Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**
(ВлГУ)

Колледж инновационных технологий и предпринимательства

КУРС ЛЕКЦИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

по специальности среднего профессионального образования

Преподаватель: Тонконог Г.П.

Владимир 20___ г.

Пояснительная записка

Раздел 1. Линейная алгебра
Тема 1.1. Матрицы и определители (6 часов)

Определение. Матрицей называется прямоугольная таблица, содержащая *m* строк и *n* столбцов.

Числа *m* и *n* определяют размер матрицы, который записывается *m x n.* Для сокращения записи матрицы используются заглавные буквы.

Пример:

$$\underset{2\times3}{A}=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 5 & 7 & 6\end{pmatrix}$$

В общем виде записывается:

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

или $A = (a_{ij})$, где числа a_{ij} – элементы матрицы, причём $i=\overline{1,m}$ и $j=\overline{1,n}$ - индексы строки и столбца соответственно.

Виды матриц

1. Прямоугольная матрица, если $m \neq n$.
2. Квадратная матрица, если $m=n$. Число *n* называется порядком квадратной матрицы.
3. Матрица размера 1x *n* называется матрицей-строкой.
4. Матрица размера *m* x1 называется матрицей-столбцом.
5. Квадратная матрица, у которой элементы с разными индексами равны 0 ($a_{ij} = 0$ при $i \neq j$), а с одинаковыми индексами равны 1 ($a_{ij} = 1$ при $i = j$), называется единичной матрицей и обозначается *E*.
6. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется нулевой матрицей.
7. Матрицы называются равными, если они имеют одинаковые размеры и их соответствующие элементы равны.
8. Диагональной матрицей называется квадратная матрица, у которой элементы с разными индексами $a_{ij} = 0$ при .
9. Скалярной матрицей называется диагональная матрица, у которой диагональные элементы a_{ii} равны одному и тому же числу.

Линейные операции над матрицами

1. Суммой матриц *A* и *B* называется матрица *C*, каждый элемент которой представляет собой сумму соответствующих элементов матриц *A* и *B*, то есть $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

Например: $\begin{pmatrix}-1 & 2 & 3\\ 5 & 7 & 6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -2 & 3\\ 0 & 4 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0 & 6\\ 5 & 11 & 8\end{pmatrix}$

Складываются матрицы одного размера!

2. При умножении матрицы на число каждый элемент матрицы умножается на это число, то есть $\lambda\cdot A=(\lambda\cdot a_{ij}),\ \lambda\in R$

Например: $5\cdot\begin{pmatrix}-2 & 2\\ 3 & 7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-10 & 10\\ 15 & 35\end{pmatrix}$

Свойства операции сложения матриц

1. *A+B=B+A*
2. *(A+B)+C=A+(B+C)*
3. *k(A+B)=kA+kB*

Если строки матрицы *A* поменять местами со столбцами, причём каждую строку заменить столбцом с тем же номером, то полученная матрица называется транспонированной к матрице *A* и обозначается A^T, то есть для матрицы

$$\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix} \qquad \underset{n\times m}{A^T}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1}\\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn}\end{pmatrix}$$

транспонированная матрица. Операция перехода от *A* к A^T называется транспонированием.

Умножение матриц

Определение. Произведением матрицы $A = (a_{ij})$ размера mxn (,) на матрицу $B = (b_{jk})$ размера nxp (, $k=\overline{1,p}$) называется матрица $C = A \cdot B = (c_{ik})$ размера mxp, каждый элемент (c_{ik}) которой равен сумме попарных произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие им элементы k-го столбца матрицы B, то есть $c_{ik} = a_{i1} \cdot b_{1k} + a_{i2} \cdot b_{2k} + \ldots + a_{in} \cdot b_{nk} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot b_{jk}$.

!!! Перемножаются только такие две матрицы, у которых число столбцов первой равно числу строк второй.

Например: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}_{2\times3} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \\ b_{31} & b_{32} \end{pmatrix}_{3\times2} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdot b_{11} + a_{12} \cdot b_{21} + a_{13} \cdot b_{31} & a_{11} \cdot b_{12} + a_{12} \cdot b_{22} + a_{13} \cdot b_{32} \\ a_{21} \cdot b_{11} + a_{22} \cdot b_{21} + a_{23} \cdot b_{31} & a_{21} \cdot b_{12} + a_{22} \cdot b_{22} + a_{23} \cdot b_{32} \end{pmatrix}_{2\times2}$

Пример:

1. $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\cdot0+(-2)\cdot0 & 3\cdot(-1)+(-2)\cdot2 \\ 1\cdot0+4\cdot0 & 1\cdot(-1)+4\cdot2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -7 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$;

2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \end{pmatrix}$;

3. $A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}$ — не существует, так как число столбцов матрицы A равно 2, а число строк матрицы B равна 3.

Замечания

1. а) Если произведение матриц существует, то произведение матриц $B \cdot A$ может и не существовать. Например $A_{2\times3} \cdot B_{3\times3}$ существует, а $B_{3\times3} \cdot A_{2\times3}$ не существует, так как число столбцов первой матрицы не совпадает с числом строк второй матрицы;

б) если оба произведения $A \cdot B$ и $B \cdot A$ существуют, то они могут быть матрицами разных размеров, например $A_{2\times3} \cdot B_{3\times2} = C_{2\times2}$,а $B_{3\times2} \cdot A_{2\times3} = D_{3\times3}$,то есть $A \cdot B \neq B \cdot A$;

в) если A и B – квадратные матрицы одного и того же порядка, то оба произведения $A \cdot B$ существуют, но переместительный закон умножения , вообще говоря, не выполняется, то есть ;

2. Умножение матриц не обладает перестановочным свойством, вообще говоря $A \cdot B \neq B \cdot A$.

3. Если $A \cdot B = B \cdot A$, то такие матрицы называются перестановочными или коммутативными.

Свойства операции транспонирования

1. $(A^T)^T = A$
2. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$
3. $(A+B)^T = A^T + B^T$
4. $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

Свойства операции умножения матриц

1. $(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C)$;
2. $\alpha \cdot (A \cdot B) = (\alpha \cdot A) \cdot B = A \cdot (\alpha \cdot B)$;
3. $(A+B) \cdot C = A \cdot C + B \cdot C, C \cdot (A+B) = C \cdot A + C \cdot B$;
4. $A \cdot E = E \cdot A = A$, где E – единичная матрица, A – квадратная матрица того же порядка что и E.
5. $A \cdot D = D \cdot A$,где D - скалярная матрица, A – квадратная матрица того же порядка что и D.

Определителиn-гопорядка и их свойства

Каждой квадратной матрице порядка n по определённому закону ставится в соответствие некоторое число $|A|$, называемое определителем матрицы A или просто определителем n-го порядка и обозначается:

$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$ или $\Delta = |a_{ij}|$.

Элементы с одинаковыми индексами образуют главную диагональ определителя, другую диагональ определителя называют побочной.

<u>Определение.</u> Минором M_{ij} элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется определитель (n-1)-го порядка, полученный из данного определителя путём вычёркивания элементов i-ой строки и j-ого столбца, на пересечении которых стоит элемент a_{ij}.

<u>Пример:</u> Для $\begin{vmatrix} 1 & 2 & -5 \\ -2 & 3 & 8 \\ 4 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ $M_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$, $M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ -2 & 8 \end{vmatrix}$

<u>Определение.</u> Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} определителя n-го порядка называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$.

<u>Замечание.</u> Если сумма номеров строки и столбца $i + j$ - число чётное, то $A_{ij} = M_{ij}$,если $i + j$ - число нечётное, то $A_{ij} = -M_{ij}$.

Например: $A_{11} = M_{11}; A_{12} = -M_{12}$.

<u>Определение</u>. Определителем n-го порядка или детерминантом называют число, равное сумме попарных произведений элементов первой строки определителя на соответствующие им алгебраические дополнения, то есть $\det A = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + \ldots + a_{1n} \cdot A_{1n}$

В соответствии с этим определением рассмотрим <u>правила вычисления определителей:</u>

1. Для определителей первого порядка: $|a_{11}| = a_{11}$, $|5| = 5$, $|-2| = -2$;

2. Для определителей второго порядка:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} = a_{11} \cdot a_{22} + a_{12} \cdot (-a_{21}) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21};$$

<u>Пример</u>: $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 3 - (-10) = 13;$

3. Для определителей третьего порядка:

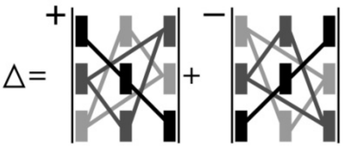
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{21} \cdot a_{32} \cdot a_{13} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} - a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} -$$

$$- a_{32} \cdot a_{23} \cdot a_{11} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33}.$$

Схема вычисления определителя 3-го порядка по правилу треугольника:



4. Универсальное правило Лапласа вычисления определителей.

Определитель равен сумме попарных произведений элементов любой строки на их алгебраические дополнения, то есть

$\Delta = a_{i1} \cdot A_{i1} + a_{i2} \cdot A_{i2} + \ldots + a_{in} \cdot A_{in} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$ -разложение определителя по элементам i-ой строки;

$\Delta = a_{1j} \cdot A_{1j} + a_{2j} \cdot A_{2j} + \ldots + a_{nj} \cdot A_{nj} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij}$ - разложение определителя по элементам j-го столбца.

<u>Свойства определителей.</u>

1. Определитель не изменится, если все его строки заменить столбцами, причем каждую строку заменить столбцом с тем же номером.
2. При перестановке двух строк (столбцов) определитель меняет знак.
3. Общий множитель элементов любой строки или столбца может быть вынесен за знак определителя.
4. Если определитель содержит строку или столбец нулей, то он равен нулю.
5. Если все элементы какой-либо строки (столбца) представляют собой сумму двух элементов, то такой определитель равен сумме двух определителей, первый из которых в соответствующей строке (столбце) содержит первые слагаемые, а второй – вторые слагаемые, остальные элементы сохраняются.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{i1}+a''_{i1} & a'_{i2}+a''_{i2} & \cdots & a'_{in}+a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a'_{i1} & a'_{i2} & \cdots & a'_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a''_{i1} & a''_{i2} & \cdots & a''_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6. Определитель равен нулю, если он содержит две пропорциональные или одинаковые строки (столбца).
7. Определитель не изменится, если к элементам одной строки (столбца) прибавить соответствующие элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kn} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1}+\lambda a_{l1} & a_{k2}+\lambda a_{l2} & \dots & a_{kn}+\lambda a_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{l1} & a_{l2} & \dots & a_{ln} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

8. Сумма попарных произведений элементов какой-либо одной строки (столбца) на алгебраические дополнения соответствующих им элементов другой строки (столбца) равна нулю.
9. $|A| = |A^T|$
10. Определитель произведения двух квадратных матриц n-го порядка равен произведению их определителей:
если $C = A \cdot B,$ то $\det C = \det A \cdot \det B$

Обратная матрица

Введём несколько необходимых понятий. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ - квадратная матрица n-го порядка.

Определение. Матрица A называется вырожденной, если определитель этой матрицы равен нулю; и невырожденной, если определитель этой матрицы не равен нулю.

Составим матрицу алгебраических дополнений элементов матрицы A: $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{n1} & A_{n2} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$,
где A_{ij} – алгебраическое дополнение элемента a_{ij} матрицы A.

Определение. Союзной или присоединённой матрицей A^* матрицы A называется транспонированная матрица алгебраических дополнений матрицы A, то есть .

$$A^* = (\tilde{A})^T = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Определение. Матрица A^{-1} называется обратной по отношению к матрице A, если выполняется равенство $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$, где E – единичная матрица того же порядка, что и матрица A.

Теорема. Если матрица A невырожденная, то она имеет обратную матрицу и притом только одну.

Доказательство. Покажем, что выражение $\frac{A^*}{\det A}$ играет роль обратной матрицы. Так как по условию $\det A \neq 0$ (A – невырожденная матрица), то получим:

$$\frac{A^*}{\det A} \cdot A = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} \det A & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det A & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \det A \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = E$$, то есть $\frac{A^*}{\det A} \cdot A = E \;\Rightarrow\; \frac{A^*}{\det A} = A^{-1}$.

Аналогично доказывается, что $A\cdot\frac{A^*}{\det A}=E$. Покажем единственность обратной матрицы. Пусть у матрицы *A* существуют две обратные матрицы *B* и *C* такие, что $B\neq C$, $A\cdot C=E, B\cdot A=E,$ тогда

$$\begin{array}{ll}
B\cdot A=E \quad |\cdot A^{-1}\ справа & A\cdot C=E \quad |\cdot A^{-1}\ слева \\
B\cdot A\cdot A^{-1}=E\cdot A^{-1} & A^{-1}\cdot A\cdot C=A^{-1}\cdot E \\
B\cdot E=E\cdot A^{-1} & E\cdot C=A^{-1}\cdot E \\
B=A^{-1} & C=A^{-1}
\end{array}$$

$$\Downarrow$$

$$B=C=A^{-1}$$

.

Теорема доказана.

Свойства обратной матрицы

1) $\det\left(A^{-1}\right)=\frac{1}{\det A}$; 2) $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$;

3) $\left(A^{-1}\right)^T=\left(A^T\right)^{-1}$; 4) $\left(A^{-1}\right)^{-1}=A$

Алгоритм вычисления обратной матрицы

1. Находим определитель матрицы *A*. Если detA=0, то матрица *A* -вырожденная и обратной матрицы A^{-1} не существует. Если detA$\neq$0, то матрица *A*- невырожденная и обратная матрица A^{-1} существует.
2. Находим матрицу $\tilde{A}$ алгебраических дополнений матрицы *A*.
3. Находим союзную матрицу A^*, транспонируя матрицу алгебраических дополнений $A^*=\left(\tilde{A}\right)^T$.
4. Вычисляем обратную матрицу $A^{-1}=\frac{A^*}{\det A}A^{-1}$.
5. Делаем проверку правильности вычисления обратной матрицы.

Тема 1.2.Системы линейных уравнений и их решение (8 часов)

Системы*m*линейных уравнений с*n*неизвестными. Основные понятия

Определение. Уравнение называется линейным, если оно содержит неизвестные в первой степени и не содержит произведения неизвестных.

Определение. Системой *m* линейных уравнений с *n* неизвестными называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \qquad\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m; \end{cases} \quad (1)$$

,

где $x_1, x_2 \ldots x_n$ – неизвестные; $a_{in}\in R$ - коэффициенты, , , $b_i\in R$- свободные члены.

Определение. Решением системы (1) называется упорядоченная совокупность n действительных чисел ($x_1^{(0)}, x_2^{(0)}\ldots x_n^{(0)}$), при подстановке которых в систему каждое уравнение системы обращается в верное равенство.

Определение. Система (1) называется совместной, если она имеет хотя бы одно решение; и несовместной, если она не имеет решений.

Все совместные системы делятся на два вида: определённые и неопределённые.

Определение. Совместная система называется определённой, если она имеет единственное решение; и неопределённой, если она имеем более одного решения.

Определение. Система называется квадратной, если $m=n$.

Определение. Система (1) называется однородной, если все $b_i=0\ (b_1=b_2=\ldots=b_n=0)$, и неоднородной, если хотя бы одно $b_i\neq 0$.

Рассмотрим однородную систему *n* x *n:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0, \\ \qquad\ldots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\ldots+a_{nn}x_n=0; \end{cases} \quad (2)$$

.

Однородная система всегда совместна, так как имеет тривиальное решение: $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$.

Также система (2) может иметь ненулевые решения.

Теорема 1. Для того чтобы система (2) имела только нулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы главный определитель этой системы был отличен от нуля.
Теорема 2. Для того чтобы система (2) имела ненулевые решения, необходимо и достаточно, чтобы главный определитель этой системы был равен нулю.

Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными по формулам Крамера

Формулы Крамера удобно применять при решении систем *n* линейных уравнений с *n* неизвестными при $n \le 3$.

Для системы (2) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n; \end{cases}$ введём дополнительные понятия.

Определитель $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, составленный из коэффициентов при неизвестных, называется *главным*.

Определитель $\Delta_k = \begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & b_1 & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \cdots & b_2 & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & \cdots & b_n & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$, получаемый из главного определителя заменой *к*-го столбца столбцом свободных членов, называется *вспомогательным* (*к*=1,2,…*n*).

Теорема. Если главный определитель системы (2) не равен нулю, то система (2) имеет единственное решение, которое находится по формулам Крамера $x_k^{(0)} = \frac{\Delta_k}{\Delta};\ k = \overline{1,n}.$

Замечания.

1. Если в системе (2) $\Delta = 0$, а хотя бы один из вспомогательных определителей $\Delta_k \ne 0$, то система (2) несовместна.

2. Если и все вспомогательные определители $\Delta_k = 0$, то система имеет бесконечное множество решений (в этом случае необходимо дополнительное исследование) или несовместна.

Пример:Решить систему уравнений, пользуясь формулами Крамера.

$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = 5, \\ x_1 - x_2 = 3; \end{cases} \quad \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -5, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -14, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{14}{5}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = -\frac{1}{5}. \quad \textit{Ответ}: \left(\frac{14}{5}, -\frac{1}{5}\right)$$

Решение систем n линейных уравнений с n неизвестными матричным способом

Рассмотрим систему уравнений (2). Составим матрицу коэффициентов при неизвестных, матрицу-столбец из неизвестных и матрицу-столбец свободных членов:

$$\underset{n\times n}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \underset{n\times 1}{B} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Система (2) примет вид матричного уравнения $A \cdot X = B$ (3).

Пусть $\det A \ne 0 \Rightarrow \exists$ обратная матрица A^{-1}. Умножив обе части уравнения (3) на A^{-1} слева, получим решение уравнения (3):

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$
$$X = A^{-1} \cdot B$$

Замечание.

Рассмотрим решение матричных уравнений иного вида.

1) $X \cdot A = B, \det A \ne 0, \exists A^{-1}$	2) $A \cdot X \cdot B = C, \det A \ne 0, \exists A^{-1}, \det B \ne 0, \exists B^{-1}$
$X \cdot A \cdot A^{-1} = B \cdot A^{-1}$	$A^{-1} \cdot A \cdot X \cdot B \cdot B^{-1} = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$
$X \cdot E = B \cdot A^{-1}$	$E \cdot X \cdot E = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$
$X = B \cdot A^{-1}$	$X = A^{-1} \cdot C \cdot B^{-1}$

Если $\det A = 0,$ тогда система решается другим способом.

Пример. Решить матричное уравнение

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение

1) $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & -1 \end{vmatrix} = -3-8+8+2 = -1 \neq 0;$

2) $A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot A^*; \quad A^* = (\tilde{A})^T; \quad (\tilde{A}) - ?$

$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 5; \quad A_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 2;$

$A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} = -1; \quad A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} = 0;$

$A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4; \quad A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -2; \quad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 1;$

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix} \quad A^* = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A^{-1} = \frac{1}{-1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 & 4 \\ -3 & -1 & -2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = A^{-1} \cdot B = \begin{pmatrix} -5 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 2 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -1 & 6 & 3 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -25 & -5 & -10 \\ 14 & 3 & 5 \\ -9 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} -25 & -5 & -10 \\ 14 & 3 & 5 \\ -9 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Решение систем *m* линейных уравнений с *n* неизвестными методом Гаусса

Рассмотрим систему вида:
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m; \end{cases} \quad (1)$$

Метод Гаусса состоит в последовательном исключении неизвестных и в приведении системы к ступенчатому виду путём элементарных преобразований.

Элементарными преобразованиями системы называют преобразования вида:

- перестановка местами любых двух уравнений системы;
- умножение обеих частей уравнения на число, отличное от нуля;
- прибавление к обеим частям одного уравнения соответствующих частей другого уравнения, умноженных на одно и то же число.

В результате элементарных преобразований получается система, эквивалентная исходной.

Если при проведении элементарных преобразований получается уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = 0$, то такое уравнение вычёркивается из системы. Если получается уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$, где $b \neq 0$, то система несовместна.

Переход от исходной системы (1) к равносильной системе ступенчатого вида называется прямым ходом метода Гаусса, а нахождение переменных из системы ступенчатого вида – обратным ходом.

Прямой ход

В системе среди коэффициентов при неизвестном x_1 найдётся хотя бы один не равный нулю. Уравнение с этим коэффициентом записывается первым. $a_{11} \neq 0$ – ведущий коэффициент для первого уравнения. Разделим первое уравнение системы на a_{11},

получим: $x_1 + a_{12}^{(1)} \cdot x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)} \cdot x_n = b_1^{(1)}$ (4), где $a_{1j}^{(1)} = \frac{a_{1j}}{a_{11}}, b_1^{(1)} = \frac{b_1}{a_{11}}.$

Проведём <u>первый шаг</u> преобразований, который заключается в исключении неизвестной x_1 из 2-го, 3-го… уравнений системы. Для этого будем умножать уравнение (4) на числа $-a_{21}, -a_{31} \ldots -a_{m1}$ и складывать соответственно со 2-м, 3-м,…, m-м уравнениями системы (1).

В результате получим систему: $\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \quad a_{22}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)}, \\ \qquad \ldots \\ \quad a_{m2}^{(1)}x_2 + \ldots + a_{mn}^{(1)}x_n = b_m^{(1)}, \end{cases}$ (5).

<u>Второй шаг</u> преобразований.

Предположим $a_{22}^{(1)} \neq 0$ – ведущий коэффициент 2-го уравнения системы (5). Разделим обе части 2-го уравнения системы (5) на $a_{22}^{(1)} \neq 0$, полученное уравнение $x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}$ (6),

где $a_{2i}^{(2)} = \dfrac{a_{2i}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad b_2^{(2)} = \dfrac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}.$ С помощью уравнения (6) исключим неизвестную x_2 из 3-го, 4-го, …, m-го уравнений системы (5). Для этого умножим обе части уравнения (6) на числа $-a_{32}^{(1)}, -a_{42}^{(1)} \ldots -a_{m2}^{(1)}$ и сложим соответственно с 3-м, 4-м, …, m-м уравнениями системы.

В результате получим систему: $\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\quad a_{m3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{mn}^{(2)}x_n = b_m^{(2)} \end{cases}$.

После конечного числа таких шагов возможны варианты.

1. Получена система треугольного вида:

$$\begin{cases} x_1 + a_{12}^{(1)}x_2 + a_{13}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{1n}^{(1)}x_n = b_1^{(1)}, \\ \qquad x_2 + a_{23}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(2)}x_n = b_2^{(2)}, \\ \qquad\qquad \ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = b_n^{(n)}, \end{cases}$$

которая совместна и определенна. Она имеет единственное решение, которое находится обратным ходом.

2. Получена система трапецеидального вида. Тогда выбираются базисные неизвестные $x_1, x_2 \ldots x_r$, которые выражаются через свободные неизвестные $x_{r+1}, x_{r+2} \ldots x_n$, и записывается общее решение системы. В этом случае система имеет бесконечное множество решений в зависимости от значений свободных неизвестных.
3. Система несовместна, если она содержит уравнение вида $0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \ldots + 0 \cdot x_n = b$, $b \neq 0$.

<u>Пример.</u> Решить систему уравнений $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ 2x_1 + x_2 + 5x_3 = 2, \\ -x_1 + 2x_3 = 3; \end{cases}$ методом Гаусса.

Решение

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 3 \end{array}\right) \underset{\substack{2c_1 - c_2 \to c_2 \\ c_3 + c_1 \to c_3}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \underset{c_3 - c_2 \to c_3}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 4 \end{array}\right) \Rightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 1, \\ \quad x_2 - 7x_3 = 0, \\ \qquad 8x_3 = 4; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 1 + 1/2 - 7/2 = -2, \\ x_2 = 7/2, \\ x_3 = 1/2 \end{cases}$$

Ответ: $\left(-2; \dfrac{7}{2}; \dfrac{1}{2}\right)$

Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Капелли

<u>Определение.</u> Рангом матрицы называется наивысший порядок не равного нулю её минора. Минор порядка равного рангу матрицы и отличный от нуля называется базисным (таких миноров у матрицы может быть несколько).

<u>Правило вычисления ранга матрицы</u>

Ранг матрицы равен максимальному числу ненулевых строк после приведения её к ступенчатому виду путём элементарных преобразований.

<u>Определение</u>. Элементарными преобразованиями матрицы называются преобразования вида:

1. перестановка местами любых двух строк (столбцов) матрицы;
2. умножение всех элементов строки (столбца) на число, отличное от нуля;
3. прибавление к элементам одной строки (столбца) соответствующих элементов другой строки (столбца), умноженных на одно и то же число;
4. транспонирование;
5. вычёркивание строки, все элементы которой равны нулю.

<u>Теорема.</u> При элементарных преобразованиях ранг матрицы не меняется.

Пример. Найти ранг матрицы.

$$A=\begin{pmatrix}0&2&-4\\1&-1&5\\3&1&7\\0&5&-10\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&2&-4\\3&1&7\\0&5&-10\end{pmatrix}\underset{C_3-3C_1\to C_3}{\sim}\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&2&-4\\0&4&-8\\0&5&-10\end{pmatrix}\underset{\substack{C_3-2C_2\to C_3\\2C_4-5C_2\to C_4}}{\sim}$$

$$\sim\begin{pmatrix}1&-1&5\\0&2&-4\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.\quad \textit{Ответ}:\quad r(A)=2.$$

Рассмотрим систему вида: $\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=b_1,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=b_2,\\ \ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=b_m.\end{cases}$ Введём основную матрицу

системы $\underset{m\times n}{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}\end{pmatrix}$, составленную из
коэффициентов при неизвестных и расширенную матрицу системы

$$A/B=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&\ldots&a_{1n}&b_1\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}&b_2\\\ldots&\ldots&\ldots&\ldots&\ldots\\a_{m1}&a_{m2}&\ldots&a_{mn}&b_m\end{pmatrix}.$$

Теорема Кронекера-Капелли. Для того чтобы система m линейных уравнений с n неизвестными была совместна, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы был равен рангу расширенной матрицы этой системы, то есть $r(A)=r(A/B)$.

Замечание.

1. Если $r(A)<r(A/B)$, то система несовместна;
2. Если $r(A)=r(A/B)=n$, то система определённая;
3. Если $r(A)=r(A/B)<n$, то система неопределённая. В этом случае по базисному минору выписывают уравнения, в которых базисные переменные выражаются через свободные неизвестные и записывается общее решение системы уравнений.

Однородные системы

Рассмотрим однородную систему линейных уравнений:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n=0,\\ \ldots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n=0.\end{cases}\qquad(6)$$

Поскольку rang A =rang(A | 0), то однородная система всегда совместна, всегда имеет нулевое (тривиальное) решение $x_1=x_2=\ldots=x_n=0$).

Когда однородная система имеет ненулевые решения?

Теорема 1. Для того, чтобы однородная система (6) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы ранг основной матрицы системы был меньше числа неизвестных: rang A= r < n .

Теорема 2. Для того, чтобы квадратная однородная система (6) (при m=n) имела ненулевое решение, необходимо и достаточно, чтобы определитель основной матрицы системы был равен нулю.

Решение однородной системы (6) будем рассматривать как n-мерный вектор $x^0=(x_1^0,x_2^0,\ldots,x_n^0)$.

Теорема 3. Совокупность всех решений однородной системы образует линейное пространство.

Теорема 4. Если rang A=r, а число неизвестных однородной системы равно n, то размерность пространства решений однородной системы равна n-r.

Определение. Совокупность (n-r) линейно независимых решений однородной системы называется фундаментальной системой решений.

Теорема 5. Если $X_1, X_2, \ldots, X_{n-r}$ образуют фундаментальную систему решений, то общее решение X однородной системы можно представить в виде $X = C_1 X_1 + C_2 X_2 + \ldots + C_{n-r} X_{n-r}$, где $C_1, C_2, \ldots, C_{n-r}$ –произвольные постоянные.

Раздел 2. Элементы математического анализа

Тема 2.1 Дифференциальное исчисление функции одной переменной

1. Производная функции. Основные правила дифференцирования

1.1. Понятие производной

Пусть функция $y = f(x)$ определена в окрестности точки x_0, $\Delta x = x - x_0$- приращение аргумента x, $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$- приращение функции.

Определение. Производной функции $f(x)$ в точке x_0 называется конечный предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, если он существует.

Производную функции $f(x)$ в точке x_0 обозначают $f'(x_0)$ или $\dfrac{df(x_0)}{dx}$. Через y' или $\dfrac{dy}{dx}$ обозначают производную функции $y = f(x)$ в точке x.

1.2. Таблица производных

1) $C' = 0$	2) $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$
3) $(a^x)' = a^x \ln a$, $(e^x)' = e^x$	4) $(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$, $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$
5) $(\sin x)' = \cos x$	6) $(\cos x)' = -\sin x$
7) $(\mathrm{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$	8) $(\mathrm{ctg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$
9) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	10) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11) $(\mathrm{arctg} x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$	12) $(\mathrm{arcctg} x)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$

1.3. Основные правила дифференцирования

Пусть C – постоянная, $f(x)$ и $g(x)$ имеют производные в точке x. Тогда:

1. $(Cf(x))' = Cf'(x)$,

2. $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$,

3. $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$,

4. $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)}\right)' = \dfrac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, $g(x) \neq 0.$

5. *Производная сложной функции.* Пусть функция $y = f(u)$ имеет производную в точке a функция $u = g(x)$ имеет производную в точке x. Тогда сложная функция $F(x) = f(g(x))$ имеет производную в точке x, равную

$$F'(x) = f'(u) \cdot g'(x).$$

6. Производная функции, заданной параметрически. Пусть функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ задают параметрически функцию $y = f(x)$ в окрестности точки $x = \varphi(t)$, функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ имеют производные $\varphi'(t) \neq 0$ и $\psi'(t)$ в точке t. Тогда функция $y = f(x)$ также имеет производную в точке x, и верна формула

$$f'(x) = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}.$$

7. Производная функции, заданной неявно. Если функция задана в виде $F(x, y(x)) = 0$, то производную $y'(x)$ можно найти по формуле:

$$y'(x) = -\frac{F'_x}{F'_y}.$$

8. Дифференцирование показательно-степенной функции. Для дифференцирования показательно-степенной функции $y = (f(x))^{g(x)}$ $(f(x) > 0)$, где $f(x)$ и $g(x)$- имеют производные в точке x, можно представить ее в виде:

$$(f(x))^{g(x)} = e^{g(x)\ln f(x)}.$$

Затем по правилу дифференцирования сложной функции получаем:

$$y' = \left(e^{g(x)\ln f(x)}\right)' = e^{g(x)\ln f(x)}\left(g(x)\ln f(x)\right)' =$$

$$= \left(g'(x) \cdot \ln f(x) + \frac{g(x) \cdot f'(x)}{f(x)}\right) \cdot f(x)^{g(x)}.$$

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти производную функции $y = \sin x$ по определению.

Решение. Имеем:

$$\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x = 2\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}.$$

Отсюда

$$\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{2\cos\left(x+\frac{\Delta x}{2}\right)\sin\frac{\Delta x}{2}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0}\cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\cdot\lim_{\Delta x \to 0}\frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} = \cos x \cdot 1 = \cos x.$$

Следовательно, $(\sin x)' = \cos x$.

Пример 2. Найти производную функции $y = 9x^5 - \frac{4}{x^3} + \sqrt[3]{x^7} - 3x + 4$.

Решение. Воспользуемся правилами дифференцирования и таблицей производных:

$$y' = \left(9x^5 - \frac{4}{x^3} + \sqrt[3]{x^7} - 3x + 4\right)' = \left(9x^5\right)' - \left(\frac{4}{x^3}\right)' + \left(\sqrt[3]{x^7}\right)' - (3x)' + (4)' =$$

$$= 9\cdot 5x^4 - 4\cdot(-3)x^{-4} + \frac{7}{3}x^{4/3} - 3 = 45x^4 + 12/x^4 + \frac{7}{3}\sqrt[3]{x^4} - 3.$$

Пример 3. Найти производную: $y = \frac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}$.

Решение. Воспользуемся правилами дифференцирования и таблицей производных:

$$y' = \left(\frac{x^2+2}{2\sqrt{1-x^4}}\right)' = \frac{1}{2}\left(\frac{(x^2+2)'\sqrt{1-x^4} - (x^2+2)(\sqrt{1-x^4})'}{(\sqrt{1-x^4})^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{2x\sqrt{1-x^4} - \frac{(x^2+2)\cdot(-4x^3)}{2\sqrt{1-x^4}}}{1-x^4}\right) = \frac{x(1-x^4) + x^3(x^2+2)}{(1-x^4)\sqrt{1-x^4}} = \frac{x - x^5 + x^5 + 2x^3}{\sqrt{(1-x^4)^3}} =$$

$$= \frac{2x^3 + x}{\sqrt{(1-x^4)^3}}.$$

Пример 4. Найти производную функции $y = \mathrm{tg}^5(x+2)\cdot\arccos 3x^2$.

Решение: Воспользуемся правилами дифференцирования:

$$y' = \left(\operatorname{tg}^5(x+2)\cdot\arccos 3x^2\right)' = 5\operatorname{tg}^4(x+2)\cdot\frac{1}{\cos^2(x+2)}\cdot\arccos 3x^2 +$$

$$+\operatorname{tg}^5(x+2)\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{1-9x^4}}\right)\cdot 6x = \frac{5\operatorname{tg}^4(x+2)\cdot\arccos 3x^2}{\cos^2(x+2)} - \frac{\operatorname{tg}^5(x+2)\cdot 6x}{\sqrt{1-9x^4}}.$$

Пример 5. Найти производную: $y = \ln\sqrt[6]{\dfrac{1+3x}{1-3x}}$.

Решение. При дифференцировании некоторых логарифмических выражений рациональнее предварительно упростить первоначальную функцию по свойствам логарифма:

$$y = \ln\sqrt[6]{\frac{1+3x}{1-3x}} = \frac{1}{6}\ln\frac{1+3x}{1-3x} = \frac{1}{6}\left(\ln(1+3x)-\ln(1-3x)\right);$$

$$y' = \frac{1}{6}(\ln(1+3x))' - (\ln(1-3x))') = \frac{1}{6}\left(\frac{(1+3x)'}{1+3x} - \frac{(1-3x)'}{1-3x}\right) = \frac{1}{6}\left(\frac{3}{1+3x} - \frac{-3}{1-3x}\right) =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+3x} + \frac{1}{1-3x}\right) = \frac{1}{2}\frac{(1-3x+1+3x)}{1-9x^2} = \frac{1}{1-9x^2}.$$

Пример 6. Найти производную функции $y = (\cos x)^{\sin x}$.

Решение. По формуле

$$y' = \left(f(x)^{g(x)}\right)' = \left(g'(x)\cdot\ln f(x) + \frac{g(x)\cdot f'(x)}{f(x)}\right)\cdot f(x)^{g(x)}$$

имеем

$$y' = (\cos x)^{\sin x}\left(\cos x\ln\cos x + \frac{\sin x}{\cos x}(\cos x)'\right) = (\cos x)^{\sin x}(\cos x\ln\cos x - \sin x\operatorname{tg} x)$$

Пример 7. Используя метод логарифмического дифференцирования, вычислить производную функции $y = \dfrac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5}$.

Решение**.** Применим метод логарифмического дифференцирования. Для этого предварительно прологарифмируем обе части данного выражения и используя свойства логарифма преобразуем правую часть.

$$\ln y = \frac{6}{7}\ln(x+5) - 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3).$$

Продифференцируем обе части равенства, учитывая, что y сложная функция

$$(\ln y)' = \left(\frac{6}{7}\ln(x+5) - 2\ln(x-1) - 5\ln(x+3)\right)',$$

$$\frac{y'}{y} = \frac{6}{7(x+5)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3}.$$

Выражая производную искомой функция, получим

$$y' = y \cdot \left(\frac{6}{7(x+5)} - \frac{2}{x-1} - \frac{5}{x+3}\right)$$

Учитывая, что $y = \dfrac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5}$, окончательно получим $y' = \dfrac{\sqrt[7]{(x+5)^6}}{(x-1)^2(x+3)^5} \cdot \left(\dfrac{6}{7(x+5)} - \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{5}{x+3}\right).$

Пример 8. Для функции, заданной параметрически, найти $\dfrac{dy}{dx}$.

$$\begin{cases} x = 3\sin t + \sin 3t, \\ y = 3\cos t + \cos 3t. \end{cases}$$

Решение**.** Находим производные от x и от y по параметру t

$x'_t = \dfrac{dx}{dt} = 3\cos t + 3\cos 3t$, $y'_t = \dfrac{dy}{dt} = -3\sin t - 3\sin 3t$.

Искомую производную от y по x находим:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = -\frac{3(\sin t + \sin 3t)}{3(\cos t + \cos 3t)} = -\frac{2\sin\frac{t+3t}{2}\cdot\cos\frac{t-3t}{2}}{2\cos\frac{t+3t}{2}\cdot\cos\frac{t-3t}{2}} = -\frac{\sin 2t}{\cos 2t} = -\operatorname{tg} 2t.$$

Пример 9. Найти производную y'_x, если $x^3 + y^3 - 3xy = 0$.

Решение.

1 способ. Продифференцируем уравнение, считая переменную x аргументом, а переменную y функцией $y = y(x)$. Получим $3x^2 + 3y^2 \cdot y'_x - 3(y + xy'_x) = 0$. Решаем уравнение относительно y'_x:

$$y'_x = \frac{x^2 - y}{x - y^2}.$$

2 способ. $F(x, y(x)) = x^3 + y^3 - 3xy$. Воспользуемся формулой для нахождения производной функции, заданной неявно

$$y'_x = -\frac{F'_x}{F'_y} = -\frac{\left(x^3 + y^3 - 3xy\right)'_x}{\left(x^3 + y^3 - 3xy\right)'_y} = -\frac{3x^2 - 3y}{3y^2 - 3x} = \frac{3(x^2 - y)}{-3(y^2 - x)} = \frac{x^2 - y}{x - y^2}.$$

2. Производные высших порядков

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ в каждой точке x некоторого множества D. Тогда ее производную $f'(x)$ можно рассматривать как функцию, определенную на множестве D. В свою очередь функция $f'(x)$ может в некоторых точках множества D иметь производную. В этом случае производной второго порядка (второй производной) называется производная от производной $((f'(x))'$. Для второй производной функции $y = f(x)$ в точке хприменяются обозначения:

$$y'',\quad f''(x),\quad y^{(2)},\quad \frac{d^2y}{dx^2}.$$

Аналогично определяются производные 3-го, 4-го, и т. д. порядков.

Производной первого порядка (или первой производной) считается $f'(x)$.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти вторую производную функции $f(x) = \dfrac{x}{\sqrt{1 - x^2}}$.

Решение. Сначала найдем $f'(x)$ и обязательно упростим полученное выражение:

$$f'(x) = \left(\frac{x}{\sqrt{1 - x^2}}\right)' = \frac{x'\sqrt{1 - x^2} - (\sqrt{1 - x^2})'x}{(1 - x^2)} = \frac{\sqrt{1 - x^2} - x\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{1 - x^2}}}{(1 - x^2)} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - x^2} + \dfrac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}}{(1 - x^2)} = \frac{(1 - x^2) + x^2}{(1 - x^2)\sqrt{1 - x^2}} = \frac{1}{(1 - x^2)^{3/2}} = (1 - x^2)^{-3/2}.$$

$$f''(x) = \left((1 - x^2)^{-3/2}\right)' = -\frac{3}{2}(1 - x^2)^{-5/2}(-2x) = \frac{3x}{(1 - x^2)^{5/2}} = \frac{3x}{\sqrt{(1 - x^2)^5}}.$$

Пример 2. Найти производную второго порядка y''_{xx} от функции, заданной параметрически: $\begin{cases} x = \sqrt{t}, \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}. \end{cases}$.

Решение. Найдем производную первого порядка:

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\left((1-t)^{-\frac{1}{2}}\right)'}{(\sqrt{t})'} = \frac{-\frac{1}{2}(1-t)^{-\frac{3}{2}}(1-t)'}{\frac{1}{2\sqrt{t}}} = -\sqrt{t}(1-t)^{-\frac{3}{2}}(-1) = \sqrt{t}(1-t)^{-\frac{3}{2}}$$

;

$$y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t};\quad (y'_x)'_t = (\sqrt{t}(1-t)^{-\frac{3}{2}})' = (\sqrt{t})'(1-t)^{-\frac{3}{2}} + \sqrt{t}((1-t)^{-\frac{3}{2}})' = \frac{(1-t)^{-\frac{3}{2}}}{2\sqrt{t}} -$$

$$-\frac{3}{2}\sqrt{t}(1-t)^{-\frac{5}{2}}(1-t)' = \frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{(1-t)^3}} + \frac{3\sqrt{t}}{2\sqrt{(1-t)^5}};$$

$$y''_{xx} = \left(\frac{1}{2\sqrt{t}\sqrt{(1-t)^3}} + \frac{3\sqrt{t}}{2\sqrt{(1-t)^5}}\right) : \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{\sqrt{(1-t)^3}} + \frac{3t}{\sqrt{(1-t)^5}} = \frac{1+2t}{\sqrt{(1-t)^5}}.$$

Пример 3. Найти производную n-го порядка: $y = \sqrt{e^{5x+3}}$.

Решение. Найдем последовательно несколько производных высших порядков:

$$y' = (\sqrt{e^{5x+3}})' = \frac{e^{5x+3} \cdot 5}{2\sqrt{e^{5x+3}}} = \frac{5}{2}\sqrt{e^{5x+3}}$$

;

$$y'' = \left(\frac{5}{2}\sqrt{e^{5x+3}}\right)' = \left(\frac{5}{2}\right)(\sqrt{e^{5x+3}})' = \left(\frac{5}{2}\right)^2\sqrt{e^{5x+3}}$$

;

$$y''' = \left(\left(\frac{5}{2}\right)^2\sqrt{e^{5x+3}}\right)' = \left(\frac{5}{2}\right)^2(\sqrt{e^{5x+3}})' = \left(\frac{5}{2}\right)^3\sqrt{e^{5x+3}}$$

.

И так далее. Выведем формулу для n-го члена получившейся последовательности $y^{(n)} = \left(\frac{5}{2}\right)^{(n)}\sqrt{e^{5x+3}}$.

3.Геометрический смысл производной. Касательная и нормаль к кривой

Пусть $y = f(x)$ - имеет производную в точке x_0, M_0 - точка на графике этой функции с координатами x_0 и $y_0 = f(x_0)$, $k = \mathrm{tg}\,\varphi$ - угловой коэффициент касательной, проведенной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0, $\varphi\ (-\pi/2 < \varphi \le \pi/2)$ - угол наклона касательной к оси абсцисс (см. рис 1. а).

Геометрический смысл производной состоит в том, что $f'(x_0) = k$.

Уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 имеет вид

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Прямая, перпендикулярная к касательной и проходящая через точку касания, называется нормалью к графику функции $y = f(x)$ в этой точке.

Уравнение нормали к графику функции $y = f(x)$ в точке $M_0(x_0, y_0)$ имеет вид

$$y = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0) + y_0.$$

Замечание. Пусть $f'(x_0) = +\infty$ (или $f'(x_0) = -\infty$). Тогда касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 параллельна оси Oy, а уравнение касательной имеет вид $x = x_0$ (рис 1. б).

Замечание. Если $f'(x_0) = 0$, то касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0 параллельна оси Ox (рис 1. в).

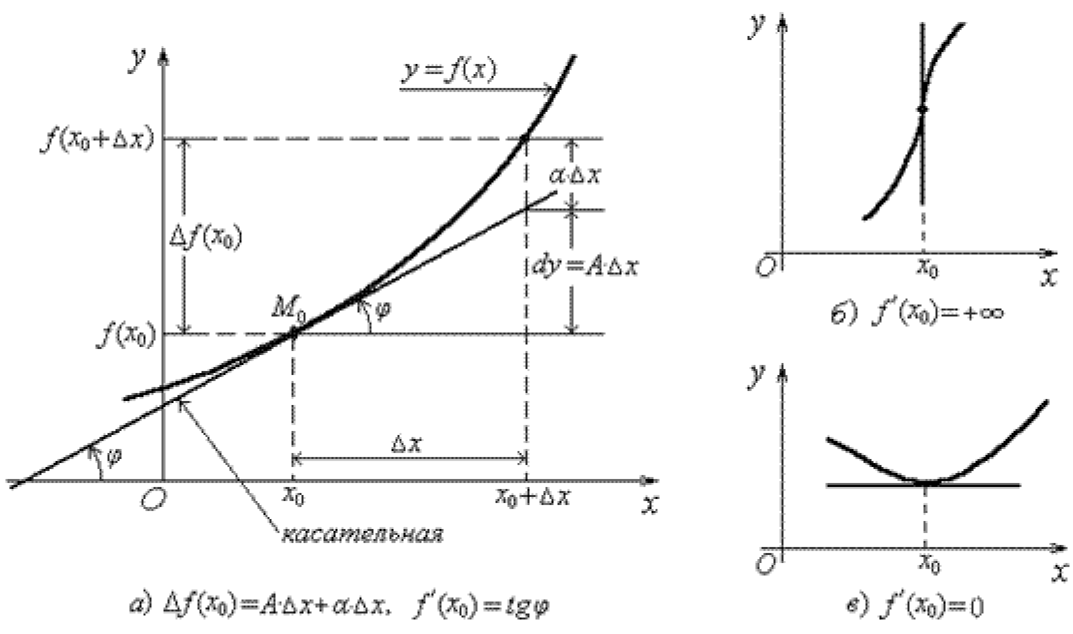


Рис. 1

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Составить уравнение нормали и уравнение касательной к кривой $y=x+\sqrt{x^3}$ в точке с абсциссой $x_0=1$.

Решение. Уравнение касательной к кривой $y=f(x)$ в точке $M_0(x_0;y_0)$ имеет вид: $y-y_0=y_0'(x-x_0)$. Уравнение нормали имеет вид: $y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0)$.

Найдем производную функции в точке с абсциссой $x_0=1$.

$y'=\left(x+\sqrt{x^3}\right)'=1+\frac{3}{2}\sqrt{x}$; $y'(1)=1+\frac{3}{2}\sqrt{1}=\frac{5}{2}$; $y(1)=1+\sqrt{1^3}=2$.

Запишем уравнения касательной к кривой $y=x+\sqrt{x^3}$ в точке с абсциссой $x_0=1$: $y-2=\frac{5}{2}(x-1)$ или $y=\frac{5}{2}x-\frac{1}{2}$. Уравнение нормали в этой же точке: $y-2=-\frac{2}{5}(x-1)$ или $y=-\frac{2}{5}x+2\frac{2}{5}$.

Пример 2. Составить уравнения касательной и нормали к эллипсу $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}=1$ в точке $M_0(3;2)$.

Решение**.** Находим производную неявной функции $\frac{x^2}{18}+\frac{y^2}{8}-1=0$:

$\frac{2x}{18}+\frac{2y\cdot y'}{8}=0$, откуда $y'(x)=-\frac{4x}{9y}$, $y'(x_0)=y'(3)=-\frac{4\cdot 3}{2\cdot 9}=-\frac{2}{3}$. Подставляя значения $x_0=3$, $y_0=2$, $y'(x_0)=-\frac{2}{3}$ в формулы уравнений касательной $y-y_0=y_0'(x-x_0)$ и нормали $y-y_0=-\frac{1}{y_0'}(x-x_0)$, получим $y-2=-\frac{2}{3}(x-3)$ или $2x+3y-12=0$ – уравнение касательной; $y-2=\frac{3}{2}(x-3)$ или $3x-2y-5=0$ – уравнение нормали.

4.Дифференциал. Приближенные вычисления с помощью дифференциала

Если для любого достаточно малого Δx выполняется равенство $\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$, где A - постоянная, α - бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$, то функция $f(x)$ называется дифференцируемой в точке x_0. Главная линейная часть приращения называют дифференциалом функции в точке x_0 и обозначают в виде

$$dy = A\Delta x.$$

Подчеркнем, что дифференциал – это линейная функция от Δx, бесконечно малая при $\Delta x \to 0$.

Теорема. Для того чтобы функция $y = f(x)$ имела производную $f'(x_0)$, необходимо и достаточно, чтобы эта функция была дифференцируемой в точке x_0, при этом $dy = f'(x_0)dx$.

На рис. 2 изображен график некоторой дифференцируемой функции $y = f(x)$ в точке x_0. Точки B и D на графике функции имеют соответственно координаты $(x_0, f(x_0))$ и $(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$.

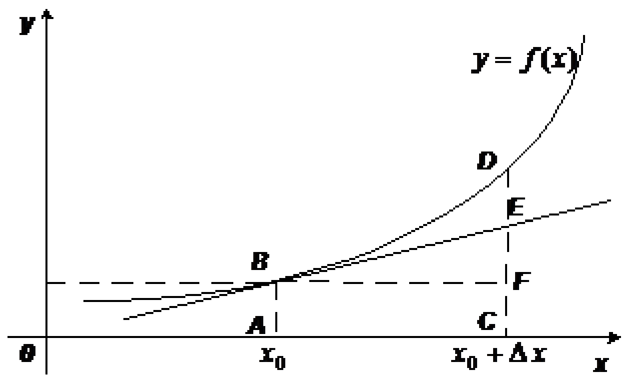


Рис. 2

Выражения $\Delta x, f(x_0), f(x_0 + \Delta x), \Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ геометрически означают длины следующих отрезков: AC, AB, DC, DF. Треугольник BEF ограничен горизонтальной линией BF, вертикальной линией EF и касательной BE к графику функции в точке B. В силу геометрического смысла производной имеем: $f'(x_0) = tg\angle FBE$; но тогда $f'(x_0)\Delta x = dy$ есть длина отрезка EF. Таким образом, с геометрической точки зрения дифференциал равен приращению ординаты касательной от точки x_0 до точки $x_0 + \Delta x$.

Заметим, что разделение приращения функции Δy на две части: $\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)$ соответствует разделению отрезка DF: $DF = FE + ED$. Длина отрезка EF, как уже отмечалось, равна значению дифференциала, а длина отрезка ED – бесконечно малая более высокого порядка, чем Δx. Действительно, из рисунка видно, что доля ED в отрезке DF стремится к нулю при $\Delta x \to 0$.

В равенстве $\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha \cdot \Delta x$ функция α является б. м.ф. более высокого порядка, чем Δx, следовательно, имеет смысл говорить о приближенных равенствах (при малых $|\Delta x|$):

$f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\Delta x$, или $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$.

Формула $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ важна в задачах, когда известны значения функции $f(x)$ и ее производной $f'(x)$ в точке x_0 и требуется вычислить значение функции $f(x)$ в некоторой близкой к x_0 точке x.

Примеры решения типовых задач

Пример 1. Найти дифференциал функции $f(x) = e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$.

Решение. Сначала найдем первую производную исходной функции:

$$f'(x) = e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \left(\frac{1-\cos x}{1+\cos x}\right)' = e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \frac{(1-\cos x)'(1+\cos x) - (1+\cos x)'(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2} =$$

$$= e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \frac{\sin x(1+\cos x) + \sin x(1-\cos x)}{(1+\cos x)^2} = e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}.$$

Далее в силу равенства $df(x) = f'(x)dx$ получим $df(x) = e^{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} \cdot \frac{2\sin x}{(1+\cos x)^2}dx$.

Пример 2. Найти дифференциал функции, заданной неявно $x^2 + y^2 + x^2y^2 = 1$.

Решение. Найдем дифференциал обеих частей равенства.

Получим $2xdx + 2ydy + 2xy^2dx + x^2 2ydy = 0$. Отсюда выразим дифференциал dy:

$$dy = -\frac{2xdx + 2xy^2dx}{2y + 2x^2y} = -\frac{x}{y}\frac{1+y^2}{1+x^2}dx.$$

Пример 3. Вычислить приближенно значение $\sin 32°$.

Решение. Воспользуемся формулой $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$. Для этого определим функцию $f(x) = \sin x$ и положим $x = 32°$, $x_0 = 30°$ или в радианах $x = \frac{32\pi}{180}$ и $x_0 = \frac{\pi}{6}$.

Тогда, учитывая, что $(\sin x)' = \cos x$, получим

$\sin x \approx \sin x_0 + \cos x_0 \cdot (x - x_0)$, или

$$\sin 32^\circ \approx \sin\frac{\pi}{6} + \cos\frac{\pi}{6} \cdot \left(\frac{32\pi}{180} - \frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\pi}{90} \approx 0{,}5 + \frac{1{,}73 \cdot 3{,}14}{90} \approx$$

$$\approx 0{,}5 + 0{,}03 = 0{,}53.$$

Для сравнения: имеет место равенство $\sin 32^\circ = 0{,}5299$ с четырьмя верными знаками.

Пример 4. Вычислить приближенно $\sqrt{24{,}89}$.

Решение**.** Рассмотрим функцию $f(x) = \sqrt{x}$ и выберем $x_0 = 25$, $x = 24{,}89$. Найдем:

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad f(x_0) = \sqrt{25} = 5, \quad f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{25}} = 0{,}1$$.

Тогда $f(24{,}89) = \sqrt{24{,}89} \approx 5 + 0{,}1 \cdot (-0{,}11) = 5 - 0{,}011 = 4{,}989$. Для сравнения: приближенно $\sqrt{24{,}89} = 4{,}988987873$ с точностью до 9-го знака после запятой.

Тема 1.2 Интегральное исчисление функции одной переменной (8 часов)

«Первообразная. Неопределенный интеграл.

Методы вычисления»

<u>Первообразная функция.</u>

<u>Определение:</u> Функция F(x) называется **первообразной функцией** функции f(x) на отрезке [a, b], если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$F'(x) = f(x)$.

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число.

$F_1(x) = F_2(x) + C$.

Неопределенный интеграл.

Определение: **Неопределенным интегралом** функции f(x) называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

F(x) + C.

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$

Условием существования неопределенного интеграла на некотором отрезке является непрерывность функции на этом отрезке.

Свойства:

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = (F(x) + C)' = f(x);$

2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$

3. $\int dF(x) = F(x) + C;$

4. $\int (u + v - w)dx = \int udx + \int vdx - \int wdx;$ где u, v, w – некоторые функции от x.

1. $\int C \cdot f(x)dx = C \cdot \int f(x)dx;$

Пример: $\int (x^2 - 2\sin x + 1)dx = \int x^2 dx - 2\int \sin xdx + \int dx = \frac{1}{3}x^3 + 2\cos x + x + C;$

Нахождение значения неопределенного интеграла связано главным образом с нахождением первообразной функции. Для некоторых функций это достаточно сложная задача. Ниже будут рассмотрены способы нахождения неопределенных интегралов для основных классов функций – рациональных, иррациональных, тригонометрических, показательных и др.

Для удобства значения неопределенных интегралов большинства элементарных функций собраны в специальные таблицы интегралов, которые бывают иногда весьма объемными. В них включены различные наиболее часто встречающиеся комбинации функций. Но большинство представленных в этих таблицах формул являются следствиями друг друга, поэтому ниже приведем таблицу основных интегралов, с помощью которой можно получить значения неопределенных интегралов различных функций.

Интеграл		Значение	Интеграл		Значение
1	$\int tgxdx$	-ln│cosx│+C	9	$\int e^x dx$	e^x + C
2	$\int ctgxdx$	ln│sinx│+ C	10	$\int \cos xdx$	sinx + C
3	$\int a^x dx$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	11	$\int \sin xdx$	-cosx + C
4	$\int \frac{dx}{a^2+x^2}$	$\frac{1}{a} arctg \frac{x}{a}+C$	12	$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx$	tgx + C
5	$\int \frac{dx}{x^2-a^2}$	$\frac{1}{2a}\ln\left\|\frac{x+a}{x-a}\right\|+C$	13	$\int \frac{1}{\sin^2 x} dx$	-ctgx + C
6	$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$	$\ln\left\|x+\sqrt{x^2 \pm a^2}\right\|+C$	14	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}$	$\arcsin \frac{x}{a}$ + C
7	$\int x^\alpha dx$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C, \alpha \neq -1$	15	$\int \frac{1}{\cos x} dx$	$\ln\left\|tg\left(\frac{x}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right\|+C$
8	$\int \frac{dx}{x}$	$\ln\|x\|+C$	16	$\int \frac{1}{\sin x} dx$	$\ln\left\|tg\frac{x}{2}\right\|+C$

Методы интегрирования.

Рассмотрим три основных метода интегрирования.

Непосредственное интегрирование.

Метод непосредственного интегрирования основан на предположении о возможном значении первообразной функции с дальнейшей проверкой этого значения дифференцированием. Вообще, заметим, что дифференцирование является мощным инструментом проверки результатов интегрирования.

Рассмотрим применение этого метода на примере:

Требуется найти значение интеграла $\int \frac{dx}{x}$. На основе известной формулы дифференцирования $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ можно сделать вывод, что искомый интеграл равен $\ln x + C$, где C – некоторое постоянное число. Однако, с другой стороны $(\ln(-x))' = -\frac{1}{x}\cdot(-1) = \frac{1}{x}$. Таким образом, окончательно можно сделать вывод:

$$\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$$

Заметим, что в отличие от дифференцирования, где для нахождения производной использовались четкие приемы и методы, правила нахождения производной, наконец определение производной, для интегрирования такие методы недоступны. Если при нахождении производной мы пользовались, так сказать, конструктивными методами, которые, базируясь на определенных правилах, приводили к результату, то при нахождении первообразной приходится в основном опираться на знания таблиц производных и первообразных.

Что касается метода непосредственного интегрирования, то он применим только для некоторых весьма ограниченных классов функций. Функций, для которых можно с ходу найти первообразную очень мало. Поэтому в большинстве случаев применяются способы, описанные ниже.

<u>Способ подстановки (замены переменных).</u>

<u>**Теорема:**</u> Если требуется найти интеграл $\int f(x)dx$, но сложно отыскать первообразную, то с помощью замены x = φ(t) и dx = φ′(t)dt получается:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

<u>**Доказательство:**</u> Продифференцируем предлагаемое равенство:

$$d\int f(x)dx = d\left(\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt\right)$$

По рассмотренному выше свойству №2 неопределенного интеграла:

$f(x)dx = f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

что с учетом введенных обозначений и является исходным предположением. Теорема доказана.

<u>Пример.</u> Найти неопределенный интеграл $\int \sqrt{\sin x} \cos x dx$.

Сделаем замену $t = \sin x$, $dt = \cos x dt$.

$$\int \sqrt{t} dt = \int t^{1/2} dt = \frac{2}{3} t^{3/2} + C = \frac{2}{3}\sin^{3/2} x + C.$$

<u>Пример.</u> $\int x(x^2+1)^{3/2} dx.$

Замена $t = x^2 + 1; \quad dt = 2xdx; \quad dx = \frac{dt}{2x};$ Получаем:

$$\int t^{3/2}\frac{dt}{2} = \frac{1}{2}\int t^{3/2} dt = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}t^{5/2} + C = \frac{t^{5/2}}{5} + C = \frac{(x^2+1)^{5/2}}{5} + C;$$

Ниже будут рассмотрены другие примеры применения метода подстановки для различных типов функций.

Интегрирование по частям.

Способ основан на известной формуле производной произведения:

(uv)′ = u′v + v′u

где u и v – некоторые функции от x.

В дифференциальной форме: d(uv) = udv + vdu

Проинтегрировав, получаем: $\int d(uv) = \int udv + \int vdu$, а в соответствии с приведенными выше свойствами неопределенного интеграла:

$uv = \int udv + \int vdu$ или $\int udv = uv - \int vdu$;

Получили формулу интегрирования по частям, которая позволяет находить интегралы многих элементарных функций.

Пример. $\int x^2 \sin x dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2; & dv = \sin x dx; \\ du = 2xdx; & v = -\cos x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + \int \cos x \cdot 2xdx =$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = \cos x dx; \\ du = dx; & v = \sin x \end{matrix} \right\} = -x^2 \cos x + 2\left[x \sin x - \int \sin x dx \right] = -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2\cos x + C.$$

Как видно, последовательное применение формулы интегрирования по частям позволяет постепенно упростить функцию и привести интеграл к табличному.

Пример. $\int e^{2x} \cos x dx = \left\{ \begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \cos x dx; & v = \sin x \end{matrix} \right\} = e^{2x} \sin x - \int \sin x \cdot 2e^{2x} dx =$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = e^{2x}; & du = 2e^{2x}dx; \\ dv = \sin x dx; & v = -\cos x; \end{matrix} \right\} = e^{2x} \sin x - 2\left[-e^{2x} \cos x - \int -\cos x \cdot 2e^{2x} dx \right] = e^{2x} \sin x +$$

$$+ 2e^{2x} \cos x - 4\int \cos x e^{2x} dx$$

Видно, что в результате повторного применения интегрирования по частям функцию не удалось упростить к табличному виду. Однако, последний полученный интеграл ничем не отличается от исходного. Поэтому перенесем его в левую часть равенства.

$$5\int e^{2x}\cos x dx = e^{2x}(\sin x + 2\cos x)$$

$$\int e^{2x}\cos x dx = \frac{e^{2x}}{5}(\sin x + 2\cos x) + C.$$

Таким образом, интеграл найден вообще без применения таблиц интегралов.

Прежде чем рассмотреть подробно методы интегрирования различных классов функций, приведем еще несколько примеров нахождения неопределенных интегралов приведением их к табличным.

Пример.

$$\int (2x+1)^{20} dx = \{2x+1 = t; \quad dt = 2dx;\} = \int t^{20}\cdot\frac{1}{2}dt = \frac{1}{21}t^{21}\cdot\frac{1}{2} + C = \frac{t^{21}}{42} + C = \frac{(2x+1)^{21}}{42} + C$$

Пример.

$$\int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{4-x^4}}dx = \int \frac{\sqrt{2-x^2}+\sqrt{2+x^2}}{\sqrt{2-x^2}\sqrt{2+x^2}}dx = \int \frac{dx}{\sqrt{2+x^2}} + \int \frac{dx}{\sqrt{2-x^2}} = \ln\left|x+\sqrt{x^2+2}\right| +$$

$$+\arcsin\frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{\cos x}{\sqrt{\sin^3 x}}dx = \int \sin^{-3/2} x\cos x dx = \{\sin x = t; \quad dt = \cos x dx\} = \int t^{-3/2}dt = -2t^{-1/2} + C =$$

$$= -2\sin^{-1/2} x + C = -\frac{2}{\sqrt{\sin x}} + C.$$

Пример.

$$\int x^2 e^{5x}dx = \left\{ \begin{matrix} u = x^2; & dv = e^{5x}dx; \\ du = 2xdx; & v = \dfrac{e^{5x}}{5}; \end{matrix} \right\} = \frac{1}{5}e^{5x}x^2 - \int \frac{1}{5}e^{5x}2xdx = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\int xe^{5x}dx =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} u = x; & dv = e^{5x}dx; \\ du = dx; & v = \dfrac{1}{5}e^{5x}; \end{matrix} \right\} = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2}{5}\left[\frac{xe^{5x}}{5} - \int \frac{1}{5}e^{5x}dx \right] = \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2}{25}\int e^{5x}dx =$$

$$= \frac{x^2 e^{5x}}{5} - \frac{2xe^{5x}}{25} + \frac{2e^{5x}}{125} = \frac{e^{5x}}{5}\left(x^2 - \frac{2x}{5} + \frac{2}{25} \right).$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x + 8}} = \int \frac{dx}{\sqrt{-x^2 - 2x - 1 + 9}} = \{dx = d(x+1)\} = \int \frac{d(x+1)}{\sqrt{9 - (x+1)^2}} = \{x + 1 = t\} =$$

$$= \int \frac{dt}{\sqrt{3^2 - t^2}} = \arcsin\frac{t}{3} + C = \arcsin\frac{x+1}{3} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{\ln x}{x^3}dx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x; & dv = \dfrac{1}{x^3}dx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx; & v = -\dfrac{1}{2x^2}; \end{matrix} \right\} = -\frac{\ln x}{2x^2} - \int -\frac{1}{2x^2}\cdot\frac{1}{x}dx = -\frac{\ln x}{2x^2} + \frac{1}{2}\int \frac{dx}{x^3} = -\frac{\ln x}{2x^2} +$$

$$+ \frac{1}{2}\left[-\frac{1}{2}x^{-2} \right] + C = -\frac{\ln x}{2x^2} - \frac{1}{4x^2} + C.$$

Пример.

$$\int x\ln xdx = \left\{ \begin{matrix} u = \ln x; & dv = xdx; \\ du = \dfrac{1}{x}dx; & v = \dfrac{x^2}{2}; \end{matrix} \right\} = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C =$$

$$= \frac{x^2}{4}(2\ln x - 1) + C.$$

Пример.

$$\int e^{\cos^2 x}\sin 2xdx = \left\{ t = e^{\cos^2 x}; \quad dt = -e^{\cos^2 x}\cdot 2\cos x\sin x = -\sin 2x\cdot e^{\cos^2 x}dx; \right\} = -\int dt = -t + C =$$

$$= -e^{\cos^2 x} + C.$$

Пример.

$$\int \frac{dx}{(x+1)\sqrt{x}} = \left\{ \sqrt{x} = t; \quad \frac{dt}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2t} \right\} = \int \frac{2tdt}{(t^2+1)t} = 2\int \frac{dt}{t^2+1} = 2arctgt + C = 2arctg\sqrt{x} + C.$$

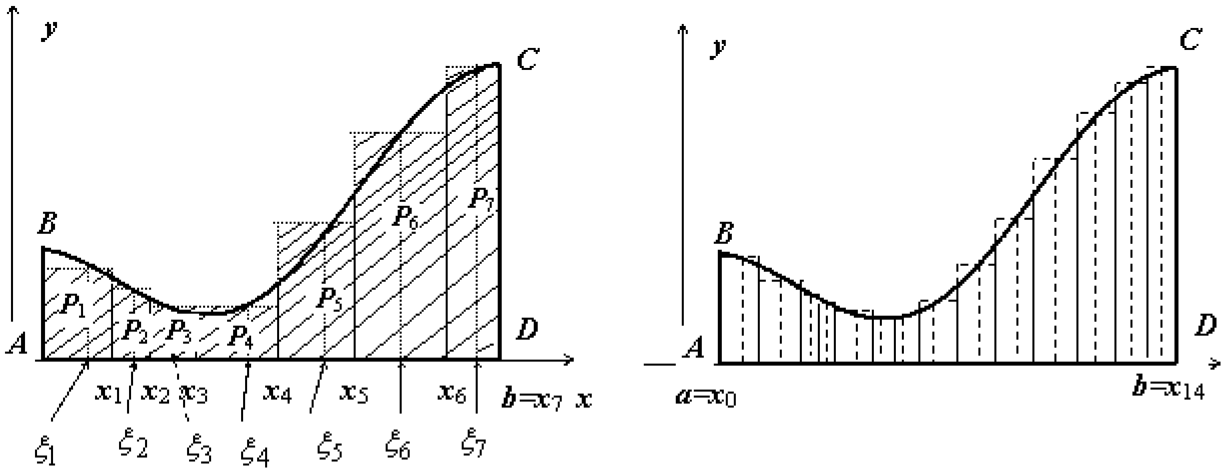
Пример.

$$\int \frac{dx}{x^2-6x+25}=\int \frac{dx}{(x-3)^2+16}=\frac{1}{16}\int \frac{dx}{\left(\frac{x-3}{4}\right)^2+1}=\frac{1}{16}\,arctg\left(\frac{x-3}{4}\right)+C.$$

Определенный интеграл.

Определение.

Вычисление площади криволинейной трапеции. Пусть на отрезке [$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$] ($\boldsymbol{b}$>$\boldsymbol{a}$) задана непрерывная функция $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, принимающая на этом отрезке неотрицательные значения : $f(x) \geq 0$ при $x \in [a,b]$. Требуется определить площадь $\boldsymbol{S}$ криволинейной трапеции ***ABCD***, ограниченной снизу отрезком [$\boldsymbol{a}$,$\boldsymbol{b}$], слева и справа - прямыми $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a}$ и $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$, сверху – функцией $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$.



Для решения этой задачи разделим произвольным образом основание ***AD*** фигуры точками $x_0 = a$, x_1 , x_2 , …, x_n-1 = a, $x_n = b$ на $\boldsymbol{n}$ частей [x_0 , x_1], [x_1 , x_2], …, [x_i-1 , x_i], …, [x_n-1 , x_n];символом Δx_i будем обозначать длину $\boldsymbol{i}$-го отрезка: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1};\ i = 1,2,\ldots,n$. На каждом из отрезков [x_i-1 , x_i] выберем произвольную точку ξ_i, найдём $f(\xi_i)$, вычислим произведение $f(\xi_i)(x_i - x_{i-1}) = f(\xi_i)\Delta x_i$ (это произведение равно площади прямоугольника P_i с основанием [x_i-1 , x_i] и высотой ξ_i) и просуммируем эти произведения по всем прямоугольникам. Полученную сумму обозначим $S_{\text{ступ}}$:

$$S_{\text{ступ}} = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

.

$S_{\text{ступ}}$ равно площади ступенчатой фигуры, образованной прямоугольниками P_i , i = 1,2,…,n; на левом рисунке эта площадь заштрихована. $S_{\text{ступ}}$ не равна искомой площади $\boldsymbol{S}$, она только даёт некоторое приближение к $\boldsymbol{S}$. Для того, чтобы улучшить это приближение, будем увеличивать количество $\boldsymbol{n}$ отрезков таким образом, чтобы максимальная длина этих отрезков $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$ стремилась к нулю (на рисунке ступенчатые фигуры изображены при n = 7 (слева) и при n = 14 (справа)). При $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i \to 0\ (n \to \infty)$ разница между $S_{\text{ступ}}$ и S будет тоже стремиться к нулю, т.е.

$$S = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$.

Определение определённого интеграла. Пусть на отрезке $[a,b]$ задана функция $y = f(x)$. Разобьём отрезок $[a,b]$ произвольным образом на n частей точками $[x_0 , x_1]$, $[x_1 , x_2]$, …, $[x_{i-1}, x_i]$, …, $[x_{n-1} , x_n]$; длину i-го отрезка обозначим Δx_i: $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $i = 1,2,\ldots,n$; максимальную из длин отрезков обозначим λ: $\lambda = \max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i$. На каждом из отрезков $[x_{i-1}, x_i]$ выберем произвольную точку ξ_i и составим

$$\sigma = f(\xi_1)\Delta x_1 + f(\xi_2)\Delta x_2 + \ldots + f(\xi_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(\xi_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

сумму.

Сумма σ называется интегральной суммой. Если существует (конечный) предел последовательности интегральных сумм σ при $\lambda \to 0$, не зависящий ни от способа разбиения отрезка$[a,b]$ на части $[x_{i-1} , x_i]$, ни от выбора точек ξ_i, то функция $f(x)$ называется интегрируемой по отрезку $[a,b]$, а этот предел называется определённым интегралом от функции $f(x)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается $\int\limits_a^b f(x)dx$.

Функция $f(x)$, как и в случае неопределённого интеграла, называется подынтегральной, числа a и b - соответственно, нижним и верхним пределами интегрирования.

Кратко определение иногда записывают так:

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{\substack{\max \Delta x_i \to 0 \\ i=1,2,\ldots,n}} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

.

В этом определении предполагается, что $b > a$. Для других случаев примем, тоже по определению:

Если $b=a$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = 0$; если $b<a$, то $\int\limits_a^b f(x)dx = -\int\limits_b^a f(x)dx$.

Теорема существования определённого интеграла.

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема по этому отрезку.

Примем это утверждение без доказательства, поясним только его смысл. Интегрируемость функции означает существование конечного предела последовательности интегральных сумм, т.е. такого числа $I = \int\limits_a^b f(x)dx$, что для любого $\varepsilon > 0$ найдётся такое число $\delta > 0$, что как только разбиение отрезка удовлетворяет неравенству $\max\limits_{i=1,2,\ldots,n} \Delta x_i < \delta$, то, независимо от выбора точек ξ_i выполняется неравенство $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$. Требование непрерывности $f(x)$ достаточно для интегрируемости, но не является необходимым.

Интегрируемы функции, имеющие конечное или даже счётное число точек разрыва на [***a***,***b***] при условии их ограниченности (т.е. все точки разрыва должны быть точками разрыва первого рода). Неограниченная функция не может быть интегрируемой (идея доказательства этого утверждения: если ***f***(***x***) неограничена на [***a***,***b***], то она неограничена на каком-либо [x_i-1 , x_i], т.е. на этом отрезке можно найти такую точку ξ_i, что слагаемое $f(\xi_i)\Delta x_i$, а следовательно, и вся интегральная сумма, будет больше любого наперед заданного числа).

Геометрический смысл определённого интеграла. Как следует из вышерассмотренного, если ***f***(***x***) >0 на отрезке [***a***,***b***], то $\int_a^b f(x)dx$ равен площади криволинейной трапеции ***ABCD***, ограниченной снизу отрезком [***a***,***b***], слева и справа - прямыми ***x*** = ***a*** и ***x*** = ***b***, сверху – функцией ***y*** = ***f***(***x***).

Свойства определённого интеграла.

1. Линейность. Если функции ***y*** = ***f***(***x***), ***y*** = ***g***(***x***) интегрируемы по отрезку [***a***,***b***] , то по этому отрезку интегрируема их линейная комбинация ***A f***(***x***) + ***B g***(***x***) (***A***, ***B*** = const), и

$$\int_a^b [Af(x) + Bg(x)]dx = A\int_a^b f(x)dx + B\int_a^b g(x)dx.$$

Док-во: для любого разбиения отрезка и любого выбора точек ξ_i выполняется

$$A\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i + B\sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n [Af(\xi_i) + Bg(\xi_i)]\Delta x_i$$

. Перейдем в этом равенстве к пределу при $\lambda \to 0$. Так как существуют пределы интегральных сумм, стоящих в левой части равенства, то существует предел линейной комбинации этих сумм, следовательно, существует предел правой интегральной суммы, откуда следует истинность и утверждения, и равенства.

2. Аддитивность. Если ***y*** = ***f***(***x***) интегрируема по отрезку [***a***,***b***] и точка ***c*** принадлежит этому отрезку, то

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Док-во. Если ***f***(***x***) удовлетворяет условиям интегрируемости по отрезку [***a***,***b***], то она удовлетворяет условиям интегрируемости по отрезкам [***a***,***c***] и [***c***,***b***]. Будем брать такие разбиения отрезка[***a***,***b***] , чтобы точка ***c*** являлась одним из узлов x_i: ***c*** = x_i0, .

Тогда

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{i_0} f(\xi_i)\Delta x_i + \sum_{i=i_0+1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$$

. В этом равенстве первая сумма справа - интегральная сумма для $\int_a^c f(x)dx$, вторая - для $\int_c^b f(x)dx$. Переходим к пределу при $\lambda \to 0$.

Пределы для всех трёх сумм существуют, и

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Свойство аддитивности остаётся верным при любом расположении точек, если только функция интегрируема по самому широкому интервалу. Пусть, например, $c < b < a$, и $f(x)$интегрируема по $[c, a]$. Тогда, по доказанному, $\int_c^a f(x)dx = \int_c^b f(x)dx + \int_b^a f(x)dx$. Отсюда и из определения интеграла для случая, когда нижний предел больше верхнего, следует, что $\int_b^a f(x)dx = \int_c^a f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \Rightarrow -\int_a^b f(x)dx = -\int_a^c f(x)dx - \int_c^b f(x)dx \Rightarrow \int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$.

При формулировании и доказательстве следующих свойств предполагаем, что $b > a$.

3. Интеграл от единичной функции ($f(x) = 1$). Если $f(x) =$ 1**,** то $\int_a^b f(x)dx = \int_a^b dx = b - a$.

Док-во. Если $f(x) = 1$, то для любого разбиения

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = \sum_{i=1}^{n} (x_i - x_{i-1}) = x_1 - x_0 + x_2 - x_1 + x_3 - x_2 + \ldots + x_{n-1} - x_{n-2} + x_n - x_{n-1} =$$

$= x_n - x_0 = b - a$, т.е любая интегральная сумма равна длине отрезка. Предел постоянной равен этой постоянной, откуда и следует доказываемое утверждение.

4. Теорема об интегрировании неравенств. Если в любой точке $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $f(x) \le g(x)$, и функции $f(x)$, $g(x)$ интегрируемы по отрезку $[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

Док-во. Для любого разбиения отрезка и любого выбора точек ξ_i при $\forall i$ $f(\xi_i) \le g(\xi_i) \Rightarrow f(\xi_i)\Delta x_i \le g(\xi_i)\Delta x_i \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i \le \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\Delta x_i$. Переходя в этом неравенстве к пределу при $\lambda \to 0$, получаем требуемое неравенство.

5. Теоремы об оценке интеграла.

5.1. Если на отрезке $[a,b]$ функция удовлетворяет неравенству $m \le f(x) \le M$, то $m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$.

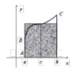
Док-во. Докажем левое неравенство (цифрами над знаками импликации обозначены номера применяемых ранее доказанных свойств): $m \le f(x) \overset{4}{\Rightarrow} \int_a^b m \cdot dx \le \int_a^b f(x)dx \overset{1}{\Rightarrow} m\int_a^b dx \le \int_a^b f(x)dx \overset{3}{\Rightarrow} m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx$.
Аналогично доказывается и правое неравенство.

5.2. Если функция $f(x)$ интегрируема по отрезку $[a,b]$, то $\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx$.
Док-

во. $-|f(x)| \le f(x) \le |f(x)| \overset{4,1}{\Rightarrow} -\int\limits_a^b |f(x)|dx \le \int\limits_a^b f(x)dx \le \int\limits_a^b |f(x)|dx \Rightarrow \left|\int\limits_a^b f(x)dx\right| \le \int\limits_a^b |f(x)|dx$.

6. Теорема о среднем. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует точка $c \in [a,b]$, такая что $\int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Док-во. Функция, непрерывная на отрезке, принимает на этом отрезке своё наименьшее m и
наибольшее M значения. Тогда



$$m \le f(x) \le M \overset{5.1}{\Rightarrow} m(b-a) \le \int\limits_a^b f(x)dx \le M(b-a) \Rightarrow m \le \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \le M.$$

Число $\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx$ заключено между минимальным и максимальным значениями функции на отрезке. Одно из свойств функции, непрерывной на отрезке, заключается в том, что эта функция принимает любое значение, расположенное между m и M. Таким образом, существует точка $c \in [a,b]$, такая что $f(c) = \frac{1}{b-a}\int\limits_a^b f(x)dx \Rightarrow \int\limits_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$.

Это свойство имеет простую геометрическую интерпретацию: если $f(x) \ge 0$ непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует точка $c \in [a,b]$ такая, что площадь криволинейной трапеции $ABCD$ равна площади прямоугольника с основанием $[a,b]$ и высотой $f(c)$ (на рисунке выделен цветом).

Вычисление определённого интеграла. Формула Ньютона-Лейбница.

Интеграл с переменным верхним пределом. Значение определённого интеграла не зависит от того, какой буквой обозначена переменная интегрирования: $\int\limits_a^b f(x)dx = \int\limits_a^b f(t)dt$ (чтобы убедиться в этом, достаточно выписать интегральные суммы, они совпадают). В этом разделе переменную интегрирования будем обозначать буквой t, а буквой x обозначим верхний предел интегрирования. Будем считать, что верхний предел интеграла может меняться, т.е. что x - переменная, в результате интеграл будет функцией $\Phi(x)$ своего верхнего предела: $\Phi(x) = \int\limits_a^x f(t)dt$. Легко доказать, что если $f(t)$ интегрируема, то $\Phi(x)$ непрерывна, но для нас важнее следующая фундаментальная теорема:

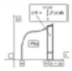
Теорема об интеграле с переменным верхним пределом. Если функция $f(t)$ непрерывна в окрестности точки $t = x$, то в этой точке функция $\Phi(x)$ дифференцируема, и $\Phi'(x) = f(x)$.

Другими словами, производная определённого интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу равна значению подынтегральной функции в этом пределе.

Док-во. Дадим верхнему пределу x приращение Δx.
Тогда

$$\Phi(x+\Delta x) = \int_a^{x+\Delta x} f(t)dt \overset{2}{=} \int_a^x f(t)dt + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt = \Phi(x) + \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \Rightarrow \Delta\Phi = \Phi(x+\Delta x) - \Phi(x) =$$

$$= \int_x^{x+\Delta x} f(t)dt \overset{6}{=} f(c)\Delta x$$



, где c - точка, лежащая между x и $x+\Delta x$ (существование такой точки утверждается теоремой о среднем; цифры над знаком равенства - номер применённого свойства определённого интеграла). $\dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(c)$. Устремим $\Delta x \to 0$. При этом $x+\Delta x \to x \Rightarrow c \to x$ (c- точка, расположенная между x и $x+\Delta x$). Так как $f(t)$ непрерывна в точке $t = x$, то $\exists \lim\limits_{\Delta x \to 0} f(c) = f(x)$. Следовательно, существует $\Phi'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta\Phi}{\Delta x}$, и $\Phi'(x) = f(x)$. Теорема доказана.

Отметим первое важное следствие этой теоремы. По существу, мы доказали, что любая непрерывная функция $f(x)$ имеет первообразную, и эта первообразная определяется формулой $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$. Другим важным следствием этой теоремы является формула Ньютона-Лейбница, или основная формула интегрального исчисления.

Формула Ньютона-Лейбница. Если $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b], и $F(x)$ - некоторая первообразная функции $f(x)$, то $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Док-во. Мы установили, что функция $\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$ - первообразная непрерывной $f(x)$. Так как $F(x)$ - тоже первообразная, то $\Phi(x) = F(x) + C$. Положим в этом равенстве $x = a$. Так как $\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$,

то $0 = F(a) + C \Rightarrow C = -F(a) \Rightarrow \Phi(x) = \int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$. В равенстве $\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$ переобозначим переменные: для переменной интегрирования t вернёмся к обозначению x , верхний предел x обозначим b.

Окончательно, $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.

Разность в правой части формулы Ньютона-Лейбница обозначается специальным символом: $F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$ (здесь $F(x)\Big|_a^b$ читается как "подстановка от a до b"), поэтому формулу Ньютона-Лейбница обычно записывают так: $\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b$.

Пример применения формулы Ньютона-Лейбница:

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sin x dx = (-\cos x)\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} = -\left(\cos\frac{\pi}{3} - \cos\frac{\pi}{6}\right) = -\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}.$$

Формула интегрирования по частям для определённого интеграла. Если $u(x)$, $v(x)$ - непрерывно дифференцируемые функции, то $\int_a^b u \cdot dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v \cdot du$.

Док-во. Интегрируем равенство $(uv)' = u'v + uv'$ в пределах от a до b: $\int_a^b (uv)' dx = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx$. Функция в левом интеграле имеет первообразную uv, по формуле Ньютона-Лейбница $\int_a^b (uv)' dx = uv\Big|_a^b$, следовательно, $uv\Big|_a^b = \int_a^b u'vdx + \int_a^b uv'dx$, откуда и следует доказываемое равенство.

Пример:

$$\int_1^5 \ln x dx = x\ln x\Big|_1^5 - \int_1^5 x d(\ln x) = (5\ln 5 - 1\ln 1) - \int_1^5 x\frac{dx}{x} = 5\ln 5 - x\Big|_1^5 = 5\ln 5 - (5-1) = 5\ln 5 - 4$$

Замена переменной в определённом интеграле.

Теорема. Пусть функция $x = \varphi(t)$

1. определена, непрерывно дифференцируема и монотонна на отрезке $[\alpha, \beta]$,
2. $\varphi(\alpha) = a, \varphi(\beta) = b$,
3. функция $f(x)$ непрерывна на отрезке [a, b].

Тогда $\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$.

Док-во. Пусть $F(x)$ - первообразная для функции $f(x)$, т.е. $F'(x) = f(x)$, тогда $F(\varphi(t))$ - первообразная для функции $f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

, что и требовалось доказать.

При решении задач нельзя забывать о том, что при переходе к новой переменной надо обязательно вычислить новые пределы интеграла.

Пример:

$$\int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{4-x^2}\,dx = \left| \begin{array}{l} x = 2\sin t,\ \sqrt{4-x^2} = 2\cos t,\ dx = 2\cos t\,dt, \\ 2\sin t = 1 \Rightarrow t = \pi/6,\ 2\sin t = \sqrt{3} \Rightarrow t = \pi/3 \end{array} \right| = 4\int_{\pi/6}^{\pi/3} \cos^2 t \cdot dt = 2\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1+\cos 2t)\cdot dt =$$

$$= 2\int_{\pi/6}^{\pi/3} (1+\cos 2t)\cdot dt = 2\left[t\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} + \frac{1}{2}\sin 2t\Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \right] = 2\left[\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right) + \frac{1}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3} - \sin\frac{\pi}{3}\right)\right] = \frac{\pi}{3}$$

Тема 1.3 Численные методы (7 часов)

Учет погрешностей вычислений.

При решении математических задач могут возникнуть погрешности по различным причинам:

1. При составлении математической модели физического процесса или явления приходится принимать условия, упрощающие постановку задачи. Поэтому математическая модель не отражает реальный процесс, а дает его идеализированную картину. Погрешность, возникающая при этом, называется ***погрешностью постановки задачи.***
2. Часто приходится для решения задачи применять приближенный метод (интеграл заменяют квадратурной суммой, производную заменяют разностью, функцию – многочленом). Погрешность, возникающая при этом, называется ***погрешностью метода.***
3. Часто исходные данные заданы не точно, а приближенно. При выполнении вычислений погрешность исходных данных в некоторой степени переходит в погрешность результата. Такая погрешность называется ***погрешностью действий.***
4. Погрешность, возникающая при округлении бесконечных и конечных десятичных чисел, имеющих большее число десятичных знаков, чем надо в округлении, называется ***погрешностью округления.***

Определение. Пусть x – некоторое число, число a называется его ***приближенным значением***, если a в определенном смысле мало отличается от x и заменяет x в вычислениях, $x \approx a$.

Определение. ***Погрешностью Δ_a приближенного значения а числа х*** называется разность $\Delta_a = x - a$, а модуль этой погрешностью называется ***абсолютной погрешностью***.

Если $\Delta_a > 0$, то а взято с недостатком.

Если $\Delta_a < 0$, то а взято с избытком.

Определение. ***Границей погрешности приближенного значения а числа х*** называется всякое неотрицательное число h_a, которое не меньше модуля погрешности: $|\Delta_a| \le h_a$.

Говорят, что приближение а приближает число х с точностью до h_a, если $|x-a| \le h_a$, $a - h_a \le x \le a + h_a$, $x = a \pm h_a$.

Пример. Пусть a=0,273 – приближенное значение x с точность до 0,001. Указать границы, в которых заключается x.

$$0{,}272 \le x \le 0{,}274$$

При округлении чисел считают, что границы погрешности округления равна половине единицы округляемого разряда:

$h_{окр} = 0.5 \cdot 10^{\alpha}$, α – порядок округления разряда.

Определение. ***Относительной погрешностью приближенного значения a числа x*** называется отношение

$$\omega_{\hat{o}} = \frac{\Delta_a}{a}, a \ne 0.$$

Пример. Округлить до десятых число 27,52 и найти погрешность и относительную погрешность округления:

$27.52 \approx 27.5$,

$\Delta_a = x - a = 27.52 - 27.5 = 0.02$,

$\omega_a = \frac{\Delta_a}{a} = \frac{0.02}{27.5} = \frac{1}{1375}$.

Также как и абсолютная погрешность относительная погрешность не всегда может быть вычислена и приходится оценивать ее модуль. Модуль относительной погрешности выражается в процентах. Чем меньше модуль относительной погрешности, тем выше качество приближения.

Определение. ***Границей относительной погрешности приближенного значения a числа x*** называется всякое неотрицательное число $\varepsilon_{\hat{o}}$, которое не меньше модуля относительной погрешности: $\varepsilon_a \ge |\omega_a|$.

Установим связь между границами погрешностей абсолютной и относительной:

$|\omega_a| = \left|\frac{\Delta_a}{a}\right| \le \frac{h_a}{|a|}, \varepsilon_a = \frac{h_a}{|a|}$ - граница относительной погрешности;

$|\omega_a| = \left|\frac{\Delta_a}{a}\right| \le \varepsilon_a, |\Delta_a| \le a\varepsilon_a$ - граница абсолютной погрешности.

$h_a = |a|\varepsilon_a$.

Приближенные вычисления без учета погрешностей.

Правило 1. Для того, чтобы вычислить алгебраическую сумму приближенных слагаемых нужно:

1. среди слагаемых выбрать наименее точное (имеет наименьшее число разрядов после запятой);
2. все остальные слагаемые округлить, сохраняя один запасной разряд, следующий за последним разрядом выделенного слагаемого;
3. сложить полученные после округления числа;
4. округлить полученный результат до предпоследнего разряда.

Пример. S=2.737+0.77974+27.1+0.283$\approx$2.74+0.78+27.1+0.28$\approx$30.90$\approx$30.9.

Определение 1. ***Значащими цифрами*** в десятичной записи числа называется все его цифры кроме нулей, записанных слева от первой цифры не равной 0.

0,00237 – 3 значащие цифры;

0,02000 – 4 значащие цифры.

Правило 2. Для того, чтобы вычислить произведение (деление) приближенных чисел нужно:

1. выделить сомножитель, содержащий наименьшее число значащих цифр;
2. округлить остальные сомножители, оставляя на одну значащую цифру больше, чем в выделенном сомножителе;
3. произвести умножение (деление);
4. округлить полученный результат, сохраняя столько значащих цифр, сколько их в выделенном сомножителе.

Пример. P=3,34*0,7*4,748=4,7*3,3*0,7$\approx$10,657$\approx 1*10^1$.

Правило 3. При возведении приближенного значения в квадрат или куб, при извлечении квадратного или кубического корня, в результате следует оставлять столько значащих цифр, сколько их имеет основание.

Правило 4. Если число является результатом промежуточных действий, то следует сохранить в нем на 1-2 цифры больше, чем указано в правилах 1-3.

Решение уравнений с одним неизвестным. Дихотомия.

Пусть требуется решить уравнение $f(x)=0$ (1), где $f(x)$ – непрерывная функция.

Число $x = x^*$ называется **корнем уравнения** *(1), если* $f(x^*)=0$.

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на $[a,b]$ и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то на $[a,b]$ существует хотя бы один корень.

Отделить корень уравнения значит найти такой интервал, внутри которого находится один и только один корень данного уравнения.

Для отделения корней можно применить следующий ***признак***:

> Если на отрезке $[a,b]$ функция $f(x)$ непрерывна и монотонна, и на концах отрезка принимает значения разных знаков, то на данном отрезке существует только один корень уравнения (1).

Достаточным условием монотонности функции на отрезке является сохранение знака производной.

Отделить корень можно и графически: нарисовать график и указать точки пересечения с осью Ох.

Совершенный метод отделения корней – метод Штурма.

Дихотомия (метод деления отрезка пополам).

1. Пусть $f(x)=0$
   $[x_0, x_1] | \; f(x_0)\cdot f(x_1)\le 0 \Rightarrow$ существует хотя бы один корень на $[x_0, x_1]$;

2. $x_2 \dfrac{x_0 + x_1}{2}$.

Рассмотрим $[x_0, x_1]$ и $[x_1, x_2]$. Из этих двух выберем тот, на концах которого функция $f(x)$ принимает значения разных знаков и поделим его пополам и т.д.

Если нужно найти корень с точностью до ε, то мы продолжаем делить отрезок до тех пор, пока длина отрезка не станет меньше 2ε, тогда середина последнего отрезка дает значение корня с требуемой точностью.

Дихотомия проста и очень надежна: к простому корню она сходится всегда для любой непрерывной функции в том числе и недифференцируемой, при этом она устойчива к ошибкам округления. Скорость сходимости метода дихотомии не велика, т.е. за одну итерацию точность увеличивается вдвое.

Недостатки: прежде чем применить, необходимо найти отрезок, на концах которого функция принимает значения разных знаков. Если на этом отрезке несколько корней, то неизвестно к какому из них сходится дихотомия. Метод не применим к корням четной кратности.

Метод применим к корням нечетной кратности, но хуже устойчив к ошибкам округления. Метод не применим к системам уравнений.

Метод Ньютона. Решение уравнений с одной переменной.

Пусть требуется решить уравнение $F(x)=0$ (1), где функция $F(x)\in C^{(2)}_{[a,b]}$ – дважды непрерывно-дифференцируема на $[a,b]$; $F'(x)\neq 0$ на $[a,b]$ и $F''(x)\neq 0$ и $F(a)F(b)<0$.

Из этих условий вытекает, что на $[a,b]$ функция имеет только один корень.

Прежде, чем использовать итерации, необходимо (1) привести к виду $x=f(x)$.

$f(x)=x-\psi(x)F(x)$.

Функция $\psi(x)$ непрерывная в окрестности корня x^* уравнения (1). Следовательно, уравнение (1) и уравнение $x=x-\psi(x)f(x)$ (2) будут иметь один и тот же корень x^*.

В качестве $\psi(x)$ выберем $\psi(x) = \dfrac{1}{F'(x)}$, тогда $x = x - \dfrac{F(x)}{F'(x)}$ (3)

Выберем начальное приближение x_0 достаточно близкое к x^*. Остальные приближения получаются по формуле:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} \quad (4)$$

Метод, определенный (4), называется ***методом Ньютона.***

Докажем, что метод Ньютона сходится и получим его оценку погрешности.

Если дано, что $|x_{n+1} - x^*| = \theta |x_n - x^*|^k$, где θ – символ Ландау:

- если k=1, то скорость сходимости линейная;
- если k=2, то скорость – квадратичная;
- если k=3, то скорость – кубическая;
- если k>1, то сходимость метода сверхлинейная.

Докажем, что (4) сходится.

Для этого покажем, что отображение $f(x)$ – сжатие, где $f(x) = x - \dfrac{F(x)}{F'(x)}$.

$$f'(x) = 1 - \frac{[F'(x)]^2 - F(x)F''(x)}{[F'(x)]^2} = \frac{F(x)F''(x)}{[F'(x)]^2}.$$

При $x = x^*$ получим

$$f'(x^*) = \frac{F(x^*)F''(x^*)}{[F''(x)]^2} = 0.$$

По непрерывности функции $f(x)$ на $[a,b]$ существует такая окрестность точки x^*, что для $\forall x \in U_{x^*}$, $|f'(x^*)| \le q < 1$, а этом сжатие.

Поэтому к отображению f можно применить принцип сжатыхотображений.

Если выбрать $x_0 \in U_{x^*}$, то $x_{n+1} = x_n - \dfrac{F(x_n)}{F'(x_n)}$ будет сходиться к точному решению x^* уравнения (1)., т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x^*$.

Заметим, что метод (4) будет сходиться, если начальное приближение x_0 будем выбирать из окрестности U_{x^*}

$$x_0 \in U_{x^*},\ F(x_0)F''(x_0) > 0.$$

Докажем, что метод Ньютона сходится.

Определим скорость сходимости метода Ньютона. Для этого $F(x)$ разложим в ряд Тейлора в точке x_n.

$$F(x) = F(x_n) + F'(x_n)(x - x_n) + \frac{F''(\xi)}{2!}(x - x_n)^2, \xi \in (x, x_n).$$

При $x = x^*$ имеем $F(x^*) = 0$. Поэтому

$$0 = F(x_n) + F'(x_n)(x^* - x_n) + \frac{F''(\xi)}{2!}(x^* - x_n)^2$$

Выразим $\frac{F(x_n)}{F'(x_n)} = (x_n - x^*) - \frac{F''(\xi)}{2!F'(x_n)}(x^* - x_n)^2$ (5)

$$x_{n+1} = x_n - \frac{F(x_n)}{F'(x_n)} = x_n - x_n + x^* + \frac{F''(\xi)}{2!F''(x_n)}(x^* - x_n)^2 = x_{n+1} - x^* = \frac{F''(\xi)}{2!F'(x_n)}(x_n - x^*)^2$$

Обозначим через $M_2 = \max\limits_{[a,b]}|F''(\xi)|$, $m_1 = \min\limits_{[a,b]}|F'(x)|$

$$|x_{n+1} - x^*| \le \frac{M_2}{2m_1}|x_n - x^*|^2 \quad (6)$$

$k = 2$, скорость сходимости метода Ньютона квадратичная, $\theta = \frac{M_2}{2m_1}$.

Потребуем, чтобы начальное условие x_0 выбиралось из условия

$$\frac{M_2}{2m_1}|x_0 - x^*| \le c < 1 \quad (7)$$

Тогда из (6) получим

$$|x_1 - x^*| \le \frac{M_2}{2m_1}|x_0 - x^*|^2 \le \frac{M_2}{2m_1}\left(\frac{2m_1 c}{M_2}\right)^2 = \frac{2m_1}{M_2}c^2$$

$$|x_2 - x^*| \le \frac{M_2}{2m_1}|x_1 - x^*|^2 \le \frac{M_2}{2m_1}\left(\frac{2m_1}{M_2}c^2\right)^2 = \frac{2m_1}{M_2}\left(c^2\right)^2$$

$|x_n - x^*| \le \frac{2m_1}{M_2}(c^2)^2$ - ***оценка погрешности.***

Метод Ньютона имеет квадратичную скорость сходимости. Это означает, что при переходе от одной итерации к другой количество верных знаков удваивается в последующем приближении.

Достоинство: высокая скорость сходимости, легко программируется на ЭВМ.

Недостатки: узкая область сходимости.

Если будем решать операторное уравнение $F(x) = 0$, то на каждом шаге необходимо находить значение обратного оператора $\left[F'(x_m)\right]^{-1}$.

Геометрический смысл метода Ньютона.

Пусть требуется решить уравнение $F(x)=0$ и единственный корень этого уравнения находится на $[a,b]$.

В точке $A(a, f(a))$ проведем касательную к графику функции $y = f(x)$, уравнение касательной: $y = F(a)+F'(a)(x-a)$.

Если $F'(a)\neq 0$, то

$x_1 = a-\dfrac{F(a)}{F'(a)}$ – первое приближение к $x*$ уравнения (1) по методу Ньютона.

Возьмем $A_1(x_1, f(x_1))$ и проведем касательную в этой точке. Получим $y = F(x_1)+F'(x_1)(x-x_1)$.

Если $F'(x_1)\neq 0$, то

$x_2 = x_1-\dfrac{F(x_1)}{F'(x_1)}$ – второе приближение к $x*$ уравнения (1) по методу Ньютона.

И так далее. Отсюда метод Ньютона называют ***методом касательных.***

Метод хорд. Метод секущих.

По прежнему решаем уравнение $F(x)=0$ (1), где $F(x)\in C^{(2)}_{[a,b]}$, $F'(x)\neq 0$ на $[a,b]$ и $F(a)F(b)<0$.

Т.е. на $[a,b]$ (1) имеет только один корень.

Уравнение (1) запишем в виде $x = f(x)$, где $f(x)=x-\psi(x)F(x)$. Возьмем в качестве $\psi(x)=\dfrac{x-x_0}{F(x)-F(x_0)}$, где x_0 удовлетворяет условию $F(x_0)F''(x_0) > 0$, $x_0\in[a,b]$.

Тогда итерационный метод $x_{n+1} = f(x_n)$ запишется следующим образом:

$$x_{n+1} = x_n-\frac{x_n-x_0}{F(x_n)-F(x_0)}F(x_n)$$ – ***метод хорд.***

Докажем, что метод хорд сходится. Для этого необходимо показать, что $f(x)=x-\dfrac{x-x_0}{F(x)-F(x_0)}F(x)$.

$$f'(x)=1-\left(\frac{x-x_0}{F(x)-F(x_0)}\right)'F(x)-\left(\frac{x-x_0}{F(x)-F(x_0)}\right)F'(x)$$

$x = x*$

$$f'(x^*) = 1 - \left(\frac{x^* - x_0}{F(x^*) - F(x_0)}\right)' F(x^*) - \left(\frac{x^* - x_0}{F(x^*) - F(x_0)}\right) F'(x^*) = [F(x^*) = 0] =$$

$$= \frac{F(x_0) + (x^* - x_0)F'(x^*)}{F(x_0)}$$

Разложим $F(x)$ в ряд Тейлора

$$F(x) = F(x^*) + F'(x^*)(x - x^*) + \frac{F''(c)}{2!}(x - x^*)^2 .$$

Рассмотрим при $x = x_0, c \in (x, x^*)$.

$$F(x_0) = F(x^*) + F'(x^*)(x_0 - x^*) + \frac{F''(c)}{2!}(x_0 - x^*)^2$$

$$F(x_0) + (x^* - x_0)F'(x^*) = \frac{F''(c)}{2!}(x_0 - x^*)^2$$

$$f'(x^*) = \frac{F''(c)}{2! F(x_0)}(x_0 - x^*)^2 .$$

Обозначим через $M_2 = \max\limits_{[a,b]} |F''(x)|$

$$|f'(x^*)| \le \frac{M_2}{2!|F'(x_0)|}(x_0 - x)^2 \underset{x_0 \to x^*}{\to} 0$$

Т.е. $f'(x^*) = 0$.

$\exists U_{x^*} \forall x \in U_{x^*}, |f'(x) \le q < 1|$.

Следовательно, $f(x)$ – сжатие и по принципу Банаха метод хорд сходится.

Получим оценку погрешности для метода хорд

$F(x_n) = F(x_n) - F(x^*) = [\text{теорема о среднем}] = F'(\xi)(x_n - x^*), \xi \in (x_n, x^*)$

Так как $F'(x) \ne 0$ на $[a,b]$, то

$$x_n - x^* = \frac{F(x_n)}{F'(\xi)} .$$

Обозначим через $m_1 = \min|F'(x)| \Rightarrow |x_n - x^*| \le \frac{|F(x_n)|}{m_1}$ - ***оценка погрешности для метода хорд.***

Сходимость методы хорд – линейная.

Достоинство метода хорд – легкость программирования на ЭВМ.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_0}{F(x_n) - F(x_0)} F(x_n)$$ – ***общий вид метода хорд.***

Общий вид упростится:

- При условии $F''(x)F(b) > 0$, то $x_0 = a$, $x_{n+1} = \dfrac{bF(x_n) - x_n F(b)}{F(x_n) - F(b)}$;
- При условии $F''(x)F(a) > 0$, то $x_0 = b$, $x_{n+1} = \dfrac{aF(x_n) - x_n F(a)}{F(x_n) - F(a)}$.

Метод секущих.

Метод секущих имеет вид:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - x_{n-1}}{F(x_n) - F(x_{n-1})} F(x_n).$$

Скорость сходимости – сверхлинейная.

$$|x_{n+1} - x^*| = \theta |x_n - x^*|^k, k = \frac{\sqrt{5}+1}{2}.$$

Метод секущих сходится быстрее метода хорд и метода простой итерации.

Раздел 3. Теория комплексных чисел

Тема 3.1 Теория комплексных чисел

Комплексные числа.

Как известно из школьного курса, уравнение вида $x^2 + a = 0$ не имеет действительных корней, но существует необходимость решать уравнения такого вида. Для этого придумали так называемые «комплексные числа».

Для определения комплексных чисел сначала введем некоторый символ *i*, который назовем *мнимой единицей*. Этому символу приписывается свойство удовлетворять уравнению $x^2 + 1 = 0$: $i^2 + 1 = 0$, или $i^2 = -1$; $i = \sqrt{-1}$.

При этом $i^1 = i,\ i^3 = i^2 \cdot i = -i,\ i^4 = i^3 \cdot i = 1,\ i^5 = i, \ldots$.

Комплексным числомzназывается выражение $z = a + ib$, где *a*и *b* – действительные числа. При этом число *a* называется *действительной частью* числа *z* (*a* = *Rez*), а *b*– *мнимой частью*(*b* = *Im z*).

Например, *z* = 2 + 3*i*, *Rez* = 2, *Imz* = 3; *z* = –15 + *i*, *Rez* = –15, *Imz* =1.

Если *a* =*Rez* =0, то число *z* будет чисто мнимым, если *b* = *Imz* = 0, то число *z* будет действительным.

Числа $z = a + ib$ и $\bar{z} = a - ib$называются *комплексно-сопряженными*. Например, *z* = –2 + 3*i*, $\bar{z}$ = –2 – 3*i*; *z* = 1 – *i*, $\bar{z}$ = 1 + *i*

Два комплексных числа $z_1 = a_1 + ib_1$ и $z_2 = a_2 + ib_2$ называются равными, если соответственно равны их действительные и мнимые части: $a_1 = a_2; \quad b_1 = b_2;$

Множество комплексных чисел – неупорядоченное множество, т.е. из двух комплексных чисел нельзя указать последующее и предыдущее. Между двумя комплексными числами нельзя поставить знаки неравенства > или <.

Комплексное число равно нулю, если соответственно равны нулю действительная и мнимая части: $a = b = 0.$

Действия с комплексными числами.

1) $z = z_1 \pm z_2 = (a_1 + ib_1) \pm (a_2 + ib_2) = (a_1 \pm a_2) + i(b_1 \pm b_2)$

2)

$$z = z_1 z_2 = (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1a_2 + ia_1b_2 + ib_1a_2 + i^2b_1b_2 = (a_1a_2 - b_1b_2) + i(a_1b_2 + b_1a_2)$$

3) $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2} = x + iy$ или

$$z = \frac{(a_1 + ib_1)(a_2 - ib_2)}{(a_2 + ib_2)(a_2 - ib_2)} = \frac{(a_1a_2 + b_1b_2) + i(a_2b_1 - a_1b_2)}{a_2^2 + b_2^2} = \frac{a_1a_2 + b_1b_2}{a_2^2 + b_2^2} + i\frac{a_2b_1 - a_1b_2}{a_2^2 + b_2^2}$$

ПРИМЕР 1. Дано $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 3 - 5i$. Найти $z_1 + z_2$.

$z_1 + z_2 = -1 + 2i + 3 - 5i = 2 - 3i$

ПРИМЕР 2. Дано $z_1 = 2 + 3i$, $z_2 = -1 + i$. Найти $z_1 - z_2$.

$z_1 - z_2 = 2 + 3i - (-1 + i) = 2 + 3i + 1 - i = 3 + 2i$

ПРИМЕР 3. Дано $z_1 = -1 + 2i$, $z_2 = 3 - 5i$. Найти $z_1 \cdot z_2$.

$z_1 \cdot z_2 = (-1 + 2i)\cdot(3 - 5i) = -3 + 6i + 5i - 10i^2 = -3 + 10 + 11i = 7 + 11i.$

ПРИМЕР 4. Дано $z = 2 - i$, $\bar{z} = 2 + i$. Найти $z \cdot \bar{z}$.

$z \cdot \bar{z} = (2 - i)\cdot(2 + i) = 2^2 - i^2 = 4 + 1 = 5.$

ПРИМЕР 5. Дано $z_1 = 1 + i$, $z_2 = 2 - 3i$. Найти $z = \dfrac{z_1}{z_2}$.

$$z = \frac{1+i}{2-3i} = \frac{(1+i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{2+2i+3i+3i^2}{4+9} = \frac{2+5i-3}{13} = \frac{-1+5i}{13} = \frac{-1}{13} + \frac{5}{13}i$$

Решение квадратных уравнений.

Корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ с действительными коэффициентами, у которого $D = b^2 - 4ac < 0$, находятся по формулам:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$$

Корни биквадратного уравнения $x^4 + px^2 + q = 0$ с действительными коэффициентами, у которого $D = p^2 - 4q < 0$, находятся по формулам:

$$x_{1,2} = \frac{\sqrt{2\sqrt{q} - p} \pm i\sqrt{2\sqrt{q} + p}}{2} \quad x_{3,4} = \frac{-\sqrt{2\sqrt{q} - p} \pm i\sqrt{2\sqrt{q} + p}}{2}$$

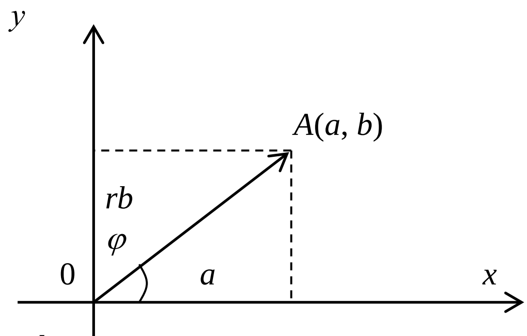
Если квадратное уравнение имеет комплексные коэффициенты, тогда дискриминант тоже будет комплексным числом, и для нахождения корня из дискриминанта можно воспользоваться формулой:

$$\sqrt{a \pm bi} = \pm\left[\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} + a}{2}} + i \cdot signb\sqrt{\frac{\sqrt{a^2 + b^2} - a}{2}}\right], \text{где } signb = \begin{cases} 1, \text{если } b > 0, \\ -1, \text{если } b < 0, \\ 0, \text{если } b = 0. \end{cases}$$

ПРИМЕР 6. Найти корни уравнения $x^2 + x + 1 = 0$.

Тригонометрическая форма числа.

Если любое действительное число может быть геометрически представлено в виде точки на числовой прямой, то комплексное число представляется точкой на плоскости, координатами которой будут соответственно действительная и мнимая части комплексного числа. При этом горизонтальная ось будет являться действительной числовой осью, а вертикальная – мнимой осью.



Таким образом, $a = r\cos\varphi;\quad b = r\sin\varphi$. Тогда комплексное число можно представить в виде:

$$z = a + ib = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

Такая форма записи называется *тригонометрической формой записи комплексного числа.* При этом величина *r* называется *модулем*комплексного числа, а угол наклона φ – *аргументом*комплексного числа.

$r = |z|;\quad \varphi = Arg\, z$ или $r = |a + ib| = \sqrt{a^2 + b^2};\quad \varphi = Arg\, z = arctg\dfrac{b}{a};$

Действия с комплексными числами в тригонометрической форме.

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$, $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$.

1) $z = z_1 z_2 = r_1 r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

2) $z = \dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

3) $z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$ или в общем случае $z^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi)$, где *n* – целое положительное число. Это выражение называется *формулой Муавра.*

4) Извлечение корня из комплексного числа.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),$$

где $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1$

ПРИМЕР 7. Для числа $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ найти тригонометрическую форму, найти z^{20}, найти корни уравнения $w^3 + z = 0$.

Решение. Число $z = 2 - 2\sqrt{3}i$ представим в виде $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где

$$r = |z| = \sqrt{4 + 12} = 4;\qquad \varphi = arctg\frac{b}{a} = arctg\left(-\sqrt{3}\right) = -60^0$$

Тогда $z = 4(\cos 60^0 - i\sin 60^0)$.

Для нахождения z^{20} воспользуемся формулой Муавра.

$$z^{20} = 4^{20}(\cos 1200^0 - i\sin 1200^0) = 4^{20}(\cos(3\cdot 2\pi + 120^0) - i\sin(3\cdot 2\pi + 120^0)) =$$

$$= 4^{20}(\cos 120^0 - i\sin 120^0) = -4^{20}\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right).$$

Если $w^3 - z = 0$, то $w = \sqrt[3]{z}$

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{3}\right) = \sqrt[3]{4}\left(\cos\frac{-60^0 + 2\pi k}{3} + i\sin\frac{-60^0 + 2\pi k}{3}\right); \quad k \in Z.$$

<u>ПРИМЕР 8</u>. Даны числа $z_1 = 1 - \dfrac{7}{2}i; \quad z_2 = -7 - 2i$. Найти $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^{-4}$.

$$\left(\frac{z_1}{z_2}\right)^{-4} = \left(\frac{1 - \frac{7}{2}i}{-7 - 2i}\right)^{-4} = \left(\frac{2 - 7i}{-14 - 4i}\right)^{-4} = \left(\frac{-14 - 4i}{2 - 7i}\right)^{4} = 16\left(\frac{-7 - 2i}{2 - 7i}\right)^{4}$$

Далее производим деление двух комплексных чисел:

$$\frac{-7 - 2i}{2 - 7i} = \frac{(-7 - 2i)(2 + 7i)}{(2 - 7i)(2 + 7i)} = \frac{-14 - 49i - 4i + 14}{4 + 49} = \frac{-53i}{53} = -i.$$

Получаем значение заданного выражения: $16(-i)^4 = 16i^4 = 16$.

Понятие функции комплексного переменного

Определение 1. Пусть *G* область в комплексной плоскости *C*. Если каждой точке $z \in G$ поставить в соответствие единственное комплексное число ω, то говорят, что на области $G \in C$ задана однозначная функция комплексного переменного и обозначается $\omega = f(z)$. Область *G* называется областью определения функции, *z* – аргумент функции, ω – значение функции в точке *z*.

Если каждому *z* ставится в соответствие несколько значений ω, то на области $G \in C$ задана многозначная функция комплексного переменного.

Например, $\omega = z^2$ – однозначная функция; $\omega = \mathrm{Arg}\, z$ – многозначная функция.

Замечание. Так как задание комплексного числа *z* равносильно заданию двух действительных переменных *x* и *y*, то числу ω тоже соответствуют два действительных числа *u* и *v*: $\omega = u + iv; \quad u = \mathrm{Re}\, z, v = \mathrm{Im}\, z.$ Тогда зависимость $\omega = f(z)$ равносильна двум зависимостям u = u(x,y), v = v(x,y), т. е. комплексная функция комплексного переменного определяется двумя действительными функциями двух действительных переменных: $\omega = u(x,y) + iv(x,y).$

Пример 1. Найти действительную $\mathrm{Re}\,\omega$ и мнимую $\mathrm{Im}\,\omega$ части значений функций:

а) $\omega = z^2$; б) $\omega = e^{z^2}$.

Решение.

а) Запишем комплексное число z в алгебраической форме: $\omega = (x + iy)^2 \Rightarrow$

$$\Rightarrow x^2 + 2ixy - y^2 \Rightarrow u(x,y) = x^2 - y^2, v(x,y) = 2xy.$$

Таким образом $\mathrm{Re}\,\omega = x^2 - y^2, \mathrm{Im}\,\omega = 2xy$.

б) Запишем комплексное число z в алгебраической форме:

$$\omega = e^{z^2} = e^{(x+yi)^2} = e^{x^2 - y^2 + i2xy} = e^{x^2 - y^2} \cdot e^{i2xy} = e^{x^2 - y^2}(\cos 2xy + i\sin 2xy).$$

Поэтому $\mathrm{Re}\, e^{z^2} = e^{x^2 - y^2}\cos 2xy$, $\mathrm{Im}\, e^{z^2} = e^{x^2 - y^2}\sin 2xy$.

Определение 2. Число $\omega_0 = u_0 + iv_0$ будем называть пределом функции $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$, если $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u_0$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v_0$ и обозначать $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \omega_0$.

Определение 3. Функция $\omega = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0, если $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$, т. е. $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x,y) = u(x_0,y_0)$, $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x,y) = v(x_0,y_0)$.

Например, функция $f(z) = \dfrac{1}{z}$ непрерывна во всех точках комплексной плоскости, кроме z = 0, так как f(0) не существует, а в остальных точках $f(z_0) = \dfrac{1}{z_0}$ *и* $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \dfrac{1}{z_0}$.

Элементарные функции комплексного переменного

Вводимые в алгебре определения трансцендентных функций $a^x, \sin x, \ldots$ теряют смысл, когда x заменяется комплексной переменной z. Принимая во внимание известные для действительных значений x разложения трансцендентных функций в степенной ряд, будем полагать по определению

$$e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots; \qquad (1.21)$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} + \ldots; \qquad (1.22)$$

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \frac{z^6}{6!} + \ldots + (-1)^n \frac{z^{2n}}{(2n)!} + \ldots. \qquad (1.23)$$

По известной теореме Абеля степенные ряды, стоящие в правой части равенств (1.21)–(1.23), сходятся в круге с центром $z_0 = 0$ и радиусом R: $R = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{|c_n|}{|c_{n+1}|}$. Здесь c_n – коэффициенты степенного ряда.

Определим радиус сходимости, например, для ряда (1.21): $c_n = \dfrac{1}{n!}$.

Тогда $R = \lim\limits_{n \to \infty} \dfrac{(n+1)!}{n!} = \lim\limits_{n \to \infty} (n+1) = \infty$. Для рядов (1.22) и (1.23) также $R = \infty$. Таким образом, степенные ряды в правой части равенств (1.21)–(1.23) сходятся на всей комплексной плоскости. Следовательно, равенства (1.21)–(1.23) определяют во всей комплексной плоскости функции e^z, $\sin z$, $\cos z$, которые при действительных значениях z совпадают с соответствующими функциями действительного переменного.

По формуле (1.21) определим

$$e^{iz} = 1 + iz - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \ldots; \qquad e^{-iz} = 1 - iz - \frac{z^2}{2!} + \frac{iz^3}{3!} + \ldots. \tag{1.24}$$

Тогда, складывая и вычитая эти функции, получим известные формулы Эйлера для функций комплексного переменного:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}; \tag{1.25}$$

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}; \tag{1.26}$$

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z; \tag{1.27}$$

$$e^{-iz} = \cos z - i \sin z. \tag{1.28}$$

Справедливы следующие свойства этих функций:

Свойство 1. $e^{z_1 + z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

Тогда $e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} e^{iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)$, x, y – действительные числа.

Свойство 2. $e^{z+2i\pi} = e^{x+i(y+2\pi)} = e^{x}(\cos(y+2\pi) + i\sin(y+2\pi)) = e^{x} e^{iy} = e^{z}$, т. е. функция 2pi периодическая.

Свойство 3. $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$.

Свойство 4. $\cos(z + 2\pi) = \cos z, \quad \sin(z + 2\pi) = \sin z$.

(Свойства 3 и 4 доказать самостоятельно.)

Функции tqz, ctqz и гиперболические функции определяются равенствами:

$$tqz = \frac{\sin z}{\cos z} = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{i(e^{iz} + e^{-iz})}; \tag{1.29}$$

$$ctqz = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{i(e^{iz} + e^{-iz})}{e^{iz} - e^{-iz}}; \tag{1.30}$$

$$shz = \frac{e^{z} - e^{-z}}{2}; \tag{1.31}$$

$$chz = \frac{e^{z} + e^{-z}}{2}; \tag{1.32}$$

$$thz = \frac{shz}{chz}; \tag{1.33}$$

$$cthz = \frac{chz}{shz}. \qquad (1.34)$$

Свойство 5. $shz = -i\sin(iz),\ chz = \cos(iz),\ thz = -itg(iz),\ cthz = ictgz$ доказать самостоятельно.

Пример 2. Найти: 1) $\sin(1-i)$; 2) $tg(i)$; 3) $\sin(\pi+i)$.

Решение.

1) Используя формулу (1.27), получаем:

$$\sin(1-i) = \frac{e^{i(1-i)} - e^{-i(1-i)}}{2i} = \frac{ee^{i} - e^{-1}e^{-i}}{2i} = \frac{e(\cos1 + i\sin1) - e^{-1}(\cos1 - i\sin1)}{2i} =$$

$$= \frac{e\cos1 - e^{-1}\cos1 + i(e\sin1 + e^{-1}\sin1)}{2i} = \frac{e\sin1 + e^{-1}\sin1}{2} + i\frac{e^{-1}\cos1 - e\cos1}{2} =$$

$$= \sin1\frac{e+e^{-1}}{2} - i\cos1\frac{e-e^{-1}}{2} = \sin1ch1 - i\cos1sh1.$$

2) Используем определение функции $thz = \frac{shz}{chz}$ и свойство 5:

$$tgi = \frac{\sin i}{\cos i} = \frac{ish1}{ch1} = ith1 = \frac{sh1}{ch1} = \frac{e^{1} - e^{-1}}{e^{1} + e^{-1}} = \frac{e^{2} - 1}{e^{2} + 1}.$$

3) Пользуясь формулой (1.26), получим

$$\sin(\pi+i) = \frac{1}{2i}(e^{i(\pi+i)} - e^{-i(\pi+i)}) = \frac{1}{2i}(e^{-1+i\pi} - e^{1-i\pi}) = \frac{1}{2i}(e^{-1}e^{i\pi} - e^{1}e^{-i\pi}) =$$

$$= \frac{1}{2i}(e^{-1}(\cos\pi + i\sin\pi) - e^{1}(\cos(-\pi) + i\sin(-\pi))) = \frac{1}{2i}(e^{-1}\cdot(-1+0) - e^{1}\cdot(-1+0)) =$$

$$= \frac{1}{i}\cdot\frac{e^{1} - e^{-1}}{2} = -i\cdot sh1.$$

Логарифмическую функцию определяем как функцию, обратную показательной: если $z = e^{\omega}, z \neq 0,$ то w называется логарифмом числа *z* и обозначается $\omega = Lnz.$ Причем

$$Lnz = \ln|z| + iArqz = \ln|z| + iarqz + 2k\pi i,\ k = 0, \pm1, \pm2, ... \qquad (1.35)$$

Так как Arq z – многозначная функция, то и Ln z тоже многозначная функция. *Главным значением логарифма* числа *z* называется то значение, которое соответствует главному значению аргумента числа *z* и обозначается

$$\ln z = \ln|z| + i\arg z. \qquad (1.36)$$

Свойство 6. $Ln(z_1z_2) = Lnz_1 + Lnz_2$.

Свойство 7. $Ln\frac{z_1}{z_2} = Lnz_1 - Lnz_2.$

Свойство 8. $\mathrm{Ln}(z^n) = n\mathrm{Ln}z + 2k\pi i,\ k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Показательную функцию для любого основания a определим из основного тождества: $e^{\mathrm{Ln}a} = a$, тогда

$$a^z = e^{z\mathrm{Ln}a}. \qquad (1.37)$$

Из этого же тождества можно определить и *степенную функцию* для любого комплексного показателя степени

$$z^\alpha = e^{\alpha \mathrm{Ln}z}. \qquad (1.38)$$

Обратные тригонометрические функции определяются равенствами:

$$\arcsin z = -i\mathrm{Ln}\left(iz \pm \sqrt{1-z^2}\right); \qquad (1.39)$$

$$\arccos z = -i\mathrm{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right); \qquad (1.40)$$

$$\mathrm{arctq}z = -\frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+iz}{1-iz}; \qquad (1.41)$$

$$\mathrm{arcctq}z = \frac{i}{2}\mathrm{Ln}\frac{z-i}{z+i}; \qquad (1.42)$$

$$\mathrm{arcsh}z = \mathrm{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2+1}\right); \qquad (1.43)$$

$$\mathrm{arcch}z = \mathrm{Ln}\left(z \pm \sqrt{z^2-1}\right); \qquad (1.44)$$

$$\mathrm{arcth}z = \frac{1}{2}\mathrm{Ln}\frac{1+z}{1-z}, z \neq \pm 1. \qquad (1.45)$$

Пример 3. Найти Lni.

Решение.

$$\mathrm{Ln}i = \ln|i| + i\arg i + 2k\pi i = \ln 1 + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i = i\pi\left(\frac{1}{2} + 2ki\right), k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots.$$

Замечание. Элементарные функции комплексного переменного являются аналитическими во всех точках области определения, а следовательно, имеют производные в каждой точке области определения, причем производные элементарных функций комплексного переменного можно вычислить, используя таблицу производных и правила дифференцирования соответствующих функций действительного переменного, например, $\left(\cos(z^2)\right)' = -2z\sin(z^2)$.

Раздел 4. Дискретная математика
Тема 4.1. Дискретная математика
1. Множества
1.1. Множества и их элементы
Математическим понятием, отражающим объединение некоторых объектов, предметов или понятий в единую совокупность, является ***понятие множества***. Это понятие в математике является неопределяемым. Под множеством мы будем понимать совокупность элементов любой природы, поддающихся счету.
Приведем примеры множеств: 1) множество всех деревьев в лесу, 2) множество всех натуральных чисел, 3) множество студентов данного института.
Объекты, образующие данное множество, называются его ***элементами***. Например, число 9 – элемент множества натуральных чисел, а число 3/4 не является элементом множества натуральных чисел.
Обычно множества обозначаются латинскими прописными буквамиA, B, C, D,X, Y, Z, Wи т.д., а их элементы – строчными буквами a, b, c, d, x, y, z, wи т.д. То, что объект a является элементом множества А, записывают так: $a \in A$(читают: a принадлежит множеству A). Если объект a не является элементом множестваA, то пишут: $a \notin A$(читают: a не принадлежит множеству A),
МножестваAи B называются***равными***, если они содержат одни и те же элементы. Равенство множествAи B записывают в виде $A=B$.
Различают множества конечные и бесконечные. ***Конечным***называется множество, состоящее из конечного числа элементов. Среди конечных множеств выделяют множество, не имеющее ни одного элемента. Его называют ***пустым***множеством и обозначают символом Ø.
Множество, не являющееся конечным, называется ***бесконечным***множеством.
Имеется два различных способа задания множества. Первый способ состоит в том, что множество задается указанием всех его элементов. В этом случае говорят, что множество задано ***перечислением всех своих элементов,*** или списком элементов. В математике элементы множества, заданного перечислением всех своих элементов, принято заключать в фигурные скобки и разделять точками с запятыми.
Ясно, что перечислением элементов можно задать лишь конечные множества. И даже для них это не всегда легко сделать (в том случае, если элементов очень большое количество).
Второй способ задания множеств применим как к конечным, так и к бесконечным множествам. Он состоит в том, что указывается свойство, которым обладают все элементы рассматриваемого множества и не обладают никакие другие объекты. Такое свойство называется ***характеристическим свойством***множества. Если множество A задано характеристическим свойством P,то пишут: $A=\{x|\ P(x)\}$.Эту запись читают так: множествоAсостоит из тех и только тех элементов, которые обладают свойством P.
Множества могут состоять из объектов самой различной природы. Их элементами могут быть буквы, атомы, числа, уравнения, точки, углы и т.д. Очень часто встречаются ***числовые множества,*** то есть множества, элементами которых являются числа. Например:
R - множество действительных чисел;
Q - множество рациональных чисел;
Z - множество целых чисел;
N - множество натуральных чисел.
Если множествоAне является пустым множеством, то из него можно образовать другие множества, являющиеся его частями. Так, множество четных чисел, множество простых чисел, множество чисел, кратных трем, - все это различные части множества натуральных чисел.
В математике вместо слова «часть» используют слово «***подмножество***» и говорят, что множествоBявляется подмножеством множества A, если каждый элемент из множества B является вместе с тем и элементом множества А. В этом случае пишут: $B \subset A$.
Если множествоBявляется подмножеством множества A($B \subset A$),то принадлежность элемента x множеству B является достаточным условием его принадлежности множеству A, апринадлежность элемента x множеству A - необходимым условием его принадлежности

множеству *B*. Например, если множество *A* - множество четных натуральных чисел, *B* - множество натуральных чисел, кратных 10, то очевидно, что $B \subset A$. Поэтому, для того чтобы натуральное число *n*было четным числом, т.е. $n \in A$, достаточно, чтобы *n* делилось на 10, т.е. $n \in B$.

Сформулируем признак равенства двух множеств: *два множества A и B* ***равны****, если любой элемент, содержащийся в A, обязательно содержится в B и любой элемент, содержащийся в B, обязательно содержится в A, то есть*

$A=B \Leftrightarrow A \subset B$ и $B \subset A$.

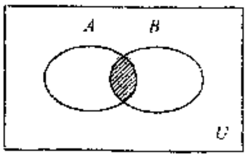
1.2. Операции над множествами

Пусть все рассматриваемые множества являются подмножествами некоторого фиксированного множества, которое назовем ***универсальным***и обозначим буквой *U*. Для наглядности будем изображать его в виде прямоугольника. Для геометрической иллюстрации операций над множествами воспользуемся ***диаграммами Эйлера-Венна***, на которых множества изображаются овалами (или кругами).

Определение**.** ***Пересечением***множеств*A*и *B* называется новое множество, содержащее те и только те элементы, которые входят одновременно и в множество *A,* и в множество *B*. Пересечение множеств*A*и *B* обозначают $A \cap B$.

$A \cap B = \{x : x \in A$ и $x \in B\}$

Геометрическую иллюстрацию операции пересечения множеств*A*и *B* дают диаграммы Эйлера-Венна (рис. 1). На рисунке 1, *а)* заштриховано множество$A \cap B$, на рисунке 1, *б)* множества *A* и *B* не пересекаются, т.е. $A \cap B = \varnothing$.

а)


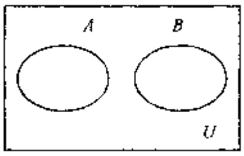
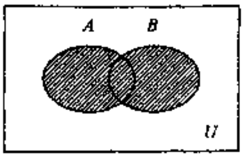
б)


Рис. 1

Определение**.** ***Объединением***множеств*A*и *B* называется новое множество $A \cup B$, состоящее из тех и только тех элементов, которые входят хотя бы в одно из множеств *A* или *B*.

$A \cup B = \{x : x \in A$ или $x \in B\}$

Диаграммы Эйлера-Венна, соответствующие операции объединения множеств*A*и *B,* построены на рисунке 2.

а)


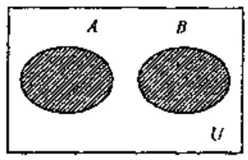
б)


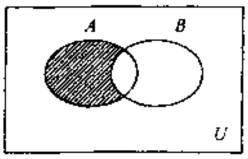
Рис.2

Отметим, что общие элементы множеств*A*и *B* в объединение входят только один раз.

Определение**.** ***Разностью***двух множеств*A*и *B* называют такое множество, в которое входят все элементы из множества *A*, не принадлежащие множеству *B*.

$A \setminus B = \{x : x \in A$и $x \notin B\}$

Разность множеств*A*и *B* обозначают $A \setminus B$. Диаграммы Эйлера-Венна, соответствующие операции вычитания множеств *A* и *B* построены на рисунке 3:

а)


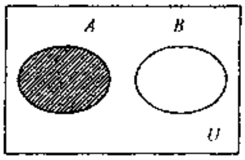
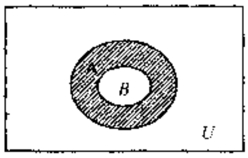
б)


Рис.3

В случае, когда множество*B*есть подмножество множества *A,* разность $A \setminus B$ называют ***дополнением*** *множества B* в множестве *A* и обозначают $C_A B$.

Дополнение множества B в универсальном множестве U обозначают B' или $\overline{B}$. Соответствующие диаграммы Эйлера-Венна построены на рисунке 4. На рисунке 4, *а)* заштриховано множество C_AB, на рисунке 4, *б)* - множество B'.

а) 

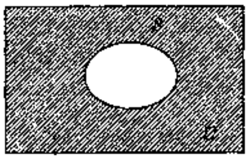
б) 

Рис.4

Алгеброй множеств называется часть теории множеств, в которой изучаются свойства операций над множествами.

Перечислим основные **свойства операций над множествами**:

1) *коммутативность* (перестановочность) объединения и пересечения:
$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A$

2) *ассоциативность* (сочетательность) объединения и пересечения:
$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C),\quad (A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C);$

3) *дистрибутивность* (распределительность) *пересечения* относительно объединения:
$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

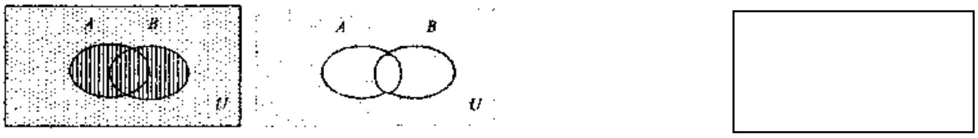
4) *дистрибутивность объединения* относительно пересечения:
$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

5) выполняются равенства: $A\cup\varnothing=A$, $A\cap\varnothing=\varnothing$.

Перечислим способы **доказательства равенства множеств**.

Докажем равенство $(A\cup B)'=A'\cap B'$

1) с помощью диаграмм Эйлера-Венна.



левая часть правая часть

Рис. 5

$A\cup B$- прямая штриховка,
$(A\cup B)'$ - точечная штриховка,
A' -вертикальная штриховка,
B' - горизонтальная штриховка,
$A'\cap B'$ – сетка

Сравнивая чертежи, замечаем, что фигура с точечной штриховкой совпадает с сетчатой фигурой, то есть данные множества равны.

2) с помощью признака равенства множеств.

Пусть $x\in(A\cup B)'$. По определению дополнения множества до универсального множества, это означает $x\in U$, $x\notin A\cup B$, Тогда $x\in U$, $x\notin A$ и $x\notin B\Leftrightarrow x\in A'$ и $x\in B'\Leftrightarrow x\in A'\cap B'$.

Пусть $x\in A'\cap B'$. По определению пересечения множеств это равносильно $x\in A'$ и $x\in B'$. Тогда $x\in U$, $x\notin A$ и $x\notin B\Leftrightarrow x\in U$, $x\notin A\cup B\Leftrightarrow x\in(A\cup B)'$.

Таким образом получили, что любой элемент, содержащийся в левой части, обязательно содержится в правой части и любой элемент, содержащийся в правой части, обязательно содержится в левой части. Согласно признаку равенства двух множеств, следует, что $(A\cup B)'=A'\cap B'$.

2. Алгебра высказываний

2.1. Основные понятия

Изучение математики предполагает умение правильно строить различные математические предложения и делать выводы в процессе рассуждения. Возникшая в XIX в. специальная область науки - математическая логика не только решила проблему создания теории математического доказательства, но и оказала большое влияние на развитие математики в целом.

Необходимо различать появившуюся еще в глубокой древности *формальную логику* (логику Аристотеля) и *математическую логику,* возникшую в 1847 г. в работах английского математика *Дж. Буля.*

Основным понятием математической логики является понятие *высказывания. Под* ***высказыванием*** *будем понимать повествовательное предложение, относительно которого можно сказать, истинно оно или ложно.* Любое высказывание бывает либо истинным, либо ложным; быть одновременно и тем и другим оно не может.

В дальнейшем будем обозначать высказывания заглавными латинскими буквами: *A, B,* C,... .

2.2. Операции над высказываниями

Логическая операция — способ построения сложного высказывания из данных высказываний, при котором значение истинности сложного высказывания полностью определяется значениями истинности исходных высказываний.

Инверсия (логическое ***отрицание***) образуется из высказывания с помощьюдобавления частицы «не» к сказуемому или использования оборота речи «неверно, что...».

Обозначение инверсии: НЕ A; $\neg A$; $\overline{A}$;NOTA. Инверсия высказывания *истинна, когда высказывание ложно, и ложна, когда высказывание истинно*. Эта зависимость может быть записана в виде таблицы, называемой *таблицей истинности.*

A	$\overline{A}$
и	*л*
л	*и*

A	$\overline{A}$
0	1
1	0

В этой таблице буквами «*и*» и «*л*» обозначены соответственно истинность или ложность высказыванийAи A.

В теории множеств логическому *отрицанию* соответствует операция *дополнения к множеству.*

Конъюнкция (логическое ***умножение***) образуется соединением двух высказываний в одно с помощью союза «и».

Обозначение конъюнкции: A И B; $A \wedge B$; A & B; $A \bullet B$; AANDB. Конъюнкция двух высказываний *истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны, и ложна, когда хотя бы одно высказывание ложно*.

A	B	$A \wedge B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*л*
л	*л*	*л*

A	B	$A \wedge B$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

В теории множеств *конъюнкция* соответствует операции *пересечения множеств.*

Дизъюнкция (логическое ***сложение***) образуется соединением двух высказываний в одно с помощью союза «или».Обозначение дизъюнкции: *A* ИЛИ *B*; $A \mid B$; $A \vee B$; $A + B$.
Дизъюнкция двух высказываний *ложна тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны, и истинна, когда хотя бы одно высказывание истинно.*

A	*B*	$A \vee B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*и*
л	*и*	*и*
л	*л*	*л*

A	*B*	$A \vee B$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

В теории множеств *дизъюнкция* соответствует операции *объединения множеств.*
Импликация (логическое ***следование***) образуется соединением двух высказываний в одно с помощью оборота речи «если..., то...». Она обычно используется в формулировках теорем.
Обозначение импликации: $A \rightarrow B$; $A \Rightarrow B$ (читается «из*A*следует *B*»). Импликация двух высказываний *ложна тогда и только тогда, когда из истинного высказывания следует ложное.*

A	*B*	$A \rightarrow B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*и*
л	*л*	*и*

A	*B*	$A \rightarrow B$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Первые две строки таблицы хорошо отвечают здравому смыслу в рассуждениях; последние две можно интерпретировать, как «изо лжи следует всё, что угодно».
Эквивалентность (логическое ***равенство***) образуется соединением двух высказываний в одно при помощи оборота речи «... тогда и только тогда, когда...».
Обозначение эквивалентности: $A \equiv B$; $A \Leftrightarrow B$; $A \sim B$. Эквивалентность двух высказываний *истинна тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны или оба ложны.*

A	*B*	$A \leftrightarrow B$
и	*и*	*и*
и	*л*	*л*
л	*и*	*л*
л	*л*	*и*

A	*B*	$A \leftrightarrow B$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Этой операции соответствуют связки «тогда и только тогда», «те и только те», «необходимо и достаточно» и т.п.

Опорный конспект «Свойства логических операций»

<table>
<tr><td>Инверсия истинна</td><td rowspan="5">тогда и только тогда, когда</td><td>высказывание ложно</td></tr>
<tr><td>Дизъюнкция ложна
Конъюнкция истинна</td><td>оба высказывания ложны / истинны</td></tr>
<tr><td>Дизъюнкция истинна
Конъюнкция ложна</td><td>хотя бы одно высказывание истинно / ложно</td></tr>
<tr><td>Импликация ложна</td><td>из истинного высказывания следует ложное высказывание</td></tr>
<tr><td>Эквивалентность истинна</td><td>оба высказывания ложны или оба высказывания истинны</td></tr>
</table>

2.3. Сложное высказывание

Высказывания бывают простые и сложные.
Простым называется высказывание, которое не содержит в себе других высказываний. Если несколько простых высказываний объединены в одно с помощью логических операций и скобок, то такое высказывание называется ***сложным.***
Скобки необходимы для определения порядка выполнения логических операций.
В формальной логике принято, что всякое простое высказывание обязательно имеет одно из двух значений — истина или ложь. Заметим, что это значение не всегда известно. Примерами таких высказываний являются недоказанные или неопровергнутые гипотезы. Однако в случае простого высказывания всегда допустимо договориться о том, считать его истинным или ложным.
Сложные высказывания образуются из простых при помощи союзов «и», «или», «если ... то», «тогда и только тогда» и т.п. В математической логике эти союзы называют *логическими связками.* Истинность сложного высказывания зависит, как правило, от того, истинны или ложны входящие в него простые высказывания. Изучение этой зависимости является предметом логики высказываний.
Значение сложного высказывания вычисляется в соответствии с таблицами истинности входящих в него логических операций. Для этого мы должны выделить простые высказывания, отношения (связи) между ними и перевести их на язык формул (формализовать условие задачи, определить форму сложного высказывания).

2.4. Приоритет логических операций

Используя буквенные обозначения высказываний (A, B,C...), знаки логических операций ($\vee$,$\rightarrow$,$\leftrightarrow$, ...), логические константы («*и*», «*л*») можно записать *логические формулы.*
Например:

1.$A\leftrightarrow(B\vee C)$.   **2.** $[(\overline{A}\wedge\overline{B})\rightarrow C]\leftrightarrow(\overline{C}\rightarrow B)$.**3.**$(A\rightarrow B)\leftrightarrow(\overline{B}\rightarrow\overline{A})$.

При вычислении значения логического выражения (формулы) если нет скобок, логические операции выполняются в определенном порядке, согласно их приоритету:
1) отрицание (инверсия);
2) конъюнкция;
3) дизъюнкция;
4) импликация;
5)эквивалентность.
Операции одного приоритета выполняются слева направо. Для изменения порядка действий используются скобки.

2.5. Тождественно истинные, тождественно ложные и эквивалентные высказывания

Если высказывание истинно при всех значениях входящих в него переменных, то такое высказывание называется***тождественно истинным***или ***тавтологией***(обозначается константой 1). Его математическая запись:

$A \vee \overline{A}$.

Проверить, является ли сложное высказывание тождественно истинным, можно по таблице истинности.

Если высказывание ложно при всех значениях входящих в него переменных, то оно называется***тождественно ложным***или ***противоречием***(обозначается константой 0). Математическая запись его такова:

$A \wedge \overline{A}$.

Если значения сложных высказываний совпадают на всех возможныхнаборах значений входящих в них переменных, то такие высказывания называют***равносильными,*** или***тождественными,*** или***эквивалентными.***

Равносильность высказываний *A* и *B*записывается с помощью знака равенства (=) или (≡): $A = B$.

Высказывания*A*и *B* равносильны *(A = B)* тогда и только тогда, когда их эквивалентность $A \leftrightarrow B$ является тождественно истинным высказыванием.

Очевидно, что эквивалентность равносильных формул является тавтологией. Часто применяющиеся основные равносильности называются ***законами логики*** *высказываний:*

Раздел 5. Основы теории вероятностей и математической статистики

Тема 5.1. Основные понятия теории вероятностей

Элементы комбинаторики

Пусть задано множество, содержащее конечное число элементов. (Студенты в группе, яблоки в корзине, набор костей домино и т.д.) Такие множества будем называть <u>конечными</u> и обозначать {a,b,c,d}. Если каждому элементу конечного множества поставлены в соответствие натуральные числа, то такое упорядоченное множество называется <u>перестановкой</u> и обозначается (a,b,c,d). Сколько перестановок можно составить из n-элементного множества? Из трехэлементного 6: (a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a).

<u>Число перестановок</u> из n-элементного множества вычисляется по формуле: $\mathbf{P_n = n!}$, где **n!** - произведение **n(n - 1)(n - 2)(n - 3)…3*2*1**. Полезна рекуррентная формула$\mathbf{P_n = nP_{n-1}}$.

Прост и комбинаторный смысл числа перестановок: сколькими способами можно упорядочить конечное n-элементоное множество.

<u>Размещением из n по k</u> называется упорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества. По смыслу определения ясно, что $k \leq n$. <u>Число размещений из n по k</u> обозначается A_n^k. Очевидно, что $A_n^n = \mathbf{P_n = n!}$, $A_n^1 = \mathbf{n}$, $A_n^2 = \mathbf{n(n-1)}$, $A_n^3 = \mathbf{n(n-1)(n-2)}$ $A_n^4 = \mathbf{n(n-1)(n-2)(n-3)}$ и т.д. A_n^k - это произведение k старших сомножителя натурального числа n, т. е. $A_n^k = \mathbf{n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}$ (*). Помножая и деля это выражение на (n – k)! можно получить еще формулу:

$$A_n^k = \frac{n(n-1)(n-2)...(n-k+1)(n-k)!}{(n-k)!} = \frac{n!}{(n-k)!}$$ = n(n –1)(n – 2)(n –3)…3*2*1, т.е. k старших сомножителя числа n.

<u>Сочетанием из n по k</u> называется неупорядоченное k-элементное подмножество n-элементного множества. По смыслу определения ясно, что $k \leq n$. Число сочетаний из n по k обозначается C_n^k. Очевидно, что неупорядоченных подмножеств n-элементного

множества в k! меньше чем упорядоченных подмножеств, т.е. $C_n^k =$

$$\frac{A_n^k}{P_k} = \frac{n*(n-1)*...*(n-k+1)}{k!} \quad (*)$$

Помножая и деля это выражение на (n – k)! можно получить еще формулу:

$$C_n^k = \frac{n*(n-1)*...*(n-k+1)(n-k)!}{k!(n-k)!} = \frac{n!}{k!(n-k)!};$$

На практике, для вычисления C_n^k используют формулу (*)

В приложении №1 приведены значения C_n^k, так называемый треугольник Паскаля.

Некоторые важные свойства числа сочетаний, которые необходимо применять при решении различных задач:

1) $C_n^0 = C_0^0 = 1$; 2) $C_n^1 = n$; 3) $C_n^k = C_n^{n-k}$ - эту формулу удобно применять при k>n/2

4) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + ... + C_n^n = 2^n$; 5) $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ - рекуррентная формула.

<u>Размещение с повторениями из n элементов по k элементов</u> может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до k включительно, или не содержать его совсем, т.е. каждое размещение с повторениями из n элементов по k элементов может состоять не только из различных элементов, но из k каких угодно и как угодно повторяющих элементов.

Число размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$$A_{n(cповт)}^k = n^k$$

<u>Сочетание с повторениями из n элементов по k (k$\subseteq n$) элементов</u> может содержать любой элемент сколько угодно раз от 1 до k включительно, или не содержать его совсем, т.е. каждое сочетание с повторениями из n элементов по k элементов может состоять не только из k различных элементов, но из k каких угодно и как угодно повторяющих элементов. Следует отметить, что если, например два соединения по k элементов отличаются друг от друга только порядком расположения элементов, то они не считаются различными сочетаниями.

Число размещений с повторениями вычисляется по формуле:

$$\left(C_n^k\right)_{cповт} = C_{n+k-1}^k = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-k)!};$$ Замечание: k может быть и больше n.

Пусть имеется n + k + s предметов. Сколькими способами можно разделить эти предметы на три группы так, чтобы в одной группе было n предметов, в другой k предметов, в третьей s предметов? Это задача на <u>перестановки с повторениями</u>. Число перестановок с повторениями находится по формуле:

$$\left(P_{n+k+s}\right)_{cповт} = \frac{(n+k+s)!}{n!k!s!}$$

Элементы теории вероятностей

Классическое определение вероятности

Наблюдаемые нами события можно разделить на<u>достоверные</u>, <u>невозможные</u> и <u>случайные</u>.

<u>Достоверным</u> называется событие, которое обязательно произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.

<u>Невозможным</u> называют событие, которое заведомо не произойдет, если будет осуществлена определенная совокупность условий.

<u>Случайным</u> называют событие, которое может произойти, либо не произойти, если будет осуществлена определенная совокупность условий. Т.е. под случайным событием, связанным с некоторым опытом, будем понимать всякое событие, которое либо происходит, либо не происходит при осуществлении этого опыта.

Вместо слов «осуществлена совокупность условий» зачастую говорят «произведено испытание».
События называют несовместными, если появление одного из них исключает появление других событий в одном и том же испытании.
Система событий образует полную группу для данного испытания, если любым исходом его является одно или только одно событие этой группы.
Возможные, исключающие друг друга, результаты одного испытания называются элементарными исходами испытания.
Исход испытания называется благоприятствующими некоторому событию, если в результате этого исхода появляется указанное событие.
События называются равновозможными, если нет оснований считать одно из них более или менее возможным, чем остальные.
Определение. Вероятностью **P(A)** события **A** называют отношение числа благоприятствующих этому событию исходов m к общему числу n всех возможных элементарных исходов испытания, образующих полную группу, т.е **P(A) =** $\frac{m}{n}$
Свойства вероятности:

1. Вероятность достоверного события равна единице.
2. Вероятность невозможного события равна нулю.
3. Вероятность случайного события есть число, заключенное между нулем и единицей.

Таким образом, вероятность любого события **A** удовлетворяет неравенству $\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$**.**

Относительная частота и статистическая вероятность
Классическое определение вероятности при переходе от простейших примеров к сложным задачам наталкивается на трудности принципиального характера. Во-первых, число элементарных исходов испытания не всегда конечно, во-вторых, очень часто невозможно представить результат в виде совокупности элементарных исходов, в-третьих, трудно указать основания, позволяющие считать элементарные исходы равновозможными. Поэтому используют также статистическое определение вероятности.
Относительной частотой события А называют отношение числа испытаний m, в которых событие А появилось, к общему числу n фактически проведенных испытаний,
т.е. **W (A) =** $\frac{m}{n}$.
При однотипных массовых испытаниях во многих случаях наблюдается устойчивость относительной частоты события, которая состоит в том, что в различных опытах относительная частота изменяется мало (тем меньше, чем больше произведено испытаний), колеблясь около некоторого постоянного числа. Это число называется вероятностью события **A** в статистическом смысле.
Для осуществления статистической вероятности события **A** требуется:
а) возможность хотя ба принципиально, проводить неограниченное число испытаний, в каждом из которых событие **A** наступает или не наступает;
в) устойчивость относительной частоты события **A** в различных сериях большого числа испытаний.
Теоремы сложения и умножения вероятностей
Суммой **A + B** событий называется событие, состоящее в том, что в результате опыта наступит или событие **A**, или событие В, или оба вместе. (Другими словами, суммой **A+B** событий **A** и **B** называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий):
Если события **A и B** несовместны, то **A + B** – это событие **A,** или событие **B.**

Суммой нескольких событий называется событие, состоящее в появлении хотя бы одного из этих событий.
Произведением**AB** событий**A** и **B** называется событие, состоящее в совместном появлении и события **A,** и события **B**.
Произведением нескольких событий называется событие, состоящее в их совместном появлении.
Событием, противоположным событию**A**, называется событие, обозначаемое $\overline{A}$ и состоящее в том, что в результате опыта событие **A** не наступит.

Теорема сложения вероятностей несовместных событий. Вероятность суммы двух несовместных событий равна сумме вероятностей этих событий:
$\mathbf{P(A + B) = P(A) + P(B)}$
Следствие1.Вероятность появления одного из нескольких попарно несовместных событий, безразлично какого, равна сумме вероятностей этих событий:
$\mathbf{P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(A_n).}$
Следствие 2. Если события $\mathbf{A_1, A_2, A_3, \ldots An}$ образуют полную группу событий, то сумма их вероятностей равна единице: $\mathbf{P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + \ldots + P(An) = 1.}$
Следствие 3. Сумма вероятностей противоположных событий равна единице:
$\mathbf{P(A) + P(}\overline{A}\mathbf{) = 1.}$
Событие**A** называется независимым от события **B**, если вероятность события **A** не зависит от того, произошло событие **B** или нет.
Несколько событий называются независимыми в совокупности, если любое из них не зависит от любой совокупности остальных.
Событие**A** называется зависимым от события **B**, если вероятность события **A** меняется в зависимости от того, произошло это событие **B** или нет.
Вероятность события**A,** вычисляемая при условии, что событие **B** произошло, называется условной вероятностью события а и обозначается $\mathbf{P_B(A)}$

Теорема умножения вероятностей. Вероятность произведения двух событий равна произведению одного из них на условную вероятность другого, вычисленную при условии, что первое из них произошло:
$\mathbf{P(AB) = P(A)P_A(B) = P(B)P_B(A).}$
Следствие 1. Если событие**A** не зависит от события **B**, то и событие **B** не зависит от события **A**.
Следствие 2. Вероятность произведения двух независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:
$\mathbf{P(AB) = P(A)P(B).}$
Для вычисления вероятности совместного появления большего числа событий, например, четырех, используют формулу:
$\mathbf{P(ABCD) = P(A)P_A(B)P_{AB}(C)P_{ABC}(D).}$
Для нескольких независимых в совокупности событий вероятность их произведения равна произведению их вероятностей:
$\mathbf{P(A_1A_2 \ldots A_3) = P(A_1)P(A_2) \ldots P(A_n).}$
Следствие 3. Вероятность появления хотя бы одного из событий $\mathbf{A_1, A_2 \ldots A_n.}$, независимых в совокупности, равна разности единицы и произведения вероятностей противоположных событий $\overline{A}_1, \overline{A}_2, \ldots \overline{A}_n$: $\mathbf{PA_1 + A_2 + \ldots A_n) = 1 - P(}\overline{A}_1\mathbf{)\,P(}\overline{A}_2\mathbf{) \ldots P(}\overline{A}_n\mathbf{)}$
Два события называются совместными, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.
Теорема сложения вероятностей совместных событий. Вероятность появления хотя бы одного из двух совместных событий равна сумме вероятностей этих событий без вероятности их совместного появления:

$P(A + B) = P(A) + P(B) – P(AB)$.

Формула полной вероятности

Пусть событие**A** может произойти в результате осуществления одного события из некоторой полной группы событий **$H_1, H_2, \dots H_n$.**

События этой группы обычно называют гипотезами. Тогда

$P(A) = P(H_1)P_{H1}(A) + P(H_2)\ PH_2 +\dots+ P(Hn)P_{Hn}(A)$ (1)

<u>(формула полной вероятности),</u> причем

$P(H_1) +P(H_2) +\dots+ P(Hn) = 1$.

Пусть в результате испытания произошло событие**A**, которое могло наступить только вместе с одним из событий **$H_1, H_2,\dots Hn$,** образующих полную группу событий (они называются гипотезами). Требуется найти вероятность событий **$H_1, H_2, \dots Hn$** после испытания, когда событие**A** имело место, т.е. **$P_A(Hi)$, $i = 1,2,\dots n$.** Для нахождения этих вероятностей используют <u>формулы Байеса (формулы гипотез):</u>

$$P_A(H_i) = \frac{P(H_i)PH_i(A)}{P(H_1)PH_1(A)+P(H_2)PH_2(A)+...+P(Hn)PHn(A)} \quad \textbf{(2)}$$

<u>Замечания.</u>

1) Вероятности **$P_A(H_1)$** называются послеопытными (апостериорными) вероятностями гипотез **Hi,** а вероятности **P(Hi)** - доопытными (априорными) вероятностями гипотез **Hi.** Эти вероятности различаются.
2) Знаменатель в правой части формулы **(2)** совпадает с правой частью формулы **(1)** и равен **P(A).**

Тема 5.2. Элементы математической статистики

Математическая статистика.

Математическая статистика возникла и создавалась параллельно с теорией вероятностей в XVII веке. Дальнейшее развитие математической статистики (вторая половина XIX и начало XX веков) обязано, в первую очередь, П. Л. Чебышеву, А. А. Маркову, А. М. Ляпунову и др.

Вариационные ряды. Генеральная совокупность и выборка

Совокупность предметов или явлений, объединённых каким – либо общим признаком или свойством качественного или количественного характера, называется <u>объектом наблюдения</u>.

- <u>Количественным</u> называется признак, значения которого выражаются числами.
- <u>Качественным</u> называется признак, характеризующийся некоторым свойством или состоянием элементов совокупности.

Каждый объект статистического наблюдения состоит из отдельных элементов – единиц наблюдения. Результаты статистических наблюдений представляют собой числовую информацию – <u>данные</u>.

<u>Статистические данные</u> – это сведения о том, какие значения принял интересующий исследователя признак в статистической совокупности.

Статистическая совокупность называется <u>генеральной совокупностью</u>, если исследованию подлежат все элементы совокупности.

<u>Выборочной совокупностью</u>, или просто<u>выборкой</u>, называют часть элементов генеральной совокупности подлежащих исследованию. Она извлекается из генеральной совокупности случайно, чтобы каждый объект имел равные шансы быть отобранным.

Значения признака, которые при переходе от одного элемента совокупности к другому изменяются, называются <u>вариантами</u> и обозначаются маленькими латинскими буквами. Порядковый номер варианта называется <u>рангом</u>.

Ряд значений признака, расположенный в порядке возрастания или убывания с соответствующими им весами, называется вариационным рядом.
В качестве весов выступают частоты или частости.
Частота (m_i)показывает, сколько раз встречается тот или иной вариант в статистической совокупности.
Частость или относительная частота (w_i) показывает, какая часть единиц совокупности имеет тот или иной вариант к сумме всех частот ряда. Частость рассчитывается как отношение частоты того или иного варианта к сумме всех частот ряда

$$w_i = \frac{m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i}$$

(1)
Сумма всех частостей равна 1

$$\sum_{i=1}^{k} w_i$$

(2)

Вариационные ряды бывают дискретными и интервальными.
Дискретные вариационные ряды строят обычно в том случае, если значения изучаемого признака могут отличаться друг от друга не менее чем на некоторую конечную величину. В дискретных вариационных рядах задаются точечные значения признака. Общий вид дискретного ряда показан в таблице.

Значения признака (x_i)	x_1	x_2	…	x_k
Частоты (m_i)	m_1	m_2	…	m_k

Интервальные вариационные ряды строят обычно в том случае, если значения изучаемого признака могут отличаться друг от друга на сколь угодно малую величину. Значения признаков в них задаются в виде интервалов. Общий вид интервального ряда имеет вид

Значения признака (x_i)	$a_1 – a_2$	$a_2 – a_3$	…	a_{i-1} - a_i
Частоты (m_i)	m_1	m_2	…	m_i

В интервальных вариационных рядах в каждом интервале выделяют верхнюю и нижнюю границы.
Разность между верхней и нижней границами интервала называется интервальной разностью или длиной интервала. В общем виде интервальную разность k_i представим как $k_i = x_{i\,(max)} - x_{i\,(min)}$
Первый и последний интервалы могут быть открытыми, т.е. иметь только одну границу.
Если интервалы в вариационных рядах имеют одинаковую длину, их называют равновеликими, в противном случае неравновеликими.
При построении интервального ряда (если строится ряд с равными интервалами), для определения оптимальной величины интервалов применяют формулу Стэрджесса

$$k = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3.322 \lg n},$$

где n число единиц совокупности; x_{max}и x_{min} – наибольшее и наименьшее значения вариационного ряда.
Дискретный вариационный ряд графически можно представить с помощью полигона распределения частот или частостей. рис.8

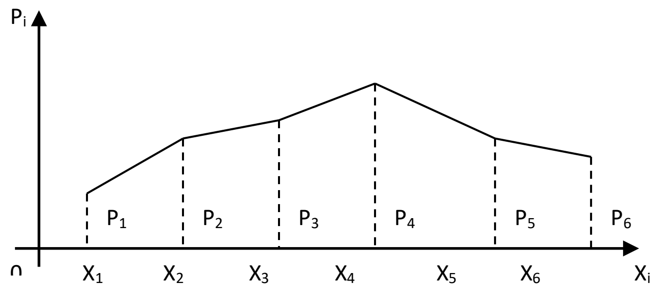


рис.8
Интервальные вариационные ряды графически можно представить в виде гистограмм, т. е. столбчатой диаграммы.рис.9

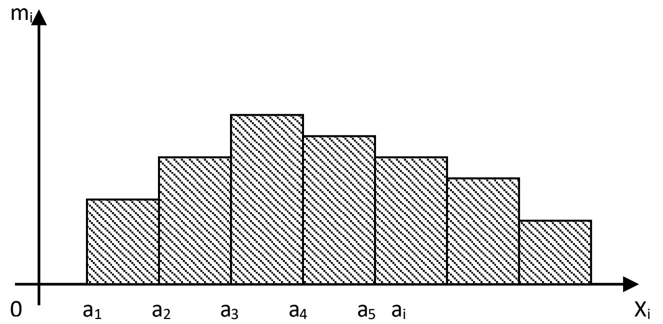


рис.9

Абсолютная плотность – это отношение частоты интервала к его величине:

$$f(a)_i = \frac{m_i}{k_i},$$

где $f(a)_i$ - абсолютная плотность i – го интервала; m_i – его частота; k_i– интервальная разность. Абсолютная плотность показывает, сколько единиц совокупности приходится на единицу интервала.

Относительная плотность – отношение частости интервала к его величине:

$$f(o)_i = \frac{w_i}{k_i},$$

где $f(o)_i$ -относительная плотность i – го интервала;
Относительная плотность показывает, какая часть единиц совокупности приходится на единицу интервала.

Числовые характеристики вариационного ряда

Одной из основных характеристик ряда распределения является средняя арифметическая. Существует две формулы для расчёта средней арифметической: простая и взвешенная. Простую среднюю арифметическую используют, когда данные наблюдений не сведены в вариационный ряд или все частоты равны единице (одинаковы).

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n},$$

где x_i – i-е значение признака; n – объём ряда (число наблюдений).
Если частоты отличны друг от друга, расчёт производится по формуле средней арифметической взвешенной

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{k} x_i m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i},$$

где x_i – i-е значение признака; m_i– частота i-го значения признака; k – число его значений (вариантов).

При расчёте средней арифметической в качестве весов могут выступать и частости, тогда формула расчёта средней арифметической взвешенной примет следующий вид.

$$\overline{x} = \sum_{i=1}^{k} x_i w_i,$$

где w_i – частостьi-го значения признака;

Колеблемость изучаемого признака можно охарактеризовать с помощью различных показателей вариации. К числу основных показателей вариации относятся: математическое ожидание, дисперсия, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации.

Математическое ожидание – это числовая характеристика случайной величины, со средним арифметическим её наблюдаемых значений, которое является статистической характеристикой вариационного ряда и рассчитывается по формуле:

$$M(X) = \sum_{i=1}^{n} x_i p_i,$$

где p_i – вероятность i-го значения признака.

Дисперсию можно рассчитать по простой и взвешенной формулам имеющим вид

$$D(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_i)^2}{n}; \qquad D(X) = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}_i)^2 m_i}{\sum_{i=1}^{k} m_i};$$

Среднее квадратическое отклонение рассчитывается по формуле

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Коэффициент вариации определяется формулой

$$V(X) = \frac{\sigma(X)}{\overline{x}} \cdot 100\%.$$

Выборочный метод и статистическое оценивание.

По одному из определений, статистика – это наука, позволяющая распространять выводы, сделанные на основе изучения части совокупности, на всю совокупность. В этом определении заключена сущность выборочного метода и его ведущая роль в статистике.

Все единицы совокупности, обладающие интересующими исследователя признаками, составляют <u>генеральную совокупность.</u>

Часть совокупности, случайным образом отобранная из генеральной совокупности составляют <u>выборочную совокупность – выборку.</u>

Число элементов статистической совокупности называется её объёмом. Объём генеральной совокупности обозначается N, а объём выборки – n.

Случайная выборка из n элементов – это такой отбор, при котором элементы извлекаются по одному из всей генеральной совокупности и каждый из них имеет равный шанс быть отобранным. Такая выборка называется собственно – случайной.

По способу отбора элементов различают два типа случайных выборок: собственно –случайная бесповторная и собственно –случайная повторная. Выбор схемы отбора зависит от характера изучаемого объекта.

Статистическое оценивание.

Пусть из генеральной совокупности извлекается выборка объёмом n, причём значение признака x_1 наблюдаются m_1 раз, x_2 – m_2 раз, …, x_kнаблюдается m_k раз,

$$\sum_{i=1}^{k} m_i = n$$ - объём выборки

Статистическим распределением выборки называется перечень возможных значений признака x_i и соответствующих ему частот m_i

Числовые характеристики генеральной совокупности называются параметрамигенеральной совокупности. Доля единиц, обладающих тем или иным признаком в генеральной совокупности, называется генеральной долей и обозначается p.

Оценка параметра – это определённая числовая характеристика, полученная из выборки. Когда оценка определяется одним числом её называютточечной оценкой. В качестве точечных оценок параметров генеральной совокупности используются соответствующие выборочные характеристики.

Ошибки выборки.

Так как выборочная совокупность это часть генеральной совокупности, то естественно, что выборочные характеристики не будут точно совпадать с соответствующими генеральными. Ошибка может быть представлена как разность между генеральными и выборочными характеристиками изучаемой совокупности: $\varepsilon = \tilde{X} - \overline{X}$, либо $\varepsilon = p - \omega$.

Применительно к выборочному методу из теоремы Чебышева следует, что с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, можно утверждать, что при достаточно большом объёме выборки и ограниченной дисперсии генеральной совокупности разность между выборочной средней и генеральной средней будет сколь угодно мала.

$$P(\left|\tilde{X} - \overline{X}\right| < \frac{t \cdot \sigma_{ген}}{\sqrt{n}}) > 1 - \frac{1}{t^2},$$

где $\tilde{X}$ - средняя по совокупности выбранных единиц; $\overline{X}$ - средняя по генеральной совокупности; $\sigma_{ген}$ - среднее квадратическое отклонение в генеральной совокупности.

О величине расхождения между параметром и статистикой

$$\Delta = \frac{t \cdot \sigma}{\sqrt{n}} = t \cdot \mu,$$

можно судить лишь с определённой вероятностью, от которой зависит величина t.

Средняя ошибка выборки $\mu = \frac{\sigma_{ген}}{\sqrt{n}}$. Согласно центральной предельной теореме Ляпунова, выборочные распределения статистик (при n$\geq$30) будут иметь нормальное распределение независимо от того, какое распределение имеет генеральная совокупность. Следовательно,

$$P(\left|\tilde{X} - \overline{X}\right| < t\mu) \approx 2\Phi_0(t),$$

где $\Phi_0(t)$ - функция Лапласа.

В зависимости от способа отбора средняя ошибка выборки определяется по разному

μ	Собственно случайный отбор	
	повторный	бесповторный
Для средней	$\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}$	$\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}(1-\frac{n}{N})}$
Для доли	$\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}$	$\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}(1-\frac{n}{N})}$

Здесь σ^2 - выборочная дисперсия значений признака; $\omega(1-\omega)$ - выборочная дисперсия доли значений признака; n – объём выборки; N – объём генеральной совокупности; $\frac{n}{N}$ - доля обследованной совокупности; (1 - $\frac{n}{N}$) – поправка на бесповторность отбора.

Формулы расчёта необходимой численности выборки для собственно случайного отбора определяются в таблице.

μ	Собственно случайный отбор	
	повторный	бесповторный
Для средней	$\frac{t^2\sigma^2}{\Delta^2}$	$\frac{t^2\sigma^2 N}{N\Delta^2+t^2\sigma^2}$
Для доли	$\frac{t^2\omega(1-\omega)}{\Delta^2}$	$\frac{t^2 N\omega(1-\omega)}{n\Delta^2+t^2\omega(1-\omega)}$

Интервальное оценивание

Интервальной оценкой называют оценку, которая определяется двумя числами – концами интервала, который с определённой вероятностью накрывает неизвестный параметр генеральной совокупности. Интервал, содержащий оцениваемый параметр генеральной совокупности, называют доверительным интервалом. Для его определения вычисляется предельная ошибка выборки Δ.

С помощью доверительного интервала можно оценивать различные параметры генеральной совокупности.

Для оценки математического ожидания**а** нормально распределённого количественного признака X по выборочной средней $\tilde{X}$ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности при n$\geq$30 и собственно – случайном повторном отборе формула имеет вид

$$P(\tilde{X}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}<\bar{X}<\tilde{X}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}})=2\Phi_0(t)=\gamma,$$

где t определяется по таблицам функции Лапласа из соотношения $2\Phi_0(t) = \gamma$;

$$\Delta=\frac{t\cdot\sigma}{\sqrt{n}}$$

Для оценки математического ожидания**a** нормально распределённого количественного признака X по выборочной средней $\tilde{X}$ при известном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности при n$\geq$30 и собственно – случайном бесповторном отборе формула примет вид

$$P(\tilde{X}-t\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}}<\bar{X}<\tilde{X}+t\frac{\sigma}{\sqrt{n}})\sqrt{1-\frac{n}{N}}=2\Phi_0(t)=\gamma; \qquad \Delta=\frac{t\cdot\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}}$$

Для оценки математического ожидания**a** нормально распределённого количественного признака X по выборочной средней $\tilde{X}$ при неизвестном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности при n<30 и собственно – случайном повторном отборе формула будет иметь вид

$$P(\tilde{X}-t\frac{s}{\sqrt{n}}<\bar{X}<\tilde{X}+t\frac{s}{\sqrt{n}})=2S(t)=\gamma,$$

где t определяется по таблицам функции Стьюдента по уровню значимости α = 1 – γ и числу степеней свободы k = n – 1; s – исправленное выборочное среднее квадратическое отклонение; n объём выборки.

$$\Delta=\frac{t\cdot s}{\sqrt{n}}$$

Для оценки математического ожидания**a** нормально распределённого количественного признака X по выборочной средней $\tilde{X}$ при неизвестном среднем квадратическом отклонении σ генеральной совокупности при n<30 и собственно – случайном бесповторном отборе формула примет вид

$$P(\tilde{X}-t\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}}<\bar{X}<\tilde{X}+t\frac{s}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}})=2S(t)=\gamma; \qquad \Delta=\frac{t\cdot s}{\sqrt{n}}\sqrt{1-\frac{n}{N}}$$

Для оценки генеральной доли **p**нормально распределённого количественного признака по выборочной доле $\omega=m/n$ при n$\geq$30 и собственно – случайном повторном отборе формула имеет вид

$$P(\omega-t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}<p<\omega+t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}})=2\Phi_0(t)=\gamma,$$

где t определяется по таблицам функции Лапласа из соотношения $2\Phi_0(t) = \gamma$; ω – выборочная доля; n – объём выборки

$$\Delta=t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}}.$$

Для оценки генеральной доли **p**нормально распределённого количественного признака по выборочной доле $\omega=m/n$ при n$\geq$30 и собственно – случайном бесповторном отборе формула примет вид

$$P(\omega-t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}(1-\frac{n}{N})}<p<\omega+t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}(1-\frac{n}{N})})=2S(t)=\gamma; \qquad \Delta=t\sqrt{\frac{\omega(1-\omega)}{n}(1-\frac{n}{N})}.$$