если точка движется равнопеременно и по прямой линии, то величина ускорения определяется делением изменения скорости на время, $W = \frac{\Delta v}{t}$. В общем же случае определение ускорения зависит от способа задания движения точки.

1. Ускорение точки при векторном способе задания движения

Пусть за время Δt точка перешла из положения M в M_1 и за это время вектор скорости изменился на $\Delta \vec{v}$ (рис. 8.6).

Полагая из-за малости времени Δt дугу MM_1 почти прямой, а движение близким к равнопеременному, найдём приближенное, среднее ускорение $\vec{W}_{\text{ср}} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ (так как $\Delta \vec{v}$ – вектор, то и $\vec{W}_{\text{ср}}$ – вектор, направленный параллельно $\Delta \vec{v}$). Конечно, чем меньше Δt , тем точнее будет определено ускорение. Поэтому точное ускорение

$$W = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \vec{W}_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt}.$$

Следовательно, ускорение точки есть производная от вектора скорости или вторая производная от радиуса-вектора точки по времени

$$W = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}. \quad (8.5)$$

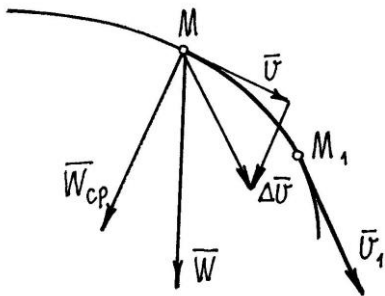


Рис. 8.6

Направление вектора ускорения W можно определить как предельное положение вектора

$\vec{W}_{\text{ср}}$ при $\Delta t \rightarrow 0$. Нетрудно обнаружить, что ускорение не направлено по касательной, а

направлено, вероятно, в сторону вогнутости траектории (см. рис. 8.6).

2. Ускорение точки при координатном способе задания движения

Подставив в (8.5) выражение радиуса-вектора r через координаты (8.1), получим:

$$W = \frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2} (x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k) = \frac{d^2 x}{dt^2} i + \frac{d^2 y}{dt^2} j + \frac{d^2 z}{dt^2} k.$$

Отсюда следует, что проекции вектора ускорения на оси равны вторым производным по времени от соответствующих координат точки

$$W_x = \frac{d^2 x}{dt^2} = \ddot{x}; \quad W_y = \frac{d^2 y}{dt^2} = \ddot{y}; \quad W_z = \frac{d^2 z}{dt^2} = \ddot{z}.$$

Поэтому модуль вектора ускорения

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2} = \sqrt{\ddot{x}^2 + \ddot{y}^2 + \ddot{z}^2}.$$

Направление вектора можно найти или графическим способом, откладывая в масштабе составляющие параллельно осям с учётом знака, или с помощью направляющих косинусов: $\cos \alpha = \frac{W_x}{W}$; $\cos \beta = \frac{W_y}{W}$; $\cos \gamma = \frac{W_z}{W}$ (α, β, γ – углы между вектором W и направлениями осей x, y, z соответственно).

3. Ускорение точки при естественном способе задания движения

Прежде всего – несколько сведений из дифференциальной геометрии.

Покажем в точке M на пространственной линии три взаимно перпендикулярные оси. Ось T направим по касательной к линии (рис. 8.8). Оси N и B – в плоскости, перпендикулярной оси T (в нормальной плоскости I). Ось N , которая называется главной нормалью,

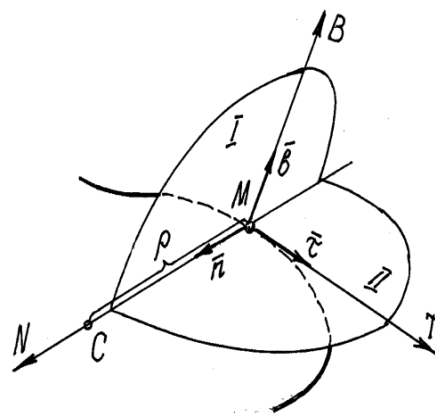


Рис. 8.8

направлена по линии пересечения нормальной плоскости I и соприкасающейся плоскости II в сторону вогнутости линии.

Плоскость II названа соприкасающейся потому, что она как бы приставлена сбоку к кривой, соприкасается с ней.

Ось B , перпендикулярная N и T , называется бинормалью (“вторая” нормаль).

При движении точки M эти оси движутся вместе с нею. Называются эти оси *естественными осями*. Единичные векторы $\vec{\tau}$, \vec{n} , \vec{b} , направленные по осям, являются ортами соответствующих осей.

Производная $\frac{d\vec{\tau}}{ds} = k\vec{n}$ характеризует крутизну, кривизну линии в точке M , k – кривизна линии. А величина, обратная кривизне $\rho = 1/k$, называется *радиусом кривизны* в точке M . Точка C , расположенная на главной нормали N на расстоянии $CM = \rho$, называется *центром кривизны*.

Вектор скорости точки направлен по оси T . Поэтому его можно записать так: $\vec{v} = v \cdot \vec{\tau}$ (v – алгебраическая величина скорости v).

Ускорение точки

$$W = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v \cdot \vec{\tau}) = \frac{dv}{dt} \vec{\tau} + v \frac{d\vec{\tau}}{dt}.$$

Следовательно, ускорение состоит из двух векторов. Первый вектор $W_1 = \frac{dv}{dt} \vec{\tau}$. Величина его равна $\frac{dv}{dt}$, а направлен вектор по оси T .

Чтобы определить величину и направление второй составляющей, надо найти производную

$$\frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{d\vec{\tau}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = k n v = \frac{v}{\rho} n.$$

Поэтому второй вектор $\vec{W}_2 = v \frac{d\vec{\tau}}{dt} = \frac{v^2}{\rho} \vec{n}$.

Теперь становится понятно, что вектор W_2 по модулю будет равен $\frac{v^2}{\rho}$, и направлен по главной нормали, по оси N , так же как единичный вектор n .

Так как первая составляющая ускорения направлена по касательной к траектории, это ускорение называют *касательным ускорением* $W_\tau = \frac{dv}{dt}$; вторую составляющую соответственно её направлению – *нормальным ускорением* $W_n = \frac{v^2}{\rho}$. Поэтому полное ускорение

$$W = W_\tau + W_n. \quad (8.6)$$

Величина этих составляющих ускорения

$$W_\tau = \frac{dv}{dt}; \quad W_n = \frac{v^2}{\rho}.$$

Обратим внимание на то, что вектор ускорения W находится в соприкасающейся плоскости, проекция его на бинормаль B равна нулю, $W_b = 0$.

Так как векторы W_τ и W_n перпендикулярны друг другу, то

$$W = \sqrt{W_\tau^2 + W_n^2}.$$

Рассмотрим два частных случая.

Первый случай. Точка движется по прямой линии с переменной скоростью. Нормальное ускорение $W_n = \frac{v^2}{\rho} = 0$, равно нулю, так как радиус кривизны прямой линии равен бесконечности. А касательное

равно нулю. Поэтому $W = W_\tau$.

Второй случай. Точка движется по кривой линии, но с постоянной по величине скоростью. В этом случае $W_\tau = \frac{dv}{dt} = 0$, а $W_n = \frac{v^2}{\rho} \neq 0$, так как радиус кривизны ρ конечная величина. Значит $W = W_n$.

Сравнение этих двух случаев позволяет сделать вывод, что касательное ускорение характеризует изменение вектора скорости по величине, а нормальное ускорение – изменение вектора скорости по направлению.

Лекция 6.

Тема занятий: Поступательное движение твердого тела. Вращение тела вокруг неподвижной оси. Уравнения вращения. Угловая скорость и угловое ускорение тела. Скорость и ускорение тела при вращении тела вокруг неподвижной оси.

Поступательное движение тела

Поступательным движением тела называется такое движение, при котором любая прямая, проведённая в теле, всё время перемещается параллельно своему первоначальному положению (рис. 9.1).

Конечно, траектории точек при поступательном движении тела могут быть и кривыми линиями.

Проведём в теле радиус-вектор r , определяющий положение какой-нибудь точки B относительно A (рис. 9.1). Так как этот вектор при поступательном движении твёрдого тела всё время перемещается параллельно и длина его неизменна ($r = \text{const}$), то траектория точки B получается параллельным переносом траектории точки A , определяемой вектором r .



Рис.9.1

Следовательно, траектории этих точек A и B , а значит, и всех точек тела будут одинаковыми.

Если же положение точек A и B определять радиусами-векторами r_A и r_B такими, что $r_B = r_A + r$ (см. рис.9.1), то, взяв производную

по времени, получим (при $r = \text{const}$): $\frac{dr_B}{dt} = \frac{dr_A}{dt}$ или $\vec{v}_B = \vec{v}_A$. Дифферен-

цируя ещё раз, получим $W_B = W_A$.

Из доказательства следует, что все точки тела движутся одинаково: по одинаковым траекториям и в каждый момент времени имеют равные скорости и равные ускорения.

Поэтому для исследования поступательного движения тела достаточно определить лишь движение какой-нибудь одной его точки. Что мы уже умеем делать (VIII. Кинематика точки).

Вращение тела вокруг неподвижной оси

Вращением тела вокруг неподвижной оси называется такое движение, при котором можно указать у тела хотя бы две точки, всё время остающиеся неподвижными.

Прямая, проведённая через эти точки, является осью вращения, неподвижной осью. Этой оси задаётся направление стрелкой (рис. 9.2).

Положение тела вполне определяется углом поворота φ вокруг оси. Этот угол измеряется в радианах. Чтобы определить положение тела в любой момент времени, должен быть задан угол поворота как функция времени $\varphi = \varphi(t)$.

Эта функция называется *уравнением вращения тела*.

Если в данный момент времени угол φ положительный ($\varphi > 0$), то он откладывается против часовой стрелки. При этом надо смотреть на тело со стороны стрелки оси.

Конечно, траектории всех точек тела – окружности, так как расстояния от точек до оси всё время остаются неизменными. Эти окружности расположены в плоскостях, перпендикулярных оси.

Поскольку траектории точек известны, то можно задать движение точек естественным способом. Закон движения точки по траектории, по окружности, получится таким

$$s = R\varphi = s(t).$$

Пусть за время Δt угол изменился на $\Delta\varphi$. Тогда отношение их будет характеризовать скорость вращения. Эта величина $\omega_{\text{ср}} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ называется средней угловой скоростью тела. Конечно, чем меньше Δt , тем точнее будет определена эта скорость. Поэтому точное значение угловой скорости

$$\omega = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \omega_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \frac{d\varphi}{dt}.$$

Следовательно, угловая скорость есть первая производная по времени от уравнения вращения, от угла поворота

$$\omega = \frac{d}{dt} \varphi = \dot{\varphi}.$$

Единица измерения угловой скорости – радианы в секунду. Так как радиан безразмерная величина, то обозначают просто с^{-1} . В технике скорость

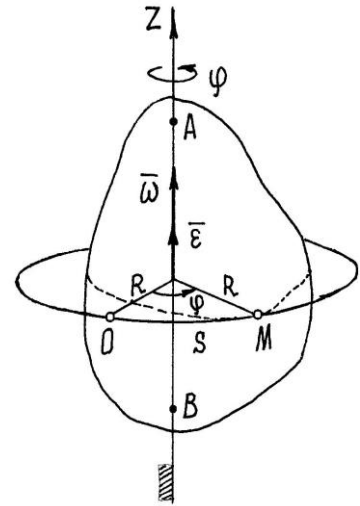


Рис. 9.2

вращения часто определяют числом оборотов в минуту n . Зависимость между

$$\text{этимми единицами измерения: } \omega = \frac{\pi}{30} n .$$

Если в данный момент времени окажется $\omega > 0$, то это будет означать, что вращение происходит против часовой стрелки (если смотреть на тело со стороны стрелки оси). Угловая скорость указывает направление вращения тела.

Угловую скорость можно изобразить вектором ω , отложенным по оси вращения из какой-нибудь точки в такую сторону, что, если смотреть с его конца, увидим вращение тела против часовой стрелки (рис. 9.2).

Пусть за время Δt угловая скорость изменилась на величину $\Delta\omega$.

Тогда отношение $\frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ будет определять среднее ускорение вращения, угловое ускорение. Точным значением его будет предел среднего при $\Delta t \rightarrow 0$

$$\varepsilon = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \varepsilon_{\text{ср}} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt} .$$

Угловое ускорение есть первая производная от угловой скорости или вторая производная от угла поворота по времени

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = \ddot{\varphi}$$

Угловое ускорение также изображают вектором, отложенным по оси вращения. Направление вектора определяется знаком (+) или (-) величины ускорения ε в данный момент времени.

Комбинация знаков угловой скорости ω и углового ускорения ε определяет характер движения тела. Если их знаки одинаковы, тело вращается ускоренно. Если разные – замедленно.

Так при $\omega > 0$ и $\varepsilon > 0$ тело вращается против часовой стрелки ускоренно. При $\omega < 0$ и $\varepsilon < 0$ – по часовой стрелке ускоренно. При $\omega < 0$ и $\varepsilon > 0$ – по часовой стрелке замедленно. При $\omega > 0$ и $\varepsilon < 0$ – против часовой стрелки замедленно.

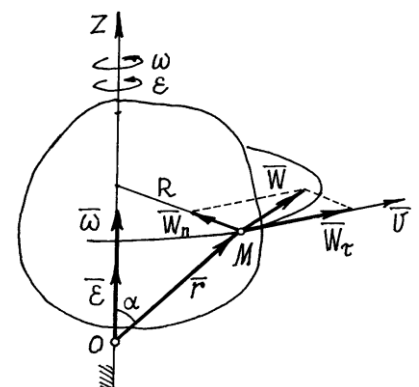
Поскольку движение точек вращающегося тела задано естественным способом, то нетрудно найти скорости этих точек. Например, скорость точки M (рис. 9.3)

$$v = \frac{ds}{dt} = \frac{d}{dt} (R\varphi) = R \frac{d\varphi}{dt} = R\omega .$$

Направлен вектор скорости по касательной к траектории, к окружности, то есть перпендикулярно её радиусу, в сторону вращения.

Используя правило определения векторного произведения двух векторов, можно доказать, что вектор скорости точки

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r} , \quad (9.1)$$



есть векторное произведение вектора угловой скорости ω на радиус вектор точки, которое, действительно, совпадает с вектором скорости и по направлению, и по модулю $v = \omega r \sin \alpha = \omega R$.

Ускорение точки тела, см. формулу (8.6), $W = W_n + W_\tau$, где нормальное ускорение $W_n = \frac{v^2}{\rho} = \frac{R^2 \omega^2}{R} = R\omega^2$, а касательное $W_\tau = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega) = R \frac{d\omega}{dt} = R\varepsilon$. (9.2) Рис. 9.3

Направляются векторы этих двух ускорений соответственно по нормали, то есть по радиусу окружности, к оси и по касательной к окружности в соответствии с направлением углового ускорения ε .

Лекция 7.

Тема занятий: Динамика точки. Основные понятия и определения. Законы механики. Две основные задачи динамики.

Динамика точки. Аксиомы динамики

В кинематике исследовалось движение тел без учета причин, обеспечивающих это движение. Рассматривалось движение, заданное каким-либо способом, и определялись траектории, скорости и ускорения точек этого тела.

В динамике решается более сложная и важная задача. Определяется движение тел под действием сил, приложенных к ним, с учетом внешних и внутренних условий, влияющих на их движение.

В основе динамики лежат несколько аксиом. Это известные законы Ньютона. Чтобы их сформулировать, введем несколько понятий.

Первое – *материальная точка*. Материальной точкой будем называть тело, обладающее массой, размеры которого можно не учитывать при определении его движения. Так что материальная точка на самом деле может оказаться довольно солидных размеров. Все зависит от масштабов пространства, в котором тело движется, и от других обстоятельств.

Второе. Точку будем называть *изолированной*, если на точку не оказывается никакого влияния, никакого действия со стороны других тел и среды, в которой точка движется. Конечно, трудно привести пример подобного состояния. Но представить такое можно.

Теперь можно сформулировать первую аксиому.

Первая аксиома

В основе этой аксиомы лежит первый закон Ньютона. Запишем ее так:

Изолированная материальная точка движется прямолинейно и равномерно, либо находится в покое, в равновесии.

Правда, при этом возникает вопрос: а относительно чего совершается такое движение? Конечно, наблюдение за таким движением должно вестись из системы отсчета, которая сама движется равномерно и прямолинейно.

Такая система, относительно которой изолированные материальные точки движутся равномерно и прямолинейно, называется *инерциальной системой отсчета*.

Если материальная точка в такой инерциальной системе не находится в равновесии, то эта точка не будет изолированной. Значит, на нее оказывается действие со стороны других тел, которые выводят ее из состояния равновесия, то есть на нее действуют силы.

Вторая аксиома. Основное уравнение динамики

Из второго закона Ньютона следует, что сила, действующая на точку, изменяет ее движение. Это изменение, как известно из кинематики, характеризуется ускорением. Поэтому вторую аксиому сформулируем так:

При действии на материальную точку силы у точки появляется ускорение, пропорциональное силе и имеющее ее направление.

Эту зависимость можно записать в виде формулы $F = mW$. Коэффициент пропорциональности m называется массой точки.

Если на точку действует несколько сил, то их можно заменить одной силой, равнодействующей $R = \sum F_i$, и предыдущее равенство записать так:

$$mW = \sum F_i . \quad (12.1)$$

Это векторное равенство называется *основным уравнением динамики*.

При свободном падении тела на него действует сила P , сила тяжести, которую вблизи поверхности Земли будем называть весом тела. Если не учитывать другие силы, например сопротивление воздуха, то это будет единственная сила, приложенная к телу. Тогда по (12.1) получим $mW = P$. Но при этом движении $W = g$, равно ускорению свободного падения. Поэтому массу тела

будем определять так: $m = \frac{P}{g}$.

Третья аксиома. Сила инерции

При действии одного тела на другое возникают две силы, равные по величине, направленные по одной прямой в противоположные стороны и приложенные к этим телам.

Конечно, нельзя сказать, что эти две силы уравниваются, так как они приложены к разным телам.

Проведем небольшой эксперимент. Попробуем перемещать тяжелое тело по некоторой криволинейной траектории. Сразу обнаружим, что тело сопротивляется изменению направления движения, изменению скорости. Возникает сила со стороны тела, противодействующая силе F , той, которую мы прикладываем к нему.

Эту силу, с которой материальная точка сопротивляется изменению своего движения, будем называть *силой инерции* этой точки, $F^{ин}$.

По третьей аксиоме она равна и противоположна действующей на точку силе F ,

$$F^{ин} = -F. \quad \text{Но на основании второй аксиомы} \quad F = mW. \quad \text{Поэтому}$$

$$F^{ин} = -mW.$$

Итак, сила инерции материальной точки по величине равна произведению ее массы на ускорение

$$F^{ин} = mW \quad (12.2)$$

и направлена в сторону, противоположную вектору ускорения.

Например, при движении точки по кривой линии

$$\text{ускорение } W = W_n + W_\tau$$

. Поэтому сила инерции

$$F^{ин} = -mW = -m(W_n + W_\tau) = F_n^{ин} + F_\tau^{ин}.$$

То есть ее можно находить как сумму двух сил: нормальной силы инерции и касательной силы инерции (см. рисунок). Причем

$$F_n^{ин} = m \frac{v^2}{\rho}, \quad F_\tau^{ин} = m \frac{dv}{dt}.$$

Необходимо заметить, что сила инерции материальной точки, как сила противодействия, приложена не к точке, а к тому телу, которое изменяет ее движение. Это очень важно помнить.

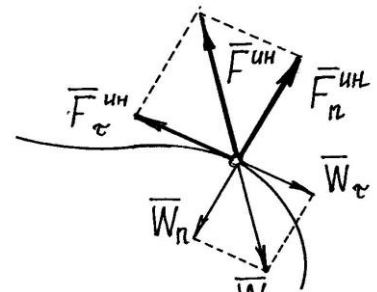
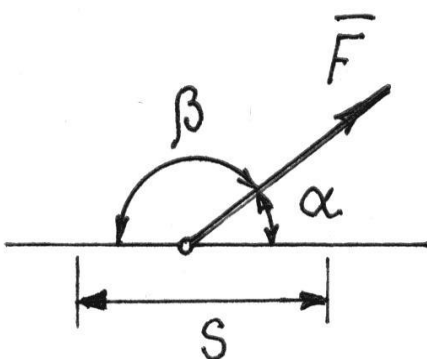


Рис.12.1

Лекция 8.

Тема занятий: Работа силы. Работа постоянной силы. Работа сил тяжести и упругости. Работа силы, приложенной к вращающемуся телу. Мощность силы.



Работа силы

Если точка приложения силы движется по прямолинейной траектории, то работой постоянной по величине и направлению силы F на перемещении точки равном s (рис. 15.1), называется выражение

Рис. 15.1

$$A = F \cdot s \cdot \cos \alpha . \quad (15.1)$$

Поскольку от выбора угла α или β зависит знак работы, то договоримся брать всегда *острый* угол α между вектором силы и траекторией. И будем считать работу положительной, если направление силы совпадает с направлением перемещения точки приложения силы из начального положения в конечное.

Из (15.1) следует, что если вектор силы перпендикулярен траектории, работа силы равна нулю.

Если вектор силы изменяется и точка приложения ее движется по кривой линии, то формула (15.1) неприменима. В этом случае надо сначала вычислить *элементарную работу* силы на перемещении ds (рис. 15.2)

$$dA = F ds \cdot \cos \alpha, \quad (15.2)$$

где α – угол между касательной осью T и

вектором силы F . А затем, предполагая силу F и угол α функциями s , найти криволинейный интеграл на перемещении по дуге из положения M_1 в положение M_2 :

$$A = \int_{(s)} F ds \cos \alpha.$$

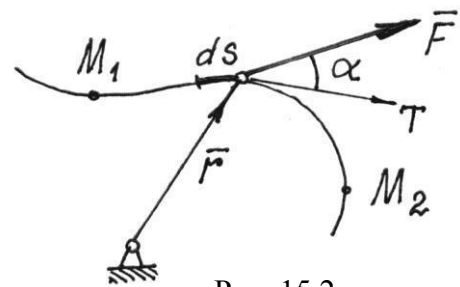


Рис. 15.2

Выражение элементарной работы dA можно преобразовать, полагая $ds = v dt$ и $v = \frac{d\vec{r}}{dt}$:

$$dA = F \cdot v dt \cdot \cos \alpha = \vec{F} \cdot \vec{v} dt = \vec{F} \cdot d\vec{r}. \quad (15.3)$$

Определим далее радиус-вектор точки M с помощью ее координат:

$r = x \cdot i + y \cdot j + z \cdot k$ И $dr = dx \cdot i + dy \cdot j + dz \cdot k$, а вектор силы – с помощью проекций на оси: $F = X \cdot i + Y \cdot j + Z \cdot k$. Тогда скалярное произведение двух

векторов $F \cdot dr$, то есть элементарная работа силы,

$$dA = X dx + Y dy + Z dz. \quad (15.4)$$

Конечно, чтобы проинтегрировать это выражение, надо проекции силы определять как функции координат точки приложения силы.

Работа веса тела (силы тяжести).

Пусть тело перемещается вблизи поверхности Земли из одного положения в другое так, что центр тяжести его движется по кривой линии (рис.15.3). Элементарная работа силы

P , постоянной и направленной вертикально вниз, по выражению (15.4), $dA = -P dz$. Поэтому

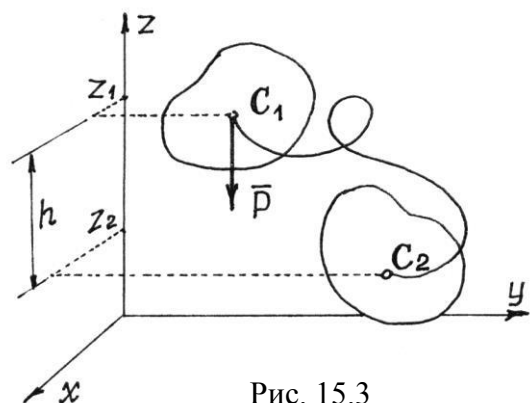


Рис. 15.3

z_2

$$A = - \int_{z_1}^{z_2} P dz = -P(z_2 - z_1) = P(z_1 - z_2) \text{ или}$$

$A =$

$$Ph. \quad (15.5)$$

Следовательно, работа веса тела (постоянной силы тяжести) не зависит от траектории движения центра тяжести. Определяется лишь высотой, на которую опустится или поднимется центр тяжести.

Работа силы, приложенной к телу, вращающемуся вокруг неподвижной оси.

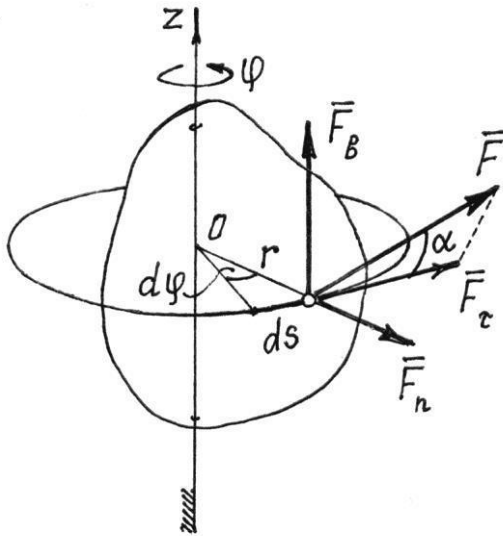


Рис. 15.4

В этом случае (рис.15.4) точка приложения силы F движется по дуге окружности радиусом r . Элементарная работа, по формуле (15.2), $dA = F ds \cdot \cos \alpha$, где $ds = r \cdot d\varphi$. Поэтому $dA = Fr d\varphi \cdot \cos \alpha$.

$$\text{Но } F \cdot r \cdot \cos \alpha = F_{\tau} \cdot r = M_z(F).$$

Это нетрудно установить, разложив силу на три составляющие (см. рис. 15.4).

(Моменты сил F_b и F_n относительно оси z равны нулю). Значит,

$$dA = M_z(F) \cdot d\varphi. \quad (15.6)$$

В частности, если момент силы относительно оси $M_z(F) = \text{const}$, работа силы при повороте тела на угол φ равна

$$A = \pm M_z(F) \cdot \varphi. \quad (15.7)$$

Знак работы определяется знаками момента силы и угла поворота. Если они одинаковы, работа положительная.

Из формулы (15.7) следует и правило определения работы пары сил. Если пара с моментом m расположена в плоскости, перпендикулярной оси вращения тела, то ее работа при повороте тела на угол φ

$$A = \pm m\varphi. \quad (15.8)$$

Если же пара сил действует в плоскости, не перпендикулярной оси вращения, то ее надо заменить двумя парами. Первую расположить в плоскости, перпендикулярной оси, другую – в плоскости параллельной оси. Моменты их определяются разложением вектора момента m по соответствующим направлениям $m = m_1$

$+ m_2$. Конечно, работу будет совершать только первая

пара с моментом $m_1 = m \cdot \cos \gamma$, где γ – угол между вектором m и осью вращения z ,

$m_1 = m \cdot \cos \gamma$, где γ – угол между вектором m и осью вращения z ,

$$A = \pm m\varphi \cdot \cos \gamma. \quad (15.9)$$

Работа силы упругости.

Такая сила (рис. 15.5) возникает при деформации упругого тела. Если сила подчиняется закону Гука, то ее величина будет пропорциональна деформации. Так, при удлинении, напри-мер, пружины на величину x сила равна

$F = cx$. (Постоянная, коэффициент c , называется жесткостью пружины). Сила эта переменная. Поэтому по (15.4)

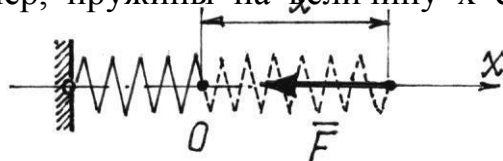


Рис. 15.5

$dA = - F \cdot dx = - cx \cdot dx$. И, если начало координат O находится на конце недеформированной пружины, то полная работа при перемещении конца пружины от положения x_1 до x_2 ($x_2 > x_1$)

$$A = - \int_{x_1}^{x_2} cx \cdot dx = - \frac{1}{2} c(x_2^2 - x_1^2). \quad (15.10)$$

Конечно, при увеличении деформации (сжатия или растяжения) работа силы – отрицательная; при уменьшении – положительная.

Этот результат верен для любого упругого тела. И деформацией может быть не только линейное перемещение, но и угол поворота, и объем тела и др. Соответственно изменится и размерность коэффициента жесткости.

Лекция 9.

Тема занятий: Кинетическая энергия системы. Вычисление кинетической энергии твердого тела при различных случаях его движения. Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы.

Кинетическая энергия

Кинетическая энергия материальной точки – это половина произведения ее массы на квадрат скорости $\frac{1}{2}mv^2$. Кинетическая энергия материальной системы – сумма кинетических энергий всех ее точек

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2}. \quad (15.15)$$

Кинетическая энергия – скалярная и всегда положительная величина, так как $(\vec{v}_i)^2 = v_i^2$. Для твердого тела формула (15.15) принимает более конкретный вид.

1. *Кинетическая энергия тела при поступательном движении.*

Так как при поступательном движении все точки тела имеют равные скорости $\vec{v}_i = \vec{v}$, то его кинетическая энергия

$$T = \sum \frac{m v^2}{2} = \sum \frac{m v^2}{2} = \frac{1}{2} v^2 \sum m_i = \frac{1}{2} v^2 M \text{ или}$$

$$T = \frac{1}{2} M v^2, \quad (15.16)$$

где M – масса тела, v – скорость любой его точки.

2. *Кинетическая энергия тела, вращающегося вокруг неподвижной оси.*

При вращении тела вокруг неподвижной оси

скорости его точек $v_i = r_i \omega$ (рис.15.9). Поэтому кинетическая энергия

$$T = \sum \frac{m_i v_i^2}{2} = \sum \frac{m_i r_i^2 \omega^2}{2} = \frac{\omega^2}{2} \sum m_i r_i^2$$

$$= \frac{\omega^2}{2} J_z \text{ или}$$

$$T = \frac{1}{2} J_z \omega^2, \quad (15.17)$$

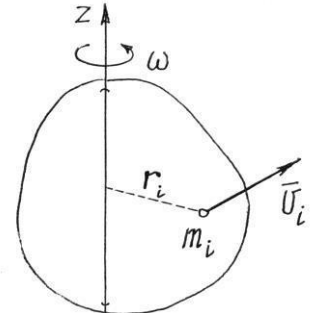


Рис. 15.9

J_z – момент инерции тела относительно оси вращения z .

Теорема об изменении кинетической энергии материальной системы

Так как ускорение i -тых точек материальной системы $W_i = \frac{d \vec{v}_i}{dt}$, то ос-

новные уравнения динамики для этих точек будут $m_i \frac{d \vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i$, где F_i – рав-

нодействующая сил, приложенных к i -й точке. Умножим скалярно левую и

правую части этого равенства на v_i : $v_i \cdot m_i \frac{d \vec{v}_i}{dt} = F_i \cdot v_i$ и введем слева вектор

v_i под знак дифференциала, а справа учтем, что $v_i = \frac{d \vec{r}_i}{dt}$. Получим

$$m_i \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} v_i^2 \right) = F_i \frac{d \vec{r}_i}{dt}. \text{ Или окончательно } d \left(\frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) = dA_i.$$

Сложив такие равенства, составленные для всех точек системы, получим: $d \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 = \sum dA_i$ или $dT = \sum dA_i$. Проинтегрируем затем на переходе

системы из одного положения в другое: $\int_{T_1}^{T_2} dT = \sum \int_{S_i} dA_i$. Получим $T_2 - T_1 =$

$\sum A_i$. Запишем результат в виде

$$T_2 - T_1 = A. \quad (15.22)$$

Это значит, изменение кинетической энергии движущейся материальной системы при переходе ее из одного положения в другое равно сумме работ сил, приложенных к системе, на этом переходе.

Теорему об изменении кинетической энергии удобно использовать при решении задач, в которых требуется установить зависимость между скоростями и перемещениями тел.

Лекция 10

Тема занятия: Основные задачи сопротивления материалов. Деформации упругие и пластические. Основные гипотезы и допущения. Классификация нагрузок и элементов конструкции. Силы внешние и внутренние. Напряжение полное, нормальное, касательное.

Основные задачи сопротивления материалов

Основными задачами в технике являются обеспечения прочности, жесткости, устойчивости инженерных конструкций, деталей машин и приборов.

Наука, в которой изучаются принципы и методы расчетов на прочность, жесткость и устойчивость называется **сопротивлением материалов**.

Прочность – это способность конструкции в определенных пределах воспринимать действие внешних нагрузок без разрушения.

Жесткость – это способность конструкции в определенных пределах воспринимать действие внешних нагрузок без изменения геометрических размеров (не деформируясь).

Устойчивость – свойство системы самостоятельно восстанавливать первоначальное состояние после того, как ей было дано некоторое отклонение от состояния равновесия.

Каждый инженерных расчет состоит из трех этапов:

1. Идеализация объекта (выделяются наиболее существенные особенности реальной конструкции - создается расчетная схема).
2. Анализ расчетной схемы.
3. Обратный переход от расчетной схемы к реальной конструкции и формулирование выводов.

Сопротивление материалов базируется на законах теоретической механики (статика), методах математического анализа, материаловедении.

Классификация нагрузок

Различают внешние и внутренние силы и моменты. **Внешние силы** (нагрузки) – это активные силы и реакции связи.

По характеру действия нагрузки делятся на:

статические – прикладывается медленно, возрастая от нуля до конечного значения, и не изменяются;

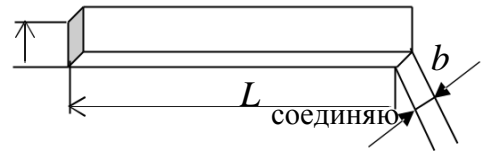
динамические – изменяют величину или направление за короткий промежуток времени:

внезапные - действуют сразу на полную силу (колесо локомотива, заезжающего на мост);

ударные – действуют на протяжении короткого времени (дизель-молот);
циклические (нагрузка на зубья зубчатого колеса).

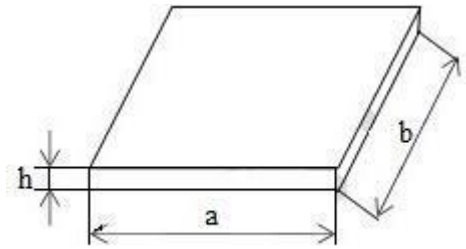
Классификация элементов конструкций

Стержень (брус) – тело, длина которого L превышает его поперечные h размеры b и h . *Ось стержня* – линия, ссающая центры тяжести последовательно расположенных сечений.

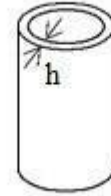


Сечение – это плоскость перпендикулярная оси стержня.

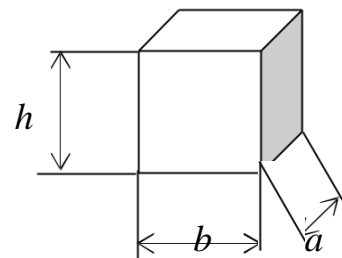
Пластина – тело плоской формы, у которого длина a и ширина b больше по сравнению с толщиной h .



Оболочка – тело, ограниченное двумя близко расположенными криволинейными поверхностями. Толщина оболочки мала по сравнению с другими габаритными размерами, радиусами кривизны ее поверхности.



Массивное тело (массив) – тело, у которого все размеры одного порядка.



Деформации упругие и пластические

При нагрузке тел внешними силами они могут изменять свою форму и размеры. Изменение формы и размеров тела под действием внешних сил называется **деформацией**.

Деформации бывают:

упругие - исчезают после прекращения действия вызвавших их сил;

пластические – не исчезают после прекращения действия вызвавших их сил.

В зависимости от характера внешних нагрузок различают такие виды деформаций:

растяжение-сжатие – состояние сопротивления, которое характеризуется удлинением или укорочением,

сдвиг – смещение двух соприкасающихся поверхностей друг относительно друга при неизменном расстоянии между ними,
кручение – взаимный поворот поперечных сечений относительно друг друга,

изгиб – состоит в искривлении оси.

Бывают более сложные деформации, которые образуются сочетанием нескольких основных.

Линейные деформации связаны с перемещением точек или сечений вдоль прямой линии (растяжение, сжатие).

Угловые деформации связаны с относительным поворотом одного сечения относительно другого (кручение).

Основные гипотезы и допущения

1. **Гипотеза о сплошности материала:** тело, сплошное и непрерывное до деформации, остается таким же и в процессе деформации.
2. **Гипотеза об однородности и изотропности:** в любой точке тела и в любом направлении физико-механические свойства материала считаются одинаковыми.
3. **Гипотеза о малости деформаций:** в сравнении с размерами тела деформации настолько малы, что не изменяют положения внешних сил, действующих на тело.
4. **Гипотеза об идеальной упругости:** в заданных малых пределах деформирования все тела идеально упругие, т.е. деформации полностью исчезают после прекращения нагрузок.
5. **Гипотеза плоских сечений:** сечение плоское до деформирования остается плоским и после деформации.

Закон Гука и гипотеза о малости деформаций дают возможность

Применять **принцип суперпозиции** (принцип независимости или сложения сил): деформации тела, вызванные действиями нескольких сил, равняются сумме деформаций, вызванных каждой силой.

Принцип Сен-Венана: статически эквиваленте системы сил, действующие на малую, сравнительно с общими размерами тела, его часть, при достаточном отдалении от этой части вызывают одинаковые деформации тела.

Принцип затвердения: тело, испытывающее деформирование, затвердело и к нему можно применять уравнения статики.

Внешние силы

Все силы, приложенные к элементу конструкции, называются внешними силами или нагрузками.

По связи с материалами элемента внешние силы разделяются на объемные и поверхностные.

Объемные - силы, распределенные по объему тела и приложенные ко всем его частицам (силы тяжести, магнитные силы, силы инерции). Характеризуются интенсивностью, то есть силой, приходящейся на единицу объема материала.

Поверхностные - силы, приложенные к поверхности тела (давление воды на обшивку корабля, взаимодействие элементов и так далее). Они условно разделяются на сосредоточенные и распределенные.

Когда размеры области приложения нагрузки намного меньше самого элемента, то нагрузку заменяют равнодействующей и называют сосредоточенной силой.

Наиболее широкое распространение из распределенных нагрузок в сопротивлении материалов получили нагрузки распределенные по линии, которые характеризуются интенсивностью, то есть силой, приходящейся на единицу длины.

В расчетах эту нагрузку часто задают эпюрой (графиком), ось которой служит ось стержня, а ординаты в принятом масштабе выражают интенсивность нагрузки в соответствующих точках. На эпюрах ординаты имеют вид стрелок, показывающих направление нагрузки.

По относительной продолжительности действия все внешние силы разделяются на временные (постановка судна в док, случайные нагрузки и так далее) и постоянные, которые в общем-то могут изменяться во времени.

По относительной скорости приложения внешние силы разделяют на статические и динамические.

Статические - медленно возрастают от нуля до конечного значения (вес здания, давление воды).

Динамические - быстро меняют свою величину, а иногда и направление. Они разделяются на мгновенноприложенные, ударные и повторно-переменные.

Внутренние силы

Любой материал элементов конструкции состоит из бесчисленного множества элементарных частиц. В результате внешней нагрузки между частицами материала элемента появляются силы межатомного взаимодействия, препятствующие их перемещению. Эти силы называют в сопротивлении материалов **внутренними силами**. Они зависят от физических свойств материала данного элемента и его геометрических размеров.

К внутренним силам относят: **продольную силу, поперечные силы, изгибающие моменты, крутящий момент.**

Вообще в любом теле между его частицами существуют внутренние силы взаимодействия и до его деформации. Они обуславливают существование тела, как такового. Однако в сопротивлении материалов они не изучаются. Нас интересуют исследования и вычисления дополнительных внутренних сил, которые возникли в результате нагружения тела внешними нагрузками.

Таким образом, внутренними силами (или усилиями), будем называть силы внутри тела между его частицами и обусловленные их смещением в результате деформации.

Внутренние силы при снятии внешней нагрузки возвращают частицы в исходное положение, деформация исчезает и тело принимает свои начальные размеры и форму.

Свойства тел возвращаться к своей первоначальной форме и принимать первоначальные размеры после удаления внешней нагрузки называются **упругостью.**

Абсолютно упругое - это такое тело, которое после снятия внешней нагрузки полностью восстанавливает начальные размеры и форму.

Частично упругое - это такое тело, у которого после снятия внешней нагрузки деформация исчезает не полностью.

Упругие свойства обусловлены внутренними силами, которые можно назвать внутренними силами упругости.

Опыты показывают, что все материалы могут рассматриваться как абсолютно упругие только в некоторых пределах значений внутренних сил.

Напряжения

Рассмотрим бесконечно малый элемент площади сечения dA . Вследствие малости элемента, можно считать, что внутренние усилия, действующие в его различных точках, одинаковы по модулю и по направлению. Тогда их равнодействующая dF проходит через центр тяжести элемента.

Нормальное напряжение:

$$\frac{dN}{dA}$$

где dN – элементарная продольная силы (проекция dF на ось x).

Касательные напряжения:

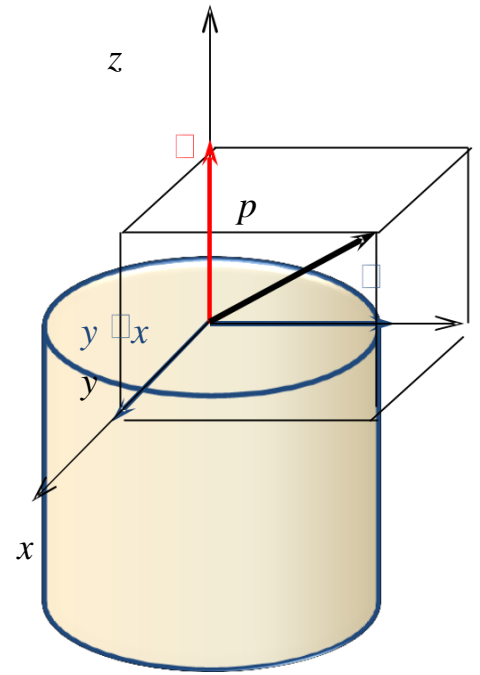
$$\tau_y = \frac{dQ_y}{dA}; \quad \tau_z = \frac{dQ_z}{dA},$$

где dQ_y, dQ_z – элементарные поперечные силы (проекции dF на оси y, z).

Полное напряжение

$$P = \frac{dP}{dF} = \sqrt{\sigma^2 + \tau_y^2 + \tau_z^2}.$$

Определение зависимости между внешними силами, с одной стороны, и напряжением и деформацией, с другой, - основная задача сопротивления материалов.



Лекция 11

Тема занятия: Внутренние силовые факторы при растяжении и сжатии. Эпюры продольных сил. Нормальное напряжение. Эпюры нормальных напряжений. Продольные и поперечные деформации. Закон Гука. Коэффициент Пуассона. Определение осевых перемещений поперечных сечений бруса.

Испытания материалов на растяжение и сжатие при статическом нагружении. Механические характеристики материалов.

Напряжения предельные, допускаемые и расчетные. Коэффициент запаса прочности. Условие прочности, расчеты на прочность. Статически неопределимые системы.

Внутренние силовые факторы при растяжении и сжатии

Растяжение или сжатие часто встречаются в элементах машин или сооружений (растяжение троса крана при подъеме груза; шатун двигателя, штоки цилиндров в подъемно-транспортных машинах).

Растяжение или сжатие – это случай нагружения стержня, который характеризуется его удлинением или укорочением. Растяжение или сжатие вызывается силами F , действующими вдоль оси стержня.

При растяжении стержень удлиняется, а его поперечные размеры уменьшаются. Изменение ΔL начальной длины L стержня называют **абсолютным удлинением** при растяжении или **абсолютным укорочением** при сжатии. Отношение абсолютного удлинения (укорочения) к начальной длине стержня называется **относительным удлинением**:

$$\varepsilon = \frac{dL}{L}.$$

В этом случае:

- ось стержня остается прямой линией,
- поперечные сечения стержня уменьшаются вдоль его оси параллельно самим себе (потому что поперечное сечение - это плоскость перпендикулярная оси стержня, а ось - прямая линия); поперечные сечения остаются плоскими.

Все волокна стержня удлиняются на одну и ту же величину L и их относительные удлинения одинаковые:

$$\varepsilon = \text{const.}$$

Разность соответствующих поперечных размеров после деформации и до нее называется **поперечной деформацией**.

$$\Delta h = h - h_1$$

$$\Delta b = b - b_1$$

Отношение абсолютной поперечной деформации к соответствующему начальному размеру называется **относительной поперечной деформацией**:

$$\varepsilon = \frac{\Delta h}{h} = \frac{\Delta b}{b}.$$

Между поперечной и продольной деформациями существует соотношение.

Коэффициент Пуассона:

$$\nu = \frac{|\varepsilon'|}{\varepsilon}.$$

Коэффициент Пуассона – безразмерная величина, находящаяся в пределах 0...0,5 (для стали $\nu \approx 0,3$).

В поперечных сечениях возникают нормальные напряжения σ .
Зависимость напряжений от деформаций устанавливает **закон Гука:**

$$\sigma = E \varepsilon,$$

где E – модуль продольной упругости, модуль упругости первого рода, модуль Юнга, характеризующий упругие свойства материала (для стали $E \approx 2 \cdot 10^5$ МПа).

В сечении стержня возникает один внутренний силовой фактор – **продольная сила N** . Продольная сила N является равнодействующей нормальных напряжений, которая численно равна алгебраической сумме всех внешних сил, действующих на одну из частей рассеченного стержня и направленных вдоль его оси.

Нормальные напряжения :

$$\sigma = \frac{N}{A}.$$

Учитывая, что $\sigma = E \varepsilon$ и $\varepsilon = \frac{\Delta L}{L}$,

$$E \frac{\Delta L}{L} = \frac{N}{A}$$

$$\varepsilon = \frac{N}{EA}.$$

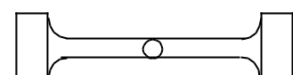
Произведение EA называется **жесткостью поперечного сечения стержня** при растяжении или сжатии, и имеет размерность силы.

Механические характеристики материала

К механическим характеристикам относятся:

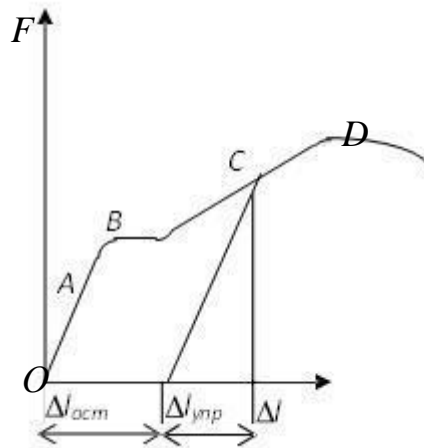
- модуль упругости E , коэффициент
- Пуассона, пластичность, твердость,
- прочность и др.
-
-

Для определения этих характеристик используют ис-



пытания. Наиболее распространенные испытания на растяжение. Для испытаний используют специальные образцы.

Основной целью испытаний является построение диаграммы растяжения-сжатия, т.е. зависимости между силой, действующей на образец, и его удлинением.

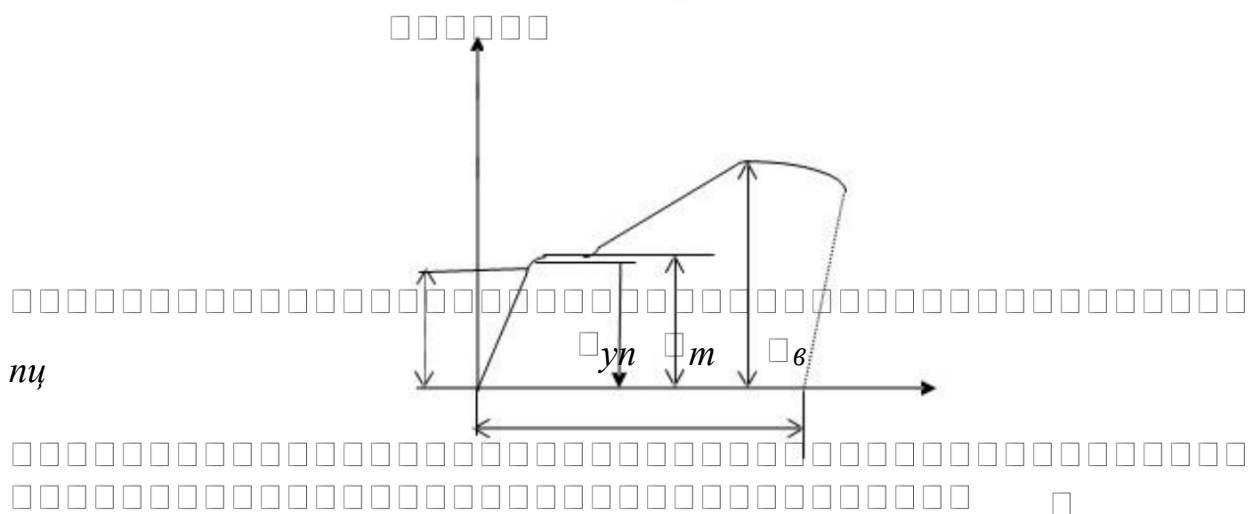


Особенности диаграммы растяжения малоуглеродистой стали.

OA – **упругая стадия**, при сравнительно малых нагрузках материал подвержен закону Гука и после прекращения нагрузки никаких остаточных деформации нет.

BC – **площадка текучести**, в дальнейшем рост нагрузки замедляется и вскоре совсем прекращается. Явление роста деформаций при постоянной нагрузке имеет название **текучести**.

CD – **упрочнение**, после окончания стадии текучести образец снова начинает сопротивляться деформациям. Если повторно нагрузить образец исчезает участок текучести ($f > OA$), образец приобретает способность воспринимать без остаточных деформаций большие нагрузки. Явление увеличения упругих свойств в результате предварительного пластического деформирования имеет название **наклеп**.



В точке *D* наблюдается качественное изменение характера деформаций (образуется прогрессирующая шейка). Разрушение может быть доведено до конца даже при уменьшении нагрузки.

Точка *E* – разрушение образца.

Во избежание влияния размеров строят диаграмму $\sigma_{\text{н}} = f(\sigma)$.

$\sigma_{\text{нц}}$ – **предел пропорциональности** – наибольшие напряжения, до которых справедлив закон Гука (для стали 200 МПа).

$\sigma_{\text{упр}}$ – **предел упругости** – наибольшие напряжения, до которых материал не имеет остаточных деформаций (для стали 200 МПа).

σ_{T} – **предел текучести** – напряжение, при которых происходит рост деформаций без увеличения нагрузки (для стали 240 МПа).

$\sigma_{\text{в}}$ – **предел прочности** – напряжение, которые может выдержать образец без разрушения (для стали 400 МПа).

Также определяются:

δ – относительное окончательное удлинение после разрушения:

$$\delta = \frac{l - l_0}{l_0} \cdot 100\%$$

φ – относительное окончательное сужение сечения образца в месте разрушения:

$$\varphi = \frac{A_0 - A_k}{A_0} \cdot 100\%$$

В зависимости от δ материалы делятся на:

$\delta > 5\%$ – пластичные (углеродная сталь, медь, алюминий),

$\delta < 5\%$ – хрупкие (чугун, бетон, инструментальная сталь).

Диаграмма растяжения хрупких материалов не имеет площадки текучести. Для них проводят испытание на сжатие, так как они лучше оказывают сопротивление сжатию, чем растяжению (Для пластичных материалов модуль упругости, предел упругости, предел текучести при растяжении и сжатии приблизительно одинаковы).

Кроме хрупких и пластичных материалов существуют еще упруго-вязкие материалы (полиамиды). Для них характерно явление ползучести и релаксации напряжений.

Ползучесть – это непрерывный рост пластических деформаций при неизменной нагрузке.

Релаксация напряжений – медленное уменьшение напряжений при неизменной полной деформации за счет увеличения пластической составляющей и уменьшения упругости.

Допускаемые напряжения

Для пластичных материалов:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{T}}}{n}$$

Для хрупких материалов:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{\text{в}}}{n^b},$$

где n – коэффициент запаса прочности.

Условие прочности при растяжении:

$$\sigma = \frac{N}{A} \leq [\sigma].$$

Для стали $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$.

Эпюры продольных сил и напряжений.

Графики, показывающие, как изменяются внутренние усилия при переходе от сечения к сечению, называется **эпюрами**. Правила построения эпюр:

1. Ось, на которой строится эпюра (база), параллельна оси стержня.
2. Ордината эпюры откладывается от оси эпюры по перпендикуляру.
3. Штрихуют эпюры линиями, которые перпендикулярны к базе.
4. Для усилий выбирают определенный масштаб, проставляют значение характерных ординат, в поле эпюры ставят знак усилия.

Пример: Для стального стержня выявить закон изменения продольных сил, напряжений и перемещений, если $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$. Договоримся считать продольную силу положительной, если она вызывает растяжение.

1. Стержень имеет два участка разной жесткости. Из условия равновесия любой рассеченной части стержня на первом участке:

$$\begin{aligned} 0 & \leq x_1 \leq l_1 \\ 0 & \leq x_1 \leq 2 \text{ м} \\ N_1 & = F_1 = 2 \text{ кН}, \end{aligned}$$

на втором участке:

$$\begin{aligned} 0 & \leq x_1 \leq l_2 \\ 0 & \leq x_1 \leq 1 \text{ м} \\ N_2 & = F_1 - F_2 = 5 \text{ кН}. \end{aligned}$$

В выбранном масштабе строим эпюру продольных сил.

2. Определяем напряжение в разрезах

$$\sigma_1 = N_1 = -2 \cdot 10^3 = -10 \text{ МПа}$$

$$\sigma_2 = N_2 = 5 \cdot 10^3 = 50 \text{ МПа}$$

В выбранном масштабе строим эпюру напряжений.

3. Определим, на какую величину перемещается каждое сечение стержня

$$u(x)_n = u(x)_{n-1} + \frac{N_n \cdot x_n}{E \cdot A_n}$$

на первом участке:

$$\begin{aligned} 0 & \leq x_1 \leq l_1 \\ 0 & \leq x_1 \leq 2 \text{ м} \\ u(x)_1 & = u(x)_0 + \frac{N_1 \cdot x_1}{E \cdot A_1} \\ u(x_1)|_{x_1=1} & = 0 - \frac{2000 \cdot 2}{2 \cdot 10^5 \cdot 0,0002} = -0,0001 \text{ м} \end{aligned}$$

на втором участке:

$$0 \leq x_2 \leq l_2$$

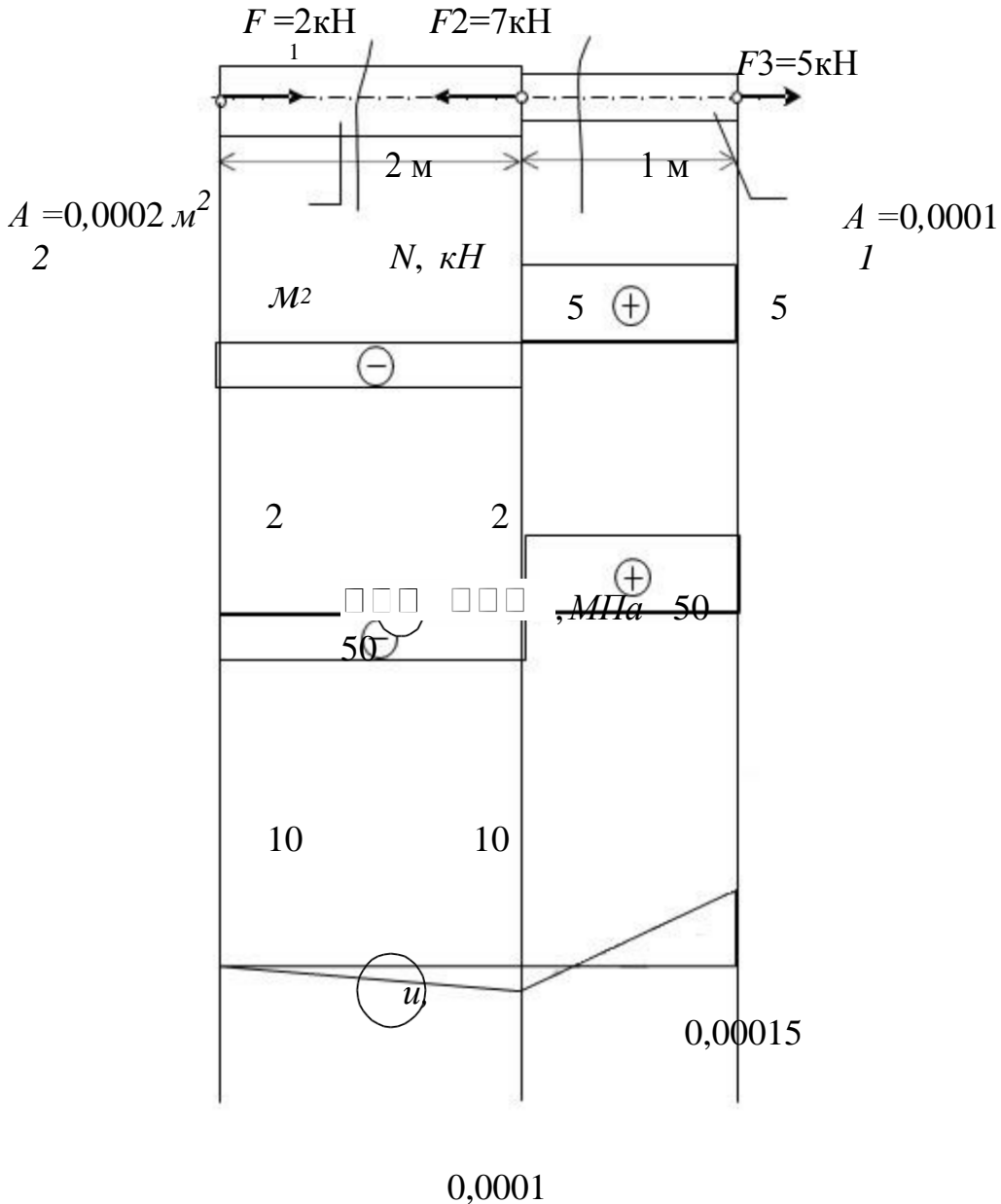
$$0 \leq x_2 \leq 1 \text{ м}$$

$$u(x)_2 = u(x)_1 + \frac{N_2 \cdot x_2}{E \cdot A_2}$$

$$u(x_2) \Big|_{x_2=0} = -0,0001 \text{ м}$$

$$u(x_1) \Big|_{x_2=2} = -0,0001 + \frac{5000 \cdot 2}{2 \cdot 10^{11} \cdot 0,0001} = 0,00025 - 0,0001 = 0,00015 \text{ м}$$

Строим эпюру перемещений.



Статически неопределимая система

Статически неопределимыми называют системы, в которых для определения опорных реакций либо внутренних усилий одних только уравнений статики недо-статочно.

Статическая неопределимость возникает из-за наличия дополнительных или «лишних» связей.

Здесь под словом «лишние» понимаются дополнительные опоры (связи) добавление которых не влияет на геометрическую неизменяемость системы в целом.

Дополнительные опоры увеличивают прочность и жесткость систем, что позволя-ет делать их более экономичными.

Степень статической неопределимости систем

Степень статической неопределимости n определяется по формуле:

$$n=k-m$$

где,

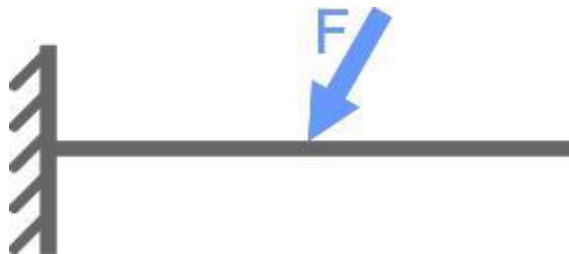
k – количество неизвестных усилий (реакций связи),

m – количество уравнений равновесия (статики) которые можно составить для данной системы.

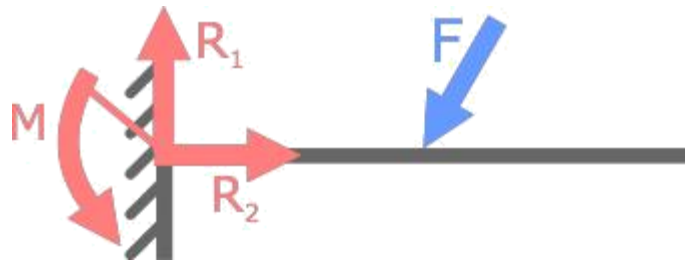
Системы, для которых $n=1$ называют однажды статически неопределимыми, $n=2$ – дважды и т.д.

Примеры статически неопределимых

систем В качестве примера рассмотрим следующий случай:

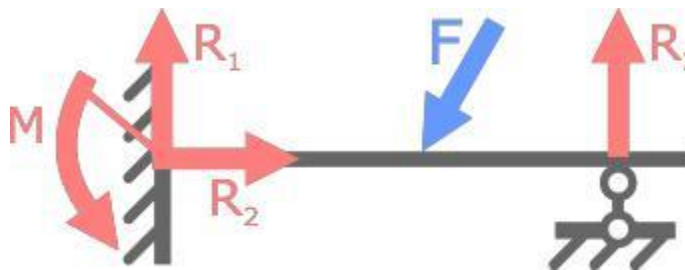


Консольная балка, закрепленная только в жесткой заделке – статически опреде-лима, так как в опоре данной схемы могут иметь место не более трех опорных ре-акций (вертикальная и горизонтальная силы и МОМЕНТ).



Как известно из [курса теоретической механики](#) для плоской системы сил можно составить только три уравнения статики. Трех уравнений для определения трех неизвестных вполне достаточно.

Теперь, если добавим к рассматриваемой схеме еще одну опору, например [шарнирно-подвижную](#), то система становится статически неопределимой, так как количество неизвестных связей увеличилось до четырех, а [уравнений равновесия](#) по-прежнему можно составить только три.

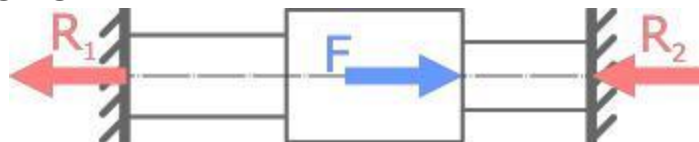


В данном случае для расчета опорных реакций не хватает еще одного уравнения, т.е. система один раз (однажды) статически неопределима.

Если к данной системе последовательно добавлять такие же опоры, то степень неопределимости также будет возрастать.

В таких случаях для расчета величины и направления неизвестных усилий требуются дополнительные уравнения.

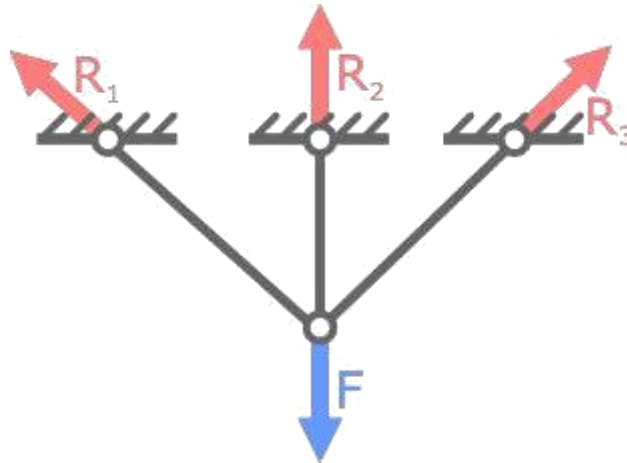
Другие примеры СНС



Однажды статически неопределимый [стержень](#)



Трехопорная [балка](#)



Статически неопределимая стержневая система

Раскрытие статической неопределимости

Расчет усилий в лишних связях называется раскрытием статической неопределимости системы.

Существует несколько способов раскрытия статической неопределимости:

1. Метод сил. Здесь в качестве неизвестных рассматриваются усилия – силы и моменты.
 2. Метод перемещений. Неизвестными являются деформационные факторы – углы поворотов и линейные смещения.
 3. Смешанный метод. Здесь часть неизвестных представляет собой усилия, а другая часть – перемещения.
 4. Комбинированный метод. Используется при расчете симметричных систем на несимметричные нагрузки. Оказывается, что на симметричную составляющую заданной нагрузки систему целесообразно рассчитывать методом перемещений, а на обратносимметричную составляющую – методом сил.
- Помимо указанных аналитических методов при расчете особо сложных систем используются различные численные методы.

принцип которых основан на:

1. равенстве нулю соответствующих перемещений точек системы на опорах;
2. зависимости (совместности) деформаций элементов системы.

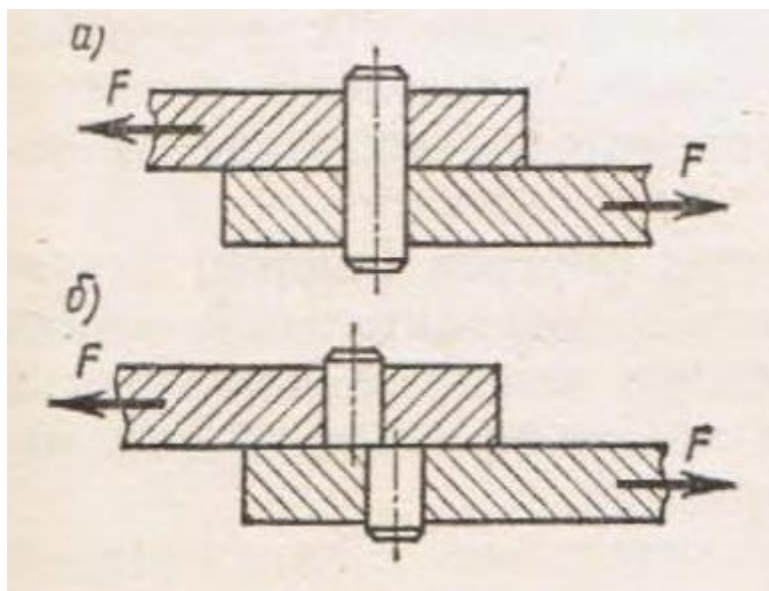
Лекция 12

Тема занятия: Срез, основные расчетные предпосылки, расчетные формулы, условие прочности.

Допускаемые напряжения. Примеры расчетов.

Практические расчеты на срез и смятие. Основные предпосылки и формулы

Если два бруса соединить между собой штифтом, а затем нагрузить направленными в противоположные стороны силами F , то при значительных силах или небольшом диаметре штифта он может быть разрушен по сечению, расположенному в плоскости соприкосновения поверхностей соединяемых брусьев. Такое разрушение соединительных деталей (штифта, болта, шпильки, заклепки, шпонки), происходящее под действием нагрузок, перпендикулярных их собственным осям (поперечные нагрузки), называется *срезом*.



Практические расчеты соединительных деталей на срез носят условный характер и основываются на трех допущениях: в поперечном сечении возможного среза детали возникает только один внутренний силовой фактор — поперечная сила Q ; касательные напряжения, возникающие в поперечном сечении, распределены по сечению равномерно; если соединение осуществлено несколькими одинаковыми деталями (болтами, заклепками и др.), то считается, что все они нагружены одинаково. Исходя из этих допущений условие прочности при расчете на срез запишется в таком виде;

$$\tau_{ср} = Q / (i A_{ср}) < [\tau_{ср}],$$

где $\tau_{ср}$ — расчетное напряжение среза в поперечном сечении детали; Q — поперечная сила, возникающая в этом сечении; $A_{ср}$ — площадь поперечного сечения срезаемой детали (площадь среза); i — число соединительных деталей; $[\tau_{ср}]$ — допускаемое напряжение при расчетах на срез, зависящее от материала соединительной детали и условий работы конструкции.

При расчете болтов, штифтов, шпонок и прочего принимают $[\tau_{ср}] = (0,25 \dots 0,35) \sigma_T$ или $[\tau_{ср}] = (0,55 \dots 0,60) [\sigma]$.

Из условия прочности можно производить три вида расчетов: а) проверочный; б) проектный (определение числа соединительных деталей при заданных размерах либо определение размеров детали при заданном их числе); в) определение допускаемой нагрузки.

При небольшой толщине соединяемых брусьев (листов) и значительной нагрузке между поверхностью соединительной детали и стенками отверстия возникает большое взаимное давление, в результате которого стенка отверстия может обмяться, форма отверстия изменится и соединение разрушится.

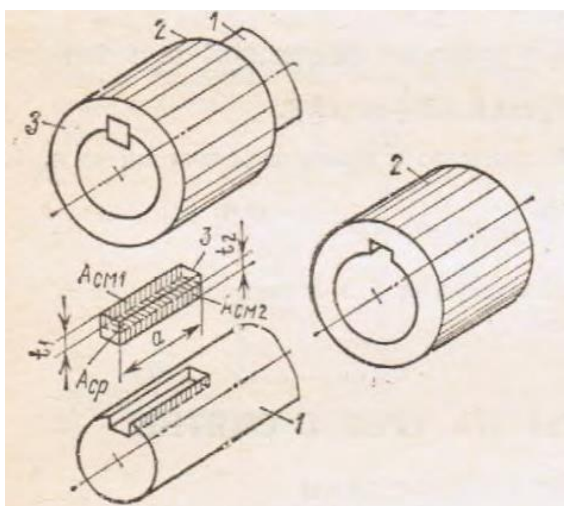
Давление, возникшее между поверхностями соединительной детали и отверстия, называется напряжением смятия $\sigma_{см}$.

Расчеты на смятие, так же как и расчеты на срез, носят условный характер. Считают, что силы давления распределены по поверхности смятия равномерно и перпендикулярны им. Отсюда условие прочности на смятие имеет такой вид:

$$\sigma_{см} = F / (i A_{см}) < [\sigma_{см}],$$

где F/i — нагрузка на один соединительный элемент (i — число элементов); $A_{см}$ — площадь смятия; $[\sigma]$ — допускаемое напряжение смятия. Для низкоуглеродистой стали $[\sigma_{см}] = 60 \dots 120$ МПа.

Если поверхность смятия плоская

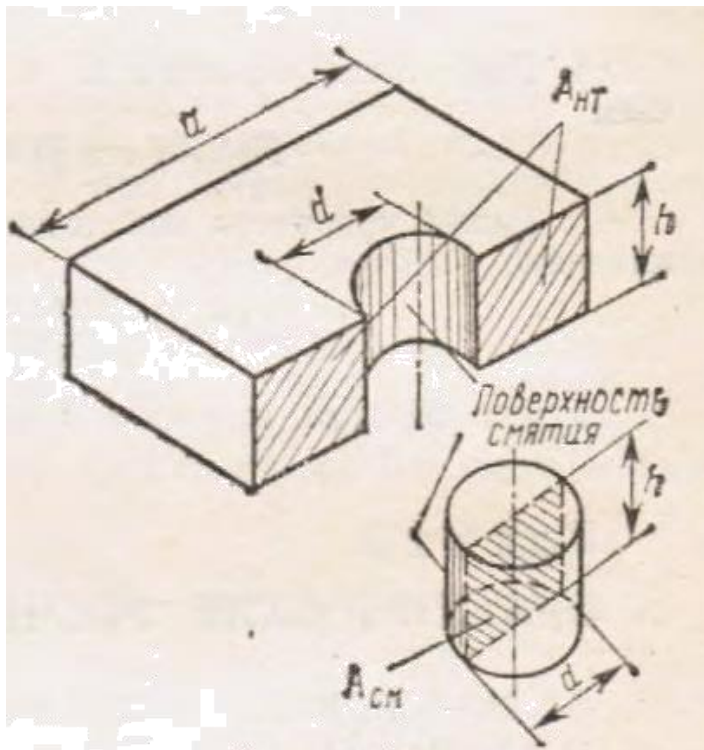


как, например, при соединении вала 1 и втулки 2 призматической шпонкой 3, то площадь смятия определяется непосредственно как произведение длины на ширину:

$$A_{см1} = t_1 a, \quad A_{см2} = t_2 a.$$

Если поверхность смятия цилиндрическая, то в расчетную формулу подставляется условная площадь смятия, равная площади

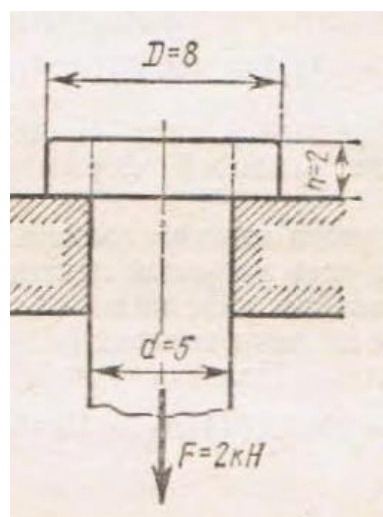
проекции поверхности на диаметральную плоскость. На рисунке условная площадь смятия $A_{см} = dh$.



Кроме проверки деталей на смятие при относительно небольшой ширине соединяемых листов или пластин их проверяют на разрыв по поперечному сечению, ослабленному отверстиями. На рисунке площадь ослабленного поперечного сечения (площадь «нетто») $A_{нт}=(a-d)h$.

Примеры расчета

1. Проверить прочность стержня на растяжение, его головки на срез и опорной поверхности под головкой на смятие,



если $[\sigma_p] = 110$ МПа, $[\tau_{ср}]=60$ МПа и $[\sigma_{см}]=120$ МПа.

Решение. 1. Диаметр стержня $d=5$ (мм) $=0,005$ (м); следовательно, площадь поперечного сечения стержня $A=\pi d^2/4=$
 $=\pi(5 \cdot 10^{-3})^2/4=19,7 \cdot 10^{-6}$ м², а нормальная сила в этом сечении $N=2$ кН $=2000$ Н.

Рабочее напряжение в поперечном сечении:

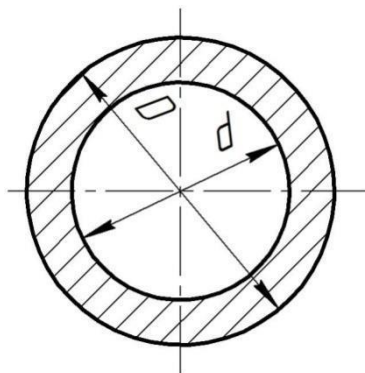
$$\sigma = N/A = 2000 / (19,7 \cdot 10^{-6}) = 102 \cdot 10^6 \text{ Па} = 102 \text{ МПа} < [\sigma_p].$$

2. Головка стержня может быть срезана по цилиндрической поверхности диаметром $d = 5 \cdot 10^{-3}$ м и высотой $h = 2 \cdot 10^{-3}$ м, т. е. $A_{cp} = \pi dh = \pi \cdot 5 \cdot 2 \cdot 10^{-6} = 31,4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2$. Следовательно, при $Q = F$ рабочее напряжение среза

$$\tau_{cp} = Q/A_{cp} = 2000 / (31,4 \cdot 10^{-6}) = 63,8 \cdot 10^6 \text{ Па} = 63,8 \text{ МПа} > [\tau_{cp}].$$

Перегрузка составляет $(3,8/60) \cdot 100\% = 6,33\%$, что недопустимо. Необходимо либо снизить нагрузку, либо взять стержень с более высокой головкой.

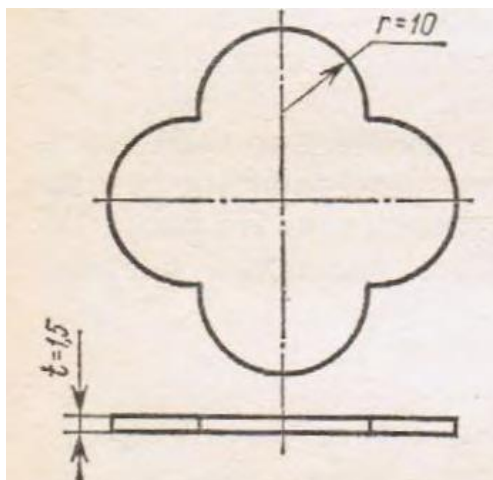
3. Поверхность контакта между головкой стержня и опорой имеет форму плоского кольца,



т. е. $A_{см} = \pi(D^2 - d^2)/4$. Рабочее напряжение смятия

$$\sigma_{см} = \frac{F \cdot 4}{\pi(D^2 - d^2)} = \frac{2000 \cdot 4}{\pi(8^2 - 5^2) \cdot 10^{-6}} = 65 \cdot 10^6 = 65 \text{ МПа} < [\sigma_{см}].$$

2. Дюралюминиевая пластина 1 толщиной $t_1 = 1$ мм склеена карбинольным клеем со стеклопластиковой пластиной 2.



Определить толщину t_2 пластинки 2, ширину b обеих пластинок и длину l клеевого шва, если $F=500$ Н, допускаемые напряжения: для дюралюминия $[\sigma_p]_д=100$ МПа, для стеклопластика $[\sigma_p]_с=75$ МПа, для клеевого шва $[\tau_{cp}]_{кл}=5$ МПа.

Решение. 1. Находим ширину b листов из условия прочности дюралюминиевого листа. Поперечное сечение листа 1 — прямоугольник площадью $A_1=t_1b$,

нормальная сила в этом сечении N_1F . По расчетной формуле $t_1 b \geq \frac{N_1}{[\sigma_p]_д}$, от-

куда
$$b \geq \frac{N_1}{[\sigma_p]_д \cdot t_1} = \frac{500}{100 \cdot 10^6 \cdot 1 \cdot 10^{-3}} = 5 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 5 \text{ (мм)}.$$

2. Толщину t_2 листа 2 находим из условия его прочности. Площадь попереч-

ного сечения $A_2=t_2b$; продольная сила N_2F . По формуле $t_2 b \geq \frac{N_2}{[\sigma_p]_с}$, откуда

$$t_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma_p]_с} = \frac{500}{75 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 1,33 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 1,33 \text{ (мм)}.$$

3. Длину клеевого шва определяем из условия прочности соединения на срез. Площадь клеевого шва $A_{кл}=b \cdot l$. Сдвигающая сила $Q=F$. Из условия прочности,

полагая $\tau_{cp}=[\tau_{cp}]$ и $A_{cp}=A_{кл}$, имеем $b \cdot l \geq \frac{Q}{[\tau]_{cp \text{ кл}}}$, откуда

$$l \geq \frac{Q}{[\tau]_{cp \text{ кл}} \cdot b} = \frac{500}{5 \cdot 10^6 \cdot 5 \cdot 10^{-3}} = 20 \cdot 10^{-3} \text{ (м)} = 20 \text{ (мм)}.$$

3. Определить силу F , действующую на пуансон штампа при штамповке пластинок заданной формы из латунной ленты ($\tau_B=240$ МПа).

Решение. На пуансон штампа должна действовать сила $F=\tau_B A_{cp}$, где τ_B — предел прочности на срез латунной ленты, A_{cp} — площадь среза, равная произведению длины контура пластинки на толщину листа. Длина контура пластинки складывается из длин четырех полуокружностей радиуса r . Значит, площадь среза $A_{cp}=4\pi r t_1$. Полагая $\tau_B=240 \cdot 10^6$ Па, определяем силу F :

$$F = \tau_g \cdot 4\pi r t_1 = 240 \cdot 10^6 \cdot 4 \cdot \pi \cdot 10 \cdot 10^{-3} \cdot 1,5 \cdot 10^{-3} = 45300(H) = 45,3(\kappa H).$$

Лекция 13

Тема занятия: Статические моменты сечений. Осевые, центробежные и полярные моменты инерции. Главные оси и главные центральные моменты инерции. Осевые моменты инерции простейших сечений. Определение главных центральных моментов инерции составных сечений, имеющих ось симметрии.

Статический момент сечения

Статическим моментом S_x сечения (фигуры) относительно какой-либо оси x (рис.1) называется сумма произведений элементарных площадок dA на их расстояние y до данной оси, численно равная интегралу

$$S_x = \int_A y dA.$$

Размерность статического момента — единица длины в третьей степени, обычно $см^3$. Он может быть положительным, отрицательным и, в частности, равным нулю. Если отождествить площадь с силой, то интеграл S_x можно рассматривать как сумму моментов сил dA относительно оси x . По известной из теоретической механики теореме о моменте равнодействующей можно написать

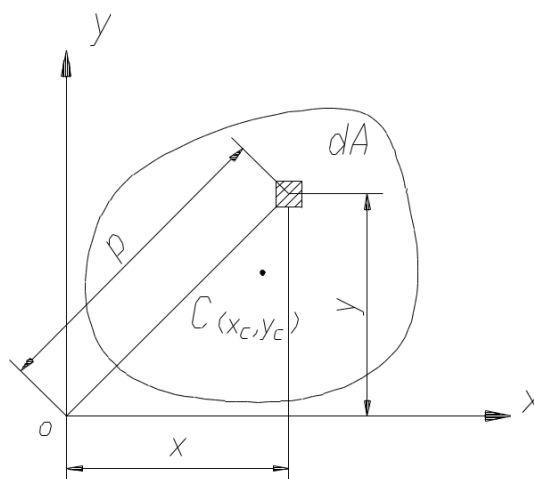


Рис. 1

$$S_x = \int_A y dA = A \cdot y_c ,$$

где A — площадь всей фигуры (равнодействующая);

y_c — расстояние от центра тяжести фигуры до оси x .

Таким образом, можно вычислить формулу для определения координаты центра тяжести

$$y_c = \frac{S_x}{A} .$$

Аналогично статический момент относительно оси y

$$S_y = \int_A x dA = A \cdot x_c ,$$

откуда

$$x_c = \overline{A^x} .$$

Из этих формул следует, что если x и y проходят через центр тяжести, фигуры, то статический момент относительно этих осей равен нулю. Такие оси называются *центральными осями*.

Если сечение можно представить в виде отдельных простых частей (прямоугольников, треугольников и т.д.), для которых известны положения центров тяжести, то в этом случае статический момент всего сечения можно получить как сумму статических моментов этих простых частей. Это непосредственно следует из свойств определенного интеграла.

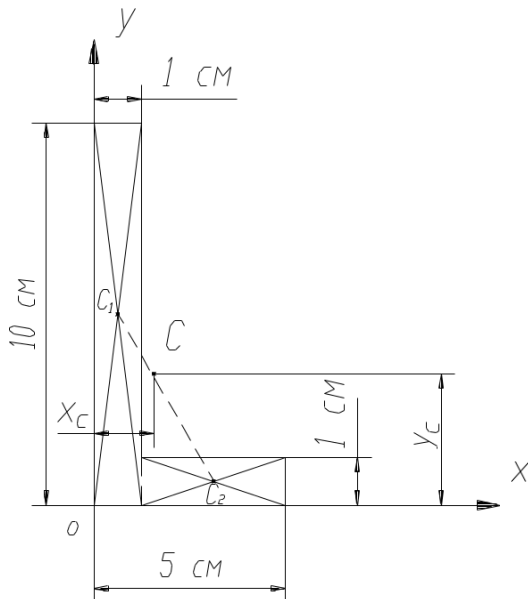


Рис. 2

Если сечение имеет ось симметрии, то последняя всегда проходит через центр тяжести, а потому статический момент относительно оси симметрии всегда равен нулю.

Моменты инерции сечения

Осевым моментом инерции сечения относительно оси x называется сумма произведений элементарных площадок dA на квадрат их расстояний до данной оси, численно равная интегралу

$$J_x = \int_A y^2 dA .$$

Аналогично относительно оси y

$$J_y = \int_A x^2 dA ,$$

где y — расстояние от элементарной площадки dA до оси x , x — расстояние от элементарной площадки dA до оси y .

Полярным моментом инерции сечения относительно данной точки (полюса) называется сумма произведений элементарных площадок dA на квадрат их расстояний до этой точки, определяемая интегралом вида

$$J_p = \int_A \rho^2 dA,$$

где ρ – расстояние от площадки dA до точки (полюса), относительно которой вычисляется полярный момент инерции.

Осевой и полярный моменты инерции – величины всегда положительные, так как координаты произвольной площадки в формулы входят в квадрате.

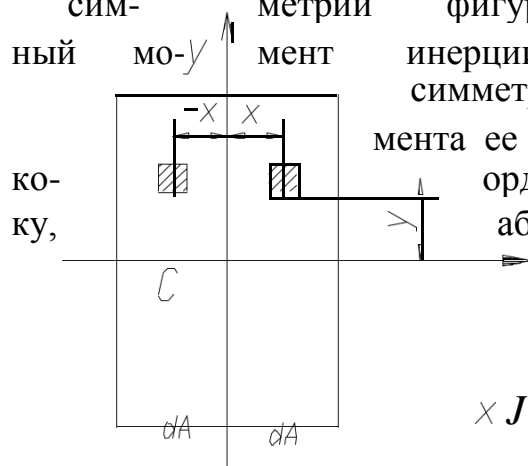
Центробежным моментом инерции сечения относительно осей x и y называется сумма произведений элементарных площадок dA на их расстояния до этих осей, определяемая интегралом вида

$$J_{xy} = \int_A xy dA,$$

где x, y – расстояния от площадки dA до осей x и y . Размерность всех моментов инерции – единица длины в четвертой степени (см^4).

Центробежный момент инерции может быть положительным, отрицательным и, в частном случае, равным нулю.

Если взаимно перпендикулярные оси x и y или одна из них являются осями симметрии фигуры, то относительно таких осей центробежный момент инерции равен нулю. Действительно, для симметричной фигуры всегда можно выделить два элемента ее площади (рис.4), которые имеют одинаковые ординаты y и равные, но противоположные по знаку абсциссы, тогда:



$$J_{xy} = \int_A xy dA = \int_{A_l} (-x) y dA + \int_{A_r} xy dA = 0.$$

Рис. 4

Легко доказать, что полярный момент инерции относительно какой – либо точки равен сумме осевых моментов инерции относительно двух взаимно перпендикулярных осей, проходящих через эту точку.

Из рисунка видно, что $\rho^2 = x^2 + y^2$. Подставив это значение в выражение J_p , получим

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = \int_A (x^2 + y^2) dA = \int_A x^2 dA + \int_A y^2 dA.$$

Следовательно,

$$J_p = J_x + J_y.$$

Моменты инерции простых сечений

1. Прямоугольник Вычислим момент инерции сечения относительно оси x_0 , проходящей через центр тяжести.

За dA примем площадь бесконечно тонкого слоя $dA = b \cdot dy$. Тогда

$$J_{x_0} = b \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} y^2 dy = \frac{bh^3}{12}.$$

Аналогично,

$$J_{y_0} = \frac{bh^3}{12}.$$

2. Круг. Сначала определим полярный момент инерции относительно центра круга

$$J_p = \int_A \rho^2 dA.$$

За dA принимаем площадь бесконечно тонкого кольца толщиной $d\rho$:

$$dA = 2\pi \cdot \rho \cdot d\rho,$$

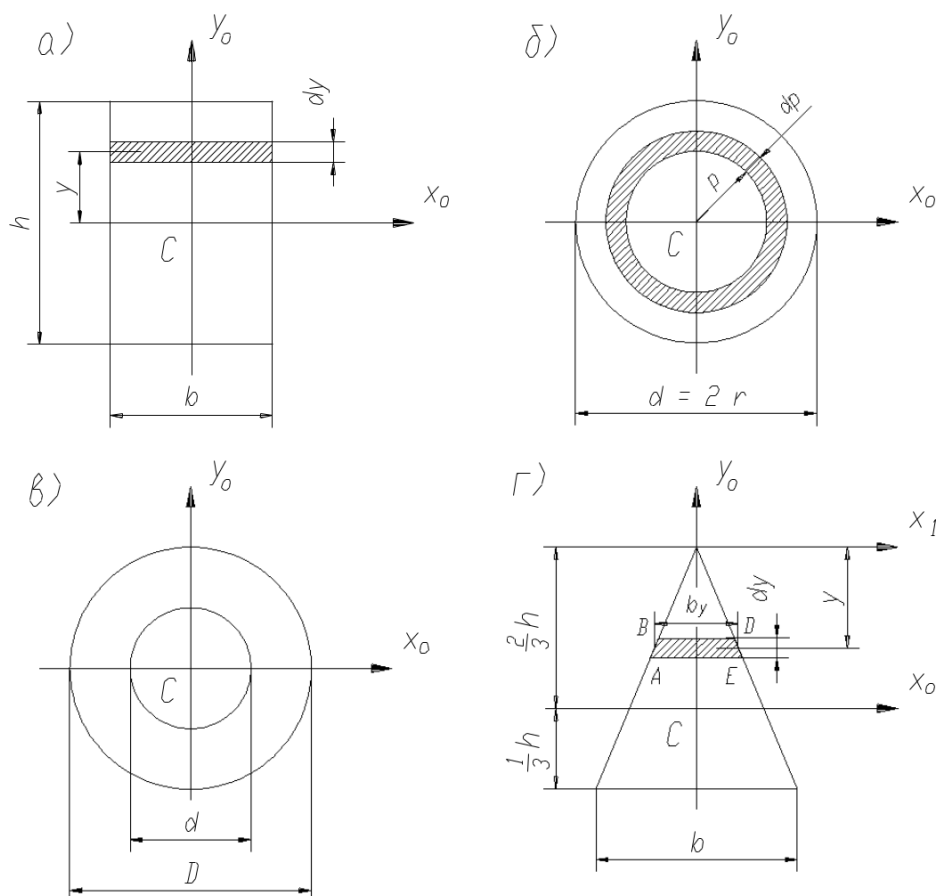
тогда

$$J_p = 2\pi \int_0^r \rho^3 d\rho = \frac{\pi \cdot r^4}{2}.$$

Следовательно,

$$J_p = \frac{\pi}{2} \cdot r^4 = \frac{\pi}{32} \cdot d^4 = 0,1 \cdot d^4.$$

Теперь найдем J_{x_0} Для круга, согласно формуле, получаем



$$J_p = 2 \cdot J_{x_0} = 2 \cdot J_{y_0} ; ,$$

откуда

$$J_{x_0} = J_{y_0} = \frac{J_p}{2} = \frac{\pi r^4}{4} = \frac{\pi d^4}{64} = 0,05 d^4.$$

3. Кольцо. Осевой момент инерции в этом случае равен разности моментов инерции внешнего и внутреннего кругов

$$J_{x_0} = J_{y_0} = \frac{\pi D^4}{64} - \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \alpha^4) \approx 0,05 D^4 \cdot (1 - \alpha^4),$$

где

$$\alpha = \frac{d}{D}.$$

Аналогично полярный момент инерции

$$J_p = \frac{\pi D^4}{32} - \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi D^4}{32} (1 - \alpha^4) \approx 0,1 D^4 \cdot (1 - \alpha^4),$$

3. Равнобедренный треугольник. Определим момент инерции относительно оси x_1 , параллельной основанию и проходящей через вершину треугольника

$$J_{x_1} = \int_A y^2 dA.$$

за dA примем площадь бесконечно тонкой трапеции $ABDE$, площадь которой можно считать равной площади прямоугольника

$$dA = b_y dy,$$

где b_y – длина прямоугольника, которую легко получить из подобия треугольников

$$b_y = \frac{y}{h} b,$$

тогда

$$J_{x_1} = \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{b \cdot h^3}{4}.$$

Определим момент инерции относительно центральной оси:

$$J_{x_0} = J_{x_1} - a^2 A = \frac{bh^3}{4} - \left(\frac{2}{3}h\right)^2 \cdot \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{36}.$$

Аналогичным образом определяем момент инерции центральной оси y_0 , получаем формулу

$$J_{y_0} = \frac{bh}{48}.$$

7. Определение главных центральных моментов инерции составных сечений, имеющих ось симметрии.

При изменении угла величины J_{x1} , J_{y1} и J_{x1y1} изменяются. Найдем значение угла, при котором J_{x1} и J_{y1} имеют экстремальные значения, для чего возьмем от J_{x1} и J_{y1} первую производную по α и приравняем ее нулю:

$$\frac{dJ}{d\alpha} = -2J_x \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) + 2J_y \cos(\alpha) \cdot \sin(\alpha) - 2J_{xy} \cos(2\alpha) = 0,$$

или

$$-(J_x - J_y) \cdot \sin(2\alpha) - 2J_{xy} \cos(2\alpha) = 0,$$

откуда

$$\operatorname{tg}(2\alpha_0) = -\frac{2J_{xy}}{J_x - J_y}.$$

Эта формула определяет положение двух осей, относительно одной из которых осевой момент инерции максимален, а относительно другой – минимален.

Такие оси называются *главными*. Моменты инерции относительно главных осей называются *главными моментами инерции*.

Величину главных моментов инерции найдем из предыдущих формул, подставив в них значение α_0 , при этом используем известные формулы тригонометрии для функций двойных углов.

После преобразований получим следующую формулу для определения главных моментов инерции:

$$J_{\frac{\max}{\min}} = \frac{J_x + J_y}{2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{(J_x - J_y)^2 + 4J_{xy}^2}.$$

Исследуя вторую производную $\frac{d^2 J_{x1}}{d\alpha^2}$, можно установить, что для дан-

ного случая ($J_x > J_y$) максимальный момент инерции J_{max} имеет место относительно главной оси, повернутой на угол α_0 по отношению к оси x , а минимальный момент инерции – относительно другой перпендикулярной оси. В большинстве случаев в этом исследовании нет необходимости, так как по конфигурации сечений видно, какая из главных осей соответствует максимуму момента инерции.

Покажем теперь, что относительно главных осей центробежный момент инерции равен нулю.

Действительно, приравнявая J_{x1y1} нулю, получаем

$$\frac{J_x - J_y}{2} \sin(2\alpha_0) + J_{xy} \cos(2\alpha_0) = 0,$$

откуда для $\operatorname{tg}(2\alpha_0)$ вновь получается полученная нами формула.

Таким образом, главными осями инерции называются оси, обладающие следующими свойствами:

1. Центробежный момент инерции относительно этих осей равен нулю.

2. Моменты инерции относительно главных осей имеют экстремальные значения (относительно одной – максимум, относительно другой – минимум).

Главные оси, проходящие через центр тяжести сечения, называются *главными центральными осями инерции*.

Во многих случаях удается сразу определить положение главных центральных осей. Если фигура имеет ось симметрии, то она является одной из главных центральных осей, вторая проходит через центр тяжести сечения перпендикулярно первой. Сказанное следует из того обстоятельства, что относительно оси симметрии и любой оси, ей перпендикулярной, центробежный момент инерции равен нулю.

Используя формулы получения J_x, J_y, J_{xy} можно показать, что в случае, если два главных центральных момента инерции сечения равны между собой, то у этого сечения любая центральная ось является главной, и все главные центральные моменты инерции одинаковы (круг, квадрат, шестиугольник, равносторонний треугольник).

Действительно, предположим, что для какого-то сечения оси x и y – главные центральные оси и, кроме того, $J_x = J_y$. Тогда из этих формул получим, что $J_x = J_y = J_{x1} = J_{y1}$, и убедимся, что $J_{x1y1} = 0$, т.е. любые оси $x1$ и $y1$ являются главными центральными осями инерции такой фигуры.

Лекция 14

Тема занятия: Кручение. Чистый сдвиг. Закон Гука при сдвиге. Модуль сдвига. Внутренние силовые факторы при кручении. Эпюры крутящих моментов. Кручение бруса круглого поперечного сечения. Расчеты на прочность и жесткость при кручении. Угол закручивания.

Кручение. Чистый сдвиг. Закон Гука при сдвиге.

Рассмотрим напряженное состояние, носящее название *чистый сдвиг*. При чистом сдвиге на четырех гранях выделенного элемента возникают только касательные напряжения, а две грани свободны от напряжений. Согласно закону парности, касательные напряжения τ на всех четырех площадях равны по абсолютной величине, но направлены по смежным граням либо от ребра, либо к ребру. Легко доказать, что выделенный элемент при сдвиге находится в равновесии.

На вертикальных площадках $dA_B = dz \cdot dy$ действуют силы $\tau(dz \cdot dy)$, образующие пару с моментом относительно оси z

$$\tau(dz \cdot dy) dx,$$

на горизонтальных площадках $dA_\Gamma = dx \cdot dz$ действуют силы $\tau(dx \cdot dz)$, образующие пару с моментом относительно оси z

$$-\tau (dx \cdot dz) dy,$$

а алгебраическая сумма моментов пар относительно оси z :

$$\tau \cdot dz \cdot dy \cdot dx - \tau \cdot dx \cdot dz \cdot dy = 0.$$

Деформация сдвига состоит в том, что под действием внешних сил первоначальная форма выделенного элемента искажается, т. е., например, горизонтальные площадки сдвигаются относительно друг друга на расстояние Adz , называемое абсолютным сдвигом, и угол $\pi/2$ между смежными площадками изменяется на величину γ . Этот угол не зависит от размеров выделенного элемента, поэтому он является мерой деформации сдвига и называется *углом сдвига* или *угловой деформацией*. Установлено, что касательные напряжения и угол сдвига в пределах упругих деформаций связаны между собой прямой пропорциональной зависимостью

$$\tau = G\gamma,$$

которая называется законом Гука при сдвиге. Коэффициент пропорциональности G называется *модулем сдвига* и характеризует жесткость материала при сдвиге.

Для одного и того же материала между модулем упругости E , модулем сдвига G и коэффициентом Пуассона μ существует следующая зависимость:

$$G = E/[2(1+\mu)].$$

По этой формуле, зная E и μ , легко найти G . Например, для стали $\mu=0,25$ и $G_{ст}=0,4E_{ст}$. Обычно для стали принимают $G=0,8 \cdot 10^5$ Мпа.

Крутящий момент. Построение эпюр.

Кручением называется такой вид нагружения бруса, при котором в его поперечных сечениях возникает только один внутренний силовой фактор — крутящий момент. Чтобы получить такой вид нагружения в простейшем случае, брус необходимо нагрузить действующими в плоскостях, перпендикулярных его осп, и в противоположных направлениях двумя парами сил, моменты M_1 и M_2 которых называются внешними скручивающими моментами. Для упрощения дальнейшего изложения считаем, что алгебраическая сумма внешних моментов, приложенных к брусу, равна нулю, т. е. брус находится в равновесии (в состоянии покоя или равномерного вращения).

Разрежем брус по сечению A на части I и II и, отбросив часть I , рассмотрим равновесие оставленной части II . Из рисунка видим, что равновесие обеспечивается возникновением только крутящего момента M_K ; алгебраические суммы проекций внешних сил, образующих пару, на каждую из осей равны нулю, равны нулю и моменты пары сил относительно осей y и z .

Следовательно:

$$N = 0; Q_y = 0; Q_z = 0; M_z = 0; M_y = 0 \text{ и лишь крутящий момент } M_K = M_2.$$

Разрезав брус по сечению A и отбросив часть II , видим, что в сечении A_1 крутящий момент $M_K = M_1$ ни численно, ни по знаку не изменился, так как при равновесии бруса $M_1 = M_2$

В тех случаях, когда на брус действует не два, а несколько скручивающих моментов, целесообразно при вычислении крутящих моментов принять такое правило знаков: при рассмотрении любой из оставленных частей бруса со стороны сечения внешние моменты, действующие по ходу часовой стрел-

ки, считаем положительными, действующие против хода часовой стрелки — отрицательными.

Для получения наглядной картины изменения крутящих моментов в различных сечениях строят их эпюру по всей длине бруса. Порядок построения эпюры крутящих моментов M_k рассмотрим на примере.

Брус, нагруженный четырьмя моментами. Из условия равновесия бруса следует, что $M_1 + M_2 + M_3 - M_0 = 0$. Сечениями, в которых приложены скручивающие моменты, брус разделен на четыре участка: I, II, III и IV. Рассечем брус на участке I и, отбросив часть бруса правее сечения, видим, что оставленная левая часть не нагружена. Значит, $M_{kI} = 0$. Рассечем брус на участке II, отбросим правую часть бруса и рассмотрим левую часть со стороны сечения. Увидим, что $M_{kII} = M_1$ (если смотреть со стороны сечения, то момент M_1 действует по ходу часовой стрелки). Рассматривая далее левую часть бруса со стороны сечения на участке III, видим, что $M_{kIII} = M_1 + M_2$. Из рассмотрения левой части бруса со стороны сечения на участке IV следует $M_{kIV} = M_1 + M_2 - M_0$. Из условия равновесия всех четырех скручивающих моментов ($M_0 = M_1 + M_2 + M_3$) ясно, что $-M_0 + M_1 + M_2 < 0$. Поэтому $M_{kIV} < 0$.

На рисунке результаты вычислений изображены в виде эпюры. На любом участке между сечениями бруса, нагруженными скручивающими моментами, крутящие моменты остаются постоянными. При переходе от одного участка к другому на эпюре возникают скачки, численно равные моментам внешних скручивающих пар.

Эпюру M_k можно было бы строить и справа налево. Тогда, отбрасывая каждый раз левую часть бруса, мы получили бы для участка IV $M_{kIV} = -M_3$ (из условия равновесия внешних моментов следует, что $M_3 = -M_0 + M_1 + M_2$), для участка III $M_{kIII} = -M_3 + M_0$ (легко видеть, что $-M_3 + M_0 = M_1 + M_2$) и т. д.

Кручение круглого прямого бруса.

Зависимости между величинами, характеризующими кручение бруса, представляются в наиболее простом виде при круглом поперечном сечении бруса. Рассматривая кручение круглого прямого бруса, исходим из трех допущений: выбранное в брус до нагружения поперечное сечение остается плоским и перпендикулярным оси и после нагружения (гипотеза Я. Бернулли); расстояния между поперечными сечениями при нагружении бруса не изменяются; радиусы поперечных сечений бруса не искривляются.

Представим себе заделанный одним концом в неподатливой стенке брус круглого поперечного сечения радиуса r , на цилиндрической поверхности которого вдоль образующих нанесены прямые линии. Если свободный конец бруса нагрузить моментом M_0 , то брус деформируется (скручивается) и линии на цилиндрической поверхности принимают вид винтовых линий. Для того чтобы исследовать деформированное состояние бруса, выделим из него на расстоянии x от заделки элемент длиной dx и изобразим этот элемент отдельно в увеличенном виде.

Предположим, что левое сечение выделенного элемента повернулось на некоторый угол φ , тогда правое сечение, расположенное несколько дальше от неподвижного сечения бруса в заделке, повернулось на угол $\varphi + d\varphi$. Угол $d\varphi = \angle BO_1B_1$ называется *углом закручивания* выделенного элемента. Этот угол

зависит от длины элемента dx и поэтому при одном и том же деформированном состоянии может быть различным.

Деформация бруса при кручении характеризуется величиной

$$\varphi_0 = d\varphi/dx,$$

называемой относительным углом закручивания. Это угол взаимного поворота двух сечений, отнесенный к расстоянию между ними.

Если у поверхности выделенного элемента вырезать слой AB_1CD , который из-за малости размеров можно считать призмой, то этот призматический элемент находится в состоянии чистого сдвига, т. е. угол BAB_1 на цилиндрической поверхности элемента является углом сдвига γ . Приближенно можно считать $BB_1 = d\varphi \cdot r = \varphi_0 \cdot r$, отсюда

$$y = (d\varphi/dz)r = \varphi_0 r.$$

Максимальные касательные напряжения τ_{\max} в крайних точках поперечного сечения бруса

$$\tau_{\max} = G\varphi_0 r.$$

Если мысленно вырезать призматический элемент на расстоянии ρ от оси бруса, то угол сдвига у этого элемента $\gamma' < \gamma$ и тогда в любой точке поперечного сечения на расстоянии ρ от центра

$$\tau_\rho = G\varphi_0 \rho.$$

Это равенство выражает линейный закон распределения касательных напряжений по поперечному сечению при кручении. Распределение касательных напряжений по сечению согласно этому закону показано на рисунке.

Максимальные касательные напряжения кручения τ_{\max} возникают у края сечения, а по мере приближения к центру убывают до нуля. Таким образом, в большей степени сопротивляются кручению те части бруса, которые расположены ближе к его поверхности. Поэтому для экономии материала брусья, работающие на кручение, иногда изготавливают пустотелыми. Поперечное сечение такого бруса для полого вала имеет форму плоского кругового кольца, распределение касательных напряжений в нем показано на рисунке. Касательные напряжения вследствие закона парности возникают и в продольных сечениях бруса.

Зная закон распределения касательных напряжений по сечению, установим зависимость между возникшим в нем крутящим моментом M_K , относительным углом закручивания φ_0 и максимальными касательными напряжениями τ_{\max} .

Пусть в некотором сечении возник крутящий момент M_K , который можно определить через внешние моменты. На некотором расстоянии ρ от центра выберем в сечении бесконечно малую площадку dA и допустим, что напряжение по этой площадке τ_ρ . Тогда элементарный крутящий момент

$$dM_K = \tau_\rho dA \cdot \rho = G\varphi_0 \rho^2 dA.$$

Суммируя элементарные крутящие моменты M_K по всей площади и учитывая, что G и φ_0 — величины постоянные, получаем

$$M_K = G\varphi_0 \int_A \rho^2 dA.$$

Обозначив выражение $\int_A \rho^2 dA$ через J_ρ , получим

$$M_K = G\varphi_0 J_p .$$

Величина

$$\int_A \rho^2 dA = J_p ,$$

т. е. сумма произведений всех элементарных площадок поперечного сечения на квадраты их расстояний от центра, называется *полярным моментом инерции сечения*.

В уравнении ρ выражается в м, см или мм, а dA — в м^2 , см^2 или мм^2 ; следовательно, полярный момент инерции выражается в м^4 , см^4 или мм^4 . Из равенства получаем выражение относительного угла закручивания

$$\varphi = \frac{M_K}{GJ_p} .$$

Полный угол закручивания бруса (значение углового перемещения при кручении)

$$\varphi = \frac{M l}{GJ_p} .$$

Произведение GJ_p называется *жесткостью сечения бруса при кручении*. φ_0 выражается в рад/м или рад/мм, φ выражается в рад.

Заменив $G\varphi_0$ его выражением ($G\varphi_0 = \tau_{\max}/r$), получим $M_K = \tau_{\max} J_p / r$. Откуда максимальные касательные напряжения

$$\tau_{\max} = \frac{M_K r}{J_p} .$$

Отношение полярного момента инерции сечения к его радиусу называется полярным моментом сопротивления и обозначается W_p :

где W_p выражается в м^3 , см^3 или мм^3 . Таким образом,

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} .$$

Максимальное касательное напряжение в поперечном сечении бруса равно частному от деления крутящего момента на полярный момент сопротивления.

При вычислении значений φ_0 , φ и τ_{\max} , кроме крутящего момента M_K , модуля сдвига G , длины l нужно знать значение полярного момента инерции J_p или полярного момента сопротивления W_p , которые зависят от формы и размеров сечения.

Чтобы получить формулу полярного момента инерции круга, выделим в его площади на расстоянии ρ от центра элемент dA в виде плоского кольца шириной $d\rho$. Если пренебречь разницей между длинами внешнего и внутреннего контуров кольцевого элемента, то его площадь $dA = 2\pi\rho d\rho$.

Подставляя значение dA в и принимая во внимание, что при интегрировании по всей площади ρ изменяется от 0 до $d/2$ (где d — диаметр круглого сечения), получаем

$$J_p = \int_A \rho^2 dA = 2\pi \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho = 2\pi \cdot \frac{\rho^4}{4} \Big|_0^{d/2}.$$

Отсюда

$$J_p = \frac{\pi d^4}{32}.$$

Аналогично, для кольцевого сечения

$$J_p = \frac{\pi}{32} (d^4 - d_0^4) = \frac{\pi}{32} (1 - c^4),$$

где d – наружный, а d_0 – внутренний диаметры кольца; $c=d/d_0$.

Получаем полярные моменты сопротивления круглого сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16}$$

И кольцевого сечения

$$W_p = \frac{\pi d^3}{16} (1 - c^4).$$

Расчеты на прочность и жесткость

Условие прочности при кручении имеет вид:

$$\tau_{\max} = \frac{M_K}{W_p} \leq [\tau_K].$$

Предел текучести при кручении связан с пределом текучести при растяжении зависимостью $\tau_r \approx (0,55 \dots 0,60) \sigma_r$, для пластичных материалов принимают $[\tau_K] \approx (0,55 \dots 0,60) [\sigma_p]$.

По условию прочности при кручении выполняют три вида расчетов.

Проектный расчет. Определив крутящий момент в сечении бруса и приняв $\tau_{\max} = [\tau_K]$, находим требуемое значение полярного момента сопротивления:

$$W_p = \frac{M_K}{[\tau_K]}.$$

Затем, исходя из формулы поперечного сечения (круг или кольцо), находим диаметр бруса. Полученное значение диаметра в миллиметрах следует округлить до ближайшего большего четного числа или числа, оканчивающегося на 5.

Расчет допускаемой нагрузки. Определив полярный момент сопротивления сечения бруса и приняв $\tau_{\max} = [\tau_K]$, находим допускаемое значение крутящего момента:

$$[M_K] = W_p [\tau_K].$$

Затем, исходя из схемы нагружения, находим максимально допустимую нагрузку.

Проверочный расчет. Определив максимальный крутящий момент в поперечном сечении бруса и полярный момент сопротивления сечения, нахо-

$$\tau_{\text{max}} = \frac{M_K}{W_p} \text{ и сравниваем его с } [\tau_k].$$

Условие жесткости бруса при кручении состоит в том, чтобы относительный угол закручивания φ_0 не превосходил некоторого заданного допускаемого значения $[\varphi_0]$, т. е.

$$\varphi_0 = \frac{M_K}{GJ_p} \leq [\varphi_0].$$

В Международной системе единиц (СИ) допускаемый угол закручивания $[\varphi_0]$ выражается в рад/м, но в практике часто допускаемый угол закручивания задается в град/м. Тогда это значение нужно перевести в единицы СИ, умножив на отношение $\pi/180^\circ$, т. е.

$$[\varphi_0] = 180 \frac{\pi}{\circ} [\varphi_0^\circ].$$

По условию жесткости выполняют тоже три вида расчетов:

- проверочный

- проектный: $J_p = \frac{M}{G} [\varphi_0^\circ]$

Далее, в зависимости от формы сечения (круг или кольцо) по найденному значению J_p определяют диаметр d или диаметры d и d_0 .

- Расчет допускаемой нагрузки выполняют по формуле

$$[M_K] = J_p G [\varphi_0].$$

Объектом расчетов на прочность или жесткость часто становится брус, который называется валом. На вал при передаче мощности всегда действуют по крайней мере два скручивающих момента (иногда три и больше). При расчете валов необходимо помнить известную из теоретической механики формулу, выражающую зависимость между вращающим (скручивающим) моментом $M_{вр}$, передаваемой мощностью P и угловой скоростью ω :

$$M_{вр} = \frac{P}{\omega},$$

а также формулу, выражающую зависимость между угловой скоростью ω (рад/с) и частотой вращения n (об/мин):

$$\omega = \frac{\pi}{30} n.$$

Пример. Определить диаметр вала для передачи мощности $P=50$ кВт при частоте вращения $n=300$ об/мин, если $[\tau_k]=30$ МПа и $[\varphi_0^\circ]=3$ град/м, $G=0,8 \cdot 10^5$ МПа.

Решение.

1. При передаче заданной мощности вал нагружен двумя скручивающими моментами, каждый из которых определяют по формуле: $M_1=M_2=P/\omega$. Так

как $\omega = \frac{\pi n}{30}$ и $P=50 \cdot 10^3$ Вт, то

$$M_1 = M_2 = \frac{30P}{\pi n} = \frac{30 \cdot 50 \cdot 10^3}{\pi \cdot 300} = 1,59 \cdot 10^3 \text{ (Н} \cdot \text{м)} = 1590 \text{ (Н} \cdot \text{м)}.$$

2. В каком угодно сечении вала между приложенными к нему внешними моментами M_1 и M_2 крутящий момент M_K равен любому из них, т. е.

$$M_K = M_1 = M_2 = 1590 \text{ Н} \cdot \text{м}.$$

3. Определим диаметр d_n вала из условия прочности. Выразив допускаемое напряжение $[\tau_K]$ в паскалях, находим требуемый полярный момент сопротивления:

$$W_p = \frac{M_K}{[\tau_K]} = \frac{1590}{30 \cdot 10^6} = 53 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^3\text{)} = 53 \cdot 10^{-3} \text{ (мм}^3\text{)}.$$

Находим диаметр вала, удовлетворяющий условию прочности:

$$d_n = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot W_p}{\pi}} = \sqrt[3]{\frac{16 \cdot 53 \cdot 10^{-6}}{\pi}} = 10 \cdot \sqrt[3]{270} = 64,6 \text{ (мм)}.$$

Округляя до целого числа мм, принимаем $d_n=65$ мм.

4. Определяем диаметр $d_{ж}$ вала из условия жесткости. Находим допускаемый угол закручивания:

$$[\varphi_0] = 180 \frac{\pi}{\circ} [\frac{\circ}{\text{м}}] = \frac{\pi}{180} \cdot 3 = 0,0525 \text{ (рад / м)}.$$

Находим требуемый полярный момент инерции сечения, выразив модуль сдвига G в паскалях:

$$J_p = \frac{M_K}{G[\varphi_0]} = \frac{1590}{0,8 \cdot 10^5 \cdot 10^6 \cdot 0,0525} = 0,38 \cdot 10^{-6} \text{ (м}^4\text{)} = 38 \cdot 10^4 \text{ (мм}^4\text{)}.$$

И находим диаметр вала, удовлетворяющий условию жесткости

$$d_{жс} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot J_p}{\pi}} = \sqrt[4]{\frac{32 \cdot 38 \cdot 10^4}{\pi}} = 10 \cdot \sqrt[4]{386} = 44,3 \text{ (мм)}.$$

Принимаем $d_{жс}=45$ мм.

5. Из двух найденных значений диаметра вала необходимо взять большее, так как оно удовлетворяет обоим условиям. Таким образом, конструктивный диаметр вала $d=65$ мм.

Лекция 15

Тема занятия: Изгиб. Основные понятия и определения. Классификация видов изгиба. Внутренние силовые факторы при прямом изгибе. Эпюры поперечных сил и изгибающих моментов. Нормальные напряжения при изгибе. Дифференциальные зависимости между изгибающим моментом,

поперечной силой и интенсивностью распределенной нагрузки. Расчеты на прочность при изгибе. Рациональные формы поперечных сечений балок из пластичных и хрупких материалов. Понятие о касательных напряжениях при изгибе. Расчеты на жесткость.

При прямом чистом изгибе в поперечном сечении стержня возникает только один силовой фактор — изгибающий момент M_x (рис. 1). Так как $Q_y = dM_x/dz = 0$, то $M_x = \text{const}$ и чистый прямой изгиб может быть реализован при загрузении стержня парами сил, приложенными в торцевых сечениях стержня. Поскольку изгибающий момент M_x по определению равен сумме моментов внутренних сил относительно оси Ox с нормальными напряжениями его связывает вытекающее из этого определения уравнение статики

$$M_x = \int_F \sigma y dF$$

Сформулируем предпосылки теории чистого прямого изгиба призматического стержня. Для этого проанализируем деформации модели стержня из низкомолекулярного материала, на боковой поверхности которого нанесена сетка продольных и поперечных рисок (рис. 2). Поскольку поперечные риски при изгибе стержня парами сил, приложенными в торцевых сечениях, остаются прямыми и перпендикулярными к искривленным продольным рискам, это позволяет сделать вывод о выполнении *гипотезы плоских сечений*, которая, как показывает решение этой задачи методами теории упругости, перестает быть гипотезой, становясь точным фактом — *законом плоских сечений*. Замеряя изменение расстояний между продольными рисками, приходим к выводу о справедливости гипотезы о ненадавливании продольных волокон $\sigma_x = \sigma_y = 0$.

Ортогональность продольных и поперечных рисок до и после деформирования (как отражение действия закона плоских сечений) указывает также на отсутствие сдвигов, касательных напряжений в поперечных и продольных сечениях стержня.

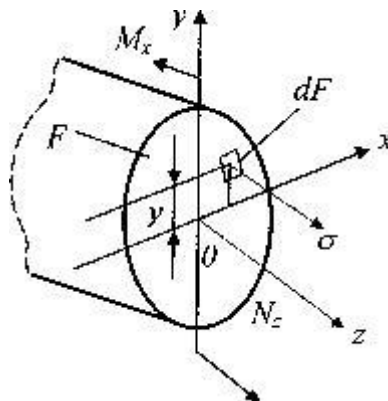


Рис.1. Связь внутреннего усилия и напряжения

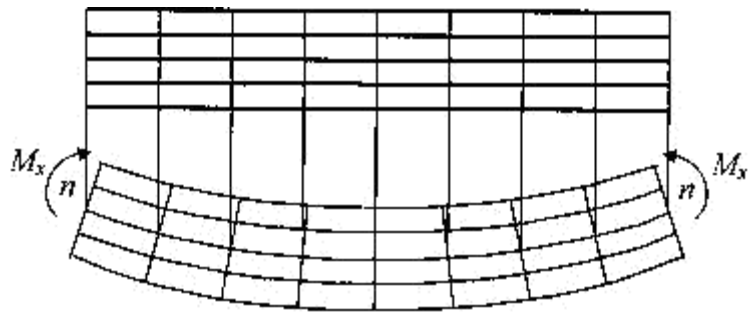
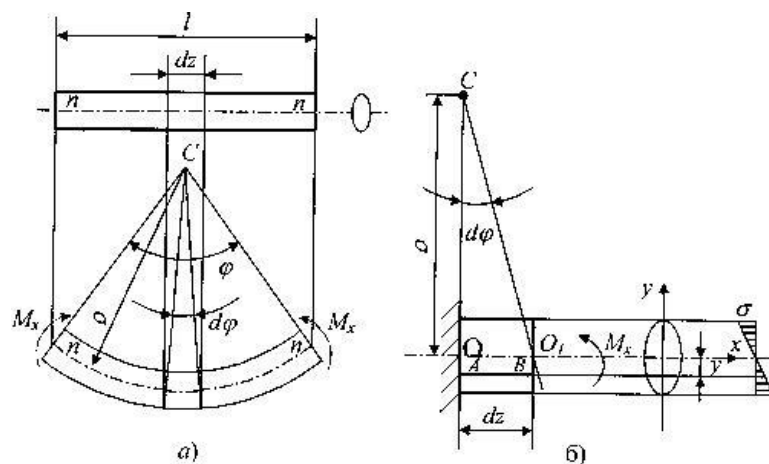


Рис.2. Модель чистого изгиба

Таким образом, чистый прямой изгиб призматического стержня сводится к одноосному растяжению или сжатию продольных волокон напряжениями σ (индекс z в дальнейшем опускаем). При этом часть волокон находится в зоне растяжения (на рис. 2 это—нижние волокна), а другая часть—в зоне сжатия (верхние волокна). Эти зоны разделены нейтральным слоем ($n-n$), не меняющим своей длины, напряжения в котором равны нулю. Учитывая сформулированные выше предпосылки и полагая, что материал стержня линейно-упругий, т. е. закон Гука в этом случае имеет вид: $\sigma = E\varepsilon$, выведем формулы для кривизны нейтрального слоя $1/\rho$ (ρ —радиус кривизны) и нормальных напряжений σ . Предварительно отметим, что постоянство поперечного сечения призматического стержня и изгибающего момента ($M_x = \text{const}$), обеспечивает постоянство радиуса кривизны нейтрального слоя по длине стержня (рис. 3, а), нейтральный слой ($n-n$) описывается дугой окружности.

Рассмотрим призматический стержень в условиях прямого чистого изгиба (рис. 3, а) с поперечным сечением, симметричным относительно вертикальной оси Oy . Это условие не отразится на конечном результате (чтобы прямой изгиб был возможен, необходимо совпадение оси Oy с главной осью инерции поперечного сечения, которая и является осью симметрии). Ось Ox поместим на нейтральном слое, положение которого заранее неизвестно.



а) расчетная схема, б) деформации и напряжения

Рис.3. Фрагмент чистого изгиба бруса

Рассмотрим вырезанный из стержня элемент длиной dz , который в масштабе с искаженными в интересах наглядности пропорциями изображен на рис. 3, б. Поскольку интерес представляют деформации элемента, определяемые относительным смещением его точек, одно из торцевых сечений элемента можно считать неподвижным. Ввиду малости $d\varphi$ считаем, что точки поперечного сечения при повороте на этот угол перемещаются не по дугам, а по соответствующим касательным.

Вычислим относительную деформацию продольного волокна AB , отстоящего от нейтрального слоя на y :

$$\varepsilon = BB_1 / AB = BB_1 / OO_1.$$

Из подобия треугольников COO_1 и O_1BB_1 следует, что

$$BB_1 / OO_1 = O_1B / CO = y / \rho.$$

Продольная деформация ε оказалась линейной функцией расстояния от нейтрального слоя, что является прямым следствием закона плоских сечений

$$\varepsilon = y / \rho \quad (1)$$

Тогда нормальное напряжение, растягивающее волокно AB , на ос-

новании закона Гука будет равно

$$\sigma = E \frac{y}{\rho} \quad (2)$$

Эта формула не пригодна для практического использования, так как содержит две неизвестные: кривизну нейтрального слоя $1/\rho$ и положение нейтральной оси Ox , от которой отсчитывается координата y . Для определения этих неизвестных воспользуемся уравнениями равновесия статики. Первое выражает требование равенства нулю продольной силы

$$N_x = \int_F \sigma dF = 0 \quad (3)$$

Подставляя в это уравнение выражение (2)

$$\frac{E}{\rho} \int_F y dF = 0$$

и учитывая, что $(E/\rho) \neq 0$, получаем, что

$$\int_F y dF = 0.$$

Интеграл в левой части этого уравнения представляет собой статический момент поперечного сечения стержня относительно нейтральной оси Ox , который может быть равным нулю только относительно центральной оси. Поэтому нейтральная ось Ox проходит через центр тяжести поперечного сечения.

Вторым уравнением равновесия статики является, связывающее нормальные напряжения с изгибающим моментом (который легко может

быть выражен через внешние силы и поэтому считается заданной величиной). Подставляя в уравнение связки выражение для напряжений, получим:

$$\frac{E}{\rho} \int_F y^2 dF = M_x$$

и учитывая, что $\int_F y^2 dF = J_x$ где J_x —главный центральный момент инерции относительно оси Ox , для кривизны нейтрального слоя получаем формулу

$$1/\rho = M_x / EJ_x \quad (4)$$

Кривизна нейтрального слоя $1/\rho$ является мерой деформации стержня при прямом чистом изгибе. $1/\rho$ тем меньше, чем больше величина EJ_x , называемая жесткостью поперечного сечения при изгибе (по аналогии с жесткостью поперечного сечения при растяжении EF).

Подставляя (4) в (2), получаем формулу для нормальных напряжений в виде

$$\sigma = -\frac{M_x}{J_x} y \quad (5)$$

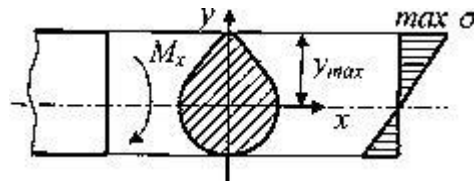


Рис.4. Распределение нормальных напряжений

которая была впервые получена Ш. Кулоном в 1773 году. Для согласования знаков изгибающего момента M_x и нормальных напряжений σ в правой части формулы (5) ставится знак минус, так как при $M_x > 0$ нормальные напряжения σ при $y > 0$ оказываются сжимающими. Однако в практических расчетах удобнее, не придерживаясь формального правила знаков, определять напряжения по модулю, а знак ставить по смыслу. Нормальные напряжения при чистом изгибе призматического стержня являются линейной функцией координаты y и достигают наибольших значений в волокнах, наиболее удаленных от нейтральной оси (рис. 4), т. е.

$$\max |\sigma| = \frac{M_x}{J_x} y_{\max} = \frac{M_x}{y_x / y_{\max}} = \frac{M_x}{W_x}$$

Здесь введена геометрическая характеристика $W_x = J_x / y_{\max}$, имеющая размерность m^3 и получившая название момента сопротивления при изгибе. Поскольку при заданном M_x напряжения $\max \sigma$ тем меньше, чем больше W_x , момент сопротивления является геометрической характеристикой прочности поперечного сечения изгибе. Приведем примеры вычисления моментов сопротивления для простейших форм поперечных сечений. Для прямоугольного поперечного сечения (рис. 5, а) имеем $J_x = bh^3/12$, $y_{\max} = h/2$ и

$W_x = J_x/y_{max} = bh^2/6$. Аналогично для круга (рис. 5, а $J_x = \pi d^4/64$, $y_{max} = d/2$) получаем $W_x = \pi d^3/32$, для кругового кольцевого сечения (рис. 5, в), у которого

$$J_x = \frac{\pi D^4}{64} (1 - \beta^4), \quad \beta = d/D, \quad y_{max} = D/2,$$

получаем

$$W_{xx} = \frac{\pi D^3}{32} (1 - \beta^4).$$

Итак, максимальные нормальные напряжения в сечении с изгибающим моментом M_x определяются по формуле

$$\max |\sigma| = M_x / W_x. \quad (6)$$

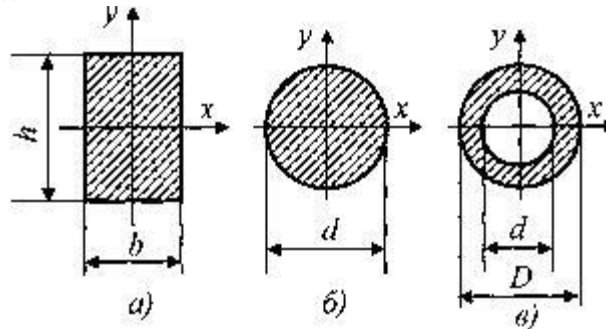


Рис.5. Конфигурации поперечных сечений бруса

Этой формулой удобно пользоваться для расчета балок пластичного материала в упругой области, одинаково работающего на растяжение и сжатие. Поскольку знак напряжения в этом случае не имеет значения, напряжения вычисляются по модулю, и условие прочности при изгибе балки в форме призматического стержня получает вид

$$\max |\sigma| + \max M_x / W_x \leq [\sigma],$$

где $\max M_x$ —максимальное значение изгибающего момента (легко определяемое по его эпюре), $[\sigma]$ — допускаемое напряжение на простое растяжение (сжатие). Напомним, что чистый изгиб балки сводится к растяжению и сжатию ее волокон (неравномерному в отличие от деформации растяжения (сжатия) призматического стержня, при котором $\sigma = const$).

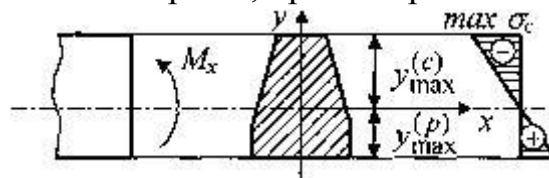


Рис.6. Модель изгиба хрупкого материала

При расчете балок из хрупких материалов следует различать наибольшие растягивающие $\max \sigma_t$ и наибольшие сжимающие $\max |\sigma_c|$ напряжения (рис. 6.), которые также определяются по модулю непосред-

ственно и сравниваются с допускаемыми напряжениями на растяжение $|\sigma_r|$ и сжатие $[\sigma_c]$. Условие прочности в этом случае будет иметь вид:

$$\max \sigma_p = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^{(p)} \leq |\sigma_p| ,$$

$$\max |\sigma_c| = \frac{M_x}{J_x} y_{\max}^{(c)} \leq |\sigma_c|$$

Прямой поперечный изгиб стержня

При прямом поперечном изгибе в сечениях стержня возникает изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y (рис. 1), которые связаны с нормальными σ и касательными τ_{yz} напряжениями

$$M_x = \int_F \sigma y dF \quad , \quad Q_y = \int_F \tau_{yz} dF$$

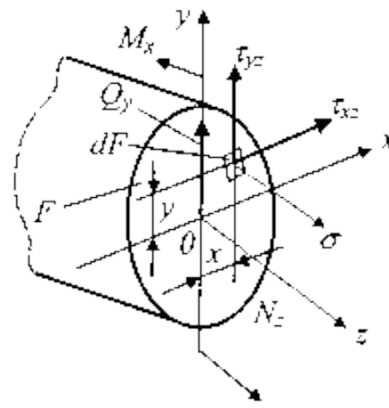
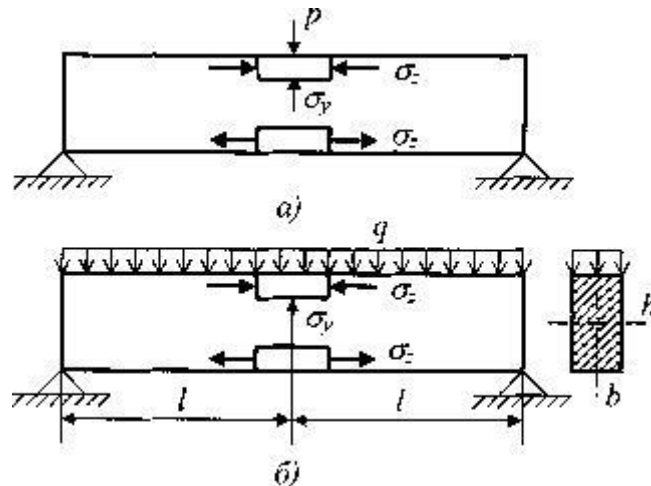


Рис.1. Связь усилий и напряжений



а) сосредоточенная сила, б) распределенная

Рис.2. Модели прямого поперечного изгиба:

Выведенная в случае чистого изгиба стержня формула для прямого поперечного изгиба, вообще говоря, неприменима, поскольку из-за сдвигов, вызываемых касательными напряжениями τ_{yz} , происходит деформация

поперечных сечении (отклонение от закона плоских сечений). Однако для балок с высотой сечения $h < l/4$ (рис. 2) погрешность невелика и ее применяют для определения нормальных напряжений поперечного изгиба как приближенную. При выводе условия прочности при чистом изгибе использовалась гипотеза об отсутствии поперечного взаимодействия продольных волокон. При поперечном изгибе наблюдаются отклонения от этой гипотезы:

а) в местах приложения сосредоточенных сил. Под сосредоточенной силой напряжения поперечного взаимодействия могут быть достаточно велики и во много раз превышать продольные напряжения σ_x , убывая при этом, в соответствии с принципом Сен-Венана, по мере удаления от точки приложения силы;

б) в местах приложения распределенных нагрузок. Так, в случае, приведенном на рис. 2, б, напряжения от давления на верхние волокна балки $\sigma_y = -q/b$. Сравнивая их с продольными напряжениями σ_x , имеющими порядок

$$\sigma_x \approx \max \sigma_x = \frac{ql^2/8}{bh^2/16} = \frac{3q}{4b} \left(\frac{l}{h}\right)^2 \approx \frac{q}{b} \left(\frac{l}{h}\right)^2,$$

приходим к выводу, что напряжения $\sigma_y \ll \sigma_x$ при условии, что $h^2 \ll l^2$, так как $\sigma_y / \sigma_x \approx (h/l)^2 \ll 1$.

Получим формулу для касательных напряжений τ_{yz} . Примем, методика расчета нормальных напряжений известна, что касательные напряжения равномерно распределены по ширине поперечного сечения (рис. 3). Эта предпосылка выполняется тем точнее, чем уже поперечное сечение стержня. Точное решение задачи для прямоугольного поперечного сечения показывает, что отклонение от равномерного распределения τ_{yz} , зависит от отношения сторон b/h . При $(b/h) = 1,0$ оно составляет 12,6%, при $(b/h) = 0,5$ — только 3,3%.

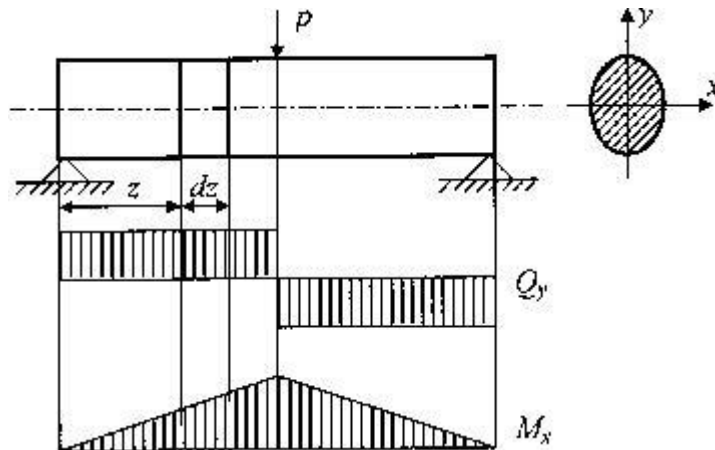


Рис.3. Расчетная модель поперечного прямого изгиба

Непосредственное определение напряжений τ_{yz} затруднительно, поэтому находим равные им (вследствие закона парности) касательные напряжения, возникающие на продольной площадке с координатой y элемента длиной dz , вырезанного из балки, (рис. 3). Сам элемент показан на рис. 4. От этого элемента продольным сечением, отстоящим от нейтрального слоя на y , отсекаем верхнюю часть, заменяя действие отброшенной нижней части касательными напряжениями τ (индекс yz в дальнейшем опускаем), равнодействующая которых $dT = \tau b dz$ показана на рис. 5. Здесь, согласно второй предпосылке

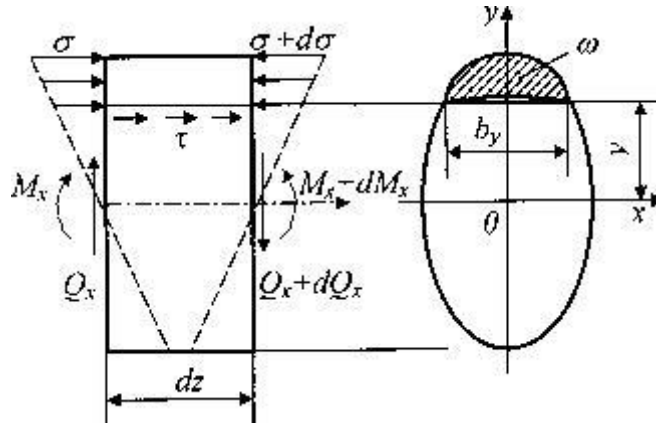


Рис.4. Расчетный элемент бруса

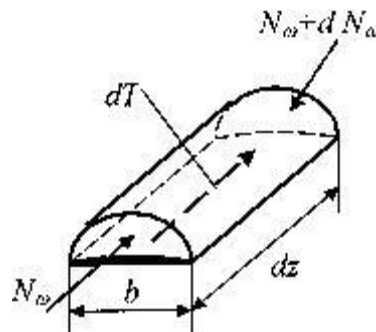


Рис.5. Фрагмент расчетного элемента бруса

$\tau = const$ по ширине элемента b . Нормальные напряжения σ и $\sigma + d\sigma$, действующие на торцевых площадках элемента, также заменим их равнодействующими

$$N_{\omega} = \int_{\omega} \sigma dF = \int_{\omega} \frac{M_x}{J_x} y dF = \frac{M_x}{J_x} S_x^{\omega}$$

$$N_{\omega} + dN_{\omega} = \int_{\omega} (\sigma + d\sigma) dF = \frac{M_x + dM_x}{J_x} S_x^{\omega}$$

Согласно первой предпосылке нормальные напряжения опреде-

ляются уже известным способом, $S_x^{\omega} = \int_F y dF$, где S_x^{ω} — статический момент отсеченной части площади поперечного сечения ω относительно оси Ox .

Рассмотрим условие равновесия элемента (рис. 5) составив для него уравнение статики $\sum Z = 0$:

$$N_{\omega} + dT - (N_{\omega} + dN_{\omega}) = 0,$$

откуда после несложных преобразований, учитывая, что

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y,$$

получаем формулу для касательных напряжений при нормальном поперечном изгибе призматического стержня которая называется *формулой Журавского*.

$$\tau = \frac{Q_y S_x^{\omega}}{J_x b_y}.$$

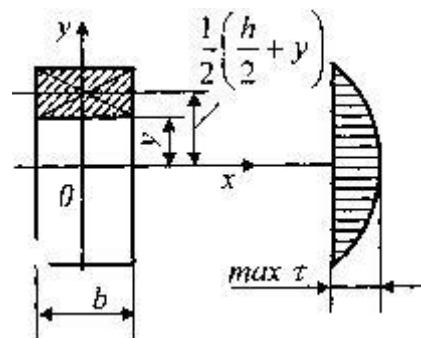


Рис.6. Распределение касательных напряжений по контуру прямоугольного сечения

В этой формуле b_y — ширина сечения в том месте, где определяются касательные напряжения, а статический момент, подставляемый в эту формулу, может быть вычислен как для верхней, так и для нижней части (статические моменты этих частей сечения относительно его центральной оси Ox отличаются только знаком, так как статическим момент всего сечения равен нулю).

В качестве примера применения формулы Журавского построим эпюру касательных напряжений для случая прямоугольного поперечного сечения балки (рис. 6.). Учитывая, что для этого сечения

$$S_x^{\omega} = b \left(\frac{h}{2} - y \right) \left[\frac{1}{2} \left(\frac{h}{2} + y \right) \right] = \frac{bh^2}{8} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right), \quad J_x = bh^3 / 12,$$

получаем

$$\tau = \frac{Q_y \omega}{J_x b} = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{F} \left(1 - 4 \frac{y^2}{h^2} \right),$$

где $F = bh$ — площадь прямоугольника.

Как видно из формулы, касательные напряжения по высоте сечения меняются по закону квадратичеокой параболы, достигая максимума на нейтральной оси

$$\max \tau = \frac{3}{2} \frac{Q_y}{F}.$$

Сделаем несколько замечаний, касающихся расчетов на прочность при прямом поперечном изгибе. В отличие от простых видов деформации, когда в поперечных сечениях стержня возникает лишь один силовой фактор, к которым относятся и изученные выше растяжение (сжатие) и чистый изгиб, прямой поперечный изгиб должен быть отнесен к сложным видам деформации. В поперечных сечениях стержня при поперечном изгибе возникают два силовых фактора: изгибающий момент M_x и поперечная сила Q_y (рис. 7), напряженное состояние является упрощенным плоским, при котором в окрестности произвольно выбранных точек поперечного сечения действуют нормальные σ и касательные τ напряжения. Поэтому условие прочности для таких точек должно быть сформулировано на основе какого-либо уже известного критерия прочности.

Однако учитывая, что наибольшие нормальные напряжения возникают в крайних волокнах, где касательные напряжения отсутствуют (рис. 7), а наибольшие касательные напряжения во многих случаях имеют место в нейтральном слое, где нормальные напряжения равны нулю, условия прочности в этих случаях формулируются отдельно по нормальным и касательным напряжениям

$$\max \sigma \leq [\sigma], \quad \max \tau \leq [\tau].$$

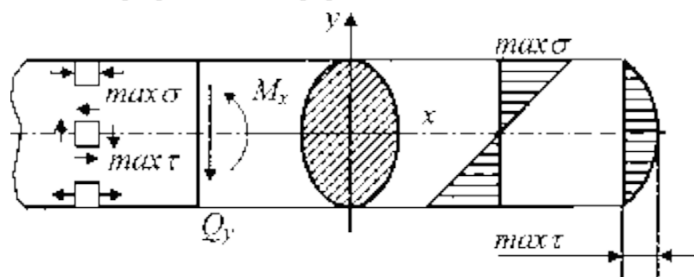


Рис.7 Распределение нормальных и касательных напряжений по контуру сечения

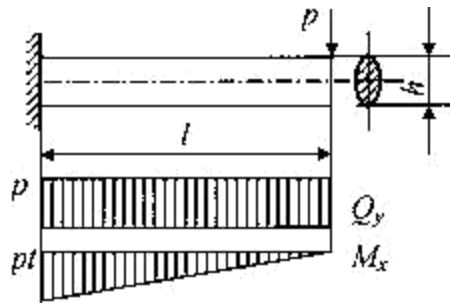


Рис.8. К сравнительной оценке модулей напряжения

Покажем, что доминирующая роль в расчетах на прочность балки, подвергнутой поперечному изгибу, будет принадлежать расчету по нормальным напряжениям. Для этого оценим порядок $\max \sigma$ и $\max \tau$ на примере консольной балки, показанной на рис. 8:

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} \approx \frac{Pl}{h^3}, \quad \max \tau \approx \frac{Q_y}{F} \approx \frac{P}{h^2},$$

так как

$$M_x \approx Pl, \quad Q_y \approx P, \quad F \approx h^2, \quad W_x \approx h^3.$$

Тогда

$$\frac{\max \tau}{\max \sigma} \approx \frac{Plh^2}{Plh^3} = hl \ll 1,$$

откуда $\max \tau \ll \max \sigma$, а поскольку $[\tau]/[\sigma] \approx 0,5$ то доминирующим в этом случае будет расчет по нормальным напряжениям и условие прочности, например, для балки из пластичного материала, работающей на прямой изгиб, как и в случае чистого изгиба будет иметь вид:

$$\max \sigma = \frac{\max M_x}{W_x} \leq [\sigma]$$

Лекция 16

Тема занятия: Сочетание основных деформаций. Изгиб с растяжением или сжатием. Изгиб и кручение. Гипотезы прочности. Напряженное состояние в точке упругого тела. Главные напряжения. Максимальные касательные напряжения. Виды напряженных состояний. Упрощенное плоское напряженное состояние. Назначение гипотез прочности. Эквивалентное напряжение. Расчет бруса круглого поперечного сечения при сочетании основных деформаций.

Изгиб балки при действии продольных и поперечных сил.

На практике очень часто встречаются случаи совместной работы стержня на изгиб и на растяжение или сжатие. Подобного рода деформация может вызываться или совместным действием на балку продольных и поперечных сил, или только одними продольными силами.

Первый случай изображен на Рис.1. На балку AB действуют равномерно распределенная нагрузка q и продольные сжимающие силы P .

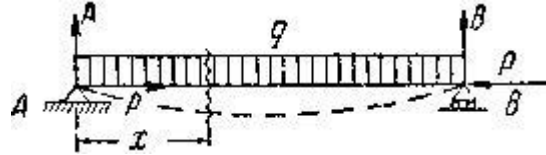


Рис.1. Совместное действие изгиба и сжатия.

Предположим, что прогибами балки по сравнению с размерами поперечного сечения можно пренебречь; тогда с достаточной для практики степенью точности можно считать, что и после деформации силы P будут вызывать лишь осевое сжатие балки.

Применяя способ сложения действия сил, мы можем найти нормальное напряжение в любой точке каждого поперечного сечения балки как алгебраическую сумму напряжений, вызванных силами P и нагрузкой q .

Сжимающие напряжения σ_P от сил P равномерно распределены по площади F поперечного сечения и одинаковы для всех сечений:

$$\sigma_P = -\frac{P}{F};$$

нормальные напряжения от изгиба в вертикальной плоскости в сечении с абсциссой x , которая отсчитана, скажем, от левого конца балки, выражаются формулой

$$\sigma_q = \frac{M(x)z}{J_y}$$

Таким образом, полное напряжение в точке с координатой z (считая от нейтральной оси) для этого сечения равно

$$\sigma = \sigma_P + \sigma_q = -\frac{P}{F} + \frac{M(x)z}{J_y}$$

На Рис.2 изображены эпюры распределения напряжений в рассматриваемом сечении от сил P , нагрузки q и суммарная эпюра.

Наибольшее напряжение в этом сечении будет в верхних волокнах, где оба вида деформации вызывают сжатие; в нижних волокнах может быть или сжатие или растяжение в зависимости от числовых величин напряжений σ_P и σ_q . Для составления условия прочности найдем наибольшее нормальное напряжение.

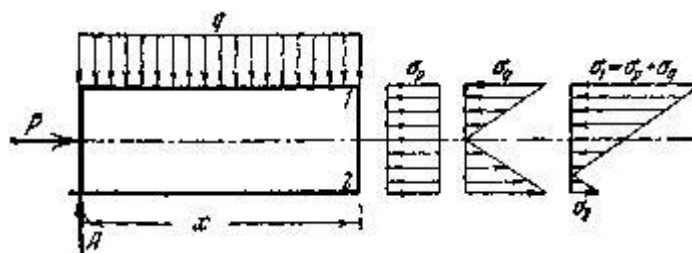


Рис.2. Сложение напряжений сжатия и изгиба

Так как напряжения от сил P во всех сечениях одинаковы и равномерно распределены, то опасными будут волокна, наиболее напряженные от изгиба. Такими являются крайние волокна в сечении с наибольшим изгибающим моментом; для них

$$\sigma_{\text{max}} = \pm \frac{M_{\text{max}}}{W}$$

Таким образом, напряжения в крайних волокнах 1 и 2 среднего сечения балки выражаются формулой

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{array} \right\} = -\frac{P}{F} \mp \frac{M_{\text{max}}}{W},$$

и расчетное напряжение будет равно

$$|\sigma_{\text{max}}| = |\sigma_1| = \left| \frac{P}{F} + \frac{M_{\text{max}}}{W} \right|$$

Если бы силы P были растягивающими, то знак первого слагаемого изменился бы, опасными были бы нижние волокна балки.

Обозначая буквой N сжимающую или растягивающую силу, можем написать общую формулу для проверки прочности:

$$\sigma_{\text{max}} = \pm \left[\frac{N}{F} + \frac{M_{\text{max}}}{W} \right] \leq [\sigma] \quad (27.1)$$

Описанный ход расчета применяется и при действии на балку наклонных сил. Такую силу можно разложить на нормальную к оси, изгибающую балку, и продольную, сжимающую или растягивающую.

Внецентренное сжатие или растяжение.

Вторым практически важным случаем сложения деформаций от изгиба и от продольных сил является так называемое внецентренное сжатие или растяжение, вызываемое одними продольными силами. Этот вид деформации получается при действии на стержень двух равных и противоположных сил P , направленных по прямой AA , параллельной оси стержня (Рис.3 а). Расстояние точки A от центра тяжести сечения $OA=e$ называется *эксцентриситетом*.

Рассмотрим сначала случай внецентренного сжатия, как имеющий большее практическое значение.

Нашей задачей является нахождение наибольших напряжений, материале стержня и проверка прочности. Для решения этой задачи приложим в точках O по две равные и противоположные силы P (Рис.3 б). Это не нарушит равновесия стержня в целом и не изменит напряжений в его сечениях.

Силы P , зачеркнутые один раз, вызовут осевое сжатие, а пары сил P , зачеркнутые дважды, вызовут чистый изгиб моментами $M_0 = Pe$. Расчетная схема стержня показана на Рис.3 в. Так как плоскость действия изгибающих пар OA может не совпадать ни с одной из главных плоскостей инерции

стержня, то в общем случае имеет место комбинация продольного сжатия и чистого косоугольного изгиба.

Так как при осевом сжатии и чистом изгибе напряжения во всех сечениях одинаковы, то проверку прочности можно произвести для любого сечения, хотя бы С—С (Рис.3 б, в).

Отбросим верхнюю часть стержня и оставим нижнюю (Рис.3 г). Пусть оси Oy и Oz будут главными осями инерции сечения.

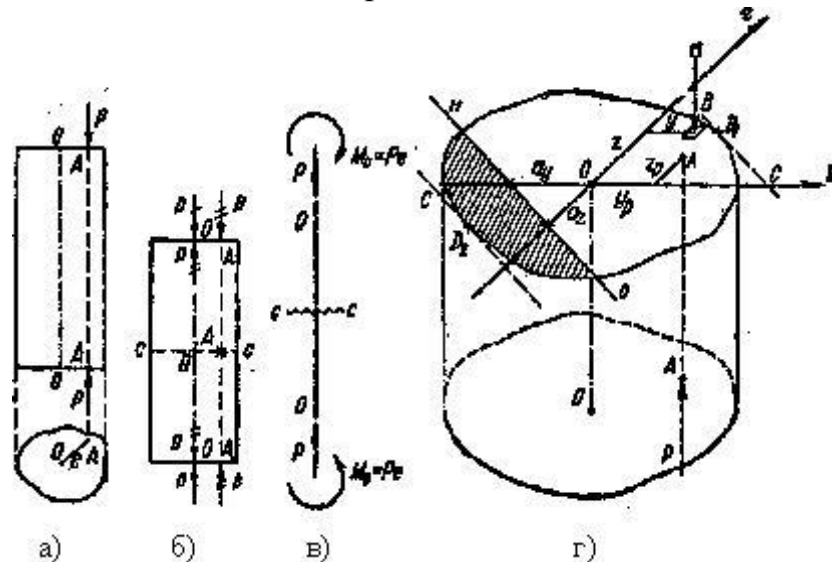


Рис.3. а) расчетная схема б) преобразование нагрузок в) приведенная расчетная схема г) механизм исследования напряжений

Координаты точки A , — точки пересечения линии действия сил P с плоскостью сечения, — пусть будут y_P и z_P . Условимся выбирать положительные направления осей Oy и Oz таким образом, чтобы точка A оказалась в первом квадранте. Тогда y_P и z_P будут положительны.

Для того чтобы отыскать наиболее опасную точку в выбранном сечении, найдем нормальное напряжение σ в любой точке B с координатами z и y . Напряжения в сечении С — С будут складываться из напряжений осевого сжатия силой P и напряжений от чистого косоугольного изгиба парами с моментом Pe , где $e = OA$. Сжимающие напряжения от осевых сил P в любой точке рав-

ны $\frac{P}{F}$, где F — площадь поперечного сечения стержня; что касается косоугольного изгиба, то заменим его действием изгибающих моментов в главных плоскостях. Изгиб в плоскости xOy вокруг нейтральной оси Oz будет вызываться моментом Fy_P и даст в точке B нормальное сжимающее напряжение

$$\frac{Fy_P \cdot y}{J_z}$$

Точно так же нормальное напряжение в точке B от изгиба в главной плоскости xOz , вызванное моментом Pz_P , будет сжимающим и выразится формулой $\frac{Pz_P \cdot z}{J_y}$.

Суммируя напряжения от осевого сжатия и двух плоских изгибов и считая сжимающие напряжения отрицательными, получаем такую формулу для напряжения в точке B :

$$\sigma = -\frac{P}{F} - \frac{P y_P y}{J_x} - \frac{P z_P z}{J_y} = -P \left(\frac{1}{F} + \frac{y_P y}{J_x} + \frac{z_P z}{J_y} \right) \quad (1)$$

Эта формула годится для вычисления напряжений в любой точке любого сечения стержня, стоит только вместо y и z подставить координаты точки относительно главных осей с их знаками.

В случае внецентренного растяжения знаки всех составляющих нормального напряжения в точке B изменятся на обратные. Поэтому для того, чтобы получать правильный знак напряжений как при внецентренном сжатии, так и при внецентренном растяжении, нужно, кроме знаков координат y и z , учитывать также и знак силы P ; при растяжении перед выражением

$$P \left(\frac{1}{F} + \frac{y_P y}{J_x} + \frac{z_P z}{J_y} \right)$$

должен стоять знак плюс, при сжатии — минус.

Полученной формуле можно придать несколько иной вид; вынесем за скобку

множитель $\frac{P}{F}$; получим:

$$\sigma = -\frac{P}{F} \left[1 + \frac{y_P y}{i_x^2} + \frac{z_P z}{i_y^2} \right] \quad (2)$$

Здесь i_x и i_y — радиусы инерции сечения относительно главных осей (вспомним, что $J_x = i_x^2 \cdot F$ и $J_y = i_y^2 \cdot F$).

Для отыскания точек с наибольшими напряжениями следует так выбирать y и z , чтобы σ достигло наибольшей величины. Переменными в формулах (1) и (2) являются два последних слагаемых, отражающих влияние изгиба. А так как при изгибе наибольшие напряжения получаются в точках, наиболее удаленных от нейтральной оси, то здесь, как и при косом изгибе, надо отыскать положение нейтральной оси.

Обозначим координаты точек этой линии через y_0 и z_0 ; так как в точках нейтральной оси нормальные напряжения равны нулю, то после подстановки в формулу (2) значений y_0 и z_0 получаем:

$$0 = -\frac{P}{F} \left[1 + \frac{y_P y_0}{i_x^2} + \frac{z_P z_0}{i_y^2} \right]$$

или

$$1 + \frac{y_P y_0}{i_x^2} + \frac{z_P z_0}{i_y^2} = 0 \quad (3)$$

Это и будет уравнение нейтральной оси. Очевидно, мы получили уравнение прямой, не проходящей через центр тяжести сечения.

Чтобы построить эту прямую, проще всего вычислить отрезки, отсекаемые ею на осях координат. Обозначим эти отрезки a_y и a_x . Чтобы найти отрезок a_y , отсекаемый на оси Oy , надо в уравнении (3) положить

$$z_0 = 0; y_0 = a_y;$$

тогда мы получаем:

$$1 + \frac{y_P a_y}{i_x^2} = 0 \quad \text{и} \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_P}; \quad (4)$$

подобным же образом, полагая

$$y_0 = 0; z_0 = a_x,$$

получаем:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{z_P} \quad (5)$$

Если величины y_P и z_P положительны, то отрезки a_y и a_x будут отрицательны, т. е. нейтральная ось будет расположена по другую сторону центра тяжести сечения, чем точка A (Рис.3 г).

Нейтральная ось делит сечение на две части — сжатую и растянутую; на Рис.3 г растянутая часть сечения заштрихована. Проводя к контуру сечения касательные, параллельные нейтральной оси, получаем две точки D_1 и D_2 , в которых будут наибольшие сжимающие и растягивающие напряжения.

Измеряя координаты y и z этих точек и подставляя их значения в формулу (1), вычисляем величины наибольших напряжений в точках D_1 и D_2 :

$$\sigma_{(1,2)} = -F \left[\frac{1}{F} + \frac{y_P y_{(1,2)}}{J_x} + \frac{z_P z_{(1,2)}}{J_y} \right]$$

Если материал стержня одинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то условие прочности получает такой вид:

$$|\sigma_{\max}| = F \left[\frac{1}{F} + \frac{y_P y_1}{J_x} + \frac{z_P z_1}{J_y} \right] \leq [\sigma]$$

Для поперечных сечений с выступающими углами, у которых обе главные оси инерции являются осями симметрии (прямоугольник, двутавр и др.)

$y_1 = y_{\max}$ и $z_1 = z_{\max}$ Поэтому формула упрощается, и мы имеем

$$|\sigma_{\max}| = F \left[\frac{1}{F} + \frac{y_P}{W_x} + \frac{z_P}{W_y} \right] \leq [\sigma]$$

Если же материал стержня неодинаково сопротивляется растяжению и сжатию, то необходимо проверить прочность стержня как в растянутой, так и в сжатой зонах.

Однако может случиться, что и для таких материалов будет достаточно одной проверки прочности. Из формул (4) и (5) видно, что положение точки A приложения силы и положение нейтральной оси связаны: чем ближе подходит точка A к центру сечения, тем меньше величины y_P и z_P и тем больше отрезки α_y и α_z . Таким образом, с приближением точки A к центру тяжести сечения нейтральная ось удаляется от него, и наоборот. Поэтому при некоторых положениях точки A нейтральная ось будет проходить вне сечения и все сечение будет работать на напряжения одного знака. Очевидно в этом случае всегда достаточно проверить прочность материала в точке D_1 .

Разберем практически важный случай, когда к стержню прямоугольного сечения (Рис. 4) приложена внецентренно сила P в точке A , лежащей на главной оси сечения Oy . Эксцентриситет OA равен e , размеры сечения b и d . Применяя полученные выше формулы, имеем:

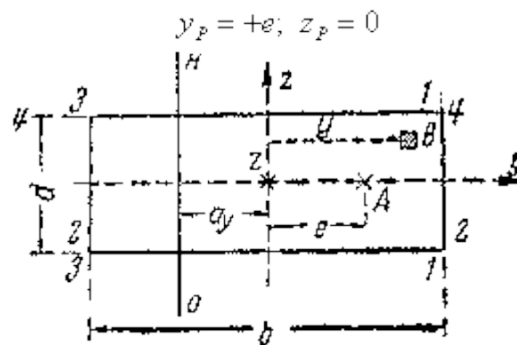


Рис.4. Расчетная схема бруса прямоугольного сечения.

Напряжение в любой точке B равно

$$\sigma = \frac{P}{F} \left(1 + \frac{y_P y F}{J_x} \right) = \frac{P}{bd} \left(1 + \frac{12ey}{b^2} \right),$$

так как

$$\frac{F}{J_x} = \frac{12bd}{b^3d} = \frac{12}{b^2}$$

Напряжения во всех точках линии, параллельной оси Oz , одинаковы. Положение нейтральной оси определяется отрезками

$$\alpha_y = -\frac{i_x^2}{e} = -\frac{b^2}{12e}; \quad \alpha_z = \infty$$

Нейтральная ось параллельна оси Oz ; точки с наибольшими растягивающими и сжимающими напряжениями расположены на сторонах 1—1 и 3—3.

Значения σ_{\max} и σ_{\min} получатся, если подставить вместо y его значения $\pm \frac{b}{2}$.

Тогда

$$\left. \begin{array}{l} \sigma_{\max} \\ \sigma_{\min} \end{array} \right\} = \frac{P}{bd} \left[1 \pm \frac{6e}{b} \right]$$

Совместные действия изгиба и кручения призматического стержня

Исследуем этот вид деформации стержня на примере расчета вала кругового (кольцевого) поперечного сечения на совместное действие изгиба и кручения (рис. 1).

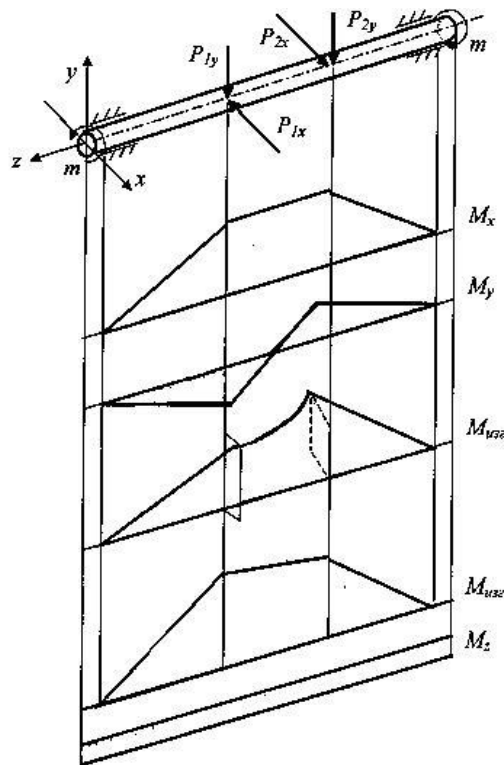


Рис.1. Расчетная схема изогнутого и скрученного вала

Примем следующий порядок расчета.

1. Разлагаем все внешние силы на составляющие $P_{1x}, P_{2x}, \dots, P_{nx}$ и $P_{1y}, P_{2y}, \dots, P_{ny}$.
2. Строим эпюры изгибающих моментов M_x и M_y от этих групп сил.

У кругового и кольцевого поперечных сечений все центральные оси главные, поэтому косоуго изгиба у вала вообще не может быть, следовательно, нет смысла в каждом сечении иметь два изгибающих момента M_x и M_y а целесообразно их заменить результирующим (суммарным) изгибающим моментом (рис. 2)

$$M_{uz2} = \sqrt{M_x^2 + M_y^2},$$

который вызывает прямой изгиб в плоскости его действия относительно нейтральной оси $n-n$, перпендикулярной вектору M_{uz2} . Эпюра суммарного момента имеет пространственное очертание и поэтому неудобна для построения и анализа. Поскольку все направления у круга с точки зрения прочности равноценны, то обычно эпюру M_{uz2} спрямляют, помещая все ординаты в одну (например, вертикальную) плоскость. Обратим внимание на то, что центральный участок этой эпюры является нелинейным.

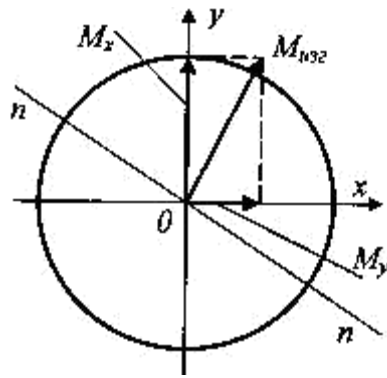


Рис.2. Формирование результирующего изгибающего момента

3. Строится эпюра крутящего момента M_z .

Наибольшие напряжения изгиба возникают в точках k и k' , наиболее удаленных от нейтральной оси (рис. 3),

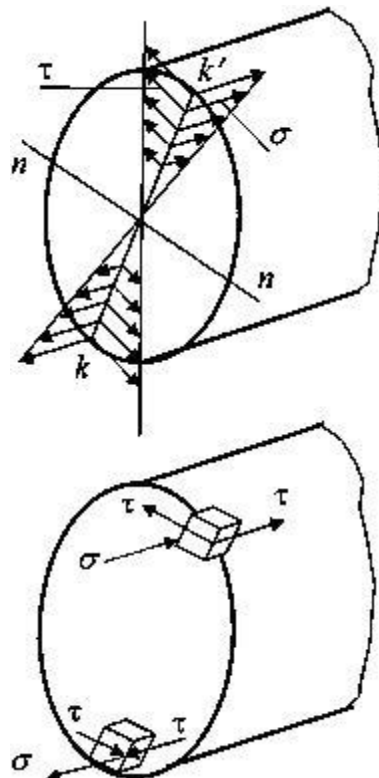
$$\sigma = M_{изг} / W_{изг}$$

где $W_{изг}$ — момент сопротивления при изгибе.

В этих же точках имеют место и наибольшие касательные напряжения кручения

$$\tau = M_z / W_p$$

где W_p — момент сопротивления при кручении.



а) эпюры напряжений б) распределение напряжений

Рис.3. Напряженное состояние вала:

Как следует из рис. 3, напряженное состояние является упрощенным плоским (сочетание одноосного растяжения и чистого сдвига). Если вал выполнен из пластичного материала, оценка его прочности должна быть произведена по одному из критериев текучести. Например, по критерию Треска—Сен-Венана имеем

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \sqrt{(M_{\text{изг}} / W_{\text{изг}})^2 + 4(M_{\text{з}} / W_{\text{п}})^2}$$

Учитывая, что $W_{\text{п}} = 2 W_{\text{изг}}$, для эквивалентных напряжений получаем

$$\sigma_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{з}}^2} / W_{\text{изг}} = M_{\text{экв}} / W_{\text{изг}},$$

где $M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{з}}^2}$ — эквивалентный момент, с введением которого задача расчета вала на совместное действие изгиба и кручения, сводится к расчету на эквивалентный изгиб.

Аналогично для $M_{\text{экв}}$ по критерию Губера—Мизеса получаем

$$M_{\text{экв}} = \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + \frac{3}{4}M_{\text{з}}^2}$$

Тогда условие прочности для вала из пластичного материала будет иметь вид

$$\sigma_{\text{экв}} = \frac{M_{\text{экв}}}{W_{\text{изг}}} \leq [\sigma]$$

Для стержня из хрупкого материала условие прочности следует записать в виде

$$\sigma_{\text{экв}} = M_{\text{экв}} / W_{\text{изг}} = [\sigma_{\text{п}}],$$

где $M_{\text{экв}}$ должен быть записан применительно к одному из критериев хрупкого разрушения. Например, по критерию Мора

$$M_{\text{экв}} = \frac{1-m}{2} M_{\text{экв}} + \frac{1+m}{2} \sqrt{M_{\text{изг}}^2 + M_{\text{з}}^2},$$

где $m = [\sigma_{\text{п}}] / [\sigma_{\text{с}}]$.

Обратим внимание на особенности расчета при сочетании изгиба, растяжения и кручения стержня прямоугольного поперечного сечения (рис. 4.) Для выявления опасной точки здесь должны быть сравнены напряжения косоугольного изгиба с растяжением в точке *A*, с эквивалентными напряжениями в точках *B* и *C*.

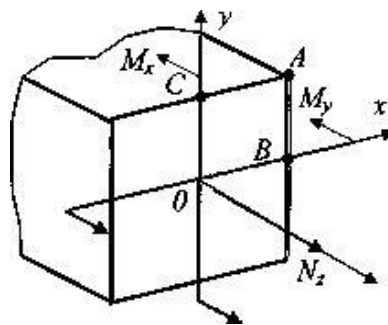
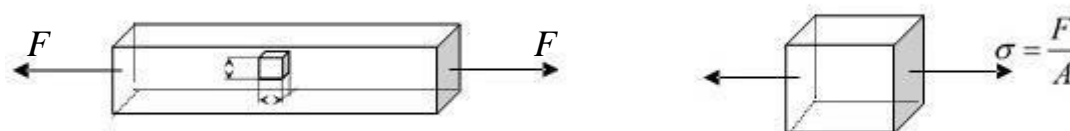


Рис.4. Модель расчета напряжений при сочетании кручения, растяжения и изгиба.

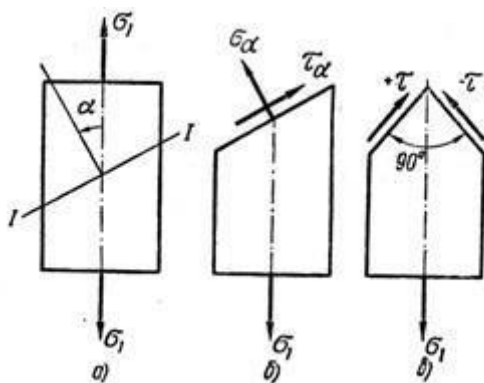
Элементы общей теории напряженного состояния.

Исследовать напряженное состояние в точке - это значит получить зависимости, позволяющие определить напряжение на любой площадке, проходящей через эту точку.

Если вырезать вокруг произвольной точки стержня поперечными и продольными перерезами бесконечно малый параллелепипед, на его гранях будут действовать только нормальные напряжения. Отсутствие нормальных напряжений на других гранях является следствием того, что нет нажатия продольных волокон одно на один.



В общем случае в наклоненных сечениях будут действовать нормальные σ_α и касательные τ_α напряжения, величину которых можно найти из условия равновесия:



$$\sigma_\alpha = \sigma_1 \cos^2 \alpha,$$

$$\tau_\alpha = \frac{\sigma_1}{2} \sin(2\alpha).$$

Максимального значения нормальные напряжения будут достигать при $\alpha=0$, т.е. в сечении, перпендикулярном к оси стержня, при этом $\tau=0$.

Площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, а нормальные напряжения имеют экстремальные значения, называются **главными площадками**. Нормальные напряжения, действующие по главным площадкам, называются **главными напряжениями**.

При $\alpha=90^\circ - \sigma=0, \tau=0$ – в продольных сечениях нет ни нормальных, ни касательных напряжений.

При $\alpha=45^\circ - \tau_{\max} = \frac{\sigma}{2}$ – максимальные касательные напряжения (при испытаниях на растяжение образцов из малоуглеродистых сталей на их поверхностях появляются заметные наклоненные линии – следствия сдвига частиц материала относительно друг друга - линии Чернова). По перпендикулярным площадкам действуют равные касательные напряжения - закон парности касательных напряжений:

$$\tau_{\alpha} = -\tau_{\alpha+90^\circ}.$$

В каждой точке нагруженного бруса можно найти такое положение параллелепипеда, при котором три его грани окажутся главными площадками. На двух из них будут действовать экстремальные (наибольшие и наименьшие) главные напряжения, а на третьем - промежуточные.

Принимают $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$.

Если все три напряжения не равны нулю - объемное, трёхосное состояние.

Если одно из напряжений равняется нулю - плоское, двухосное состояние.

Если лишь одно из напряжений не равняется нулю - линейное, одноосное состояние.

Деформации, соответствующие напряженному состоянию, рассчитываются на основе принципа независимости действия сил на грани элемента.

Связь между относительной деформацией и напряжениями при объемном напряженном состоянии - обобщенный закон Гука:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_2 + \sigma_1)]$$

Теории прочности

Важной задачей инженерных расчетов является оценка прочности по известному напряженному состоянию, т.е. по известным главным напряжениям.

При линейном напряженном состоянии предельные (опасное) напряжения легко установить экспериментально:

$\sigma_{np} = \sigma_T$ – для пластичных материалов,

$\sigma_{np} = \sigma_B$ – для хрупких материалов.

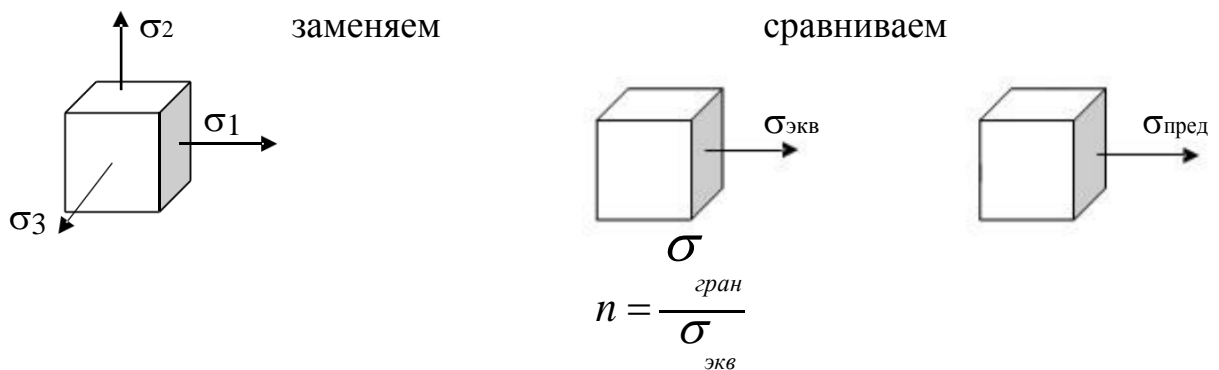
Условие прочности для одноосного напряженного состояния:

$$\sigma_1 \leq [\sigma_p] \text{ — растяжение,}$$

$$\sigma_3 \leq [\sigma_c] \text{ — сжатие.}$$

При сложном напряженном состоянии экспериментально выявить предельные величины главных напряжений очень сложно. Для оценки прочности в условиях любого сложного состояния, высказывается гипотеза о преимуществе влияния на прочность того или другого фактора.

В расчетах на прочность заменяют сложное напряженное состояние равноопасным (эквивалентным) ему одноосным состоянием и сравнивают соответствующее напряжение с предельным, полученным в испытаниях на простое растяжение.



Гипотезы, которые указывают на признаки равной опасности разных напряженных состояний, называются **теориями прочности**.

Первая теория прочности – теория наибольших нормальных напряжений (целесообразна для довольно хрупких материалов):

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 \leq [\sigma_p]$$

$$\sigma_{екв} = |\sigma_3| \leq [\sigma_c].$$

Вторая теория прочности – теория наибольших деформаций (целесообразна для хрупкого состояния материала):

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) \leq [\sigma].$$

Третья теория прочности – теория наибольших касательных напряжений (целесообразна для пластичных и хрупких материалов)

$$\sigma_{екв} = \sigma_1 - \sigma_3 \leq [\sigma].$$

Четвертая теория прочности – энергетическая теория формоизменения (целесообразна для пластичных материалов):

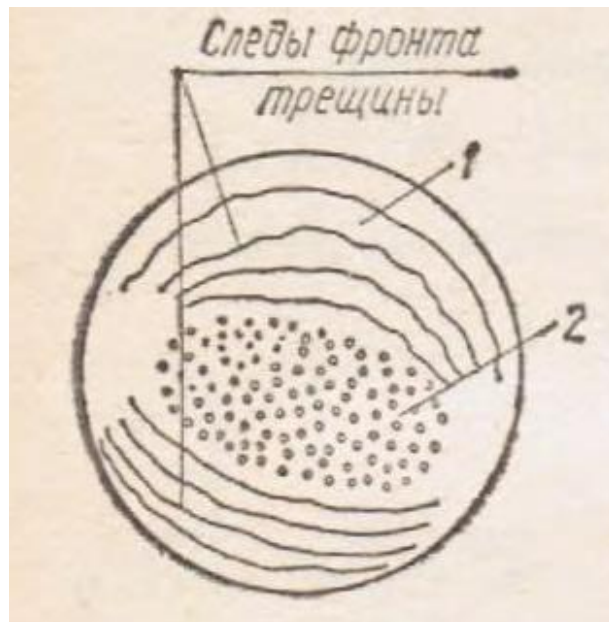
$$\sigma_{екв} = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_1\sigma_3} \leq [\sigma].$$

Лекция 17

Тема занятия: Сопротивление усталости. Циклы напряжений. Усталостное разрушение, его причины и характер. Кривая усталости, предел выносливости. Факторы, влияющие на величину предела выносливости.

Основные понятия об усталости

Выше рассмотрены вопросы, связанные с расчетами на прочность элементов конструкций, испытывающих действие статических нагрузок, т. е. таких, которые медленно возрастают от нуля до своего конечного значения и в дальнейшем остаются постоянными. При этом всегда считалось, что прочность обеспечена, если максимальные напряжения в опасных сечениях не превышают предельных значений, соответствующих началу разрушения или появления остаточных деформаций. Однако многие детали машин, в частности валы, вращающиеся оси, зубчатые колеса, дорожки тел вращения подшипников, пружины и т. п., испытывают напряжения, циклически изменяющиеся во времени. В этих случаях разрушение деталей наступает при напряжениях, значительно меньших предельных значений.



После разрушения на поверхности излома детали обнаруживаются обычно две ярко выраженные зоны. В зоне 1 кристаллы не различаются невооруженным глазом, поверхность сглажена. В зоне 2 явно выступают признаки хрупкого разрушения. Кристаллы имеют острую огранку и блестящую поверхность. Причину такого разрушения, которое принято называть усталостным, объясняют следующим. При работе детали в условиях переменных напряжений в материале возникают микротрещины, которые постепенно проникают вглубь. По мере развития трещины поперечное се-

чение ослабляется и в некоторый момент происходит мгновенное разрушение детали.

Способность материала воспринимать многократное действие переменных напряжений от заданной нагрузки без разрушения называют *сопротивлением усталости*.

Основные характеристики цикла напряжений

Рассмотрим простейший случай. Круглый брус (ось) AB , нагруженный постоянной силой F , изгибается и в нижней точке поперечного сечения $I—I$ возникают наибольшие напряжения растяжения, а в верхней точке — наибольшие напряжения сжатия; в точках, расположенных на нейтральной оси, напряжений нет. Представим, что изогнутый силой F вал AB приведен во вращение с постоянной угловой скоростью ω . Тогда каждая точка поперечного сечения $I—I$ будет попеременно находиться то в зоне растяжения, то в зоне сжатия. В частности, напряжение в точке A :

$$\sigma_A = \frac{M_u}{J_z} \cdot y,$$

но при вращении бруса расстояние y от точки A до нейтральной оси меняется с течением времени по закону

$$y = \frac{d}{2} \cdot \sin(\omega t), \text{ где } \omega t = \varphi.$$

Следовательно,

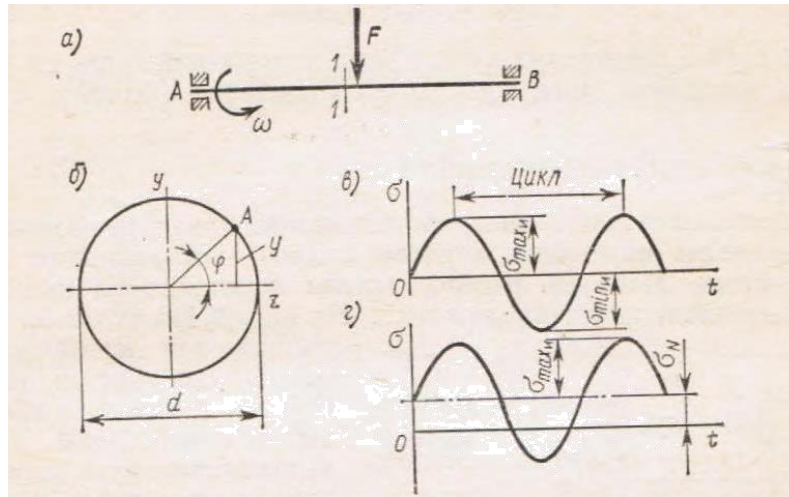
$$\sigma_A = \frac{M_u}{J_z} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin(\omega t) = \sigma_{\max u} \sin(\omega t),$$

т. е. нормальное напряжение в точке A поперечного сечения изменяется по синусоидальному закону.

Если же ось помимо силы F нагрузить центральной, например растягивающей, силой, то напряжение

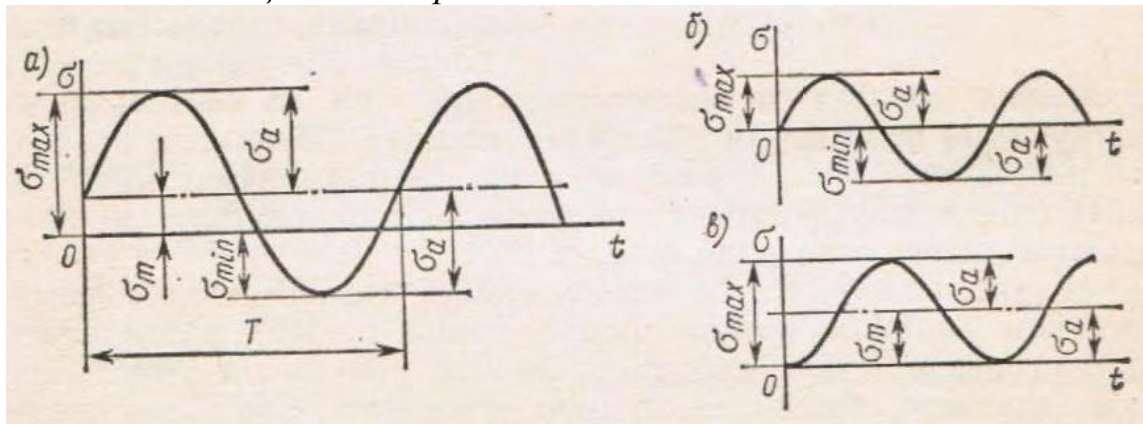
$$\sigma_A = \frac{N}{A} + \frac{M_u}{J_z} \cdot \frac{d}{2} \cdot \sin(\omega t) = \sigma_N + \sigma_{\max u} \sin(\omega t),$$

т. е. график изменения этих напряжений во времени останется синусоидальным, но сместится вверх.



Как видим, в обоих случаях напряжения изменяются периодически, т. е. повторяются в той же последовательности через определенный период T .

Совокупность последовательных напряжений за один период их изменения называется *циклом напряжений*.



Цикл напряжений характеризуется максимальным σ_{\max} и минимальным σ_{\min} напряжениями. Их отношение называется *коэффициентом асимметрии цикла*

В случае когда $\sigma_{\max} = -\sigma_{\min}$, $R = -1$, цикл называют *симметричным*.

Если $\sigma_{\min} = 0$, $R = 0$, цикл называют *отнулевым*. Циклы, имеющие одинаковые коэффициенты асимметрии, называются *подобными*.

Любой цикл можно также характеризовать его средним напряжением σ_m и амплитудой цикла σ_a :

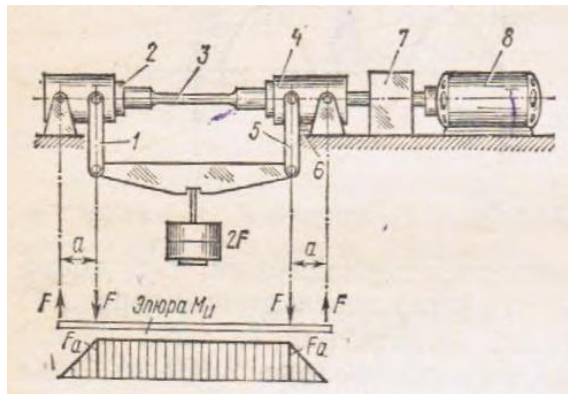
$$\sigma_m = \frac{\sigma_{\max} + \sigma_{\min}}{2},$$

$$\sigma_a = \frac{\sigma_{\max} - \sigma_{\min}}{2}.$$

В случае переменных касательных напряжений остаются в силе все приведенные выше термины и соотношения с заменой σ на τ .

Предел выносливости

Наибольшее напряжение, при котором материал, не разрушаясь, выдерживает определенное число циклов, устанавливают опытным путем. Наиболее распространены испытания на изгиб при симметричном цикле напряжений. На рисунке показана схема машины для испытания образцов при чистом изгибе. Образец 3 зажат во вращающихся цапгах 2 и 4. Усилие передается от груза, подвешенного на серьгах 1 и 5. Счетчик 7 фиксирует число оборотов образца. Когда образец ломается, контакт 6 автоматически отключает двигатель 8.



Задавая образцам различные значения напряжений σ_{\max} цикла, определяют число циклов N , необходимое для доведения образца до разрушения. При этом на каждом уровне нагружения испытаниям подвергают несколько образцов, поскольку неизбежен большой разброс в предельных значениях N . По полученным данным строят кривую в координатах σ_{\max} , N , называемую *кривой усталости*.

Испытания показывают, что с ростом N уменьшается абсолютное значение $d\sigma/dN$ и кривая распределения предела выносливости имеет горизонтальную асимптоту. Значит, при каком-то числе циклов испытание образца необходимо прекратить. Это число циклов N_0 принято называть *базой испытаний*. Для различных материалов приняты различные базы испытаний; так, для стальных образцов $N_0=10^7$, для цветных металлов и сталей, закаленных до высокой твердости, $N_0=10^8$ и т.д. Наибольшее напряжение цикла, при котором еще не происходит усталостного разрушения до базы испытания, называется *пределом выносливости* и обозначается σ_R . Для образцов при коэффициенте асимметрии цикла $R=-1$ пределы выносливости при нормальных напряжениях обозначаются σ_f , а при касательных напряжениях τ_f .

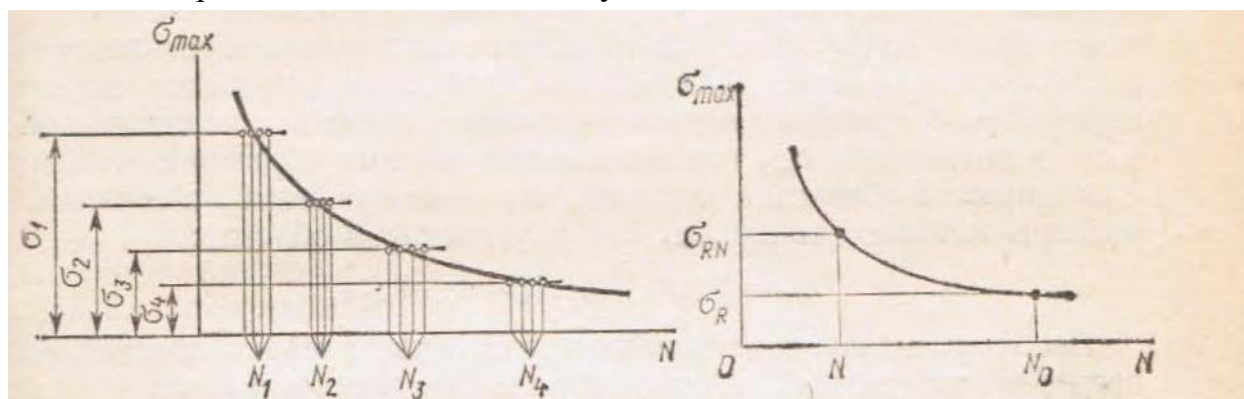
При расчете деталей, не предназначенных для длительного срока службы, вводят понятие *предела ограниченной выносливости* $\sigma_R N$, где под

N понимают заданную циклическую долговечность, которая меньше базы испытаний, т. е. $N < N_0$. В ряде случаев известна математическая зависимость наклонной кривой усталости $\sigma_R^p N_0 = \sigma_{RN}^p N = const$. Тогда предел ограниченной выносливости

$$\sigma_{RN} = \sigma_R \sqrt[p]{\frac{N_0}{N}} = \sigma_R K_{\sigma L},$$

где выражение $\sqrt[p]{\frac{N_0}{N}} = K_{\sigma L}$ называют коэффициентом долговечности.

При $N \geq N_0$ принимают $K_{\sigma L} = 1$. Аналогично, при возникновении касательных напряжений $\tau_{RN} = \tau_R K_{\tau L}$ в случаях $N \leq N_0$ считают $K_{\tau L} = 1$.

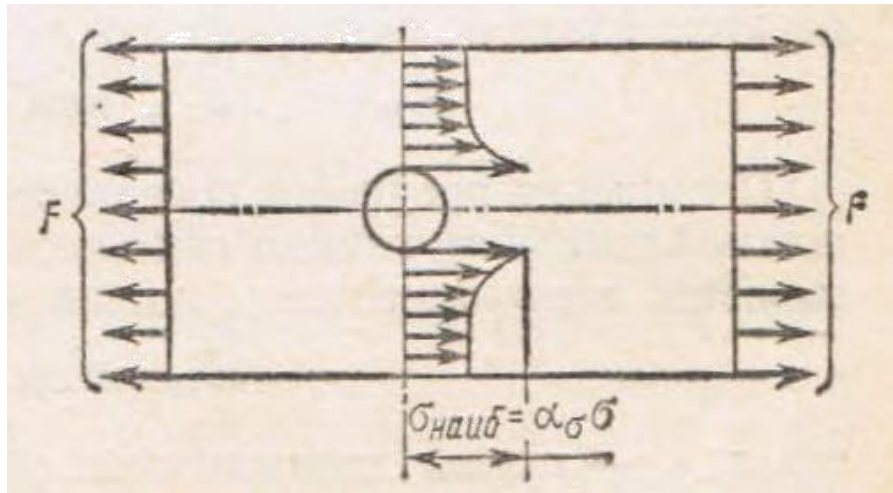


Для определения пределов выносливости стали можно принять следующие зависимости:

$$\sigma_{-1} \approx 0,43 \sigma_b ; \tau_{-1} \approx 0,6 \sigma_{-1} ; \sigma_0 \approx 1,6 \sigma_{-1} ; \tau_0 \approx 1,9 \tau_{-1}.$$

Факторы, влияющие на предел выносливости

В местах изменения формы деталей (у отверстий, надрезов, шпоночных пазов, в резьбе и т. д.), а также в зоне сопряжений с натягом возникает местное повышение напряжений, снижающее предел выносливости по сравнению с гладкими цилиндрическими образцами. Явление возникновения местных напряжений принято называть *концентрацией напряжений*, а причины, ее вызывающие (отверстия, надрезы, запрессовка), — концентраторами напряжений. На рисунке показано распределение напряжений σ в поперечном сечении, проходящем через отверстие в растянутой полосе.



Наибольшие напряжения возникают у краев отверстия.

Степень влияния местных напряжений на прочность детали существенно зависит от характера нагружения и материала. При расчете конструкции из пластичных материалов, работающей в условиях статического нагружения, местными напряжениями пренебрегают. Это объясняется тем, что при росте нагрузки напряжения в зоне концентрации, достигнув предела текучести, не возрастают до тех пор, пока во всех соседних точках они не достигнут того же значения, т. е. пока распределение напряжений в рассматриваемом сечении не станет равномерным. Иначе обстоит дело при циклически изменяющихся напряжениях. Многократное изменение напряжений в зоне концентратора напряжений приводит к образованию и дальнейшему развитию трещины с последующим усталостным разрушением детали. Для оценки снижения прочности вводят *эффективный коэффициент концентрации*, равный отношению предела выносливости σ_{-f} гладкого полированного образца к пределу выносливости образца с концентратором напряжений, абсолютные размеры которого такие же, как и у гладкого образца:

$$K = \frac{\sigma_{-f}}{\sigma_{-fK}}; K = \frac{\tau_{-f}}{\tau_{-fK}}.$$

Экспериментально установлено, что с увеличением абсолютных размеров поперечных сечений деталей происходит снижение их прочностных характеристик, получаемых при статических и усталостных испытаниях. Это снижение учитывается коэффициентом влияния абсолютных размеров сечения

$$K_d = \frac{\sigma_{-fd}}{\sigma_{-f}}; K_d = \frac{\tau_{-fd}}{\tau_{-f}},$$

где σ_{-fd} (или τ_{-fd}) — предел выносливости образца заданного диаметра d ; σ_{-f} (или τ_{-f}) — предел выносливости стандартного образца.

Если при статических нагрузках состояние рабочих поверхностей незначительно влияет на их прочность, то при циклических нагрузках разрушение деталей связано с развитием усталостных трещин, возникающих в поверхностном слое. Развитию этих трещин способствует шероховатость поверхности в результате механической обработки. При расчетах это явление учитывается коэффициентом влияния шероховатости поверхности

$$K_F = \frac{\sigma_{-f}}{\sigma_{-fn}} \quad \text{или} \quad K_F = \frac{\tau_{-f}}{\tau_{-fn}}.$$

Повышение прочности поверхностного слоя достигается поверхностной закалкой, химико-термической обработкой, наклепом и учитывается коэффициентом влияния поверхностного упрочнения

$$K_v = \frac{\sigma_{-fy}}{\sigma_{-f}},$$

где σ_{-fy} – предел выносливости образца, подвергнутого упрочнению.

Учитывая изложенное, можно определить *общий коэффициент снижения предела выносливости*:

$$K_{\sigma D} = \frac{\frac{K_{\sigma}}{\sigma} + K_F - 1}{K_v},$$

или

$$K_{\tau D} = \frac{\frac{K_{\tau}}{\tau} + K_F - 1}{K_v}.$$

Если в одном и том же сечении имеют место различные концентраторы напряжений, то расчет выполняют по максимальным значениям $K_{\sigma D}$ и $K_{\tau D}$.

Лекция 18

Тема занятия: Прочность при динамических нагрузках. Понятие о динамических нагрузках. Силы инерции при расчете на прочность.

Понятие о динамических нагрузках

Ранее в лекциях рассматривались только случаи нагружения силами, прилагаемыми к элементам конструкций статическим способом. Вместе с тем, из опыта эксплуатации различных конструкций, механизмов и машин известно, что статический способ нагружения является наименее опасным с точки зрения прочности элементов конструкций. Действительно, лист стекла, нагружаемый статическим способом, может выдержать значительную нагрузку. Но достаточно грузу значительно меньшей массы с большой высоты ударно нагрузить этот лист стекла, как оно разрушится на мелкие части.

В чём же причина уделения такого внимания в курсе сопротивления материалов статическому способу нагружения? Причин можно назвать несколько. Остановимся на двух главных причинах.

Первая причина. В целях упрощения математического аппарата в инженерной науке о сопротивлении материалов используется принцип Даламбера: «Если к заданным силам и реакциям наложенных связей присоединить силы инерции, то получим уравновешенную систему. Сила инерции направлена противоположно ускорению». С помощью этого принципа можно свести все виды динамического нагружения к статическому, не перегружая курс сопротивления материалов решением сложных дифференциальных уравнений. При этом, иногда при некоторых способах динамического нагружения, например, при ударном нагружении, удаётся ввести так называемые динамические коэффициенты. При этом задача по расчётам на прочность и жёсткость ещё более упрощается, и расчёты сводятся к умножению статических напряжений и перемещений на эти динамические коэффициенты.

Вторая причина. Абсолютно все расчёты ведутся в относительных сравниваемых единицах. Например, единица «метр». Такая же относительная единица, как «верста», «дюйм», «миля» и т.д.. Но когда мы сравниваем «метр» и «дюйм» сразу понимаем, что «метр» больше «дюйма» грубо говоря в 40 раз. Так и при расчётах на прочность. Если напряжение, возникшее в детали равно 100 МПа, мы знаем, что выполненная из малоуглеродистой стали эта деталь будет работать надёжно, а выполненная из дерева – моментально сломается. При этом нам неважно, каким образом была получена величина допускаемого напряжения. Оказывается, при определении механических характеристик материала наиболее удобнее проводить испытания при статическом способе нагружения, так как при этом мы получаем стабильные результаты. А при определении допускаемых напряжений можно учесть характер нагрузки на деталь. Например, для малоуглеродистой стали с величиной предела текучести, равном 240 МПа, при учёте сил инерции в случае равномерного вращения детали допускаемое напряжение может быть принятым величиной 160 МПа, а при ударном нагружении – величиной 100 МПа, опираясь на принцип Даламбера расчёты при динамическом нагружении можно разделить на две части.

1. При равноускоренном или равнозамедленном движении, когда из уравнения движения имеется возможность легко определить ускорение, задача сводится к определению величины силы инерции, которую присоединяют к действующим нагрузкам. Это – так называем раздел: «Учёт сил инерции»
2. При ударном нагружении время соударения упругих тел весьма мало. Определение величины ускорения весьма затруднительно. Поэтому в сопротивлении материалов широкое применение получил энергетический метод расчётов при ударе. Во многих случаях удаётся определить динами-

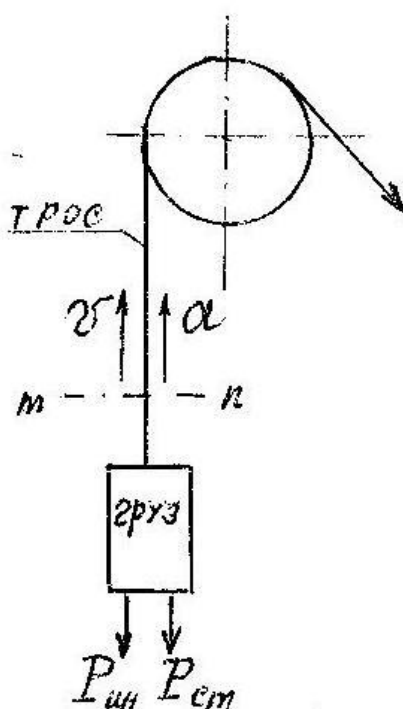
ческий коэффициент при ударе. В итоге, задача сводится к определению этого коэффициента и умножению его на статические напряжения и деформации.

Силы инерции при расчете на прочность

Расчёт троса подъёмного механизма

В качестве простейшего примера применения принципа Даламбера рассмотрим расчёт троса подъёмного механизма при начале его движения.

Схема механизма дана на рисунке



При неподвижном грузе на трос действует статическая сила:

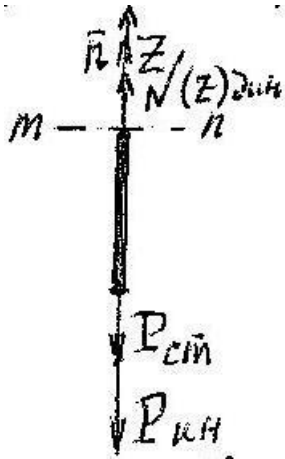
$$P_{ст} = mg .$$

При подъёме груза в начале движения со скоростью «V» груз испытывает ускорение «а», в результате чего возникает действующая сила инерции:

$$F_{ин} = ma .$$

Согласно принципу Даламбера эта сила направлена противоположно ускорению, то есть вниз.

Трос разделён плоскостью «mn», мысленно отброшена верхняя часть.



Расчётная схема для троса, как растягиваемого стержня

Для оставшейся нижней части составляем уравнение равновесия:

$$\sum F(z) = 0 \quad N(z)_{дин} - P_{ct} - F_{ин} = 0.$$

Так как внутренний силовой фактор возникает в данном случае при динамическом воздействии, то и нормальная сила является динамической:

$$N(z)_{дин} = F_{ин},$$

$$N = P_{ct} \left(1 + \frac{F_{ин}}{P_{ct}} \right),$$

$$\text{Или: } N = \left(1 + m \frac{a}{g} \right),$$

$$\text{Окончательно: } N = \left(1 + \frac{a}{g} \right),$$

Разделим полученное уравнение на площадь сечения троса:

$$\sigma_{дин} = \sigma_{ct} \left(1 + \frac{a}{g} \right),$$

где $\sigma_{дин}$ и $\sigma_{ст}$ – соответственно динамическое и статическое напряжения, действующие на трос.

При динамическом воздействии иногда удаётся определить динамические коэффициенты. В нашем случае в качестве динамического коэффициента можно принять выражение:

$$K_{дин} = (1 \pm \frac{a}{g}),$$

Где знак «минус» соответствует опусканию груза.

Статическое напряжение определяется по известной формуле:

$$\sigma_{ст} = \frac{P}{F^{ст}},$$

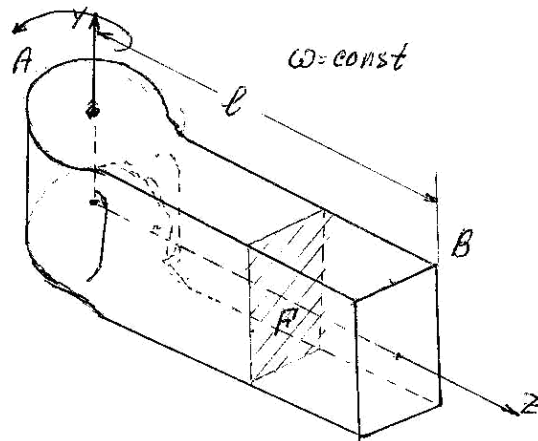
а динамическое напряжение получит своё значение в зависимости от значения «а». Например, если трос оборвётся, груз будет падать с ускорением, равном «g», динамический коэффициент:

$$\sigma_{дин} = 1 + \frac{a}{g} = 0$$

то есть в тросе при этом напряжения отсутствуют.

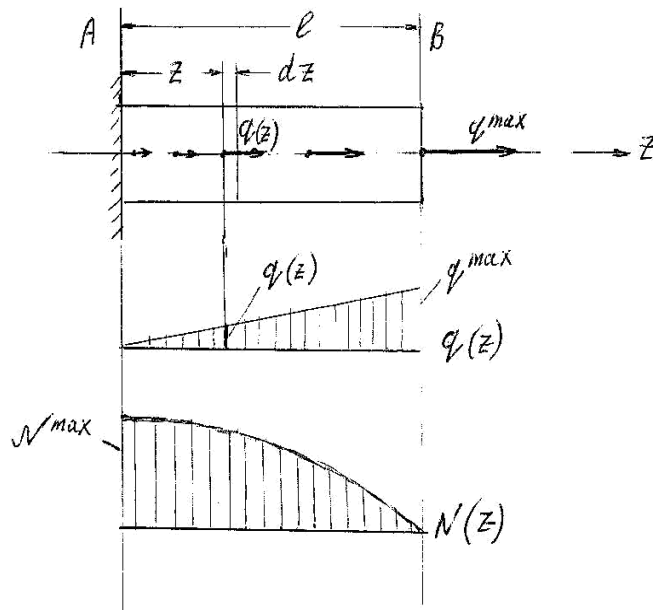
Расчёт равномерно вращающегося стержня.

Рассмотрим стержень, равномерно вращающийся вокруг оси «у». Длина стержня «l», площадь поперечного сечения «F».



При расчёте стержня собственной массой стержня пренебрегаем. Так как будем учитывать только инерционную нагрузку, то для простоты обозначений индексы «ин» везде опустим. Модуль окружной скорости при равномерном вращении постоянен, но вследствие непрерывного изменения направления вектора, движение является ускоренным.

Силы инерции зависят от величины угловой скорости « ω » и от радиуса вращения. В каждом сечении по толщине стержня силы инерции одинаковы. Поэтому в качестве расчётной схемы можем принять плоский стержень. Применяя принцип Даламбера, мы как бы останавливаем вращательное движение. Поэтому в расчётной схеме ось вращения может быть представлена в виде жёсткого закрепления.



Силы инерции направлены от оси вращения. Так как от сечения к сечению силы инерции меняются, необходимо перейти к интенсивности сил инерции «q».

$$q = dZ \frac{dP}{dz} .$$

Определим элементарную центробежную силу инерции на текущем расстоянии «Z» от оси вращения:

$$dP = dm \cdot a_n .$$

Элементарная масса элемента стержня длиной «dz»:

$$dm = \rho \cdot F \cdot dz ,$$

Где ρ – удельная масса материала стержня. Центробежное ускорение на радиусе «z»:

$$a_n = \omega^2 \cdot z .$$

Тогда : $dP = \rho \cdot F \cdot \omega^2 \cdot z dz .$

И интенсивность центробежной силы:

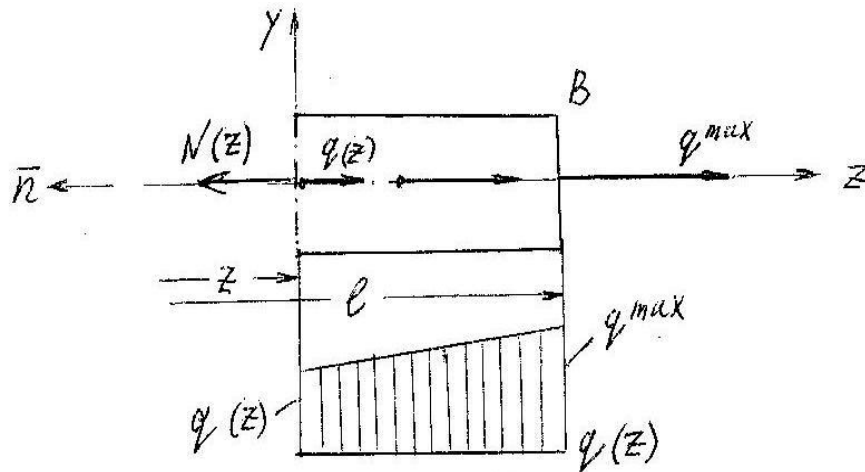
$$q = \rho \cdot F \cdot \omega^2 \cdot z .$$

Зависимость от «z» линейная, строим эпюру «q(z)».

Максимальное значение интенсивности центробежной силы будет :

$$q_{\max} = \rho \cdot F \cdot \omega^2 \cdot l.$$

Для определения внутреннего силового фактора применим метод плоских сечений. Проводим плоскость на расстоянии «z» от сечения «А» и рассматриваем правую часть стержня:



Из расчётной схемы следует, что от действия центробежных сил инерции возникнет нормальная сила N(z). Уравнение равновесия запишется в следующем виде:

$$\sum F(z) = 0 - N(z) + \int_z^l q(z) dz = 0$$

Тогда :
$$N(z) = \int_z^l q(z) dz,$$

Или:
$$N(z) = \int_z^l \rho F \omega^2 (z) dz = \rho F \omega^2 \int_z^l z dz.$$

Окончательно:
$$N(z) = \frac{\rho F \omega^2}{2} (l^2 - z^2).$$

В сечении «А», то есть на оси вращения, при « $Z=0$ » будет действовать

максимальная нормальная сила:
$$N_{\max} = \frac{1}{2} \rho F \omega_2^2 l^2.$$

На конечном торце стержня в сечении «В» при « $z=l$ »: $N_B = 0$.

Эпюра $N(z)$ параболическая, так как « z » во второй степени. При этом, вершина параболы находится в сечении «А», так как в этом сечении « $q(z)=0$ », а интенсивность есть первая производная от силы инерции. Максимальное напряжение на оси вращения:

$$\sigma_{\max} = \frac{N}{F^{\max}},$$

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 l^2.$$

Тогда связь с линейной скоростью:
$$\sigma_{\max} = \rho v_2^2.$$

Из полученного результата следует, что величина напряжения не зависит от площади сечения стержня. С увеличением площади пропорционально увеличивается масса стержня и соответствующие силы инерции. Поэтому при расчёте вращающихся элементов конструкции на прочность лимитирующим фактором оказывается окружная скорость вращения. Расчёты ведутся по допускаемому числу оборотов.

Уравнение прочности:
$$\sigma_{\max} \leq [\sigma].$$

Тогда, согласно последнему равенству можем записать в нашем случае для

допускаемой окружной скорости:
$$[v] = \sqrt{\frac{2[\sigma]}{\rho}}.$$

Учитывая, что
$$[v] = [\omega]l,$$

$$[\omega] = \frac{\pi \cdot [n]}{30},$$

Окончательно получим:
$$[n] = \frac{42,43}{\pi \cdot l} \sqrt{\frac{[\sigma]}{\rho}},$$

Где $[\omega]$ - допускаемая угловая скорость, $[n]$ -
допускаемое число оборотов в минуту.