Министерство образования и науки РФ
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых »
(ВлГУ)
КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА ВЛГУ

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ ПО САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЕ СТУДЕНТОВ

УЧЕБНАЯ ДИСЦИПЛИНА **МАТЕМАТИКА**
для специальностей среднего профессионального образования

13.02.11 «Техническая эксплуатация и обслуживание электрического и электромеханического оборудования (по отраслям)»

Владимир 2016

Кафедра-разработчик: Колледж инновационных технологий и предпринимательства ВлГУ.

Составитель:
старший преподаватель колледжа ___________________________________ И.С. Яппарова

Одобрено на заседании цикловой комиссии колледжа инновационных технологий и предпринимательства ВлГУ

протокол № ______ от «____» __________________ 20___ года

Председатель цикловой комиссии ___________________________________Г.П. Тонконог

Директор КИТП ВлГУ ____Ю.Д. Корогодов

Пояснительная записка

Усвоение предусмотренной учебным планом дисциплины МАТЕМАТИКА предусматривает в качестве важнейшей составляющей самостоятельную работу обучающихся, существенно дополняющую аудиторные занятия.

Цели самостоятельной внеаудиторной работы студентов:
1)закрепление, углубление, расширение и систематизация знаний, полученных во время аудиторных занятий, самостоятельное овладение новым учебным материалом;
2)формирование общепрофессиональных умений;
3)формирование умений и навыков самостоятельного умственного труда;
4)развитие самостоятельности мышления;
5)формирование убежденности, волевых черт характера, способности к самоорганизации.

Самостоятельная работа студентов рассчитана на 26 часов, включает в себя подготовку студентов к практическим занятиям, контрольным работам, экзамену.

Теоретический материал и решение типовых задач содержится в конспектах лекций и в учебниках (см. список литературы).

№ п/п	Раздел(тема)дисциплины	Самостоятельная работа студента (в часах)	Виды СРС	Форма контроля СРС	Баллы по СРС
1	*Раздел 1*Элементы линейной алгебры	4	Работа с конспектом лекций. Доработка конспекта лекций. Выполнение домашней самостоятельной работы.	Устный опрос. Доработанный конспект лекций Домашняя самостоятельная работа.	2
2	*Раздел 2* Элементы теории комплексных чисел	2	Работа с конспектом лекций. Подготовка ответов на контрольные вопросы по теме. Выполнение домашней работы. Подготовка к контрольной работе.	Устный опрос. Письменная домашняя работа. Контрольная работа.	2
3	*Раздел 3.* Элементы математического анализа Тема 3.1. Теория пределов	2	Работа с конспектом лекций. Выполнение домашней работы.	Письменная домашняя работа.	2
	Тема 3.2. Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной	4	Работа с конспектом лекций. Доработка конспекта лекций. Выполнение домашней работы. Подготовка к контрольной работе.	Устный опрос. Доработанный конспект лекций Письменная домашняя работа Контрольная работа.	2

	Тема 3.3. Интегральное исчисление функции одной действительной переменной	4	Работа с конспектом лекций. Доработка конспекта лекций. Выполнение домашней работы.	Устный опрос. Доработанный конспект лекций письменная домашняя работа.	2
	Тема 3.4. Обыкновенные дифференциальные уравнения.	6	Работа с конспектом лекций. Доработка конспекта лекций. Выполнение домашней работы. Подготовка к контрольной работе.	Устный опрос. Доработанный конспект лекций Письменная домашняя работа Контрольная работа	3
4	*Раздел 4* Элементы теории вероятностей и математической статистики.	4	Работа с конспектом лекций. Доработка конспекта лекций. Выполнение домашней работы.	Устный опрос. Письменная домашняя работа.	2
			Подготовка к экзамену	Экзамен	
	Всего:	26		Итого	15

***Раздел 1.* Элементы линейной алгебры**

Определителем второго порядка называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

по следующему правилу: произведение по главной диагонали берется со знаком плюс, по другой диагонали со знаком минус.

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = a_1b_2 - a_2b_1$$

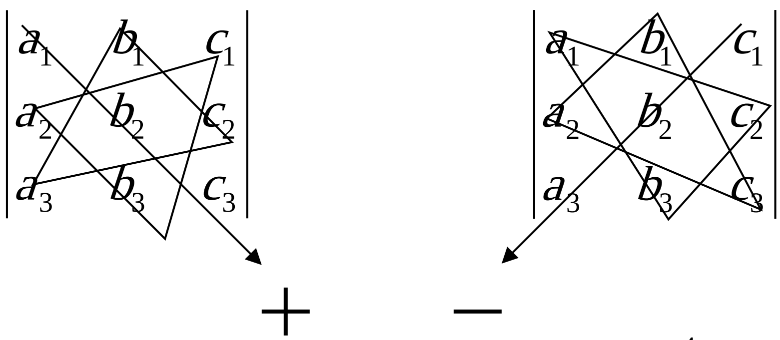
<u>Пример:</u> вычислить определитель второго порядка

1) $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 2 - 3\cdot 4 = 4 - 12 = -8$

Определителем третьего порядка называется число, которое поставлено в соответствие таблицы коэффициентов по следующему правилу:

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 + a_2b_3c_1 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 - a_1b_3c_2 - a_2b_1c_3$$

Это определение определителя наглядно можно представить следующим образом:



Это правило называют еще «Правило треугольника»

Пример: Вычислить определитель третьего порядка

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 3\cdot 4\cdot 3 + 2\cdot 2\cdot 1 + 1\cdot 2\cdot 5 - 1\cdot 4\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot 3 - 3\cdot 2\cdot 5 =$$

$$= 36 + 4 + 10 - 4 - 12 - 30 = 4$$

В общем виде *определитель n-го порядка* может быть представлен следующем виде:

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

где a_{ij} – элемент определителя, i – номер строки, j – номер столбца.

Возьмем a_{ij} в определителе и вычеркнем i строку, j столбец. В результате останется определитель порядка на единицу ниже. Такой определитель называется *минором элемента* a_{ij}. Обозначается минор – M_{ij}.

Пример: Найти минор элемента a_{12} определителя $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$

Для этого вычеркнем первую строку, второй столбец.

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

В результате останется определитель порядка на единицу ниже и минор равен:

$$M_{12} = \begin{vmatrix} a_{21} & & a_{23} & \ldots & a_{2n} \\ a_{31} & & a_{33} & \ldots & a_{3n} \\ . & . & . & a_{ij} & . \\ a_{n1} & & a_{n3} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Алгебраическим дополнением элемента определителя называется его минор взятый со своим знаком, если сумма номеров строки и столбца, в которой расположен элемент, четная и с обратным знаком, если нечетная.

$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$ - алгебраическое дополнение

ТЕОРЕМА: Определитель n-го порядка равен сумме произведений какой либо строки (или столбца) на их алгебраические дополнения.

$$D = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Пример: Вычислить определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

По теореме определитель равен сумме произведений элементов какой-либо строки на их алгебраические дополнения. Найдем алгебраические дополнения элементов первой строки и разложим определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} + a_{14}A_{14} =$$

$$=(-1)^{1+1}1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+2}\cdot 1\cdot\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}+(-1)^{1+3}(-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}+$$

$$+(-1)^{1+5}\cdot 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}=1\cdot 0-1\cdot(-2)-1\cdot 0-2\cdot 2=-2$$

Задачи для самостоятельного решения

Вариант	Задание
1	1) а) D = $\begin{vmatrix} -7{,}2 & 3 \\ 8{,}1 & 4 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 8 & -2 & -1 \\ 4 & 0 & 2 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} -1 & 2 & 2 & 3 \\ 0 & -2 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$
2	1) а) D = $\begin{vmatrix} -4 & 3.9 \\ 7 & 6.2 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} -4 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -3 \\ 2 & 0 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 0 \\ 4 & -2 & 2 & -1 \end{vmatrix}$
3	1) а) D = $\begin{vmatrix} -7{,}8 & -4 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \end{vmatrix}$; в) D = $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 4 & 0 \end{vmatrix}$
4	1) а) D = $\begin{vmatrix} 3{,}8 & -4{,}1 \\ -7 & 6 \end{vmatrix}$; б) D = $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 \\ -2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix}$;

	в) $D = \begin{vmatrix} -1 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \\ 4 & 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$
5	1) а) $D = \begin{vmatrix} 4{,}9 & -3 \\ 1{,}7 & -6 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$
6	1) а) $D = \begin{vmatrix} 4{,}7 & -8 \\ 3{,}2 & -6 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -1 & 5 & 3 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$
7	1) а) $D = \begin{vmatrix} 7 & -3{,}4 \\ 6 & -4{,}2 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -3 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -1 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -2 & -1 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & 2 & 3 \end{vmatrix}$
8	1) а) $D = \begin{vmatrix} 8{,}3 & -6 \\ 2{,}7 & -4 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ -2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -1 & 4 & -2 & 4 \end{vmatrix}$
9	1) а) $D = \begin{vmatrix} 4{,}8 & -7 \\ 2{,}4 & -3 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} -2 & 4 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}$; в) $D = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & -1 \end{vmatrix}$
10	1) а) $D = \begin{vmatrix} 8 & -4{,}6 \\ 9 & -2{,}9 \end{vmatrix}$; б) $D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & -3 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$;

	в) $D = \begin{vmatrix} -2 & -3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

Решение систем линейных алгебраических уравнений методом Крамера

Рассмотрим систему n линейных уравнений с n неизвестными.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \ldots + a_{1n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots. \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

x_1 , x_2 , …, x_n – неизвестные,

b_1, b_2, …., b_n - столбец свободных членов.

Составим главный определитель системы из коэффициентов при неизвестных

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Составим вспомогательные определители системы следующим образом:

$$Dx_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ b_n & a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$Dx_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & b_2 & \ldots & a_{2n} \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & b_n & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \quad \ldots \quad Dx_n = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & b_2 \\ . & . & \ldots & . \\ a_{n1} & a_{n1} & \ldots & b_n \end{vmatrix}$$

Тогда решением системы является:

$$x_1 = \frac{Dx_1}{D}, \quad x_2 = \frac{Dx_2}{D}, \quad \ldots, \qquad x_n = \frac{Dx_n}{D}$$

Отметим следующее:

1. Если определитель системы $D \neq 0$, то система определена, т.е. имеет единственное решение
2. Если $D = Dx_1 = Dx_2 = \ldots = Dx_n = 0$, то система имеет бесконечно много решений, т.е. является неопределенной.
3. Если $D = 0$, но хотя бы один из Dx_1, Dx_2, … , Dx_n не равен нулю, то система несовместна, т.е. не имеет решений.

Из–за арифметических трудностей формулы Крамера на практике используются для систем не выше третьего, четвертого порядка.

Пример: Решить по формулам Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 1 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

Вычислим все определители:

$$D=\begin{vmatrix}2 & 3\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2-3=-5$$

$$D_x=\begin{vmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{vmatrix}=-1-0=-1$$

$$D_y=\begin{vmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=0-1=-1$$

Отсюда $x=\dfrac{D_x}{D}=\dfrac{-1}{-5}=\dfrac{1}{5}$

$y=\dfrac{D_y}{D}=\dfrac{-1}{-5}=\dfrac{1}{5}$

Ответ: $x=\dfrac{1}{5}$, $y=\dfrac{1}{5}$

<u>Пример:</u> Решить по формулам Крамера систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1+x_2-x_3=1\\ x_1-x_2=2\\ 2x_1-3x_3=3\end{cases}$$

Вычислим:

$$D=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 2 & 0 & -3\end{vmatrix}=4 \qquad Dx_1=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 0\\ 3 & 0 & -3\end{vmatrix}=6$$

$$Dx_2=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1\\ 1 & 2 & 0\\ 2 & 3 & -3\end{vmatrix}=4 \qquad Dx_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 0 & 3\end{vmatrix}=0$$

Тогда:

$$x_1=\frac{6}{4}=\frac{2}{3} \qquad x_2=\frac{4}{4}=1 \qquad x_3=\frac{0}{4}=0$$

Ответ: $x_1=2/3$, $x_2=1$, $x_3=0$.

Задачи для самостоятельного решения

Вариант	Задание
1	а) $\begin{cases} x+2y-z=2\\ 2x-3y+2z=2\\ 3x+y+z=8\end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y-3z=-10\\ x+3y-3z=13\\ x+y-z=7\end{cases}$
2	а) $\begin{cases} -x+3y+2z=4\\ 2x-y+3z=6\\ -2x+2y-z=8\end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y+z=-4\\ x+2y-3z=9\\ 2x-2y+2z=7\end{cases}$
3	а) $\begin{cases} 3x-y+2z=-5\\ 2x+2y-3z=1\\ x-2y+z=6\end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+z=-4\\ x+2y-z=11\\ 2x-3y+2z=-2\end{cases}$
4	а) $\begin{cases} x-3y+z=-7\\ 2x+y-2z=4\\ -2x+2y-3z=2\end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-3y+z=9\\ x-2y+2z=-4\\ 2x+y-2z=-1\end{cases}$

5	а) $\begin{cases} x+3y-z=8 \\ 2x-y+4z=-1 \\ -2x+2y+z=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} -x+4y-z=5 \\ 2x-2y+3z=-3 \\ -2x+y+2z=2 \end{cases}$
6	а) $\begin{cases} 2x-2y+3z=4 \\ -x+2y+z=-6 \\ 3x+y-2z=12 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 3x-y+z=-3 \\ x+2y-4z=7 \\ 2x+y+2z=-1 \end{cases}$
7	а) $\begin{cases} 3x-y+2z=4 \\ x-2y+z=-3 \\ x+3y-z=6 \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x-y+3z=3 \\ x-2y+z=8 \\ 3x+2y-z=-1 \end{cases}$
8	а) $\begin{cases} 4x-y+z=6 \\ x+2y-2z=-3 \\ 2x+y-3z=2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x-y+3z=4 \\ -2x+2y-z=-7 \\ 3x+y-2z=2 \end{cases}$
9	а) $\begin{cases} 2x-y+3z=-1 \\ 3x+y-2z=7 \\ -x+2y+z=4 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y-z=9 \\ -2x-3y+z=-5 \\ 3x+y-2z=3 \end{cases}$
10	а) $\begin{cases} 2x-y+3z=-6 \\ x+2y-z=8 \\ 3x-2y+2z=2 \end{cases}$ б) $\begin{cases} x+2y-z=4 \\ 3x-y+2z=7 \\ -x+3y-2z=5 \end{cases}$

Раздел 2 Элементы теории комплексных чисел

1. Мнимая единица. Алгебраическая форма комплексных чисел.

Неразрешимость уравнения $x^2 + 1 = 0$ на множестве действительных чисел привела к введению так называемой мнимой единицы i, т.е. мнимого (придуманного) числа, обладающего свойством: $i^2 = -1$.

Тогда $x^2 + 1 = 0$ имеет два решения: $x_1 = i, \quad x_2 = -i$.

Числа, вида bi, где $b \in R$, i – мнимая единица, называют мнимыми числами.

Например, $4i$, $-3i$, $0{,}45i$, $\sqrt{2}i$, и т.п.

Числа, вида $a+bi$, где $a,b \in R$, i – мнимая единица, называют комплексными числами.

Например, $5+4i$, $7-3i$, $25+45i$, $-2-\sqrt{3}i$, и т.п.

Форма записи $z = a+bi$ называется алгебраической.

a – действительная часть: Re(z) $\quad bi$ – мнимая часть: Im(z)

Такая запись позволят записывать не только комплексные числа, но и *чисто мнимые* и *действительные*, например:

Действительные числа $b=0$	Мнимые числа $a=0$
$5+0i=5$	$0+4i=4i$
$-\sqrt{5}+0i=-\sqrt{5}$	$0-7{,}8i=-7{,}8i$

Во множестве комплексных чисел нет понятий «больше», «меньше», «положительное», «отрицательное».

Числа $z_1 = a_1 + b_1 i$ и $z_2 = a_2 + b_2 i$ называются равными, если $a_1 = a_2$ и $b_1 = b_2$.

Числа $z = a+bi$ и $-z = -a-bi$ называются противоположными.

Числа $z = a+bi$ и $\overline{z} = a-bi$ называются сопряженными.

Решение квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом

Решением квадратного уравнения с отрицательным дискриминантом всегда будут два сопряженных комплексных числа.

Пример 1: решить квадратное уравнение $x^2+4x+29=0$.

Решение.

Вычислим дискриминант

$D=b^2-4ac=4^2-4\cdot 1\cdot 29=16-116=-100<0$.

Представляем отрицательное число как произведение (–1) и положительного числа и заменяем (–1) на i^2 :

$D=-100=-1\cdot 100=i^2\cdot 10^2$.

Найдем $\sqrt{D}=\sqrt{i^2\cdot 10^2}=\sqrt{i^2}\cdot\sqrt{10^2}=i\cdot 10$.

Находим корни уравнения:

$$x_1=\frac{-b+\sqrt{D}}{2a}=\frac{-4+i\cdot 10}{2}=\frac{-4}{2}+\frac{10i}{2}=-2+5i\ ;$$

$$x_2=\frac{-b-\sqrt{D}}{2a}=\frac{-4-i\cdot 10}{2}=\frac{-4}{2}-\frac{10i}{2}=-2-5i\ .$$

Ответ: два сопряженных комплексных числа: $x_1=-2+5i$ и $x_2=-2-5i$.

Задачи для самостоятельного решения

1. Решить уравнение:

1)	$x^2+4x+29=0$	2)	$x^2+36=0$
3)	$x^2-13x+48=0$	4)	$x^2+6x+18=0$
5)	$x^2+4=0$	6)	$x^2+7x+20=0$
7)	$x^2+7=0$	8)	$x^3+8=0$
9)	$x^2-2x+10=0$	10)	$x^2-2x+11=0$

Раздел 3. **Элементы математического анализа**

Тема 3.1.Теория пределов

Число *A* называют *пределом функции* *f*(*x*) при $x\to x_0$ (и пишут $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$), если для любого $\varepsilon>0$ найдется число $\delta>0$, зависящее от , такое, что для всех $x\neq x_0$, удовлетворяющих условию $|x-x_0|<\delta$, выполняется неравенство $|f(x)-A|<\varepsilon$.

Теоремы о пределах:

1. $\lim\limits_{x\to x_0} c=c$ (*c*=const).

2. Если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A,\ \lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)=B,$ то:

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\pm\varphi(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\pm\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\pm B;$$

$$\lim_{x\to x_0}(f(x)\cdot\varphi(x))=\lim_{x\to x_0} f(x)\cdot\lim_{x\to x_0}\varphi(x)=A\cdot B;$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}=\frac{A}{B},\quad (B\neq 0).$$

Первый замечательный предел: $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1.$

Второй замечательный предел (число e = 2,718…):

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+1/x)^x=e$ или $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e.$

Замечательные пределы:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}=\ln a\qquad \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\log_a(1+x)}{x}=\log_a e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}=\alpha$$

Пример 5. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x}{6x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\sin 8x\cdot 8}{6\cdot 8x}=\frac{5\cdot 8}{6}=\frac{40}{6}=\frac{20}{3}$

Пример 6. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+5x)}{x}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}\frac{5\ln(1+5x)}{5x}=5$

Пример 7. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}$

Решение $\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{3x}}\overset{\left[1^\infty\right]}{=}\lim\limits_{x\to 0}(1+5x)^{\frac{1}{5x}\cdot 5x\cdot\frac{1}{3x}}=e^{\lim\limits_{x\to 0}\left(5x\cdot\frac{1}{3x}\right)}=e^{\frac{5}{3}}$

Чтобы найти предел элементарной функции $\lim\limits_{x\to x_0} f(x),$ нужно предельное значение аргумента подставить в функцию и посчитать. При этом, если $x=x_0$ принадлежит области определения функции, то значение предела будет найдено, оно равно значению функции в точке

$x=x_0$. При вычислении пределов полезно использовать следующие соотношения. Если $c=\text{const},\quad c\neq 0,\quad c\neq\infty,$ то, учитывая свойства б.б. и б.м. функций, получим:

$$\frac{0}{c}\to 0;\quad \frac{c}{0}\to\infty;\quad \frac{\infty}{c}\to\infty;\ c\cdot\infty\to\infty;\ c\cdot 0\to 0;\ \ a^{\infty}\to 0,\text{ если } 0<a<1;\ a^{\infty}\to\infty,\text{ если } a>1.$$

Случаи, в которых подстановка предельного значения аргумента в функцию не дает значения предела, называют неопределенностями; к ним относятся неопределенности видов:

$$\left(\frac{\infty}{\infty}\right);\ \ \left(\frac{0}{0}\right);\ \ (0\cdot\infty);\ \ (\infty-\infty);\ (1^{\infty});\ (\infty^{0});\ (0^{0}).$$

Пример. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+15}{10x^2-4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2x^3+15}{10x^2-4}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{2\cdot 1^3+15}{10\cdot 1^2-4}=\dfrac{2+15}{10-4}=\dfrac{17}{6}$

Пример0. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}$

Решение $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^2-16}{x^2-5x+4}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x-4)(x+4)}{(x-4)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(x+4)}{(x-1)}=\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{(4+4)}{(4-1)}=\dfrac{8}{3}$

*Пример 1*Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}$

Решение

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}}{x-5}\overset{\left[\frac{0}{0}\right]}{=}\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{2x+8}-\sqrt{23-x}\right)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\left(\sqrt{2x+8}\right)^2-\left(\sqrt{23-x}\right)^2\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{\left((2x+8)-(23-x)\right)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{(2x+8-23+x)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{(3x-15)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3(x-5)}{(x-5)\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{3}{\left(\sqrt{2x+8}+\sqrt{23-x}\right)}=$$

$$=\frac{3}{\left(\sqrt{2\cdot 5+8}+\sqrt{23-5}\right)}=\frac{3}{\left(\sqrt{18}+\sqrt{18}\right)}=\frac{3}{2\sqrt{18}}=\frac{3}{2\cdot 3\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1\cdot 2\sqrt{2}}{2\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{4\cdot 2}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

Задачи для самостоятельного решения

Вычислить пределы функций:

$$1)\lim_{x\to0}\frac{x^4+2x^2-3x}{x^3-3x^2+x}\qquad 2)\lim_{x\to1}\frac{x^3-3x-2}{x^2+x}\qquad 3)\lim_{x\to0}\frac{\left(\sqrt{1+x}-1\right)}{x^2}$$

$$4)\lim_{x\to4}\frac{\left(\sqrt{1+2x}-3\right)}{\sqrt{x}-2}\qquad 5)\lim_{x\to1}\frac{x^2-3x+2}{x^2-1}\qquad 6)\lim_{x\to1}\frac{(x+1)^2+(x-1)^2}{(x-1)^2-(x+1)^2}$$

$$7)\lim_{x\to-2}\frac{\sqrt[3]{x^3+2x-1}}{x+2}\qquad 8)\lim_{x\to0}\frac{x^3-15x^2+x}{18x^2+15x}\qquad 9)\lim_{x\to2}\frac{\left(\sqrt{4x-7}-\sqrt{x+2}\right)}{x-2}$$

Вычислить пределы функций, используя замечательные пределы:

$$1)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2}\right)^{x^2+1}\qquad 2)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{x}\qquad 3)\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$$

$$4)\lim_{x\to0}\left(1+10x^2\right)^{x^3\cdot\frac{1}{x}}\qquad 5)\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+\sin x)}{\sin 4x}\qquad 6)\lim_{x\to0}\frac{3x^2-5x}{\sin 4x}$$

$$7)\lim_{x\to0}\frac{tg3x}{tgx}\qquad 8)\lim_{x\to0}\frac{9\ln(1-2\,x)}{4arctg3x}\qquad 9)\lim_{x\to0}\frac{\arcsin 7x}{\sin x\cdot x^2}$$

Тема 3.2.Дифференциальное исчисление функции одной действительной переменной

Обозначения: С- постоянная, х-аргумент, u, v, w – функции от х, имеющие производные.

Основные правила дифференцирования

1. (u+v-w)’=u’+v’-w’
2. (u·v)’=u’v+uv’
3. (cv)’=c·v’
4. $(\frac{u}{v})’=\frac{u’v-uv’}{v^2}$

Примеры:

1. У’=(3^x-$2x^5$+e^2)’=(3^x)’- 2·(x^5)’+(e^2)’= 3^x ln3-10x^4
2. У’=(2^x•x^3)’=(2^x)’•(x^3)+(2^x)• (x^3)’=2^x ln2•x^3+2^x• $3x^2$
3. Y’=$(\frac{x^2}{2-x^2})’=\frac{2x(2-x^2)-x^2\cdot(-x)}{2-x^{2^2}}$

Задания для самостоятельной работы

1. Составьте уравнение касательной к графику функции $f(x)$ в точке x_0:

   а) $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$, x_0 - точка пересечения графика с осью абсцисс.

   б) $y=(7-3x)^2$, x_0 - точка пересечения графика с прямой $y=1$.

2. На графике функции $y=\dfrac{x+1}{x+2}$ найдите точки, в которых касательная параллельна прямой $y=x-3$

3. Тело массой 3кг движется по закону $x(t)=0.25t^4+\frac{1}{3}t^3-7t+2(\grave{\imath}\ )$. Найдите силу, действующую на тело в момент времени 2с.

4. Исследуйте функцию и постройте ее график:

   а) $y=\dfrac{2x+1}{x-1}$; б) $y=\dfrac{1}{x^2+1}$; в) $y=\dfrac{x+2}{x^2-9}$

5. Материальная точка движется прямолинейно по закону $x(t)=18t^2-t^3, x=[м], t=[сек]$.Определите, в какой момент времени из промежутка $[4;8]$ скорость будет наибольшей, найдите скорость в этот момент.
6. Сколько корней имеет уравнение $3x-x^3-1=0$

Тема 3.3.Интегральное исчисление функции одной действительной переменной

Таблица неопределенных интегралов:

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ где $n \neq -1$
3. $\frac{dx}{x} = ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \frac{a^x}{lna} + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\, x + C$
9. $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\, x + C$
10. $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = arcsin\, x + C$
11. $\int \frac{dx}{1+x^2} = arctg\, x + C$
12. $\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} arctg\, \frac{x}{a} + C$
13. $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = arcsin\, \frac{x}{a} + C$
14. $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C$
15. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = ln \left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Заметим, что справедливость каждой формулы проверяется дифференцированием.

Примеры:

1. $\int(5x^4-4x^3+3x^2-1)dx = 5\int x^4dx - 4\int x^3dx + 3\int x^2\,dx - \int dx = x^5 - x^4 + x^3 - x + C$

Проверка:

$d(x^5 - x^4 + x^3 - x + C) = (5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 1)dx.$

2. $\int \frac{2x\cdot\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx = 2\int x^{1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}dx = 2\cdot\frac{6}{13}\cdot x^{\frac{13}{6}} + C = \frac{12}{13}\cdot x^{\frac{13}{6}} + C$

3. $\int \frac{x^2+1}{x}dx = \int\left(x+\frac{1}{x}\right)dx = \int xdx + \int\frac{dx}{x} = \frac{x^2}{2} + ln|x| + C$

4. $\int \frac{2\sqrt[3]{x}-3x^2}{x^2}dx = 2\int x^{\frac{1}{3}-2}\,dx - 3\int dx = 2\cdot\frac{x^{-\frac{2}{3}}}{-\frac{2}{3}} - 3\cdot x + C = -3x^{-\frac{2}{3}} - 3x + C$

Задания для самостоятельной работы

Найдите неопределенный интеграл функций:

1. $\int xdx$
2. $\int x^4\,dx$
3. $\int 5dx$
4. $\int 2xdx$
5. $\int(2-x)dx$
6. $\int(3x-x^2)dx$
7. $\int 3(x-2)dx$
8. $\int(4x^2+4x-3)dx$
9. $\int x^2(1+2x)dx$
10. $\int(x+3)^2dx$

Ответ: $\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}x^4+C$

11. $\int 4(2x-1)^2dx$
12. $\int x(1-x)^2dx$

Ответ: $\frac{16}{3}x^3 - 8x^2 + 4x + C$

13. $\int \sqrt{x}\,dx$

Ответ: $\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

Ответ: $\frac{x^2}{2} - \frac{2}{3}x^3 + \frac{x^4}{4} + C$

14. $\int \sqrt[3]{x^2}dx$

Ответ: $\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + C$

Интегрирование способом подстановки

Например, необходимо вычислить следующие интегралы:

1) $\int (1+x)^5 dx$

Положим 1 + X = Z.

Продифференцируем это равенство:d(l + x) = dz

dx = dz

Заменим в интеграле: $\int (1+x)^5 dx = \int z^5\,dz = \frac{z^6}{6} + C = \frac{1}{6}\cdot(1+6)^6 + C$

2. $\int \sin(a+bx)dx$

Положим: a+ bx= z

d(a + bx) = dz

b·dx = dz

dx = $\frac{dz}{b}$

Заменим:

$$\int \sin(a+bx)dx = \int \frac{\sin z}{b}dz = \frac{1}{b}\cdot(-\cos z) + C = -\frac{1}{b}\cos(a+bx) + C$$

3. $\int \frac{x^2dx}{1+x^3} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{z} = \frac{1}{3}ln|z| + C = \frac{1}{3}ln|1+x^3| + C$

Замена: $1+x^3=z$

$d(1+x^3)=dz$

$3x^2dx=dz$

$x^2dx= \frac{dz}{3}$

4. $\int \frac{2e^x dx}{(1-e^x)^2} = -2\int \frac{dz}{z^2} = \frac{2}{z} + \mathrm{C} = \frac{2}{1-\mathrm{e}^{\mathrm{x}}} + \mathrm{C}$

Замена: $1-e^x=z$

$d(1-e^x)=dz$

$e^xdx=-dz$

5. $\int \frac{dx}{9+x^2} = \frac{1}{9}\int \frac{dx}{1+\frac{x^2}{9}} = \frac{1}{9}\int \frac{\mathrm{dx}}{1+\left(\frac{\mathrm{x}}{3}\right)^2} =$

Замена: $\frac{x}{3}$ =z

dx = 3dz

$$= \frac{1}{9}\int \frac{3dz}{1+z^2} = \frac{1}{3}\int \frac{dz}{1+z^2} = \frac{1}{3}arctg\,z + C = \frac{1}{3}arctg\frac{\mathrm{x}}{3} + \mathrm{C}$$

6. $\int \frac{\sin 3x dx}{\sqrt{9-cos^2 3x}} =$

Замена: cos3x=t

sin3xdx = - $\frac{dt}{3}$

$$= \int \frac{-\frac{dt}{3}}{\sqrt{9-t^2}} = -\frac{1}{3}\int \frac{dt}{\sqrt{9-t^2}} = -\frac{1}{3}\int \frac{d(\frac{t}{3})}{\sqrt{1-(\frac{t}{3})^2}} = -\frac{1}{3}arcsin\frac{t}{3} + C =$$

$$= -\frac{1}{3}arcsin\frac{cos3x}{3} + C$$

Задания для самостоятельной работы

Найдите неопределенный интеграл функций:

1. $\int \sqrt{2x+3}dx$

2. $\int (3+5x)^4\,dx$

Ответ: $\frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3}+C$

3. $\int \frac{dx}{(3x+1)^2}$

Ответ: $-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3x+1}+C$

5. $\int (x-3)^2dx$

Ответ: $\frac{(x+3)^3}{3}+C$

7. $\int \frac{\sqrt{10+e^{-x}}}{e^x}dx$

Замена: $e^{-x}=t$

Ответ: $-\frac{2}{3}\cdot(e^{-x}+10)^{\frac{3}{2}}+C$

Ответ: $\frac{(3+5x)^5}{25}+C$

4. $\int \sqrt{x+2}dx$

Ответ: $\frac{2}{3}\sqrt{(2+x)^3}+C$

6. $\int 4(2x-1)^2dx$

Ответ: $\frac{2}{3}\cdot(2x-1)^3+C$

8. $\int cos^5xdx$

Ответ: $\sin x-\frac{2}{3}sin^3x+\frac{1}{5}sin^5x+C$

Интегрирование по частям

Пусть u и v — дифференцируемые функции от x. Тогда, как известно,
d (uv) = udv + vdu, откуда следует udv = d (uv) — vdu.
Интегрирование обеих частей этого равенства дает
∫udv = ∫d(uv) - ∫vdu.
Так как ∫d(uv) = uv, то получаем ∫udv = uv - ∫vdu.
Это формула интегрирования по частям, позволяющая переходить от заданного интеграла ∫udv к интегралу ∫vdu;
последний при удачном разбиении подынтегрального выражения на u и dv может оказаться более простым, чем первоначальный.
Эта формула часто применяется, когда подынтегральной функцией является:

- логарифмическая или обратная тригонометрическая функция;
- произведение каждой из этих функций на алгебраическую;
- произведение, содержащее алгебраические, тригонометрические, показательные функции,
- и в некоторых других случаях.

Для интегралов вида ∫In xdx, ∫arctgxdx, ∫arcsinxdx за u принимается подынтегральная функция, а dv = dx. Это дает, например, для первого интеграла следующее:
u = In x; dv = dx;
du= $\frac{dx}{x}$; v=x.
Поэтому установленная формула позволяет записать

$$\int lnxdx = xlnx-\int x\frac{dx}{x}=lnx-\int dx.$$

Теперь уже получается результат:

$$\int lnxdx = xlnx-\int dx = xlnx-x+C$$

Аналогично отыскиваются второй и третий интегралы.
Найдем ∫arcsinxdx. Полагаем u = arcsin x, а dv = dx, тогда du = $\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ и v = x.
Поэтому $\int \mathrm{arcsinxdx}=\arcsin\mathrm{x}-\int\frac{\mathrm{xdx}}{\sqrt{1-\mathrm{x}^2}}$
Заметим, что к вновь записанному интегралу применяется подстановка 1 - x^2 = z, которая дает $\int\frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}=-\sqrt{1-x^2}$.
Поэтому можно записать $\int \mathrm{arcsinxdx}=\mathrm{x}\arcsin\mathrm{x}+\sqrt{1-\mathrm{x}^2}+C$
Когда интегрирование по частям применяется к подынтегральной функции, имеющей вид произведения, то выбор множителей и dv должен соответствовать цели перехода к интегралу ∫vdu, более простому, чем заданный интеграл ∫udv, причем множитель dv, всегда включающий dx, должен быть легко интегрируемым.

Это достигается, например, тем, что для интегралов вида
$\int P(x)e^{ax}dx, \int P(x)sinmxdx, \int P(x)cosmxdx$
(1-я группа)
за u принимается многочлен P (x), а для интегралов вида
$\int P(x)lnxdx, \int P(x)arctgxdx, \int P(x)arcsinxdx$
(2-я группа)
за u принимается In x, arctg x, arcsin x.
Например, найдем $\int(2x-5)e^{-3x}dx$.
Принимаем
u = 3x - 5 и dv = e – 3^xdx,
тогда
du = 2dx и v = $-\frac{1}{3}e^{-3x}$
Отсюда находим

$$\int (2x-5)e^{-3x}dx = -\frac{1}{3}(2x-5)e^{-3x} - \int\left(-\frac{2}{3}e^{-3x}\right)dx = -\frac{1}{3}(2x-5)e^{-3x} + \frac{2}{3}\int e^{-3x}dx$$
$$= -\frac{2x-5}{3}e^{-3x} - \frac{2}{9}e^{-3x} + C = \frac{13-6x}{9}e^{-3x} + C$$

Задания для самостоятельной работы

Найдите интегралы:
1) $\int$xarctgxdx, здесь надо взять u = arctg x, dv = xdx
Ответ. $\frac{x^2+1}{2}arctgx - \frac{x}{2} + C$
2) $\int(x^2-3x+2)\,cos5xdx$, здесь надо взять u = x^2 - 3x + 2, dv = cos5xdx
Ответ. $\frac{25x^2-75x+48}{125}sin5x + \frac{2x-3}{25}cos5x + C$
3) $\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$, здесь надо взять u = $\sqrt{a^2-x^2}$, dv = dx
Ответ. $\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2} + \frac{a^2}{2}arcsin\frac{x}{a} + C$
4) $\int$xlnxdx
Ответ. $\frac{x^2}{4}(2lnx-1) + C$

Определенный интеграл

Для вычисления определенного интеграла $\int_a^b f(x)dx$
нужно найти соответствующий неопределенный интеграл, в полученное его выражение подставить вместо x сначала верхний, а затем нижний пределы определенного интеграла и из первого результата подстановки вычесть второй.

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = \mathrm{F(b) - F(a)}$$

Примеры:
1. $\int_{-1}^{1}(x^2+1)dx = \left(\frac{x^3}{3}+x\right)\Big|_{-1}^{1} = \left(\frac{1}{3}+1\right) - \frac{1}{3} - 1 = 2\frac{2}{3}$
2. $\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}4cosxdx = 4sinx|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = 4\left(sin\frac{\pi}{2} - sin\frac{\pi}{3}\right) = 4(1-\frac{\sqrt{3}}{2})$

Задания для самостоятельной работы

Найдите определенный интеграл функций:
1. $\int_1^2 xdx$
Ответ. $\frac{3}{2}$
2. $\int_0^3 x^2dx$
Ответ. 9
3. $\int_{\frac{1}{2}}^{1} x^3dx$
Ответ. $\frac{15}{64}$
4. $\int_0^1(2x+1)dx$
Ответ. 2

5. $\int_{-1}^{0}(3x^2+1)dx$

Ответ. 2

6. $\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} tgx dx$

Ответ. $.\frac{1}{2}ln2$

Решение прикладных задач с помощью определенного интеграла

Геометрический смысл определенного интеграла

Площадь фигуры, ограниченной кривой y = f(x), где f(x)> 0, осью OX и двумя прямыми x= a и x = b (рис. 63), выражается определенным интегралом:

$$S = \int_a^b f(x)dx$$

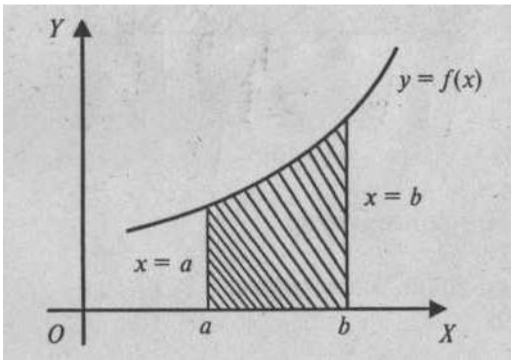


Рис.1

Пример:

1) Определить площадь S фигуры, заключенной между ветвью кривой y = x^2, осью OX и прямыми x = 0, x = 3

$$S = \int_0^3 x^2dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = 9$$

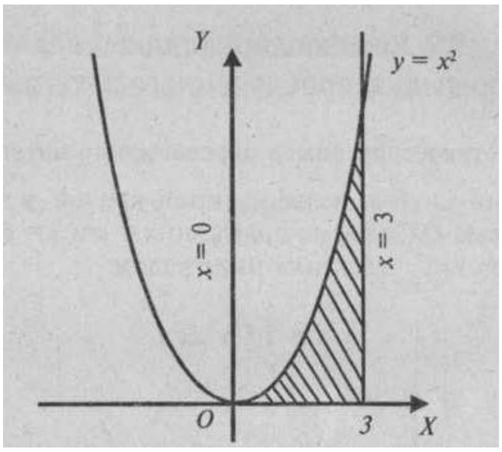


Рис.2

2) Найти площадь S фигуры, заключенной между осью OX и кривой y = x^2 - 4x.

Рассмотрим точки пересечения кривой y = x^2 - 4x с осью OX: y = 0

$x^2 - 4x = 0$; $x(x - 4) = 0$

$x_1 = 0$; $x_2 = 4$.

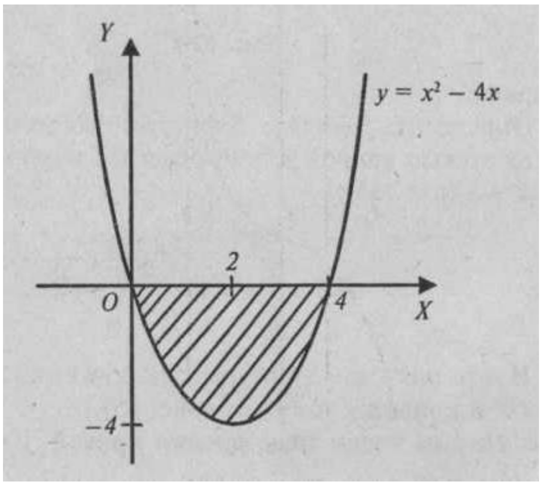


Рис. 3

Искомая площадь ограничена сверху OX, снизу $y = x^2 - 4x$, слева $x = 0$, справа $x = 4$.

Так как $y < 0$, то

$$S = \left|\int_0^4 (x^2 - 4x)dx\right| = \left|(\frac{x^3}{3} - 2x^2)\right|_0^4 = \left|\frac{64}{3} - 32\right| = \left|21\frac{1}{3} - 32\right| = \left|-10\frac{2}{3}\right| = 10\frac{2}{3}$$

Путь, пройденный телом

Пусть S - путь, пройденный за время t со скоростью V:

$S = V \cdot t$,

где $V = f(t)$ при неравномерном движении.

Например:

1) $V = (2t^2 + t)$ см/с. Найти путь, пройденный телом за 6 с от начала движения:

$$S = \int_0^6 (2t^2 + t)dt = (\frac{2}{3}t^2 + \frac{t^2}{2})\Big|_0^6 = \frac{2}{3} \cdot 6^3 + \frac{6^2}{2} = 144 + 18 = 162 \text{ см.}$$

2) Скорость движения тела $V = \left(4t - \frac{6}{t^2}\right)$ см/с.

Найти путь за третью секунду: $S = \int_2^3 (4t - \frac{6}{t^2})dt = \int_2^3 (4t - 6t^{-2})dt = (2t^2 + 6\frac{1}{t})\Big|_2^3 = 2 \cdot 9 + \frac{6}{3} - 2 \cdot 4 - \frac{6}{2} = 18 + 2 - 8 - 3 = 9$ см.

Задания для самостоятельной работы

Найдите площадь фигуры, ограниченной линиями:

1. $xy = -6$

$y - x = 7$

Ответ. $S = 17\frac{1}{2} - 6ln6$

2. $y = e^x$

$y = 0$

$x = -1$

$x = 1$

Ответ. $S = \frac{e^2-1}{e}$.

3. $y = \ln x$

$y = 0$

$x = e$

Ответ. S =1.

4. Найти путь, пройденный телом за 3 с от начала движения:

$V(t) = 3t^2 + 2t$ (см/с)

Ответ. S = 36 см.

Тема 3.4.Обыкновенные дифференциальные уравнения.

Пример:

1) $(1+x)y' + y = 0$

Решение: приведем уравнение к виду (1) (учитывая, что $y' = \dfrac{dy}{dx}$*) :*

$$(1+x)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

$$ydx + (1+x)dy = 0$$

В данном уравнении $u_1(x) = 1,\ \ g_1(y) = y,\ \ u_2(x) = 1+x,\ \ g_2(y) = 1$

Разделяя переменные, получим:

$$\frac{dx}{1+x} = \frac{dy}{y}.$$

Интегрируя, найдем общий интеграл:

$$\int \frac{dx}{1+x} = \int \frac{dy}{y};$$

$$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{d(1+x)}{1+x} + C;$$

$$\ln|y| = \ln|1+x| + \ln C;$$

$$\ln|y| = \ln|C\cdot(1+x)|;$$

$$y = C(1+x) - \textit{общее решение диф. уравнения}$$

2)Найти частное решение дифференциального уравнения, удовлетворяющего начальным условиям, и его интегральную кривую.

$$y' = x+2;\ \ y(0) = 1.$$

Решение: Приведем уравнение к виду (1) и разделим переменные:

$$\frac{dy}{dx} = x+2$$

$$dy = (x+2)dx.$$

Интегрируя, найдем общий интеграл:

$$\int dy = \int (x+2)dx;$$

$$\int dy = \int xdx + \int 2dx;$$

$$y = \frac{x^2}{2} + 2x + C - \textit{общее решение диф. уравнения.}$$

Т.к. $y(0) = 1$*, то подставляя это начальное условие в общее решение диф. уравнения, найдем значение С:*

$$y(0) = \frac{0^2}{2} + 2\cdot 0 + C = 1 \Rightarrow C = 1.$$

Значит частное решение данного диф. уравнения имеет вид:

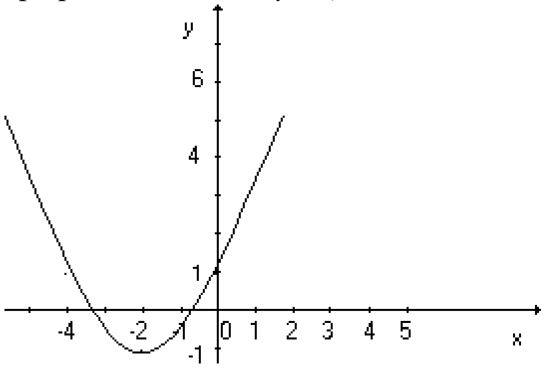
$$y = \frac{x^2}{2} + 2x + 1.$$

Чтобы найти интегральную кривую данного диф. уравнения нужно построить график его частного решения, в нашем случае это $y = \dfrac{x^2}{2} + 2x + 1$ *(график – парабола).*

Найдем координаты вершины параболы:

$$x_в = -\frac{b}{2a} = -\frac{2}{2\cdot\frac{1}{2}} = -2, \quad y_в = \frac{(-2)^2}{2} + 2\cdot(-2)+1 = 2-4+1 = -1.$$

График имеет следующий вид:



3)Найти общее решение линейного дифференциального уравнения 1-го порядка:

$$y' - 2xy = e^{x^2}$$

Решение: Общее решение неоднородного уравнения можно найти ***методом вариации постоянной.***

- *Рассмотрим однородное уравнение*

$y' - 2xy = 0$*, соответствующее данному неоднородному уравнению. Это уравнение с разделяющимися переменными:*

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

$$\frac{dy}{y} = 2xdx$$

$$\int\frac{dy}{y} = \int 2xdx$$

$$\ln|y| = 2\frac{x^2}{2} + \ln C$$

$$\ln|y| - \ln C = x^2$$

$$\ln\left|\frac{y}{C}\right| = x^2 \Rightarrow \frac{y}{C} = e^{x^2} \Rightarrow y = Ce^{x^2}.$$

- *Общее решение неоднородного уравнения ищем в виде* $y = C(x)e^{x^2}$ *(*) , где C(x) – неизвестная функция от x. Производная* $y' = C'(x)e^{x^2} + C(x)\left(e^{x^2}\right)' = C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2}$. *Подставляя* y *и* y' *в* $y' - 2xy = e^{x^2}$ *найдем C(x):*

$$C'(x)e^{x^2} + C(x)2xe^{x^2} - 2xC(x)e^{x^2} = e^{x^2}.$$

$$C'(x)e^{x^2} + C(x)\left(2xe^{x^2} - 2xe^{x^2}\right) = e^{x^2}.$$

$$C'(x)e^{x^2} = e^{x^2}$$

$$C'(x) = 1 \Rightarrow C(x) = \int C(x)dx = \int 1\cdot dx = x + C$$

Т.к. $C(x) = x + C$*, то подставляя его в (*) общее решение неоднородного уравнения будет* $y = (x + C)e^{x^2}$ *, где C – постоянная интегрирования.*

Задачи для самостоятельного решения

Определить вид дифференциального уравнения, найти его общее решение, а где указано частное решение:

1) $\left(1+y^2\right)dx+xydy=0;$

2) $*\ y'+y=e^{-x}\cos x;$

3) $*\ xy'+y-e^x=0\ \ \{y(a)=b\};$

4) $*\ y'=10^{x+y};$

5) $*\ y'=\dfrac{y+1}{x}\ \ \{y(1)=1\}$, построить интегральную кривую.

6) $y'=e^{2x-e^x}-e^x y;$

7) $*\ x\left(y'-y\right)=\left(1+x^2\right)e^x;$

Раздел 4 Элементы теории вероятностей и математической статистики.

Вероятностью P(A) события A в испытании с равновозможными элементарными исходами называют отношение числа исходов m, благоприятствующих событию A, к числуn всех исходов испытания.

$$P(A)=\frac{m}{n}$$

Пример : В партии из 30 миксеров 2 бракованных. Найти вероятность купить исправный миксер.

$$n=30, m=30-2=28$$

События A и B называются совместными, если они могут одновременно произойти, и несовместными, если при осуществлении одного события не может произойти другое.

События A и B называются независимыми, если вероятность наступления одного события не зависит от того, произошло другое событие или нет.

Вероятность суммы двух совместных событий равна сумме вероятностей слагаемых без вероятности произведения: P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB)

Пример : Вероятность поражения одной мишени – 0,7, а другой – 0,8. Какова вероятность, что будет поражена хотя бы одна мишень, если по ним стреляют независимо друг от друга.

Решение: Т.к. события совместны, то $p=0,7+0,8-0,7\cdot0,8=1,5-0,56=0,94$

Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей слагаемых: P(A+B)=P(A)+P(B). P(A)+P($\overline{A}$)=1

Условная вероятность – вероятность одного события, при условии, что другое событие уже произошло.

Вероятность произведения событий A и B равна произведению вероятности одного из них на условную вероятность другого: P(AB)=P(A)·P(A/B) или P(BA)=P(A)·P(B/A)

Вероятность произведения двух независимых событий A и B равна произведению вероятностей сомножителей: P(AB)=P(A)·P(B).

Пример : В двух коробках лежат ручки разного цвета. В первой коробке – 4 красных и 6 черных, во второй – 3 красных, 5 синих и 2 черных. Из обеих коробок вынимают по одной ручки. Найти вероятность, что обе ручки красные.

Решение: Найдем вероятности вытащить красную ручку из каждой коробки

$n_1 = 10$

$m_1 = 4$

$p_1 = \frac{4}{10}$

$n_2 = 10$

$m_2 = 3$

$p_2 = \frac{3}{10}$

Тогда вероятность того, что обе ручки красные: $p = p_1 \cdot p_2 = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{10} = \frac{12}{100} = 0{,}12$

Полная вероятность. Формула Байеса

Если событие А может произойти только при выполнении одного из событий H_1, H_2, …, которые образуют полную группу несовместных событий, то вероятность события А вычисляется по формуле

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3) + \ldots$$

Эта формула называется формулой полной вероятности.

Если выполняются все условия, имеющие место для формулы полной вероятности, и $p(\mathrm{A}) \neq 0$, то выполняется равенство, называемое формулой Байеса:

$$p(\mathrm{H}_i / \mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_i) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_i)}{p(\mathrm{A})}$$

Пример 1: В первой партии 20 ламп, во второй – 30 ламп и в третьей – 50 ламп. Вероятности того, что проработает заданное время, равна для первой партии 0,7, для второй – 0,8 и для третьей партии – 0,9. Какова вероятность того, что наудачу взятая лампа проработает заданное время? Найти вероятность, что эта лампа принадлежит первой партии?

Решение: Пусть событие А – наудачу взятая лампа проработает заданное время. Тогда, пусть H_1 – лампа из первой партии, H_2 – лампа из второй партии и H_3 – лампа из третьей партии. Тогда событие A/H_1 – лампа из первой партии проработает заданное время, A/H_2 – лампа из второй партии проработает заданное время и A/H_3 – лампа из третьей партии проработает заданное время. Найдем вероятности

$n = 20 + 30 + 50 = 100$

$p(\mathrm{H}_1) = \frac{20}{100} = 0{,}2$

$p(\mathrm{H}_2) = \frac{30}{100} = 0{,}3$

$p(\mathrm{H}_3) = \frac{50}{100} = 0{,}5$

$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1) = 0{,}7$

$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2) = 0{,}8$

$p(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3) = 0{,}9$

$$p(\mathrm{A}) = \mathrm{p}(\mathrm{H}_1) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_2) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_2) + \mathrm{p}(\mathrm{H}_3) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_3) =$$
$$= 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}3 \cdot 0{,}8 + 0{,}5 \cdot 0{,}9 = 0{,}14 + 0{,}24 + 0{,}45 = 0{,}83$$

Теперь, используя формулу Байеса найдем вероятность того, что эта лампа принадлежит первой партии

$$p(\mathrm{H}_1 / \mathrm{A}) = \frac{\mathrm{p}(\mathrm{H}_1) \cdot \mathrm{p}(\mathrm{A}/\,\mathrm{H}_1)}{p(\mathrm{A})} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}7}{0{,}83} \approx 0{,}169$$

Формула Бернулли

1) Вероятность того, что событие А наступит ровно m раз при проведении n независимых испытаний, каждый из которых имеет ровно два исхода вычисляется по формуле Бернулли $P_n(\mathrm{m}) = \mathrm{C}_n^m\, p^m(1-p)^{n-m}, m = 0,1,2,...,n$

Пример 1: Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету равна 0,2. Найти вероятность, что из 6 приобретенных билетов 2 окажутся выигрышными.

Решение:

$p = 0,2$

$n = 6$

$m = 2$

$$P_n(\mathrm{m}) = \mathrm{C}_n^m\, p^m(1-p)^{n-m} = \mathrm{C}_6^2\, 0,2^2(1-0,2)^{6-2} = \frac{6!}{4!\cdot 2!}\cdot 0,04\cdot 0,8^4 \approx 0,246$$

2) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, равна $P_n(\mathrm{m} \geq 1) = 1-\mathrm{q}^n, q = 1-p$

Пример 2: Прибор состоит из шести элементов, работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за определенное время равна 0,6. Для безотказной работы прибора необходимо, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность, что за данное время прибор будет работать безотказно?

Решение:

$p = 0,6 \Rightarrow \quad q = 0,4$

$n = 6$

$m \geq 1$

$P_6(\mathrm{m} \geq 1) = 1-0,4^6 \approx 0,9959$

3) Вероятность наступления события А хотя бы один раз при проведении n независимых испытаний, удовлетворяющих схеме Бернулли, наступит не менее m_1 и не более m_2 раз вычисляется по формуле $P_n(\mathrm{m}_1 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{m}_2) = \sum_{m_1}^{m_2} P_n(\mathrm{m})$

Пример 4: Магазин получил 50 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,05. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в партии.

Решение:

$p = 0,05$

$n = 50$

$m_0 - ?$

$q = 1-p = 1-0,05 = 0,95$

$50\cdot 0,05-0,95 \leq m_0 \leq 50\cdot 0,05+0,05$

$1,55 \leq m_0 \leq 2,55$

$m_0 = 2$

Дискретная случайная величина и ее числовые характеристики

Случайная величина X – это числовая функция $X = f(\omega_i)$, определенная на пространстве элементарных событий. Случайные величины, имеющие счетные множества возможных значений, называются дискретными. Дискретная случайная величина определена, если известны все ее значения и соответствующие им вероятности. Соотношение между возможными значениями случайной величины и соответствующими им вероятностями называют распределением вероятностей случайной величины. Для дискретной случайной величины это соответствие может быть записано в виде таблицы: $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

x_i	x_1	x_2	…	x_n
p_i	p_1	p_2	…	p_n

Математическим ожиданием (средним значением) дискретной случайной величины X называют сумму произведений всех ее возможных значений на соответствующие им вероятности $M(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$

Дисперсией дискретной случайной величины X называют математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания $D(\mathrm{X}) = M(\mathrm{X} - M(\mathrm{X}))^2$. Дисперсия дискретной случайной величины вычисляется по формулам:

$$D(\mathrm{X}) = \sum_{i=1}^{n} \left(x_i - m\right)^2 p_i$$

$$D(\mathrm{X}) = M(\mathrm{X}^2) - (M(\mathrm{X}))^2$$

Средним квадратичным отклонением дискретной случайной величины называют корень квадратный из дисперсии $\sigma(\mathrm{X}) = \sqrt{D(\mathrm{X})}$.

Если случайная величина X имеет биномиальное распределение вероятностей, то

$M(\mathrm{X}) = \mathrm{np}$ $\quad D(\mathrm{X}) = \mathrm{npq}$

Пример 1: Случайная величина X задана таблицей распределения вероятностей. Найти M(X), D(X), σ(X).

x_i	2	5	8	9
p_i	0,1	0,4	0,3	0,2

Решение:

$$M(\mathrm{X}) = 2\cdot 0{,}1 + 5\cdot 0{,}4 + 8\cdot 0{,}3 + 9\cdot 0{,}2 = 0{,}2 + 2 + 2{,}4 + 1{,}8 = 6{,}4$$

$$M(\mathrm{X}^2) = 4\cdot 0{,}1 + 25\cdot 0{,}4 + 64\cdot 0{,}3 + 81\cdot 0{,}2 = 45{,}8$$

$$D(\mathrm{X}) = 45{,}8 - 6{,}4^2 = 4{,}84$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(\mathrm{X})} = \sqrt{4{,}84} = 2{,}2$$

Пример 2: Найти математическое ожидание и дисперсию числа лотерейных билетов, на которые выпадут выигрыши, если приобретено 100 билетов, а вероятность выигрыша на каждый билет равна 0,05.

Решение:

$$M(\mathrm{X}) = 100\cdot 0{,}05 = 5$$

$$D(\mathrm{X}) = 100\cdot 0{,}05\cdot 0{,}95 = 4{,}75$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(\mathrm{X})} = \sqrt{4{,}75} = 2{,}18$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.
2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?
4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

*Задание 2***.** Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующие задачи:
1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?
2. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру =0,5, ко второму =0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером =0,94, а вторым =0,92. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.
3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна 0,9, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.
4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 6 синих и 4 черных шаров, во второй – только синие и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар синий?
5. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 1 урны?

Задание 3. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:
1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.
2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.
3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время Т равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время Т прибор будет работать безотказно?
4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету =0,3. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

Задание 4. Найти числовые характеристики дискретных случайных величин:
1. Найти математическое ожидание случайной величины X, зная закон ее распределения:

x_i	3	5	2
p_i	0,1	0,6	0,3

2. Вероятность попадания в цель при стрельбе из орудия 0,6. Найти математическое ожидание общего числа попаданий, если будет произведено 10 выстрелов.
3. Найти дисперсию случайной величины X, которая задана следующим законом распределения:

x_i	1	2	5
p_i	0,3	0,5	0,2

Перечень рекомендуемых учебных изданий, дополнительной литературы:

Основные источники:

1. Дадаян А. А. Математика: Учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 544 с.: 60x90 1/16. - (Профессиональное образование). (переплет)ISBN 978-5-91134-460-3, 2000 экз.
2. Шипачев В. С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие / В.С. Шипачев. - 10-е изд., стер. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 304 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010071-5
3. Ячменёв Л.Т. Высшая математика: Учебник / Л.Т. Ячменёв. - М.: ИЦ РИОР: НИЦ Инфра-М, 2013. - 752 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование; Бакалавриат). (переплет) ISBN 978-5-369-01032-7

Дополнительные источники:

1. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для учреждений СПО/ В. П. Григорьев, Ю. А. Дубинский – 10-е изд.,стер. – М.: Издат. Центр «Академия», 2014 ISBN 978-5-4468-0784-0
2. Математика: учебник для студ. образоват. учреждений сред. проф. образования / С. Г. Григорьев, С. В. Иволгина; под ред. В. А. Гусева. – 10-е изд., стер. – М.: Издательский центр «Академия», 2014. – 416 с., ISBN: 978-5-4468-0624-9

Интернет-ресурсы:

1. www.fcior.edu.ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).
2. www.school-collection.edu.ru (Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов).
3. http://www.studentlibrary.ru/ Электронно-Библиотечная Система «Консультант Студента».
4. http://e.lanbook.com/ Электронная библиотечная система издательства «Лань».
5. http://www.biblio-online.ru/ Электронно-библиотечная система.
6. http://znanium.com/ Электронно-библиотечная система.
7. http://www.iprbookshop.ru/ Электронно-библиотечная система.