Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)
КОЛЛЕДЖ ИННОВАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ И ПРЕДПРИНИМАТЕЛЬСТВА

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ

по дисциплине «МАТЕМАТИКА: АЛГЕБРА И НАЧАЛА МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА; ГЕОМЕТРИЯ»

для специальностей среднего профессионального образования
технического и социально-экономического профилей

1 курс

1-2 семестр

Часть 1

Составитель - старший преподаватель КИТП И. С. Яппарова

Владимир 2016 г.

Пояснительная записка

Курс лекций по дисциплине «Математика: алгебра и начала математического анализа; геометрия» рассчитан на 118 часов.

Цель конспекта лекций – освоение студентами теоретических основ учебной дисциплины.

Задачи :

- раскрытие содержания учебной дисциплины;
- обеспечение студентов необходимым объемом теоретического материала для решения прикладных задач;
- управление познавательной деятельностью студентов.

Конспект лекций построен в виде системы аудиторных занятий, учебный материал чётко дозирован по каждому занятию. Кратко и доступно изложены теоретические основы разделов курса, приведены примеры решения типовых задач, содержатся задачи для самостоятельного решения.

1 семестр

Алгебра и начала математического анализа

ЛЕКЦИЯ 1. Введение.

- Математика в науке, технике, экономике, информационных технологиях и практической деятельности.
- Цели и задачи изучения математики при освоении специальности.

Раздел 1. Развитие понятия о числе.
Тема 1.1.Числа. Приближенные вычисления

ЛЕКЦИЯ 1. Действительные числа. Приближенные вычисления.

План лекции:

- Множество натуральных чисел.
- Множество целых чисел.
- Множество рациональных чисел.
- Перевод бесконечной десятичной периодической дроби в обыкновенную и обратно.
- Иррациональные числа.
- Множество действительных чисел.
- Определение приближенного значения числа.
- Приближение с избытком и с недостатком.
- Абсолютная погрешность приближения.
- Относительная погрешность приближения.
- Значащие цифры и верные знаки.
- Округление чисел.
- Действия с приближенными числами.

Множество натуральных чисел: N={1,2,3,4, …} – числа, с помощью которых мы считаем.
Множество целых чисел: Z={0, ±1, ±2, ±3, …}

Множество рациональных чисел: Q={числа вида $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$, $n \in N$}. К рациональным числам относятся все числа, которые можно представить в виде обыкновенной дроби: натуральные, например, 2=$\frac{2}{1}=\frac{4}{2}$=…; целые: 0=$\frac{0}{1}$, –4=$\frac{-4}{1}$,…; обыкновенные дроби: $\frac{2}{3}$; $-2\frac{3}{7}$; $\frac{7}{5}$;…; десятичные конечные дроби: 0,5=$\frac{1}{2}$; – 2,7=$\frac{-27}{10}$;… и десятичные бесконечные периодические дроби: 0,33333…=0,(3); 1,225252525…=0,2(25).

ЗАДАЧА. Доказать, что число 0,2(18) является рациональным.

РЕШЕНИЕ. Обратим это число в обыкновенную дробь.

0,2(18)=0,2181818…; 18 – период дроби. Пусть x=0,2181818….

Умножим обе части этого равенства на 10^1=10, т.к. между запятой и первым периодом одна цифра - 2:

10x=2,181818… (1)

Умножим обе части равенства (1) на 10^2=100, т.к. в периоде две цифры - 1 и 8:

1000x=218,181818… (2).

Вычтем левые и правые части равенств (2) – (1):

1000x – 10x = 218,181818… - 2,181818…

990x = 216

x = $\frac{216}{990} = \frac{12}{55} \Rightarrow$ 0,2(18) = $\frac{12}{55}$ - рациональное число.

Десятичные бесконечные непериодические дроби называются иррациональными числами (множество I): например, $\sqrt{2}$ =1,4142135…; $\sqrt{3}$ =-1,7320508…; $\pi \approx 3,14$ - иррациональные числа.

Множество действительных чисел (R) объединяет множества рациональных и иррациональных чисел: $Q \cup I = R$.

Таким образом $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Пусть A-точное значение величины, a – ее приближенное значение. $A \approx a$.

Число a называется приближенным значением A с ошибкой Δ, если $A - a = \Delta$.

Если $\Delta > 0$, то $A \approx a$ с недостатком.

Если $\Delta < 0$, то $A \approx a$ с избытком.

Например, $A = 3{,}756$ – точное число, $a_1 = 3{,}75, a_2 = 3{,}76$ – его приближения.

$\Delta_1 = 3{,}756 - 3{,}75 = 0{,}006 \Rightarrow 3{,}756 \approx 3{,}75$ с недостатком.

$\Delta_2 = 3{,}756 - 3{,}76 = -0{,}004 \Rightarrow 3{,}756 \approx 3{,}76$ с избытком.

$3{,}75 < 3{,}756 < 3{,}76$.

Абсолютной погрешностью приближенного числа a называется модуль разности между точным числом и его приближением: $\Delta = |A - a|$.

Чем меньше Δ, тем лучше приближение.

Если точное число неизвестно, но известна граница, за которую наверняка не выходит абсолютная погрешность, то есть $\Delta < \delta$ то δ называется границей абсолютной погрешности приближенного числа a.

$|A - a| \le \delta$, то $-\delta \le A - a \le \delta$, значит $a - \delta \le A \le a$ и $A = a \pm \delta$.

ЗАДАЧА. Даны приближения числа $\frac{2}{3}$: a_1=0,66 и a_2=0,67. Какое приближение лучше?
РЕШЕНИЕ. Найдем абсолютные погрешности приближений:

$$\Delta_1 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}66\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{66}{100}\right| = \frac{1}{150}$$

$$\Delta_2 = \left|\frac{2}{3} - 0{,}67\right| = \left|\frac{2}{3} - \frac{67}{100}\right| = \frac{1}{300}$$

$\frac{1}{150} > \frac{1}{300}$, значит 0,67 лучшее приближение.
Ответ: 0,67.

ЗАДАЧА. Длина отрезка равна $21{,}5 \pm 0{,}3(см)$. Найти границы измерения отрезка.
РЕШЕНИЕ. $l = 21{,}5 \pm 0{,}3 \Rightarrow 21{,}5 - 0{,}3 \le l \le 21{,}5 + 0{,}3 \Rightarrow 21{,}2 \le l \le 21{,}8$
Ответ: $21{,}2 \le l \le 21{,}8$.

Относительной погрешностью ε называется отношение абсолютной погрешности к приближенному значению величины.

$$\varepsilon = \frac{\Delta}{a} \quad \text{или} \quad \varepsilon = \frac{\Delta}{a} \cdot 100\%$$

ЗАДАЧА. Найти относительную погрешность приближения $\frac{2}{3} \approx 0{,}6$.
РЕШЕНИЕ. $A = \frac{2}{3}; a = 0{,}6$

$$\Delta = \left|\frac{2}{3} - 0{,}6\right| = \frac{1}{15}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{15} : 0{,}6 = \frac{1 \cdot 6}{15 \cdot 10} = 0{,}04 \quad \text{или} \quad \varepsilon = 4\%$$

Ответ: 4%.

Значащие цифры приближенного числа-это все его цифры, кроме нулей, стоящих впереди. Например, в числе 3,275 четыре значащих цифры, а в числе 0,0035 две (3 и 5).
Цифра m приближенного числа называется верной, если граница абсолютной погрешности не превышает единицы того разряда, в котором записана цифра m.
Например, в числе 3,73 $\pm$ 0,056 две верные цифры 3 и 7, т. к. $\Delta = 0{,}056 < 0.1$.
При сложении и вычитании приближенных чисел надо оставить столько десятичных знаков, сколько их дано в числе с наименьшим количеством знаков (округлить). Примеры:
233,78+52,308+3,9313 $\approx$ 233,78+52,31+3,93=290,02
29,37-2,1462 $\approx$ 29,37-2,15=27,22
При умножении и делении в результате надо оставить столько значащих цифр, сколько их имеет то число, у которого их меньше. Пример:
$2{,}143 \cdot 0{,}45 = 0{,}96435 \approx 0{,}96$.

ЛЕКЦИЯ 2. Комплексные числа.

План:
- Число i - мнимая единица.

- Определение комплексного числа (алгебраическая форма).
- Действительная и мнимая части комплексного числа.
- Комплексно-сопряженные и противоположные числа.
- Действия над комплексными числами в алгебраической форме: сложение, вычитание, умножение и деление.

Комплексные числа имеют вид $a+b\cdot i$, где a и b-действительные числа, а число i, определяемое равенством $i^2=-1$, называется мнимой единицей.
a называется действительной частью комплексного числа, а b – мнимой частью комплексного числа.
$z=a+bi$ – алгебраическая форма комплексного числа.
Например: $z=2+i$; $z=-1+4i$; $z=\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{4}i$; $z=\sqrt{2}-\sqrt{3}i$.
Любое действительное число можно представить как комплексное, например: $5=5+0\cdot i$; $0=0+0\cdot i$
$R\subset C$; C – множество комплексных чисел.
С введением комплексных чисел стало возможно извлекать квадратные корни из отрицательных чисел: $\sqrt{-2}=\sqrt{-1}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot i$, они являются комплексными числами.
Комплексные числа $z_1=a_1+b_1i$ и $z_2=a_2+b_2i$ называются равными, если $a_1=a_2$ и $b_1=b_2$
Комплексные числа $z_1=a+bi$ и $z_2=a-bi$ называются комплексно-сопряжёнными.
Комплексные числа $z_1=a+bi$ и $z_2=-a-bi$ называются противоположными.
Действия с комплексными числами (на примерах)
При сложении и вычитании комплексных чисел надо раскрыть скобки и привести подобные слагаемые:
$$(-2-i)+(-1+3i)=-2-i-1+3i=-3+2i$$
$$(-2-i)-(-1+3i)=-2-i+1-3i=-1-4i$$
При умножении комплексных чисел надо раскрыть скобки, учесть $i^2=-1$.
$$(2-3i)(-4+2i)=-8+12i+4i-6i^2=-8+16i+6=-2+16i.$$
При делении надо домножить числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю, раскрыть скобки, привести подобные слагаемые, каждое слагаемое числителя разделить на знаменатель.
Пример:
$$\frac{-1+2i}{3-2i}=\frac{(-1+2i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{-3+6i-2i+4i^2}{3^2-(2i)^2}=\frac{-3+4i-4}{9+4}=\frac{-7+4i}{15}=\frac{-7}{15}+\frac{4}{15}i$$

Раздел 2. Основы тригонометрии

Тема 2.1.Тригонометрические функции числового аргумента.

<u>ЛЕКЦИЯ 1. Радианная мера угла. Определения тригонометрических функций.</u>

План:
- Радианная мера угла.
- Перевод градусной меры угла в радианную и обратно.
- Единичная окружность.
- Повороты точки $P(1;0)$ на угол α радиан.

- Нахождение координат точек, соответствующих заданному углу.
- Определение синуса числа α.
- Определение косинуса числа α.
- Определение тангенса числа α.
- Определение котангенса числа α.

Центральный угол окружности, опирающийся на дугу, длина которой равна радиусу окружности, называется углом в 1 радиан.
Основная формула для перехода градусной меры в радианную и обратно:

$\boldsymbol{\pi = 180^\circ} \Rightarrow 1 рад = \dfrac{180^\circ}{\pi}$ и $1^\circ = \dfrac{\pi}{180^\circ} рад$

Значит $\alpha \ рад = \left(\dfrac{180^\circ \cdot \alpha}{\pi}\right)^\circ$ и $\alpha^\circ = \left(\dfrac{\pi \cdot \alpha^\circ}{180^\circ}\right) рад$.

Обычно «рад» опускают.
ПРИМЕРЫ:
Найти градусную меру угла:
1) $\dfrac{\pi}{2}$; 2) $\dfrac{3\pi}{4}$

РЕШЕНИЕ: $\dfrac{\pi}{2} = \dfrac{180^\circ}{2} = 90^\circ$; $\dfrac{3\pi}{4} = \dfrac{3 \cdot 180^\circ}{4} 3 \cdot 45^\circ = 135^\circ$, т к. $\pi = 180^\circ$

Найти радианную меру угла:
1) 45°; 2) 15°

РЕШЕНИЕ:1) $45^\circ = \dfrac{\pi \cdot 45^\circ}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{4}$; 2) $15^\circ = \dfrac{\pi \cdot 15^\circ}{180^\circ} = \dfrac{\pi}{12}$

Единичная окружность – это окружность с центром в начале координат и радиусом, равным 1.
Поворот точки P(1;0) единичной окружности на угол α против часовой стрелки означает поворот на угол $\alpha > 0$.
Поворот P(1;0) по часовой стрелке на угол α означает поворот на угол $\alpha < 0$.
Каждому действительному числу α соответствует единственная точка единичной окружности, получаемая поворотом точки P(1;0) на угол α радиан.
Но одной и той же точке единичной окружности соответствует бесконечное множество действительных чисел $\alpha + 2\pi n$, $n \in z$.
Синусом угла α называется ордината точки, полученной поворотом точки (1;0) на угол α.
Косинусом угла α называется абсцисса точки, полученной поворотом точки (1;0) на угол α.

$\sin\alpha = Y_\alpha$; $\sin\alpha \in [-1;1]$

$\cos\alpha = X_\alpha$; $\cos\alpha \in [-1;1]$

$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, $\cos\alpha \neq 0$; $\mathrm{tg}\,\alpha \in R$

$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$, $\sin\alpha \neq 0$; $\mathrm{ctg}\,\alpha \in R$

ЛЕКЦИЯ 2. Свойства тригонометрических функций.

- Таблица некоторых значений тригонометрических функций.
- Примеры вычислений.
- Границы четвертей.

- Знаки значений тригонометрических функций по четвертям.
- Четная и нечетные тригонометрические функции.
- Периоды тригонометрических функций.

α	0 $(0°)$	$\frac{\pi}{6}$ $(30°)$	$\frac{\pi}{4}$ $(45°)$	$\frac{\pi}{3}$ $(60°)$	$\frac{\pi}{2}$ $(90°)$	π $(180°)$	$\frac{3}{2}\pi$ $(270°)$	2π $(360°)$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	-1	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	-1	0	1
$\mathrm{tg}\,\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	Не существует	0	Не существует	0
$\mathrm{ctg}\,\alpha$	Не существует	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	Не существует	0	Не существует

- Примеры упрощения тригонометрических выражений.

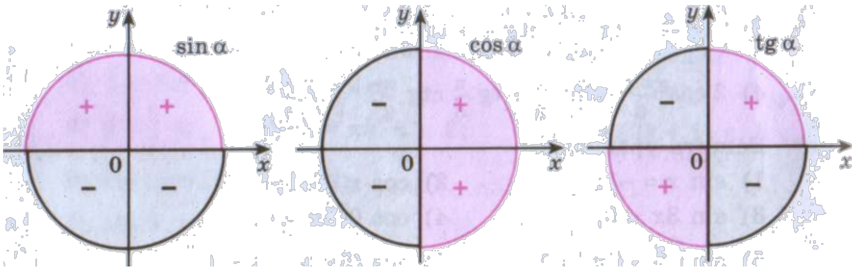


Таблица некоторых значений тригонометрических функций:

Знаки тригонометрических функций по четвертям

ПРИМЕР. Определите знак выражения

$$\frac{\cos 75° \, \mathrm{tg}^2 305° \sin 95°}{\mathrm{ctg}\, 293° \cos 269°}$$

Свойства тригонометрических функций

$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$ - четная функция

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$ - нечетная функция

$\mathrm{tg}(-\alpha) = -\mathrm{tg}\,\alpha$ - нечетная функция

$\mathrm{ctg}(-\alpha) = -\mathrm{ctg}\,\alpha$ - нечетная функция, $n \in Z$

ПРИМЕР. Вычислите

1) $\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) + \cos(-\pi) + \mathrm{tg}(-2\pi)$

РЕШЕНИЕ:

$$\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right)+\cos(-\pi)+\operatorname{tg}(-2\pi)=-\sin\frac{3\pi}{2}+\cos\pi-\operatorname{tg}2\pi=-(-1)+(-1)-0=1-1=0$$

$\sin(\alpha+2\pi n)=\sin\alpha$, $n\in Z$ - периодическая функция с наименьшим положительным периодом $2\pi=360^\circ$

$\cos(\alpha+2\pi n)=\cos\alpha$, $n\in Z$ - периодическая функция с наименьшим положительным периодом $2\pi=360^\circ$

$\operatorname{tg}(\alpha+\pi n)=\operatorname{tg}\alpha$, $n\in Z$ - периодическая функция с наименьшим положительным периодом $\pi=180^\circ$

$\operatorname{ctg}(\alpha+\pi n)=\operatorname{ctg}\alpha$, $n\in Z$ - периодическая функция с наименьшим положительным периодом $\pi=180^\circ$

ПРИМЕР. Вычислите

1) $\cos 3660^\circ=\cos(3660^\circ-360^\circ\cdot 10)=\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

ЗАДАЧИ.

Упростите тригонометрические выражения:

1) $4\sin\frac{\pi}{6}+\sqrt{3}\cos\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$
2) $\left(2\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}-\operatorname{tg}\frac{\pi}{3}\right):\cos\frac{\pi}{6}$
3) $2\operatorname{tg}^2\frac{\pi}{3}-\operatorname{ctg}^2\frac{\pi}{6}-\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}$
4) $2\cos^2\frac{\pi}{6}-\sin^2\frac{\pi}{3}+\operatorname{tg}\frac{\pi}{6}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}$
5) $\cos^3\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\operatorname{ctg}^3\left(-\frac{\pi}{6}\right)+\sin^3\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
6) $\sqrt{3}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)-2\operatorname{ctg}^3\left(-\frac{\pi}{4}\right)+4\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right)$
7) $\cos 7230^\circ$
8) $\operatorname{ctg}4{,}5\pi$

<u>ЛЕКЦИЯ 3. Основные тригонометрические тождества</u>

- Основные тригонометрические тождества. Формулы одного и того же аргумента.
- Синус, косинус и тангенс суммы и разности двух углов.
- Примеры решения задач и упрощения тригонометрических выражений с помощью этих формул.

ФОРМУЛЫ ОДНОГО И ТОГО ЖЕ АРГУМЕНТА

$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ – основное тригонометрическое тождество.

$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$ $\qquad\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$

$\sin\alpha=\pm\sqrt{1-\cos^2\alpha}$ $\qquad\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

Знак + или – совпадает со знаком синуса или косинуса в той четверти, в которой лежит угол α.

$\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\qquad\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$\mathrm{tg}\,\alpha\cdot\mathrm{ctg}\,\alpha=1$

$\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{ctg}\,\alpha}$ $\qquad\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}$

$1+\mathrm{tg}^2\alpha=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$

$1+\mathrm{ctg}^2\alpha=\dfrac{1}{\sin^2\alpha}$

ПРИМЕР. Вычислить $\cos\alpha$; $\sin\alpha$; $\mathrm{tg}\,\alpha$, если $\sin\alpha=\dfrac{-5}{13};\dfrac{3\pi}{2}<\alpha<2\pi$

РЕШЕНИЕ: $\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$; $\alpha\in\mathrm{IV}$ четверти, то $\cos\alpha=+\sqrt{1-\left(-\dfrac{5}{13}\right)^2}=\dfrac{12}{13}$

$\mathrm{tg}\,\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-\dfrac{5}{13}:\dfrac{12}{13}=-\dfrac{5}{12}$

$\mathrm{ctg}\,\alpha=\dfrac{1}{\mathrm{tg}\,\alpha}=-\dfrac{12}{5}$

ПРИМЕР. Упростить $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha$.

РЕШЕНИЕ. $\sin^4\alpha-\cos^4\alpha+\cos^2\alpha=\left(\sin^2\alpha\right)^2-\left(\cos^2\alpha\right)^2+\cos^2\alpha=$

$=\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)\left(\sin^2\alpha+\cos^2\alpha\right)+\cos^2\alpha=\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)\cdot1+\cos^2\alpha=\sin^2\alpha$

ЗАДАЧИ.

Доказать тождество

1) $\left(\sin^2\alpha-\cos^2\alpha\right)^2+2\cos^2\alpha\sin^2\alpha=\sin^4\alpha+\cos^4\alpha$

2) $\dfrac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}+\dfrac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha}=\dfrac{2}{\sin\alpha}$

3) $\mathrm{tg}^2\alpha-\sin^2\alpha=\mathrm{tg}^2\alpha\sin^2\alpha$

4) $\left(1+\mathrm{tg}^2\alpha\right)\cos^2\alpha-1=0$

5) $\left(1+\cos\alpha\right)\mathrm{ctg}^2\alpha\left(1-\cos\alpha\right)=\cos^2\alpha$

Упростить выражение:

1) $\sin^4\alpha+\cos^4\alpha+2\sin^2\alpha\cos^2\alpha$

2) $\cos^2\alpha-\cos^4\alpha+\sin^4\alpha$

3) $\dfrac{1-2\cos^2\alpha}{\cos\alpha+\sin\alpha}$

4) $\left(\sin^2\alpha+\operatorname{tg}^2\alpha\sin^2\alpha\right)\operatorname{ctg}\alpha$

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$
$$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$$
$$\cos(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$
$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$
$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}$$

ПРИМЕРЫ:

1) $\sin 105^\circ=\sin\left(60^\circ+45^\circ\right)=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\sin 45^\circ\cos 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=$ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

2) Найти $\cos(60^\circ+\alpha)$, если $\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}$ и $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$

РЕШЕНИЕ: $\cos(60^\circ+\alpha)=\cos 60^\circ\cos\alpha-\sin 60^\circ\sin\alpha=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}$,

$\cos\alpha=\pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$, угол $\alpha\in 1$ четверти, значит $\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$,

$\cos(60^\circ+\alpha)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$.

ЗАДАЧИ

1. Вычислить:

1) $\cos 75^\circ$

2) $\sin 210^\circ$

3) $\dfrac{tg29^\circ+tg31^\circ}{1-tg29^\circ tg31^\circ}$

4) $\cos\left(\alpha-\frac{\pi}{4}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ и $\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$

5) $\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{6}\right)$, если $\cos\alpha=-\frac{3}{5}$ и $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$

6) $\sin 73^\circ\cos 13^\circ-\sin 13^\circ\cos 73^\circ$

2.Упростить:

1) $\sin(\alpha+\beta)+\sin(-\alpha)\cos(-\beta)$

2) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)$

3) $cos\left(\frac{\pi}{4}+\alpha\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-\alpha\right)+\frac{1}{2}\sin^2\alpha$

ЛЕКЦИЯ 4. Тригонометрические формулы.

- Формулы приведения.
- Синус, косинус и тангенс двойного угла.
- Формулы половинного аргумента.
- Примеры решения задач с помощью этих формул.

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Эти формулы позволяют преобразовать тригонометрические функции аргумента $\left(\frac{\pi}{2}\cdot n\pm\alpha\right)$ к тригонометрическим функциям аргумента α.

Например, $\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha$.

Здесь в левой части равенства записана приводимая функция (π - граница четверти· α считается углом 1 четверти),а в правой части – приведенная функция.

ПРАВИЛО ПРИВЕДЕНИЯ.

Знак приведенной функции совпадает со знаком приводимой функции в той четверти, в которой лежит угол α.

Если угол α откладывается от оси OX, то название функции не меняется.

Если угол α откладывается от оси OY, то название функции меняется сходное (синус – на косинус, тангенс – на котангенс и наоборот).

ПРИМЕР. Упростить $tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)$

РЕШЕНИЕ .Определим знак приводимой функции: дуга $\frac{3\pi}{2}+\alpha$ оканчивается в четвертой четверти, где тангенс отрицательный, значит, ставим знак минус.

Определим название приведенной функции: угол α откладывается от оси OY, значит, название меняется на котангенс.

$$tg\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=-ctg\alpha$$

ПРИМЕРЫ.

$$\sin 135^\circ=\sin\left(90^\circ+45^\circ\right)=+\cos 45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos 240^\circ=\cos\left(180^\circ+60^\circ\right)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\cos 120^\circ=\cos\left(180^\circ-60^\circ\right)=-\cos 60^\circ=-\frac{1}{2}$$

$$\sin\left(\alpha-\frac{3\pi}{2}\right)=\sin\left(-\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)=+\cos\alpha$$

ЗАДАЧИ

Вычислить

1) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+ctg\left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)-ctg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$

2) $\dfrac{\sin^2(\pi-\alpha)}{1+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\alpha\right)}-\cos(2\pi-\alpha)$

3) $10ctg\frac{3\pi}{4}\cdot\sin\frac{5\pi}{4}\cdot\cos\frac{7\pi}{4}$

4) $ctg240^{\circ}$

5) $\sin\frac{5\pi}{3}$

ФОРМУЛЫ ДВОЙНОГО АРГУМЕНТА

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$
$$\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$$
$$tg2\alpha = \frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$$

ПРИМЕР. Найти $\sin 2\alpha$ и $cos 2\alpha$, если $\sin\alpha = 0{,}8$ и $\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi$.

РЕШЕНИЕ. $\cos 2\alpha = 1-2\sin^2\alpha = 1-2\cdot 0.8^2 = -0.28$

$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$; $\cos\alpha$ -?

$\cos\alpha = \pm\sqrt{1-\sin^2\alpha}$

$\frac{\pi}{2} < 2\alpha < \pi \;\Rightarrow \frac{\pi}{4} < \alpha < \frac{\pi}{2}$; 1 четверть, $\cos\alpha = \sqrt{1-\sin^2\alpha} = \sqrt{1-0{,}8^2} = 0{,}6$

$\sin 2\alpha = 2\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6 = 0{,}96$

ПРИМЕР. Упростить $1-8\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha$

РЕШЕНИЕ. $1-8\sin^2\alpha\cdot\cos^2\alpha = 1-2\cdot(2\sin\alpha\cos\alpha)^2 = 1-2\sin^2 2\alpha = \cos 4\alpha$

ПРИМЕР. Вычислить $\sin 120^{\circ}$

РЕШЕНИЕ. $\sin 120^{\circ} = \sin(60^{\circ}\cdot 2) = 2\sin 60^{\circ}\cos 60^{\circ} = 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

ЗАДАЧИ

1. Дано: $\sin\alpha = 0{,}6; 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Найти $\sin 2\alpha; \cos 2\alpha; tg2\alpha$.
2. Упростить или вычислить:
   1) $\sin 15^{\circ}\cdot\cos 15^{\circ}$
   2) $1-4\sin^2\alpha\cos^2\alpha$
   3) $\dfrac{2tg15^{\circ}}{1-tg^2 15^{\circ}}$
   4) $1-2\sin^2\alpha + \cos 2\alpha$

5) $\cos 4\alpha + 2\sin^2 2\alpha$

ФОРМУЛЫ ПОЛОВИННОГО АРГУМЕНТА (Формулы понижения степени)

$$\sin^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{2}$$
$$\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$$
$$tg^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}$$
$$tg\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

ПРИМЕР. Упростить $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$

РЕШЕНИЕ. $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right) = 2\cdot\frac{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{2} = 1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) = 1-\sin\alpha$

ЗАДАЧИ

Упростить

1) $\dfrac{1-2\sin^2\frac{\alpha}{2}}{2\cos^2\frac{\alpha}{2}-1}$

2) $2\sin^2\left(\frac{\pi}{4}+\frac{3\alpha}{2}\right)-1$

3) $\cos^4\alpha - \sin^4\alpha - \cos 2\alpha$

4) $\dfrac{1+\cos 42^\circ}{1-\sin 48^\circ}$

ЛЕКЦИЯ 5. Тригонометрические формулы (продолжение).

- Преобразование суммы тригонометрических функций в произведение.
- Преобразование произведения в сумму.
- Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента – универсальная подстановка.
- Преобразования тригонометрических выражений с помощью различных формул.

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ СУММЫ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$
$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$tg\alpha + tg\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

$$tg\alpha - tg\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}$$

ФОРМУЛЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОИЗВЕДЕНИЯ В СУММУ

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)\right)$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}\left(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta)\right)$$

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ $\sin\alpha, \cos\alpha$ и $tg\frac{\alpha}{2}$

(УНИВЕРСАЛЬНАЯ ПОДСТАНОВКА)

$$\sin\alpha = \frac{2tg\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

$$\cos\alpha = \frac{1 - tg^2\frac{\alpha}{2}}{1 + tg^2\frac{\alpha}{2}}$$

ЗАДАЧИ

1. Упростить или вычислить:
   1) $\dfrac{\cos 76^\circ - \cos 16^\circ}{1 - 2\sin^2 22^\circ}$
   2) $\left(\dfrac{1}{\sin\alpha} - \dfrac{1}{\sin 3\alpha}\right)\cdot\dfrac{1}{\cos\alpha + \cos 5\alpha}$
   3) $\dfrac{\cos 2\alpha}{\sin 3\alpha - \sin\alpha}\cdot\dfrac{\cos 3\alpha}{\cos 2\alpha + \cos 4\alpha}$
   4) $\dfrac{(\sin 3\alpha - \sin\alpha)(\cos 3\alpha + \cos\alpha)}{1 + \cos 4\alpha}$

5) $\dfrac{\sin\alpha+\sin3\alpha}{\cos\alpha+\cos3\alpha}$

6) $\dfrac{tg\alpha+tg\beta}{tg\alpha-tg\beta}-\dfrac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin(\alpha-\beta)}$

7) $\sin^2\alpha+\cos(60^\circ+\alpha)\cdot\cos(60^\circ-\alpha)$

8) $2\cos(45^\circ+\alpha)\cdot\cos(45-\alpha)$

9) $\sin75^\circ+\sin15^\circ$

10) $\cos\dfrac{5\pi}{12}-\cos\dfrac{\pi}{12}$

11) $\sin15^\circ\cdot\cos75^\circ$

12) $\sin45^\circ\cdot\sin15^\circ$

13) Найти $\sin\alpha+2\cos\alpha$, если $tg\dfrac{\alpha}{2}=-2$.

14) Найти $\sin2\alpha-\cos2\alpha$, если $tg\alpha=3$.

15) Найти $\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{\sin\alpha-\cos\alpha}$, если $ctg\dfrac{\alpha}{2}=2$.

Тема 2.2.Функции, их свойства и графики.

ЛЕКЦИЯ 1. Свойства и графики тригонометрических функций.

- Числовая функция. Область определения и множество значений; график функции.
- Числовая функция $y=\sin x$, ее свойства и график.
- Числовая функция $y=\cos x$, ее свойства и график.
- Числовая функция $y=tgx$, ее свойства и график.
- Числовая функция $y=ctgx$, ее свойства и график.

Числовые функции, заданные формулами $y=\sin x, y=\cos x, y=tgx, y=ctgx$ называются соответственно синусом, косинусом, тангенсом и котангенсом.
Область определения (все значения независимой переменной):

$D($sin)=D(cos)=R

$D(tg)=(-\dfrac{\pi}{2}+\pi n;\dfrac{\pi}{2}+\pi n)$; $D(ctg)=(\pi n;\pi+\pi n)$, $n\in Z$

Множество значений (все значения зависимой переменной):

$E(\sin)=E(\cos)=[-1;1]$

$E(tg)=E(ctg)=R$.

Четность: $\cos(-x)=\cos x$ (четная)

$\sin(-x)=-\sin x$ (нечетная)

$\mathrm{tg}(-x)=-\mathrm{tg}\,x$ (нечетная)

$\mathrm{ctg}(-x)=-\mathrm{ctg}\,x$ (нечетная)

Периодичность:

$\sin(x+2\pi n)=\sin x$

$\cos(x+2\pi n)=\cos x$

$\mathrm{tg}(x+\pi n)=\mathrm{tg}\,x$

$\mathrm{ctg}(x+\pi n)=\mathrm{ctg}\,x,\ n\in Z$

Построим графики тригонометрических функций.

ЛЕКЦИЯ 2. Преобразования графиков.

- Параллельный перенос вдоль оси oy.
- Параллельный перенос вдоль оси ox.
- Растяжение вдоль оси oy.
- Сжатие вдоль оси oy.
- Сжатие вдоль оси ox.
- Растяжение вдоль оси ox.
- Симметрия относительно осей координат.
- Симметрия относительно начала координат.
- Построение графиков функций с модулем.

1. График функции $y=f(x)+b$ получается параллельным переносом графика $y=f(x)$ вдоль оси OY на $|b|$ единиц:
если $b>0$, то вверх; если $b<0$, то вниз.

ПРИМЕР. Построить график функции $y=x^2-2$ двумя способами – параллельным переносом графика $y=x^2$ на 2 единицы вниз и параллельным переносом системы координат в противоположную сторону.

2. График функции $y=f(x+a)$ получается параллельным переносом графика $y=f(x)$ вдоль оси OX на $|a|$ единиц:
если $a>0$, то влево; если $a<0$, то вправо.
ПРИМЕР. Построить график функции $y=(x-2)^2$ двумя способами – параллельным переносом графика $y=x^2$ на 2 единицы вправо и параллельным переносом системы координат в противоположную сторону.

3. График функции $y=kf(x)$, получается из графика $y=f(x)$:
при *k.*>1 растяжением вдоль оси OY в *k* раз,
при 0<*k*<1 сжатием вдоль оси OY в $\dfrac{1}{k}$ раз.

ПРИМЕР. Построить график функции $y=2\sin x$ растяжением графика функции $y=\sin x$ вдоль оси OY в 2 раза и
график функции $y=\dfrac{1}{2}\sin x$ сжатием графика функции $y=\sin x$ вдоль оси OY в 2 раза.

4. График функции $y=f(kx)$, получается из графика $y=f(x)$:
при *k.*>1 сжатием вдоль оси OX в *k* раз,
при 0<*k*<1 растяжением вдоль оси OY в $\dfrac{1}{k}$ раз.

ПРИМЕР. Построить график функции $y=\sin 2x$ сжатием графика функции $y=\sin x$ вдоль оси OY в 2 раза и

график функции $y=\frac{1}{2}\sin x$ растяжением графика функции $y=\sin x$ вдоль оси OY в 2 раза.

5. График функции $y=-f(x)$, симметричен графику $y=f(x)$ относительно оси OX.

ПРИМЕР. Построить график функции $y=-x^2$

6. График функции $y=f(-x)$, симметричен графику $y=f(x)$ относительно оси OY.

ПРИМЕР. Построить график функции $y=\sqrt{-x}$

7. График функции $y=\left|f(x)\right|$ строят так: построить график функции $y=f(x)$, оставить часть графика над осью OX, а часть графика ниже оси OX заменить ее симметрией в верхнюю полуплоскость.

ПРИМЕР. Построить график функции $y=\left|x^2-2\right|$.

8. График функции $y=f(|x|)$ строят так: построить график функции $y=f(x)$, оставить часть графика для $x\geq 0$ (справа от оси OY), а часть графика слева от оси OY заменить симметрией правой части в левую полуплоскость.

ПРИМЕР. Построить график функции $y=\sqrt{|x|}$

ЛЕКЦИЯ 3. Основные свойства функций.

- Числовая функция. Область определения и множество значений; график функции (повторение).
- Способы задания функций.
- Нахождение области определения и множества значений функции, примеры.
- Четные и нечетные функции.
- Периодические функции. Наименьший положительный период функции.
- Возрастание и убывание функции. Промежутки возрастания и убывания.
- Точки экстремума функции.
- Экстремумы функции.
- Наибольшее и наименьшее значения функции.
- Примеры функциональных зависимостей в реальных процессах и явлениях.
- Сложная функция.
- Обратные функции. Область определения и область значений обратной функции.
- График обратной функции.
- Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики.

Понятие функции является центральным понятием математики и не только математического анализа. Вспомним школьное определение функции.

Если каждому элементу *x* множества D ставится в соответствие единственный элемент *y* множества E, то говорят, что на множестве D задана функция $y = f(x)$.

x – аргумент – независимая переменная; *y* – зависимая; она находится по закону: *f*.
Множество D называется областью определения функции, множество E называется множеством значений функции.
Множество значений аргумента – Ваши личности, множество значений функции – Ваши фамилии. Вот так мы продемонстрировали понятие функции: каждому значению аргумента соответствует единственное значение функции, человек не может иметь две фамилии.
Но математика рассматривает числовые функции, т.е. множества D и E – числовые множества.
При этом можно дать и такое определение числовой функции: числовая функция – это множество пар (x,y), среди которых нет пар с одинаковым первым элементом. Вдумайтесь.
Как определяется, задается функция? Прежде всего формулой, по которой по заданному x находится y. Например: $f(x) = x^2 + x + 3$. Подставим x = 2 получим y = 9
Функция может задаваться не одним аналитическим выражением, а несколькими, например:

$$y = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 0; \\ x, \text{ если } x \geq 0 \end{cases}$$

Очень часто зависимость одной переменной величины от другой невозможно выразить аналитически, но такая зависимость существует о определяется она в виде таблицы.

x	-3	-1	0	3	5	6	8	11	13
y	45	22	12	2	-4	3	13	25	34

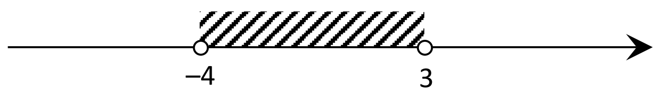
В таком случае говорят о таблично заданной функции.
И, наконец, когда не удается найти аналитического выражения для $y = f(x)$, найти множество пар (x;y), то функцию можно задать графически, т.е. ее графиком. Вспомните свою кардиограмму, перо самописцев в самых различных приборах.

Рассмотрим практические задачи на отыскание области определения некоторых функций. Заметим, что многочлен определен на всем множестве действительных чисел: D: $x \in R$. Так для функции $y = x^2 + 6x - 7$ D: $x \in R$.
Дробно – рациональная функция определена для всех x, при которых ее знаменатель отличен от нуля. Например:

$y = \dfrac{x^2 - x - 6}{x^2 - 1}$ областью определения будет все множество действительных чисел, отличных от -1 и 1. На языке интервалов D: $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;1) \cup (1;\infty)$.

Рассмотрим другие примеры. Найти область определения функций 1) $y = \dfrac{1}{\sqrt{12 - x - x^2}}$

Очевидно, что функция существует только для тех значений x, которые удовлетворяют неравенству: $12 - x - x^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 + x - 12 < 0 \quad \Rightarrow \quad (x-3)(x+4) < 0$



Ответ: $x \in (-4; 3)$. Воспользовались методом интервалов.

2) $y = \dfrac{\sqrt{x+5}}{x-1}$ Очевидно, что функция существует только для тех значений x, которые удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} x + 5 \geq 0 \\ x - 1 \neq 0 \end{cases}$$

Откуда $x \geq -5$ и $x \neq 1$ Объединяя эти неравенства, имеем ответ: $x \in [-5; 1) \cup (1; \infty)$.

Рассмотрим понятия, выражающие *основные (общие) свойства* функций.

Монотонность. Если для x_1, x_2 , принадлежащих интервалу (a;b) и удовлетворяющих условию $x_1, < x_2$ следует $f(x_1) < f(x_2)$, то, говорят, что на (a;b) эта функция возрастает. Или, как говорили в школе, если большему значению аргумента соответствует большее значение функции, то функция возрастает. Самостоятельно сформулируйте определение убывающей функции. Если функция только возрастает или только убывает в области определения, то о такой функции говорят, что она *монотонна.* Так линейная функция, степенная с нечетным показателем являются монотонными, а $y = x^2$ монотонной не является, т.к. при $x < 0$ она убывает, а при $x > 0$ она возрастает.

Ограниченность. Пусть на D задана функция $y = f(x)$. Если существуют такие числа m и M, что для всех $x \in D$, что $m \le f(x) \le M$, то говорят, что функция ограничена в области определения. Различают и такие понятия, как ограниченность снизу и ограниченность сверху. Так, $y = x^3$ – неограниченная функция, $y = x^2$ – ограничена снизу, т.к. она неотрицательна в области определения. y = Sinx и y = Cosx – ограниченные функции, т.к. они принимают значения только из отрезка [-1; 1] – это их множество значений.
Наибольшее и наименьшее значения функции – это самое большое и самое маленькое из всех значений функции. Так для синуса и косинуса $y_{наиб} = 1, y_{наим} = -1$

Четность и нечётность. Функция называется четной, если ее область определения симметрична относительно x = 0 и $f(-x) = f(x)$;

Функция называется нечетной, если ее область определения симметрична относительно x = 0 и $f(-x) = -f(x)$.

График чётной функции симметричен относительно оси ординат, а нечётной – относительно начала координат.

Яркие «представители» четных функций: $y = x^2$, y = Cosx, $y = \dfrac{1}{x^2}$, нечетных $y = x^3$, y = Sinx, $y = \dfrac{1}{x}$, $y = \sqrt[3]{x}$. Для многих функций нет смысла говорить об их четности – нечетности. Так функция $y = \sqrt{x}$ не относится ни к четным, ни к нечетным, потому как ее область определения несимметрична относительно нуля. Такие функции называют функциями общего вида.
Какова методика определения четности – нечетности функции? Рассмотрим примеры.

$f(x) = \dfrac{x^3}{x^2+1}$; Подставим в функцию вместо x -x, будем иметь:

$f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2+1} = \dfrac{-x^3}{x^2+1} = -\dfrac{x^3}{x^2+1} = -f(x)$ Получили определение нечетной функции, вывод: функция нечетная.

$f(x) = \dfrac{Cosx}{x^4+1}$; Подставим в функцию вместо x -x, будем иметь:

$f(-x) = \dfrac{Cos(-x)}{(-x)^4+1} = \dfrac{Cosx}{x^4+1} = \dfrac{Cosx}{x^4+1} = f(x)$ Получили определение четной функции, вывод: функция четная.

Периодичность. Функция $y = f(x)$ называется периодической, если существует такое число T, что для всех x из области определения выполняется равенство: $f(x+T) = f(x),\ где\ T \ne 0$
Очевидно, что если существует такое число T, называемое периодом, то число nT, где n – целое число, также является периодом этой функции. Важнейшие представители периодических функций – тригонометрические функции.

Промежутки знакопостоянства функции – значения аргумента, при которых функция сохраняет постоянный знак: $f(x)\rangle 0$ или $f(x)\langle 0$.

Нули функции - значения аргумента, при которых $f(x)=0$. Это абсциссы точек пересечения графика с осью OX.

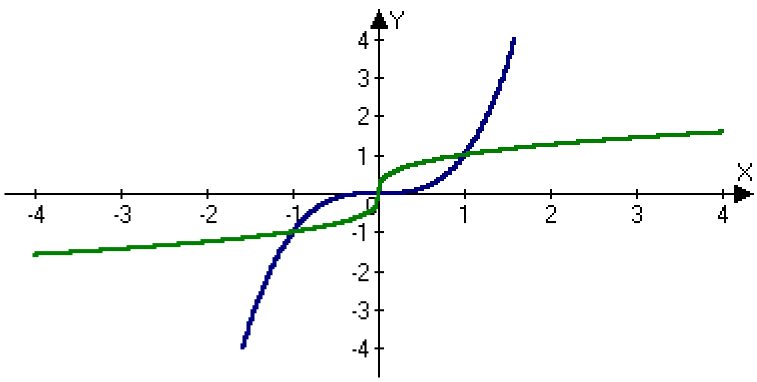
Точки, в которых возрастание функции меняется на убывание называются *точками максимума* - $x_{\max}$
Точки, в которых убывание функции меняется на возрастание называются *точками минимума* - $x_{\min}$

Значение функции в точке максимума называется *максимумом функции,* значение функции в точке минимума называется *минимумом функции:* $f_{\max}=f(x_{\max}),\ f_{\min}=f(x_{\min})$

$x_{\max}, x_{\min}$ - называются *точки экстремума функции,*
$f_{\max}=f(x_{\max}), f_{\min}=f(x_{\min})$- называются *экстремумы функции.*

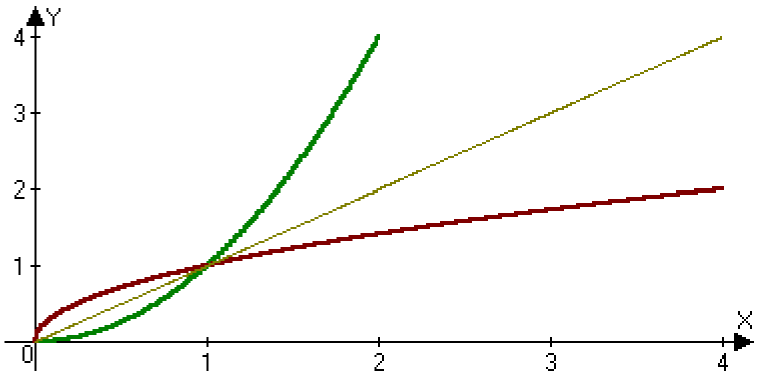
Функция называется *сложной*, если ее аргумент тоже функция, например, $y=\sqrt{3x+1}$.
$y=\sqrt{t}$ - внешняя функция, $y=3x+1$ - внутренняя.

Понятие об обратной функции.
Пусть дана функция у = x^3. Вспомним, что она монотонная: каждому значению аргумента соответствует единственное значение аргумента и наоборот: *каждому значению функции соответствует единственное значение аргумента* (только для монотонных функций!). Будем далее считать независимой переменной у, а х – его функцией, выразим х через у.
$x=\sqrt[3]{y}$ и заменим, как то принято обозначать аргумент и функцию, х на у и у на х, получим $y=\sqrt[3]{x}$. Вот эти две функции у = x^3 , $y=\sqrt[3]{x}$ и называются *взаимно обратными*.



Построим графики этих функций и убедимся, что они симметричны относительно биссектрисы 1-3 координатных углов. Запомните это свойство графиков всех взаимно обратных функций. В дальнейшем Вы будете строить обратные функции по мере их изучения.

Но как быть, если функция, для которой надо построить обратную не является монотонной?
Например, необходимо построить обратную для у = x^2, которая немонотонна. Для этого необходимо так задать область определения исходной функции, на которой она стала бы монотонной. Если для функции у = x^2 положить $x\in[0;\infty)$, то на этом луче она монотонно возрастает, а значит имеет обратную. Очевидно, это $y=\sqrt{x}$ Построим их графики и убедимся, что они симметричны относительно биссектрисы 1-3 координатных углов.



ЗАДАЧИ
1)Постройте обратную функцию для монотонной линейной функции у = 3х, постройте их графики.

2)Определив функцию $y=\frac{1}{x^2}$ на

$x \in [0; \infty)$, постройте для нее обратную функцию.

Тема 2.3.Тригонометрические уравнения и неравенства

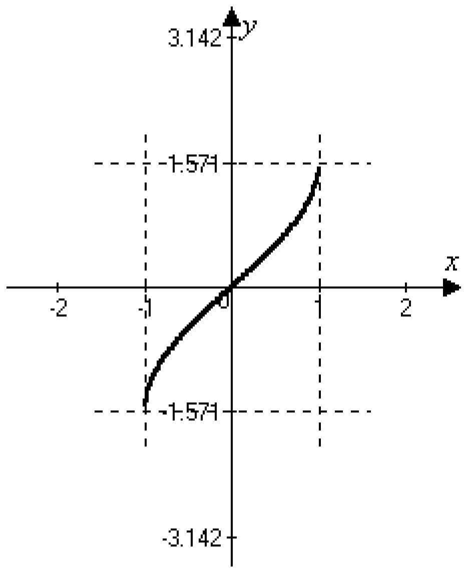
ЛЕКЦИЯ 1. Обратные тригонометрические функции.

- Обратные тригонометрические функции, их свойства и графики:
- Определение и свойства арксинуса числа.
- Определение и свойства арккосинуса числа.
- Определение и свойства арктангенса числа.
- Определение и свойства арккотангенса числа.

1) $\underline{y = \arcsin x}$

Функция $y = \sin x$, где $x \in (-\infty; +\infty)$ не является монотонной на этом промежутке. Поэтому, чтобы говорить об обратной функции, надо выделить участок монотонности. Для функции $y = \arcsin x$ является отрезок $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$.

Итак: $y = \sin x$ $\quad x = \arcsin y$ $\quad \underline{y = \arcsin x}$



Свойства функции $y = \arcsin x$

1) Область определения $x \in [-1;1]$

2) Множество значений $y \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$

3) $\arcsin(-x) = -\arcsin x$

4) Функция монотонно возрастает $[-1;1]$

Например:

$\sin 30^\circ = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad 30^\circ = \arcsin \frac{1}{2}$

$\sin 90^\circ = 1 \quad \Rightarrow \quad 90^\circ = \arcsin 1$ $\qquad \arcsin 0,72 = 46^\circ 03'$

$\arcsin \frac{\sqrt{2}}{2} = 45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$ $\qquad \arcsin 0,236 = 13^\circ 39'$

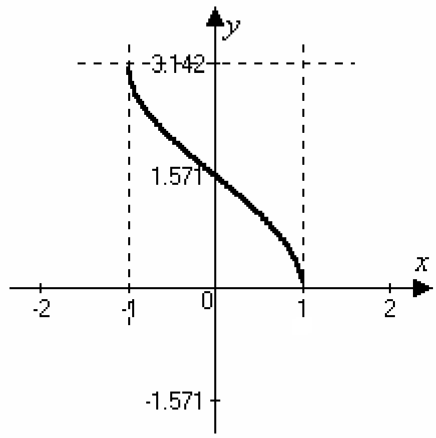
$\arcsin 0 = 0$

2) $\underline{y = \arccos x}$

$y = \cos x$

$x = \arccos y$ Промежуток монотонности $0 \le x \le \pi$

$y = \arccos x$



Свойства функции $y = \arccos x$

1) Область определения $x \in [-1;1]$

2) Множество значений $y \in [0; \pi]$

3) $\arccos(-x) = \pi - \arccos x$

4) Функция монотонно убывает $[-1;1]$

Например:

$\arccos\frac{1}{2} = 60^\circ$ или $\frac{\pi}{3}$

$\arccos(-1) = 180^\circ$ или π

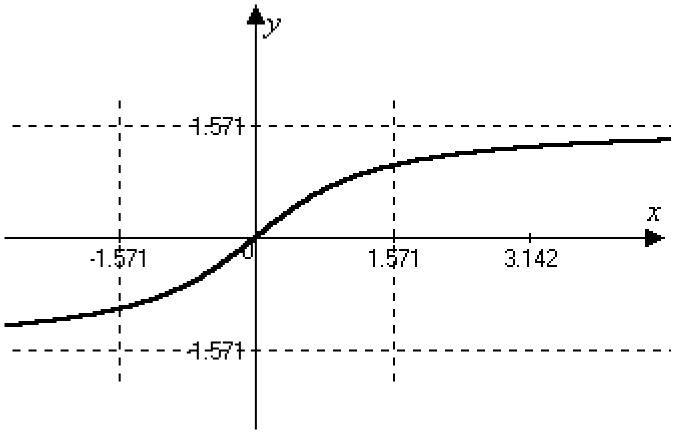
$\arccos 0 = 90^\circ$ или $\frac{\pi}{2}$

$\arccos 0,708 = 44^\circ 55'$

$\arccos 0,112 = 83^\circ 34'$

3) $\underline{y = arctgx}$

Промежуток монотонности $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$



$y = tgx$

$x = arctgy$ $\quad \underline{y = arctgx}$

Свойства функции $\underline{y = arctgx}$

1) Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Множество значений $y \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$

3) $arctg(-x) = -arctgx$

4) Функция монотонно возрастает $(-\infty; +\infty)$

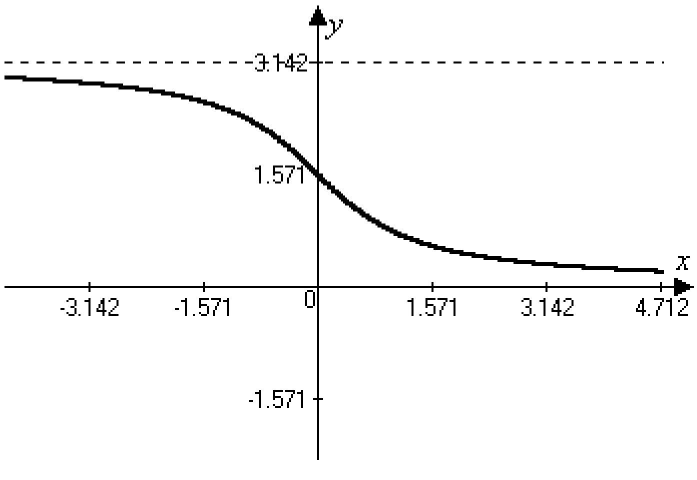
Например:

$arctg1 = 45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$ $\quad arctg2 = 63^\circ 26'$

$arctg\sqrt{3} = 60^\circ$ или $\frac{\pi}{3}$ $\quad arctg14,7 = 86^\circ 11'$

4) $y = arcctgx$

Промежуток монотонности $0 < x < \pi$



$y = ctgx$

$x = arcctgy$ $\quad \underline{y = arcctgx}$

Свойства функции $\underline{y = arcctgx}$

1) Область определения $x \in (-\infty; +\infty)$

2) Множество значений $y \in (0; \pi)$

3) $arcctg(-x) = \pi - arcctgx$

4) Функция монотонно убывает $(-\infty; +\infty)$

Например:

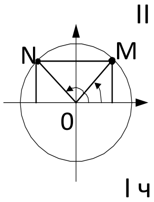
$arcctg1 = 45^\circ$ или $\frac{\pi}{4}$ $\quad arcctg4,7 = 12^\circ$

$arcctg\sqrt{3} = 30^\circ$ или $\frac{\pi}{6}$ $\quad arcctg10,8 = 5^\circ 17'$

- Решение простейшего тригонометрического уравнения $\cos x = a$. Условия существования корней уравнения. Формулы корней.
- Решение простейшего тригонометрического уравнения $\sin x = a$. Условия существования корней уравнения. Формулы корней.
- Решение простейшего тригонометрического уравнения $tgx = a$. Условия существования корней уравнения. Формулы корней.
- Решение простейшего тригонометрического уравнения $ctgx = a$. Условия существования корней уравнения. Формулы корней.
- Частные случаи.
- Примеры решения уравнений.

Уравнения вида $\sin x = a;\ \cos x = a;\ tgx = a;\ ctgx = a$ называются простейшими тригонометрическими уравнениями.

$1)\sin x = a \qquad |a| \le 1$



II ч. $180^\circ - x = \arcsin a + 360^\circ \cdot n$

отсюда

$x = 180^\circ - \arcsin a + 360^\circ \cdot n$

I ч. $x = \arcsin a + 360^\circ \cdot n$

$$\boxed{x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, n \in Z}$$

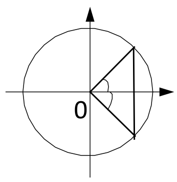
Например:

$\sin x = 0,437$

$x = (-1)^n \arcsin 0,437 + \pi n; n \in Z$

$x = (-1)^n\, 25^\circ 54' + 180^\circ \cdot n; n \in Z$

$2)\cos x = a \qquad |a| \le 1$



$x = \arccos a + 2\pi n$

$-x = \arccos a + 2\pi n \quad \Rightarrow$

$$\boxed{x = \pm\arccos a + 2\pi n; n \in Z}$$

Например:

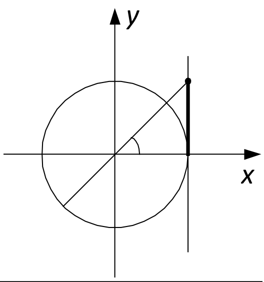
$\cos 4x = -0,712$

$4x = \pm\arccos(-0,72) + 2\pi \cdot n, n \in Z$

$4x = \pm 135^\circ 24' + 360^\circ \cdot n, n \in Z$

$x = \pm 33^\circ 51' + 90^\circ \cdot n, n \in Z$

3) $tgx = a$; a – любое значение



$$\boxed{x = arctga + \pi n, n \in Z}$$

Например:

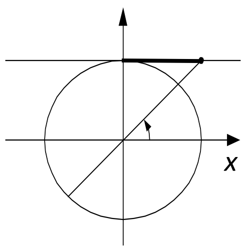
$tg\dfrac{x}{2} = 4$

$\dfrac{x}{2} = arctg4 + \pi n, n \in Z$

$\dfrac{x}{2} = 75^\circ 57' + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$x = 151^\circ 54' + 360^\circ \cdot n, n \in Z$

4) $ctgx = a$; a – любое



$$\boxed{x = arctga + \pi n, n \in Z}$$

Например:

$ctg3x = 4,72$

$3x = arcctg4,72 + \pi n, n \in Z$

$3x = 11^\circ 57' + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$x = 3^\circ 59' + 60^\circ \cdot n, n \in Z$

Решить уравнения:

$1)\sin 2x = -0,72 \qquad 2)ctg\left(\dfrac{x}{2} + 20^\circ\right) = 0,34 \qquad 3)\cos\dfrac{x}{4} = -0,318$

$4)tg\left(\dfrac{\pi}{6} - 5x\right) = 1 \qquad 5)\cos(2x - 3,4) = 0,112$

Решения уравнений:

$2)\dfrac{x}{2} + 20^\circ = arcctg0,34 + 180^\circ \cdot n, n \in Z$

$\dfrac{x}{2} + 20^\circ = 71^\circ 13' + 180^\circ \cdot n, \ n \in Z$

$$1)\ 2x=(-1)^n\arcsin(-0,72)+\pi n, n\in Z$$

$$2x=(-1)^n\arcsin\left(-46^\circ 03'\right)+180^\circ\cdot n, n\in Z$$

$$2x=(-1)^{n+1}\cdot 46^\circ 03'+180^\circ\cdot n, n\in Z$$

$$x=(-1)^{n+1}\cdot 23^\circ 02'+90^\circ\cdot n\ n\in Z$$

$$3)\ \frac{x}{4} = \pm\arccos(-0,318) + 2\pi n,\ n \in Z$$

$$\frac{x}{4} = \pm 108^\circ 32' + 360^\circ \cdot n,\ n \in Z$$

$$x = \pm 434^\circ 8' + 1440^\circ \cdot n,\ n \in Z$$

$$4)\ \frac{\pi}{6} - 5x = arctg1 + \pi n,\ n \in Z$$

$$\frac{\pi}{6} - 5x = \frac{\pi}{4} + \pi n,\ n \in Z$$

$$-5x = \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

$$-5x = \frac{\pi}{12} + \pi n,\ n \in Z$$

$$x = -\frac{\pi}{60} - \frac{\pi}{5} n,\ n \in Z$$

5) Решаем в радианной мере измерения

$$2x - 3,4 = \pm\arccos 0,112 + \pi n,\ \ n \in Z$$

$$2x - 3,4 = \pm 1,459 + \pi n,\ \ n \in Z$$

$$2x = \pm 1,459 + 3,4 + \pi n,\ \ n \in Z$$

распишем два случая:

$$2x_1 = 1,459 + 3,4 + \pi n,\ \ n \in Z$$

$$2x_1 = 4,859 + \pi n,\ \ n \in Z$$

$$x_1 = 2,4295 + \frac{\pi}{2} \cdot n,\ n \in Z$$

$$x_1 = 2,43 + \frac{\pi}{2} \cdot n,\ \ n \in Z$$

или

$$2x_2 = -1,459 + 3,4 + \pi n,\ \ n \in Z$$

$$2x_2 = 1,941 + \pi n,\ \ n \in Z$$

$$\boxed{x_2 = 0,97 + \frac{\pi}{2} \cdot n,\ \ n \in Z}$$

Ответ: $x_1 = 2,43 + \frac{\pi}{2} \cdot n,\ \ n \in Z$ $\quad x_2 = 0,97 + \frac{\pi}{2} \cdot n,\ \ n \in Z$.

Частные случаи простейших тригонометрических уравнений

Вспоминаем свойства функций, табличные значения функций и отмечаем углы, в которых функции равны нулю, -1, 1.

$$\boxed{\begin{aligned}&\sin x = 0\\ &x = \pi n, n \in Z\end{aligned}}\qquad \boxed{\begin{aligned}&\sin x = 1\\ &x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z\end{aligned}}\qquad \boxed{\begin{aligned}&\sin x = -1\\ &x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&\cos x = 0\\ &x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\end{aligned}}\qquad \boxed{\begin{aligned}&\cos x = -1\\ &x = \pi + 2\pi n, n \in Z\end{aligned}}\qquad \boxed{\begin{aligned}&\cos x = 1\\ &x = 2\pi n, n \in Z\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&tg\, x = 0\\ &x = \pi n, n \in Z\end{aligned}}$$

$$\boxed{\begin{aligned}&ctg\, x = 0\\ &x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z\end{aligned}}$$

Решение уравнений:

1) $\sin 2x = 0$

2) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$

3) $\sin\left(4x + 20^\circ\right) = -1$

4) $\cos\frac{x}{2} = -1$

5) $\cos 5x = 0$

6) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 1$

7) $tg\left(x - \frac{\pi}{6}\right) = 0$

8) $ctg\frac{2}{3}x = 1$

9) $tg 4x = 1$

10) $\sin 4x \cdot \cos 3x + \cos 4x \cdot \sin 3x = 0$

11) $\cos^2 4x - \sin^2 4x = 0$

12) $2\sin 6x \cdot \cos 6x = 1$

13) $\sin 4x \cdot tg\frac{x}{2} = 0$

14) $ctg\frac{x}{2} \cdot \left(1 + \cos x\right) = 0$

15) $\cos 7x \cdot \cos 3x + \sin 7x \cdot \sin 3x = 0$

16) $\sin\left(2x - 3\right) = -1$

Решения: В уравнениях 1–9 применяются формулы решения соответствующих уравнений.

1) $\sin 2x = 0$

$2x = \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{2}n,\ n \in Z}$

2) $3x - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$3x = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} + 2\pi n$

$3x = \frac{3}{4}\pi + 2\pi n$

$\boxed{x = \frac{\pi}{4} + \frac{2}{3}\pi n, n \in Z}$

3) $4x + 20^\circ = -90^\circ + 360^\circ \cdot n, n \in Z$

$4x = -110^\circ + 360^\circ$

$\boxed{x = -27^\circ 30' + 90^\circ \cdot n, n \in Z}$

4) $\frac{x}{2} = \pi + 2\pi n, n \in Z$

$\boxed{x = 2\pi + 4\pi n, n \in Z}$

5) $5x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{10} + \frac{\pi}{5}n, n \in Z}$

6) $2x - \frac{\pi}{3} = 2\pi n, n \in Z$

$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi n$

$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z}$

7) $x - \frac{\pi}{6} = \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z}$

8) $\frac{2}{3}x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{3}{8}\pi + \frac{3}{2}\pi n, n \in Z}$

9) $4x = \frac{\pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{4}n, n \in Z}$

При решении остальных уравнений следует использовать и формулы суммы двух углов, и формулы двойных углов.

10) $\sin 7x = 0$

$7x = \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{7} n, n \in Z}$

11) $\cos 8x = 0$

$8x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{16} + \frac{\pi}{8} n, n \in Z}$

12) $\sin 12x = 1$

$12x = \frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{6} n, n \in Z}$

13) $\sin 4x = 0;$

$4x = \pi n, n \in Z;$

$\boxed{x = \frac{\pi}{4} n, n \in Z}$

$tg \frac{x}{2} = 0$

$\frac{x}{2} = \pi n$

$\boxed{x = 2\pi n, n \in Z}$

14) $ctg \frac{x}{2} = 0;$

$\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \pi + 2\pi n, n \in Z}$

$1 + \cos x = 0$

$\cos x = -1$

$\boxed{x = \pi + 2\pi n, n \in Z}$

15) $\cos 4x = 0$

$4x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = \frac{\pi}{8} + \frac{\pi}{4} n, n \in Z}$

16) $2x - 3 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi n, n \in Z$

$2x = \left(3 - \frac{\pi}{2}\right) + 2\pi n, n \in Z$

$x = \frac{6 - \pi}{4} + \pi n, n \in Z$

$\boxed{x = 0,71 + \pi n, n \in Z}$

ЛЕКЦИЯ 3. Решение тригонометрических уравнений и неравенств

- Уравнения, приводимые к квадратным.
- Уравнения, решаемые разложением на множители
- Однородные тригонометрические уравнения.
- Уравнения, приводимые к однородным.
- Введение вспомогательного аргумента.
- Решение простейших тригонометрических неравенств с помощью единичной окружности.

Решение тригонометрических уравнений:

1) $2\sin^2 x + 5\cos x = 4$

уравнение содержит функции одинакового угла, можно привести к квадратному уравнению, если заменить $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$:

$2\left(1 - \cos^2 x\right) + 5\cos x = 4$

$2 - 2\cos^2 x + 5\cos x - 4 = 0$

$-2\cos^2 x + 5\cos x - 2 = 0$

$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$

Пусть $\cos x = t$, тогда

$2t^2 - 5t + 2 = 0$ $\qquad D = 25 - 4 \cdot 2 \cdot 2 = 25 - 16 = 9$

$t_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{4};$ $\quad t_1 = 2 \quad t_2 = \frac{1}{2}$ и тогда имеем два простейших уравнения $\sin x = \frac{1}{2}$ и $\sin x = 2$

решаем их, применяя формулу решения уравнения $\underline{\sin x = a}$

$\sin x \neq 2$ уравнение не имеет решения, т.к. $\lvert \sin x \rvert \leq 1$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = (-1)^n \arcsin\frac{1}{2} + \pi n, n \in Z$$

$$x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$$

И тогда, ответ: $x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n, n \in Z$

2) $2\sin^2 x + 5\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) - 2 = 0$

функции имеют разные углы, приведем к одному углу, используя формулы приведения:

$2\sin^2 x - 5\cos x - 2 = 0$, т.к. $\sin\left(\frac{3}{2}\pi - x\right) = -\cos x$

учитывая, что $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, имеем:

$$2\left(1 - \cos^2 x\right) - 5\cos x - 2 = 0$$

$$2 - 2\cos^2 x - 5\cos x - 2 = 0$$

$$2\cos^2 x + 5\cos x = 0$$

$$\cos x\left(2\cos x + 5\right) = 0$$

произведение равно 0, если хотя бы один из сомножителей равен 0, имеем

$\cos x = 0$

$x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$

и

$2\cos x + 5 = 0$

$\cos x \neq -\frac{5}{2}$ – уравнение не имеет решения, т.к. $\lvert \cos x \rvert \leq 1$

Ответ: $x = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in Z$.

3) $tg^3 x = tgx$

$tg^3 x - tgx = 0$

$tgx\left(tg^2 x - 1\right) = 0 \Rightarrow$

$tgx = 0$

$x = \pi n, n \in Z$

и

$tg^2 x - 1 = 0; tg^2 x = 1$ и тогда $tgx = \pm 1$ $\qquad x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}, k \in Z$

Ответ: $x = \pi n, n \in Z;\quad x = \pi k \pm \frac{\pi}{4}, k \in Z$.

4) $\sin 7x + \sin 2x = 0$

левую часть уравнения можно преобразовать в произведение, используя формулу $\sin\alpha + \sin\beta =$
$= 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$

$$2\sin\frac{7x+2x}{2} \cdot \cos\frac{7x-2x}{2} = 0$$

$2\sin\frac{9}{2}x \cdot \cos\frac{5}{2}x = 0$ и тогда

$\sin\frac{9}{2}x = 0$

$\frac{9}{2}x = \pi n, n \in Z$

$x = \frac{2}{9}\pi n, n \in Z$

или

$\cos\frac{5}{2}x = 0$

$\frac{5}{2}x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z$

$x = \frac{\pi}{5} + \frac{2}{5}\pi k, k \in Z$

Ответ: $\underline{x=\frac{2}{9}\pi n, n\in Z}$ $\quad\underline{x=\frac{\pi}{5}+\frac{2}{5}\pi k, k\in Z}$.

5) $4\cos^3 x+4\cos^2 x-3\cos x-3=0$

левую часть можно преобразовать в произведение, используя способ группировки:

$$\left(4\cos^3 x+4\cos^2 x\right)-\left(3\cos x+3\right)=0$$

$$4\cos^2 x\left(\cos x+1\right)-3\left(\cos x+1\right)=0$$

$$\left(\cos x+1\right)\left(4\cos^2 x-3\right)=0$$

и тогда

$\cos x+1=0$

$\cos x=-1$

$\underline{x=\pi+2\pi n, n\in Z}$

или

$4\cos^2 x-3=0$

$\cos^2 x=\frac{3}{4}$

$\cos x=\pm\sqrt{\frac{3}{4}}=\pm\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\underline{x=\pi k\pm\frac{\pi}{3}, k\in Z}$

Ответ: $x=\pi k\pm\frac{\pi}{3}, k\in Z$ $\quad x=\pi+2\pi n, n\in Z$.

6) Рассмотрим уравнение $\sin^2 x-10\sin x\cdot\cos x+21\cos^2 x=0$

Замечаем, что левая часть уравнения есть однородный многочлен относительно функций $\sin x$ и $\cos x$, а правая часть равна нулю.

Такие уравнения называются однородными тригонометрическими уравнениями. Для их решения надо каждый член уравнения разделить на $\cos x$ или $\sin x$ в той степени, какова степень уравнения:

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\frac{10\sin x\cdot\cos x}{\cos^2 x}+\frac{21\cos^2 x}{\cos^2 x}=0$$

$tg^2x-10tgx+21=0,$

решаем квадратное уравнение относительно функции tgx.

Пусть $tgx=t$, тогда

$t^2-10t+21=0$

$D=100-84=16$

$t_{1,2}=\frac{10\pm4}{2};\quad t_1=7;\quad t_2=3$

тогда $tgx=7$

$x=arctg7+\pi n, n\in Z$

$\underline{x=81^\circ52'+180^\circ n, n\in Z}$

$tgx=3$

$x=arctg3+\pi n, n\in Z$

$x=71^\circ33'+180^\circ n, n\in Z$

Ответ: $\underline{x=81^\circ52'+180^\circ n, n\in Z}$ $\quad x=71^\circ33'+180^\circ n, n\in Z$.

7) $3\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+5\cos^2 x=2$

Данное уравнение приводится к однородному тригонометрическому уравнению; для этого представим $2=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$.

Имеем:

$$3\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+5\cos^2 x=2\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)$$

$$3\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+5\cos^2 x-2\sin^2 x-2\cos^2 x=0$$

$$\sin^2 x-4\sin x\cdot\cos x+3\cos^2 x=0$$

разделим на $\cos^2 x$

$tg^2x-4tgx+3=0$

$tgx=t;\quad t^2-4t+3=0$

$D=16-12=4$

$t_{1,2}=\frac{4\pm2}{2};\quad t_1=3; t_2=1$

$tgx=3$

$x=arctg3+\pi n, n\in Z$

$\underline{x=71^\circ33'+180^\circ n, n\in Z}$

$tgx=1$

$\underline{x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z}$

Ответ: $x=71^\circ33'+180^\circ n, n\in Z$ $\quad x=\frac{\pi}{4}+\pi k, k\in Z$.

Итак, мы рассмотрели уравнения, приводимые к одному аргументу, квадратному уравнению; левая часть которых разлагается на множители, а правая равна нулю – однородные тригонометрические уравнения.

А сейчас рассмотрим уравнение линейное относительно $\sin x$ и $\cos x$, которое имеет вид $a\sin x+b\cos x=c$. Надо помнить, что уравнение имеет решение, если $c^2\le a^2+b^2$. Это уравнение можно решать: 1) выразив $\sin x$ и $\cos x$ через $tg\frac{x}{2}$, приводим уравнение к квадратному относительно $tg\frac{x}{2}$; 2) введением вспомогательного угла.

Рассмотрим на конкретном примере:

1) $8\sin x+3\cos x=5$

проверим условие $c^2\le a^2+b^2$; действительно 25 < 64 + 9 $\Rightarrow$ уравнение имеет решение.

Первый способ.

$8\cdot\frac{2tg\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}+3\frac{1-tg^2\frac{x}{2}}{1+tg^2\frac{x}{2}}=5$ $\qquad 16tg\frac{x}{2}+3-3tg^2\frac{x}{2}=5+5tg^2\frac{x}{2}$

$8tg^2\frac{x}{2}-16tg\frac{x}{2}+2=0$ $\qquad 4tg^2\frac{x}{2}-8tg\frac{x}{2}+1=0$

$tg\frac{x}{2}=t\, 4t^2-8t+1=0$

$D=64-16=48$

$t_{1,2}=\frac{8\pm\sqrt{48}}{8}=\frac{8\pm4\sqrt{3}}{8}=1\pm\frac{1}{2}\sqrt{3}$

$t_1=1{,}87\qquad t_2=0{,}134$

имеем:

$tg\frac{x}{2}=1{,}87$ $\qquad$ и $\qquad tg\frac{x}{2}=0{,}134$

$\frac{x}{2}=arctg1{,}87+\pi n, n\in Z$ $\qquad \frac{x}{2}=arctg0{,}134+180^\circ k, k\in Z$

$\frac{x}{2}=61^\circ52'+180^\circ n, n\in Z$ $\qquad \frac{x}{2}=7^\circ38'+180^\circ k, k\in Z$

$x=123^\circ44'+360^\circ n, n\in Z$ $\qquad x=15^\circ16'+360^\circ k, k\in Z$

Ответ: $x=123^\circ44'+360^\circ n, n\in Z$; $x=15^\circ16'+360^\circ k, k\in Z$.

Второй способ.

$8\sin x+3\cos x=5$
$25<64+9$ – уравнение имеет решения
Найдем $\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{8^2+3^2}=\sqrt{73}$
Разделим каждый член уравнения на $\sqrt{73}$

$$\frac{8}{\sqrt{73}}.\sin x+\frac{3}{\sqrt{73}}\cos x=\frac{5}{\sqrt{73}}$$

Заметим, что $\frac{8}{\sqrt{73}}<1$ и $\frac{3}{\sqrt{73}}<1$, а вот $\left(\frac{8}{\sqrt{73}}\right)^2+\left(\frac{3}{\sqrt{73}}\right)^2=\frac{64}{73}+\frac{9}{73}=1$.

Из этого следует, что $\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\cos\varphi$, $\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sin\varphi$, где φ – вспомогательный угол. Для нашего уравнения $\cos\varphi=\frac{8}{\sqrt{73}}$; $\sin\varphi=\frac{3}{\sqrt{73}}$; отсюда $\varphi=\arcsin\frac{3}{\sqrt{73}}$.

Наше уравнение принимает вид:

$$\cos\varphi\cdot\sin x+\sin\varphi\cdot\cos x=\frac{5}{\sqrt{73}}$$

левая часть уравнения – это $\sin\left(x+\varphi\right)$ и значит получаем

$$\sin\left(x+\varphi\right)=\frac{5}{\sqrt{73}}$$

$$x+\varphi=\left(-1\right)^n\arcsin\frac{5}{\sqrt{73}}+\pi n,n\in Z$$

$$x=\left(-1\right)^n\arcsin\frac{5}{\sqrt{73}}-\varphi+\pi n,n\in Z$$

$$x=\left(-1\right)^n\arcsin\frac{5}{\sqrt{73}}-\arcsin\frac{3}{\sqrt{73}}+\pi n,n\in Z$$

Найдем углы

$$x=\left(-1\right)^n 35^\circ49'-20^\circ33'+180^\circ n,n\in Z$$

Если дать значения $n=0,1,2,3...$, то получим те же углы, что и в первом случае.
Ваше желание, какому способу отдать предпочтение.
Решим ещё: 2) $\sqrt{3}\sin x-\cos x=1$ проверим условие: $1<3+1$

$$\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{3+1}=2;\quad \cos\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \sin\varphi=\frac{1}{2}\Rightarrow\varphi=30^\circ$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\sin x-\frac{1}{2}\cos x=1$$

$$\cos 30^\circ\cdot\sin x-\sin 30^\circ\cdot\cos x=1$$

$\sin\left(x+30^\circ\right)=1$ – частный случай $\Rightarrow$

$$x+30^\circ=90^\circ+360^\circ n,n\in Z$$

$$x=60^\circ+360^\circ n,n\in Z$$

Итак, что можно сказать о решении тригонометрических уравнений?
Наиболее применимы два метода:

1) привести тригонометрическое уравнение к алгебраическому различными методами, в зависимости от условия.
2) Метод разложения на множители, это общий метод решения многих уравнений. Суть его в том, что перенеся все члены в одну часть, надо постараться разложить её на

множители. Таким образом решение уравнения сводится к решению совокупности простейших уравнений.

Продолжим решение тригонометрических уравнений различных видов.

3) $\cos 15x = \sin 5x$

$\cos 15x - \sin 5x = 0$

$\cos 15x - \cos\left(90^\circ - 5x\right) = 0$

применяем формулу $\cos\alpha - \cos\beta$

$-2\sin\dfrac{15x + 90^\circ - 5x}{2} \cdot \sin\dfrac{15x - 90^\circ + 5x}{2} = 0$

$-2\sin\dfrac{10x + 90^\circ}{2} \cdot \sin\dfrac{20x - 90^\circ}{2} = 0$

$-2\sin\left(5x + 45^\circ\right) \cdot \sin\left(10x - 45^\circ\right) = 0$

и тогда:

$\sin\left(5x + 45^\circ\right) = 0$	$\sin\left(10x - 45^\circ\right) = 0$
$5x + 45^\circ = 180^\circ \cdot n, n \in Z$	$10x - 45^\circ = 180^\circ \cdot k, k \in Z$
$5x = -45^\circ + 180^\circ \cdot n, n \in Z$	$10x = 45^\circ + 180^\circ \cdot k, k \in Z$
$\underline{x = -9^\circ + 36^\circ n, n \in Z}$	$\underline{x = 4^\circ 30' + 18^\circ \cdot k, k \in Z}$

Ответ: $\underline{x = -9^\circ + 36^\circ n, n \in Z}$; $\underline{x = 4^\circ 30' + 18^\circ \cdot k, k \in Z}$.

4) $1 - \cos x = 2\sin\dfrac{x}{2}$ левая часть уравнения это формула

$2\sin^2\dfrac{x}{2} = 2\sin\dfrac{x}{2}$

$2\sin^2\dfrac{x}{2} - 2\sin\dfrac{x}{2} = 0 \;\Rightarrow\; 2\sin\dfrac{x}{2}\left(\sin\dfrac{x}{2} - 1\right) = 0$

$\sin\dfrac{x}{2} = 0$	$\sin\dfrac{x}{2} - 1 = 0$
	$\sin\dfrac{x}{2} = 1$
$\dfrac{x}{2} = \pi n, n \in Z$	$\dfrac{x}{2} = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi k, k \in Z$
$\underline{x = 2\pi n, n \in Z}$	$\underline{x = \pi + 4\pi k, k \in Z}$

Ответ: $\underline{x = 2\pi n, n \in Z}$ $\underline{x = \pi + 4\pi k, k \in Z}$.

5) $\sin\left(30^\circ + x\right) + \sin\left(30^\circ - x\right) = \dfrac{1}{2}$

применим формулу $\sin\alpha + \sin\beta$ к левой части уравнения:

$$2\sin\frac{30^\circ+x+30^\circ-x}{2}\cdot\cos\frac{30^\circ+x-30^\circ+x}{2}=\frac{1}{2}$$

$$2\sin 30^\circ\cdot\cos x=\frac{1}{2}$$

$$2\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos x=\frac{1}{2}$$

$$\cos x=\frac{1}{2};\qquad x=\pm\arccos\frac{1}{2}+2\pi k, k\in Z$$

$$x=\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$$

Ответ: $\pm\frac{\pi}{3}+2\pi k, k\in Z$.

6) $\cos\left(x-70^\circ\right)=\sin\left(x+70^\circ\right)$

$\cos\left(x-70^\circ\right)-\sin\left(x+70^\circ\right)=0$

Учитывая, что $\cos\alpha=\sin\left(90^\circ-\alpha\right)$ заменим $\sin\left(x+70^\circ\right)$ на $\cos\left(90^\circ-x-70^\circ\right)=\cos\left(20^\circ-x\right)$, тогда $\cos\left(x-70^\circ\right)-\cos\left(20^\circ-x\right)=0$.

Применяем формулу $\cos\alpha-\cos\beta$ и получим

$$-2\sin\frac{x-70^\circ+20^\circ-x}{2}\cdot\sin\frac{x-70^\circ-20^\circ+x}{2}=0 \qquad -2\sin\frac{-70^\circ}{2}\cdot\sin\frac{2x-90^\circ}{2}=0$$

$$2\sin 35^\circ\cdot\sin\left(x-45^\circ\right)=0$$

$2\sin 35^\circ\neq 0$, то $\sin\left(x-45^\circ\right)=0$

$x-45^\circ=180^\circ n, n\in Z$

$x=45^\circ+180^\circ n, n\in Z$

7) $\cos 3x+\sin 2x\cdot\sin x=0$

$\cos 3x-\frac{1}{2}\left(\cos 3x-\cos x\right)=0$

$\cos 3x-\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x=0$

$\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x=0$

$\frac{1}{2}\left(\cos 3x+\cos x\right)=0$

$\cos 3x+\cos x=0 \qquad 2\cos 2x\cdot\cos x=0 \qquad \cos 2x\cdot\cos x=0$

$\cos 2x=0 \qquad\qquad \cos x=0$

$2x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}n, n\in Z \qquad\qquad x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$

8) $2\cos^2\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)+3\cos\left(\pi-x\right)-2=0$

ещё раз вспомним, как решать такие уравнения. Применим формулы приведения

$2\sin^2 x-3\cos x-2=0$

приведем к одинаковой функции $\sin^2 x=1-\cos^2 x$ из значит

$2\left(1-\cos^2 x\right)-3\cos x-2=0$

$2-2\cos^2 x-3\cos x-2=0$

$2\cos^2 x+3\cos x=0$

$\cos x\left(2\cos x+3\right)=0$

отсюда

$\cos x=0$ и $2\cos x+3=0$

$x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$ $\cos x=-\frac{3}{2}$, как видим это уравнение не имеет решения, т.к. $\left|-\frac{3}{2}\right|>1$, а $|\cos x|\le 1$ поэтому ответ: $x=\frac{\pi}{2}+\pi n, n\in Z$.

Мы рассмотрели решения различных уравнений и видим, что в каждом случае надо творчески подходить к нахождению метода решения, что возможно при хорошем знании формул тригонометрии, алгебраических преобразованиях.

1. Решение тригонометрических неравенств

Простейшими тригонометрическими неравенствами называются неравенства вида

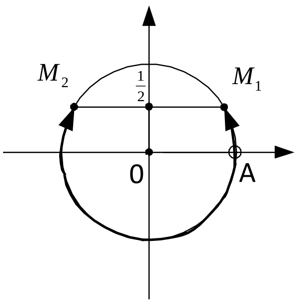
$\sin x<m \quad \cos x<m \quad tgx<m \quad ctgx<m$

$\sin x>m \quad \cos x>m \quad tgx>m \quad ctgx>m$

где m – данное число

Решить простейшее тригонометрическое неравенство – значит найти множество всех значений аргумента, которые обращают данное неравенство в верное числовое неравенство. Рассмотрим на примерах

1) $\sin x<\frac{1}{2}$, т.к. $|\sin x|\le 1$, то данное неравенство можно записать



$-1\le \sin x\le \frac{1}{2}$

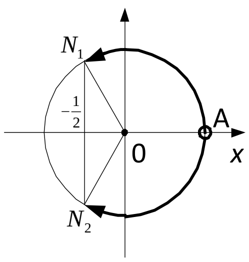
$\cup AM_1=\frac{\pi}{6}$

$\cup AM_2=-\pi-\frac{\pi}{6}=-\frac{7}{6}\pi$

и значит неравенству $\sin x<\frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка $-\frac{7}{6}\pi<x<\frac{\pi}{6}$. Т.к. функция $\sin\alpha$ имеет период 2π, то решение этого неравенства будет промежуток $-\frac{7}{6}\pi+2\pi k\le x<\frac{\pi}{6}+2\pi k$.

2) $\cos x>-\frac{1}{2}$

Перепишем неравенство в силу того, что $|\cos x|\le 1$

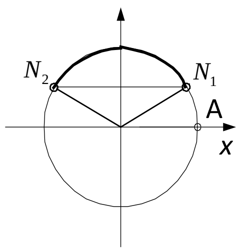


$-\frac{1}{2}<\cos x\le 1$

неравенству $\cos x>-\frac{1}{2}$ удовлетворяют дуги из промежутка $-\frac{2}{3}\pi<x\le\frac{2}{3}\pi$.

Общим решением служит множество дуг вида $-\frac{2}{3}\pi+2\pi k<x<\frac{2}{3}\pi+2\pi k$.

3) $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$, аналогично для $\sin x>\frac{\sqrt{2}}{2}$ удовлетворяет



$\frac{\pi}{4}<x<\pi-\frac{\pi}{4}$

$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3}{4}\pi$

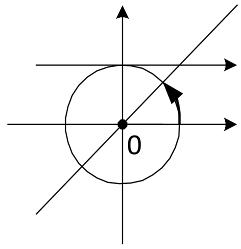
$\frac{\pi}{4}+2\pi k<x<\frac{3}{4}\pi+2\pi k$

4) $tgx > \sqrt{3}$, т.е. можно записать $\sqrt{3} < tgx < \infty$, т.к. функция tg неограниченная. Это неравенство выполняется при $\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$; период функции тангенса равен π, значит $\frac{\pi}{3} + \pi k < x < \frac{\pi}{2} + \pi k$

Самостоятельно:

5) $ctgx > 1$

$1 < ctgx < \infty$ этому неравенству удовлетворяют значения x из промежутка



$0 < x < \frac{\pi}{4}$

$0 + \pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$

Общее решение: $\pi k < x < \frac{\pi}{4} + \pi k$

Раздел 3. Начала математического анализа
Тема3.1.Последовательности

ЛЕКЦИЯ 1. Последовательности .

- Определение последовательности. Способы задания и свойства числовых последовательностей.
- Понятие о пределе последовательности
- Существование предела монотонной ограниченной последовательности.
- Теоремы о пределах последовательностей.
- Нахождение пределов последовательностей.
- Бесконечно убывающая геометрическая прогрессия и ее сумма.

Числовая последовательность – это числовое множество, поставленное в соответствие множеству натуральных чисел. Каждый член последовательности имеет свой порядковый номер. Или, красиво и коротко: числовая последовательность – это функция натурального аргумента. Числовые последовательности задаются формулой общего члена, например:

(1) $a_n = \frac{1}{n}$: $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{3}; \frac{1}{4}; \frac{1}{5}; \ldots$

(2) $a_n = \frac{n}{n+1}$: $\frac{1}{2}; \frac{2}{3}; \frac{3}{4}; \frac{4}{5}; \ldots$

(3) $a_n = 2n-1$: $1; 3; 5; 7; 9; 11; \ldots$

(4) $a_n = \frac{1}{2^n}$; $\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{32}; \ldots$

(5) $a_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$; $1; \frac{-1}{4}; \frac{1}{9}; \frac{-1}{16}; \frac{1}{32}; \frac{-1}{64}; \ldots$

(6) $a_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$; $\frac{-1}{2}; \frac{2}{5}; \frac{-3}{10}; \frac{4}{17}; \frac{-5}{26}; \ldots$

(7) $a_n = \frac{1}{n!}$; $1; \frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{24}; \frac{1}{120}; \frac{1}{720}; \ldots$

Как видите, после каждой формулы общего члена числовой последовательности вычислено несколько первых членов соответствующих последовательностей, проверьте правильность.

Числовые последовательности можно определять заданием нескольких первых членов, например:

(8) a_n: 1; -1; 1; -1; 1; -1;…

(9) a_n: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13… -эта последовательность носит название «Числа Фибоначчи», члены этой последовательности получают по рекуррентной формуле $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, при условии, что $a_1 = a_2 = 1$

МОНОТОННОСТЬ. Числовая последовательность a_n называется *возрастающей*, если для всех n $a_n < a_{n+1}$. Различайте понятия «возрастающая последовательность» и «неубывающая последовательность». Так последовательность (2) возрастающая, а последовательность (10) a_n: 1; 1; 2; 2; 3; 3;… неубывающая.

Аналогично, числовая последовательность a_n называется убывающей, если для всех n $a_n > a_{n+1}$. Различайте понятия «убывающая последовательность» и «невозрастающая последовательность». Так последовательность (1) убывающая, а последовательность (11) a_n: 1; 1; 0,2; 0,2; 0,1; 0,1;… невозрастающая.

Итак, убывающие, возрастающие, неубывающие, невозрастающие последовательности называются МОНОТОННЫМИ.

Так, последовательности (1); (2); (3); (4); (7); (9); (10); (11) являются монотонными, а последовательности (5); (6); (8) монотонными не являются, они называются *колеблющимися*.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ. Если существуют такие числа m и M, что для всех n $m \le a_n \le M$, то говорят, что последовательность a_n ограниченная. Причем m – нижняя граница, M – верхняя граница. Только последовательности, ограниченные и сверху и снизу называются собственно ограниченными.

Так, последовательность (1) ограниченна: снизу числом 0, сверху – числом 1. В самом деле, все ее члены принадлежат промежутку:

(0; 1]. Последовательность (2) также ограничена, все члены этой последовательности удовлетворяют неравенству $\frac{1}{2} \le a_n < 1$. А вот последовательность (3) хотя и ограничена снизу числом 1, но она неограниченна сверху, поэтому она является неограниченной.

Убедитесь самостоятельно, что последовательности (4) – (7) являются ограниченными и найдите нижнюю и верхнюю границы. Так, для последовательности (6) все ее члены принадлежат отрезку $[\frac{-1}{2};\frac{2}{5}]$.

СХОДИМОСТЬ. Для усвоения этого понятия необходимо ввести понятие *предела числовой последовательности*. Оно, это понятие, - важнейшее в курсе математического анализа! Рассмотрим последовательность

(2) $a_n = \frac{n}{n+1}$: $\frac{1}{2};\frac{2}{3};\frac{3}{4};\frac{4}{5};...$ Как уже отмечалось, эта последовательность ограничена и монотонна. Она ограничена сверху числом 1, т.к. все ее члены меньше 1, в то же время она возрастает. Таким образом, на интуитивном уровне, можно сделать вывод, что члены этой последовательности *стремятся* к 1. Как понимается последний глагол? Если a $\rightarrow$ b, то это означает, что расстояние на числовой прямой между этими числами будет меньше любого сколь угодно малого положительного числа ε, т.е. $|a-b| < \varepsilon$.

В этом случае можно сказать, что пределом этой последовательности при n $\rightarrow$ ∞ является число 1. И записывают это так:

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$, и читают: предел числовой последовательности $a_n = \frac{n}{n+1}$ равен 1 при n стремящимся к бесконечности.

Дадим определение предела числовой последовательности в общем виде, его сформулировал французский математик О. Коши.

Число b называется пределом числовой последовательности a_n, если по любому наперед заданному сколь угодно малому положительному числу ε найдется такой номер члена последовательности N, что для всех n > N, будет выполняться неравенство $|a_n - b| < \varepsilon$.

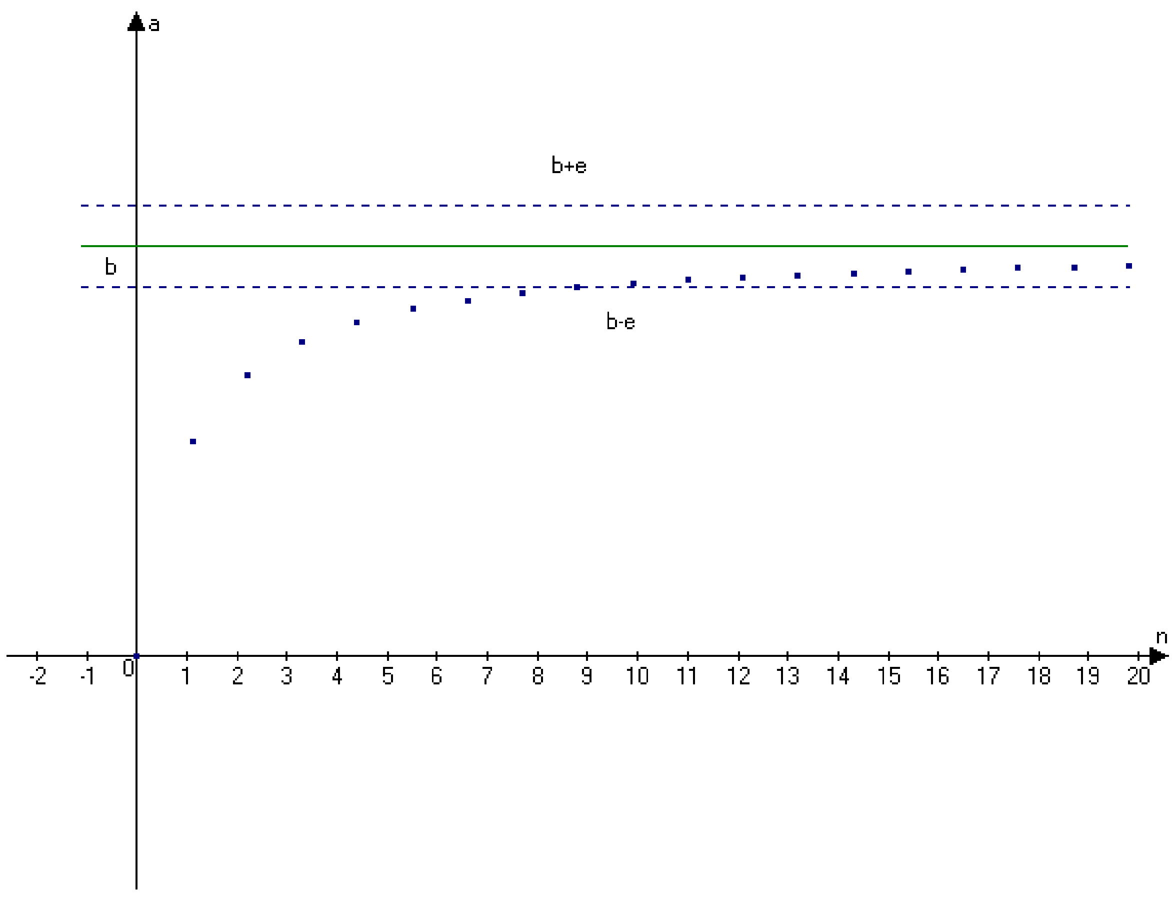


Рис . 1

Или (на языке интервалов) …для всех n > N все члены последовательности будут принадлежать интервалу (b - ε ; b + ε).
На рисунке видно, что все члены последовательности с номером больше 9 отличаются от b меньше, чем на ε .

Обратим особое внимание на то, что в интервале (b - ε; b + ε) содержится бесконечное число членов последовательности, а вне его – конечное.

Последовательности, которые имеют предел, называются *сходящимися*.
Перечислим без доказательства некоторые свойства пределов последовательностей, записав их на символическом языке математики. Постарайтесь сформулировать их словесно, внести в конспект.

1) $\lim\limits_{n\to\infty} ka_n = k\lim\limits_{n\to\infty} a_n$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

3) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$

4) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{b_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n},\ \ \textit{если}\ \ \lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$

5) Если последовательность имеет предел, то он единственный.

Возвратимся к понятиям «МОНОТОННОСТЬ, ОГРАНИЧЕННОСТЬ, СХОДИМОСТЬ».
Задумайтесь: из чего, что следует, ответьте на вопросы, такие как.
Если последовательность сходится, она ограничена?
Если последовательность монотонна, она ограничена?
Если последовательность ограничена, она монотонна?
Если последовательность ограничена, она сходится? И т.д.

Центральным же вопросом является следующий:
При каких условиях последовательность сходится? Ответ прост и очевиден: *монотонная ограниченная последовательность сходится*. Это теорема К.Вейерштрасса.

Рассмотрим некоторые примеры применения теории пределов.
Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty}\left|q^n\right| = 0$ (*), если $|q| < 1$. Воспользуемся этим ключом для вывода формулы **суммы членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Вы знаете эту формулу,** но как ее получить?
Под суммой членов бесконечно убывающей геометрической прогрессии будем понимать предел последовательности частичных сумм геометрической прогрессии при неограниченном увеличении числа слагаемых: $S_{бугп} = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ (**)

Формула для суммы членов геометрической прогрессии: $S_n = \dfrac{b_1(1-q^n)}{1-q}$, подставим ее в (**), будем иметь:

$$S_{бугп} = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{b_1(1-q^n)}{1-q} = (\textit{но } b_1 \textit{ и } q \textit{ константы, потому и дробь } \frac{b_1}{1-q} \textit{ так же является константой}$$

$$\textit{и ее можно вынести за знак предела}) = \frac{b_1}{1-q}\cdot\lim_{n\to\infty}(1-q^n) = (\textit{но в силу } (*)\ \lim_{n\to\infty}(1-q^n) = 1, \textit{поэтому}) = \frac{b_1}{1-q}$$

Итак, $S_{бугп} = \dfrac{b_1}{1-q}$. Используем полученную формулу для перевода бесконечных периодических дробей в обыкновенные. Сначала рассмотрим т.н. чистые периодические дроби, например, а = 0,27272727…. Запишем это число в виде суммы разрядных единиц:

$$a = \frac{27}{100}+\frac{27}{10000}+\frac{27}{1000000}+\frac{27}{100000000}+...=\frac{27}{100}+\frac{27}{100^2}+\frac{27}{100^3}+\frac{27}{100^4}+...$$

Как видите, получили бесконечно убывающую геометрическую прогрессию с $b_1=\frac{27}{100}$ и $q=\frac{1}{100}$. Подставим в полученную формулу: а = 0,272727 = $\frac{\frac{27}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{\frac{27}{100}}{\frac{99}{100}}=\frac{27}{99}=\frac{3}{11}$.

Легко видеть, что формулой можно и не пользоваться, а формально подставить в числитель дроби цифры периода, а в знаменатель записать столько девяток, сколько цифр в периоде. Так, 0,333333… = $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$, 0,504504504504… $=\frac{504}{999}=\frac{56}{111}$

Самостоятельно: 0,(72); 0,(2934); 0,(36) и т.д. И проверяйте на МК.

Аналогично, но несколько сложнее решается такая задача для *смешанной* периодической дроби. Это такая дробь, у которой до периода существуют другие цифры, например: 0,34545454545…, 0,5036363636…, 0,8106666666 и т.д.

Снова запишем дробь в виде суммы разрядных единиц:

$$0{,}3454545...=\frac{3}{10}+\frac{45}{1000}+\frac{45}{100000}+... = \frac{3}{10}+\frac{45}{1000}+\frac{45}{1000}\cdot\frac{1}{100}+\frac{45}{1000}\cdot\frac{1}{100^2}... = w$$

Как видите бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с $b_1=\frac{45}{1000}$ и $q=\frac{1}{100}$ начинается со второго слагаемого, применяем выведенную формулу.

$$w = \frac{3}{10}+\frac{\frac{45}{1000}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{3}{10}+\frac{\frac{45}{1000}}{\frac{99}{100}}=\frac{3}{10}+\frac{45}{990}=\frac{3}{10}+\frac{1}{22}=\frac{3\cdot 11+5}{110}=\frac{38}{110}=\frac{19}{55}.$$ Проверим на МК.

Действительно $\frac{19}{55}=0{,}345454545.....$ Все верно.

Для закрепления рассмотрим еще один пример:

$$r = 0{,}8106666666 = \frac{810}{1000}+\frac{6}{10000}+\frac{6}{100000}+... = \frac{810}{1000}+\frac{6}{10000}+\frac{6}{10000}\cdot\frac{1}{10}+\frac{6}{10000}\cdot\frac{1}{10^2}+...$$

Здесь $b_1=\frac{6}{10000}$ и $q=\frac{1}{10}$. Применяя формулу, будем иметь:

$$r = \frac{810}{1000}+\frac{\frac{6}{10000}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{810}{1000}+\frac{\frac{6}{10000}}{\frac{9}{10}}=\frac{810}{1000}+\frac{6}{9000}=\frac{810}{1000}+\frac{1}{1500}=\frac{3\cdot 810+2}{3000}=\frac{2432}{3000}=\frac{304}{375}.$$

Убедитесь с помощью МК, что расчеты проведены верно.

ПРИМЕРЫ. Вычислите:

1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n+2}{3n-1}$

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{5n^2+2n-3}{3n^2-n+4}$

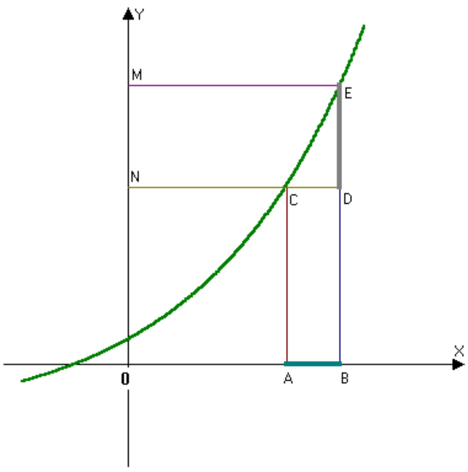
Тема3.2.Производная и ее применение

ЛЕКЦИЯ 1. Производная функции.

- Приращение аргумента и приращение функции.
- Задача на движение, приводящая к понятию производной.
- Средняя скорость движения.
- Мгновенная скорость.
- Понятие производной.
- Дифференцирование. Дифферецируемая функция.
- Вывод нескольких формул дифференцирования по определению производной. Производная степенной функции.
- Производная и непрерывность.

Приращение аргумента и приращение функции.

Пусть задана функция $y = f(x)$. При $x = x_0$ она принимает значение $y_0 = f(x_0)$.



x_0 - на оси ОХ в точке А, y_0 – на оси ОУ в точке N. Дадим х приращение Δx = AB, получим новое приращенное значение аргумента (в точке В) $x = x_0 + \Delta x$

Вычислим приращенное значение функции $y = f(x_0 + \Delta x)$ на оси ОУ – точка М, т.е. длина отрезка ВЕ.

Естественно, что отрезок DE и будет являться *приращением функции в точке x_0, если приращение аргумента равно Δx.*

Т.е. $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$

Итак, приращение функции есть разность между приращенным значением функции и первоначальным (отрезок DE).

Обратите внимание, что для возрастающей функции DE > 0, а для убывающей функции AC будет больше DE, поэтому разность DE – AC < 0 и $\Delta f(x_0) < 0$.

Сделайте самостоятельно схематический чертеж убывающей функции и укажите $\Delta f(x_0)$.

Вычислим приращение функции $f(x) = x^2 + 2x + 5$ при $x_0 = 2$ и $\Delta x = 0{,}1$ $x_0 + \Delta x = 2{,}1$

По формуле $\Delta f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ = (будем иметь) = $f(2{,}1) - f(2)$ =

$2{,}1^2 + 2*2{,}1 + 5 - (2^2 + 2*2 + 5)$ = (применяем микрокалькулятор) = 0,61

Поставим задачу отыскать приращение функции не в конкретной точке x_0, а в произвольной х, т.е. выведем формулу приращения в общем виде:

$\Delta f(x) = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 + 2(x + \Delta x) + 5 - x^2 - 2x - 5 = x^2 + 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 2x\,\Delta x + 5 - x^2 - 2x - 5 = 2x\,\Delta x + (\Delta x)^2 + 2\,\Delta x = 2x\,\Delta x + 2\,\Delta x + (\Delta x)^2 = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$ – это и есть приращение функции в общем виде: $\Delta f(x) = 2(x + 1)\Delta x + (\Delta x)^2$. Подставим x = 2, $\Delta x = 0{,}1$ получим $\Delta f(x)$ = 0,61 – все верно.

Изучение различных процессов (механического движения, химических реакций, расширение жидкости при нагревании, течения электрического тока) требует вычисления скорости изменения различных величин.

Задача на движение. Средняя скорость прямолинейного движения материальной точки.

Пусть материальная точка *M* движется по прямой . В начале движения при $t = 0$ она занимала положение *O*. В момент времени t_1 она заняла положение M_1, в момент времени t_2 она заняла положение M_2. Каждому моменту времени t соответствует определенная координата *s* точки

M. Поэтому положение точки есть функция времени $s = f(t)$.Эту функцию называют законом движения точки M.

Для характеристики изменения пути служит понятие скорости. Средняя скорость движения точки равна отношению пройденного пути ко времени его прохождения. Если $s_1 = f(t_1),\ s_2 = f(t_2)$ то

На участке OM_1: $v_{cp} = \frac{s_1}{t_1} = \frac{f(t_1)}{t_1}$;

На участке OM_2: $v_{cp} = \frac{s_2}{t_2} = \frac{f(t_2)}{t_2}$;

На участке M_1M_2: $v_{cp} = \frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$.

Пусть Δt - приращение времени, а Δs - приращение пути . то На участке M_1M_2:

$v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_2) - f(t_1)}{t_2 - t_1}$ При равномерном движении v_{cp} постоянно на любом участке пути.

На практике поезда, самолеты, корабли движутся неравномерно. Средняя скорость не дает точного представления о быстроте движения на отдельных участках пути. В связи с этим возникает необходимость понятия скорости в данный момент времени.,т.е. мгновенной скорости.

Пусть материальная точка М движется прямолинейно по закону $s = f(t)$. В момент времени t_0 она заняла положение M_0 и прошла путь $s_0 = f(t_0)$. Найдем скорость точки в момент времени t_0.

Пусть за промежуток времени Δt, начиная с момента t_0, она продвинулась на расстояние Δs и заняла положение M_1. Тогда $t_1 = t_0 + \Delta t$, $s_1 = f(t_1) = s_0 + \Delta s$.

$\Delta s = f(t_1) - f(t_0) = f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)$.

Средняя скорость движения на участке M_0M_1 равна $v_{cp} = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$. При Δt , стремящемся к нулю, средняя скорость будет приближаться к скорости в момент времени t_0.

Мгновенной скоростью прямолинейно движущейся точки в момент времени t_0 называется предел средней скорости при Δt, стремящемся к нулю:

$$v_{мгн} = \lim_{\Delta t \to 0} v_{cp} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t_0 + \Delta t\ ) - f(t_0)}{\Delta t}$$

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена в некотором интервале, содержащем внутри себя точку x_0. Дадим аргументу приращение Δx такое, чтобы не выйти из этого интервала. Найдем соответствующее приращение функции Δy (при переходе от точки x_0 к точке $x_0 + \Delta x$) и составим отношение $\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Если существует предел этого отношения при $\Delta x \to 0$, то указанный предел называют производной функции $y = f(x)$ в точке x_0 и обозначают $f'(x_0)$.

$$\boxed{\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0).}$$

Операция нахождения производной данной функции называется *дифференцированием* этой функции, Если производная в точке x_0 существует, то говорят, что функция *дифференцируема* в этой точке.

Функция, имеющая производную в каждой точке промежутка, называется *дифференцируемой* на этом промежутке.

Алгоритм нахождения производной функции $y = f(x)$.

1. **Зафиксировать значение x, найти $f(x)$.**
2. **Дать аргументу x приращение Δx, перейти в новую точку $x + \Delta x$, найти $f(x + \Delta x)$.**
3. **Найти приращение функции: $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.**
4. **Составить отношение $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.**
5. **Вычислить $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.**

Этот предел и есть $f'(x)$.

Пример 1. Найти производную постоянной функции $y = C$.

Решение. Здесь $f(x) = C$. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x имеем: $f(x) = C$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = C$.

3) $\Delta y = C - C = 0$.

4) $$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

5) $$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} 0 = 0.$$

***Ответ*: $(C)' = 0$.**

Пример 2. Найти производную функции $y = \frac{1}{x}$.

Решение. Здесь $f(x) = \frac{1}{x}$. Воспользуемся алгоритмом нахождения производной.

1) Для фиксированного значения x (разумеется, мы полагаем, что $x \neq 0$) имеем: $f(x) = \frac{1}{x}$.

2) В точке $x + \Delta x$ имеем: $f(x + \Delta x) = \frac{1}{x + \Delta x}$ (при этом предполагаем, что x и $x + \Delta x$ — числа одного знака, чтобы в промежутке между x и $x + \Delta x$ не оказалась точка 0).

3) $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = \frac{1}{x + \Delta x} - \frac{1}{x} = \frac{x - (x + \Delta x)}{x(x + \Delta x)} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)}$.

4) $\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{x(x + \Delta x)\Delta x} = \frac{-1}{x(x + \Delta x)}$.

5) $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x(x + \Delta x)} = -\frac{1}{x^2}$.

Ответ: $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$.

Аналогично можно вывести формулы дифференцирования других функций:

$$\boxed{(kx + m)' = k.}$$

В частности,

$$\boxed{(x)' = 1.}$$

, и еще:

$$\boxed{(x^2)' = 2x.}$$

$$\boxed{(x^n)' = nx^{n-1}.}$$

Запишем таблицу производных:

$$C' = 0;$$
$$x' = 1;$$
$$(kx + m)' = k;$$
$$(x^2)' = 2x;$$
$$\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}.$$
$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$
$$(x^n)' = nx^{n-1}$$

Таблица производных будет постепенно пополняться новыми формулами.

Существование производной функции в точке связано непрерывностью данной функции. ТЕОРЕМА. Если функция имеет производную в точке x_0,то она непрерывна в этой точке. Обратная теорема неверна. Так, функция $y = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но производная в этой точке не существует.

ЛЕКЦИЯ 2. Правила дифференцирования. Таблица производных.

- Производные тригонометрических функций.
- Производная суммы (разности) функций.
- Производная произведения.
- Производная частного.
- Производная сложной функции.
- Производная обратной функции.

Добавим в *таблицу производных* формулы для тригонометрических функций:

$c'=0$, **c - число**

$$(x)'=1$$

$$\left(x^n\right)'=n\cdot x^{n-1}$$

$$\left(\sqrt{x}\right)'=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)'=-\frac{1}{x^2}$$

$$(\sin x)'=\cos x$$

$$(\cos x)'=-\sin x$$

$$(tgx)'=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$(ctgx)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$$

Для нахождения производных выражений, составленных из этих функций, доказано несколько теорем, которые называются *правилами дифференцирования.*

Правила дифференцирования.

Пусть u и v – функции, с – число.

$$(u+v)'=u'+v'$$

$$(u-v)'=u'-v'$$

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'\cdot v-u\cdot v'}{v^2}$$

$$(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$$

$$(c\cdot u)'=c\cdot u'$$

ПРИМЕРЫ:

$$(x^2+\sin x)'=(x^2)'+(\sin x)'=2x+\cos x.$$

$$(5x^2)'=5(x^2)'=5\cdot 2x=10x;$$

$$\left(-\frac{\cos x}{3}\right)'=-\frac{1}{3}(\cos x)'=-\frac{1}{3}(-\sin x)=\frac{1}{3}\sin x.$$

$$((2x+3)\sin x)' = (2x+3)'\sin x + (2x+3)(\sin x)' = $$
$$= 2\sin x + (2x+3)\cos x.$$

$$\left(\frac{x^2}{5-4x}\right)' = \frac{(x^2)'\cdot(5-4x) - x^2(5-4x)'}{(5-4x)^2} = \frac{2x(5-4x) - x^2(-4)}{(5-4x)^2} = \frac{10x-4x^2}{(5-4x)^2}.$$

Функция называется *сложной*, если ее аргумент тоже функция, например, $y=\sqrt{3x+1}$.

$y=\sqrt{t}$ - внешняя функция, $y=3x+1$ - внутренняя.

Правило для нахождения производной сложной функции:

Производная сложной функции равна произведению производной внешней функции на производную внутренней.

$$\boxed{(f(t(x)))' = f'(t)\cdot t'(x)}$$

ПРИМЕР.

$$y' = (\sqrt{3x+1})' = \frac{1}{2\sqrt{3x+1}}\cdot(3x+1)' = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}.$$

Производная обратной функции.

Если функция $y=f(x)$ и ее обратная функция $x=f^{-1}(y)$ имеют производные, то

$$x'(y) = \frac{1}{y'(x)}$$

Пример. Найдем производную функции $y=\arcsin x$, где $x\in[-1;1]$.

$x=\sin y \Rightarrow x' = \cos y$;

$$y' = \frac{1}{x'} \Rightarrow (\arcsin x)' = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

Аналогично $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

ЛЕКЦИЯ 3. Применение производной.

- Производная и непрерывность функции.
- Применение непрерывности. Метод интервалов для решения дробно-рациональных неравенств.
- Правило расстановки знаков.
- Примеры решения неравенств.
- Секущая и касательная.
- Существование касательной к графику функции в данной точке.
- Угловой коэффициент прямой.
- Геометрический смысл производной.
- Уравнение касательной.
- Приближенные вычисления с помощью производной.
- Физический смысл производной.
- Нахождение скорости для процесса, заданного формулой и графиком.

1. Функция $f(x)$ называется непрерывной в точке x_0, если она определена в некоторой окрестности этой точки и если предел функции при $x \to x_0$ равен значению функции в этой точке, т. е. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2. Функция $f(x)$, непрерывная в каждой точке заданного промежутка, называется непрерывной на всем промежутке.

3. Любая рациональная функция непрерывна при всех значениях независимой переменной, при которых она определена. Любая иррациональная функция непрерывна в любой точке области определения, кроме крайних точек, если они существуют.

Например, функция $y=x^2$ непрерывна в любой точке числовой прямой, а функция $y=\sqrt{x}$ непрерывна в любой точке $x>0$.

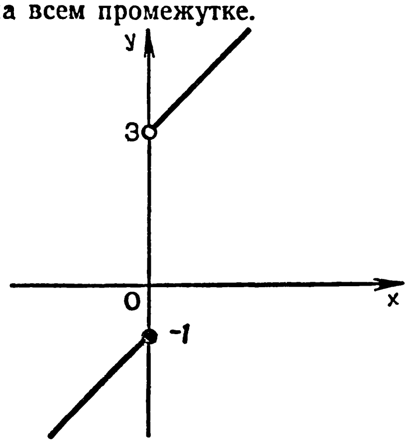


Рис. 179

4. Если функция, определенная в некоторой окрестности точки x_0, в точке x_0 не определена или ее предел в точке x_0 не равен значению функции в этой точке, то говорят, что функция имеет разрыв в точке x_0, а точку x_0 называют точкой разрыва.

Например, функция $y=\frac{a}{x}$ непрерывна в любой точке $x \neq 0$, а в точке $x=0$ терпит разрыв.

Если на интервале $(a; b)$ функция f непрерывна и не обращается в нуль, то она на этом интервале сохраняет постоянный знак.

2. **Метод интервалов.** На свойстве непрерывных функций, рассмотренном в этом пункте (его полное доказательство приводится в курсах математического анализа), основан метод решения неравенств с одной переменной (*метод интервалов*). Опишем его.

Пусть функция f непрерывна на интервале I и обращается в нуль в конечном числе точек этого интервала. По сформулированному выше свойству непрерывных функций этими точками I разбивается на интервалы, в каждом из которых непрерывная функция f сохраняет постоянный знак. Чтобы определить этот знак, достаточно вычислить значение функции f в какой-либо одной точке из каждого такого интервала.

Пример 1. Решим неравенство $\frac{x^2-1}{x^2-5x+6} \geqslant 0$.

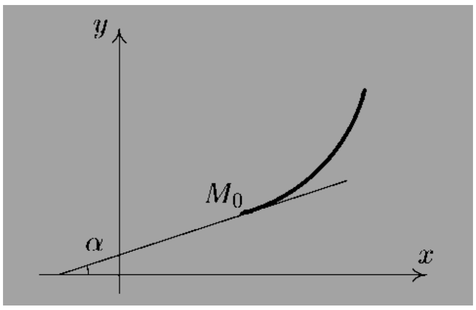
Функция $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2-5x+6}$ непрерывна в каждой точке своей области определения (это дробно-рациональная функция) и обращается в нуль в точках −1 и 1. Область определения этой функции — вся числовая прямая, за исключением нулей знаменателя, т. е. точек 2 и 3. Эти точки и точки −1 и 1 разбивают область определения f на 5 промежутков (рис. 90), в каждом из которых функция f непрерывна и не обращается в нуль. На рисунке отмечен знак f в каждом из соответствующих интервалов, который определяем, найдя знаки значений f во внутренних точках интервалов. Неравенство нестрогое, поэтому числа −1 и 1 (нули функции f) являются решениями неравенства. Рассматривая рисунок, можно записать о т в е т: множество решений неравенства — объединение промежутков $(-\infty; -1]$, $[1; 2)$ и $(3; \infty)$.

Геометрический смысл

Производная функции $y = f(x)$ в точке x_0 равна угловому коэффициенту касательной к графику функции в точке $M_0(x_0, f(x_0))$, т.е. $f'(x_0) = tg\alpha$, где α – угол наклона касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке M_0.

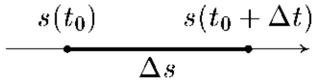
Геометрический смысл производной состоит в том, что значение производной функции в точке равно угловому коэффициенту касательной к графику функции в этой точке.

$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$ - уравнение касательной.



Физический смысл.

Предположим, что функция $s = s(t)$ описывает закон движения материальной точки по прямой линии, т.е. $s = s(t)$ – путь, пройденный этой точкой от начала отсчета за время *t*. Тогда за время t_0 пройден путь $s = s(t_0)$, а за время t_1 – путь $s = s(t_1)$. За промежуток времени $\Delta t = t_1 - t_0$ точка пройдет отрезок пути $\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)$.



Отношение $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ выражает *среднюю скорость* движения материальной точки за время Δt.

Предел отношения $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ при $\Delta t \to 0$ называется *мгновенной скоростью* движения материальной точки в момент времени t_0. Поскольку $\lim\limits_{\Delta t \to 0} \dfrac{\Delta s}{\Delta t} = s'(t_0)$, то *физический смысл* производной функции $s = s(t)$ – мгновенная скорость движения.

<u>ЛЕКЦИЯ 4. Применение производной к исследованию функции.</u>

- Достаточные признаки возрастания и убывания функции.
- Критические точки.
- Необходимый признак экстремума функции.
- Достаточные признаки существования экстремума функции.
- План исследования функции с помощью производной.
- Исследование функции и построение графика. Пример.
- Нахождение наибольшего наименьшего значений функции на отрезке.

Условия возрастания и убывания функций.

***Теорема* 1**. Для того чтобы дифференцируемая на интервале (a,b) функция $f(x)$ была *неубывающей* (*невозрастающей*) на этом интервале, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x) \geq 0$ ($f'(x) \leq 0$) для всех $x \in (a,b)$.

***Теорема* 2.** Если функция $f(x)$ дифференцируема на интервале (a,b) и $f'(x) > 0$ ($f'(x) < 0$) для всех $x \in (a,b)$, то эта функция *возрастает* (*убывает*) на интервале (a,b).

Точки экстремума.

Точки максимума и минимума функции называются *точками экстремума*.

***Теорема* 3.** (*необходимое условие существования экстремума*) Если функция $f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то производная $f'(x_0)$ обращается в нуль или не существует.

<u>*Следствие.*</u> Обратное утверждение неверно. Если производная функции в некоторой точке равна нулю, то это еще не значит, что в этой точке функция имеет экстремум.

Критическими точками функции называются точки, в которых производная функции не существует или равна нулю.

***Теорема* 4.** (*достаточное условие существования экстремума*) Если при переходе через критическую точку x_0 слева направо производная функции $f'(x)$ меняет знак с “+” на

“–“, то в точке x_0 функция $f(x)$ имеет *максимум*, а если производная меняет знак с “–“ на “+” – то функция имеет *минимум*.

Правила нахождения экстремумов функции.

1) Найти производную функции.
2) Найти критические точки функции.
3) Исследовать знак производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции.
4) Определить существование максимумов и минимумов и найти значение функции в этих точках.

Схема исследования функций

Процесс исследования функции состоит из нескольких этапов. Для наиболее полного представления о поведении функции и характере ее графика необходимо отыскать:

1) Область существования функции (это понятие включает в себя и область значений, и область определения функции).
2) Исследовать функцию на четность и периодичность.
3) Координаты точек пересечения графика функции с осями координат (если они имеются).
4) Интервалы возрастания и убывания.
5) Точки максимума и минимума.
6) Построение графика.

Наибольшее и наименьшее значения на отрезке непрерывная на этом отрезке функция достигает на концах промежутка или в критических точках этого отрезка. Чтобы найти наибольшее или наименьшее значение функции на заданном отрезке, надо найти критические точки функции, принадлежащие этому отрезку, вычислить значения функции на концах отрезка и в этих критических точках и выбрать наибольшее и наименьшее значения.

ЛЕКЦИЯ 5. Вторая производная.

- Вторая производная.
- Геометрический и физический смысл второй производной.
- Примеры решения задач.

Пусть функция $f(x)$ – дифференцируема на некотором интервале. Тогда, дифференцируя ее, получаем первую производную

$$y' = f'(x) = \frac{df(x)}{dx}$$

Если найти производную от функции $f'(x)$, получим *вторую производную* функции $f(x)$.

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$$

т.е. $y'' = (y')'$ или $\dfrac{d^2 y}{dx^2} = \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)$.

Этот процесс можно продолжить и далее, находя производные степени n.

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{d}{dx}\left(\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right).$$

Исследование функции на экстремум с помощью производной второго порядка.

***Теорема* 5.** Если $f'(x)=0$, то функция $f(x)$ в точке x_0 имеет *максимум*, если $f''(x_0)<0$ и *минимум*, если $f''(x_0)>0$.

Если $f''(x_0)=0$, то характер критической точки неизвестен. Для его определения требуется дальнейшее исследование.

Выпуклость и вогнутость кривой. Точки перегиба.

Кривая обращена *выпуклостью вверх* на интервале (a,b), если все ее точки лежат ниже любой ее касательной на этом интервале. Кривая, обращенная выпуклостью вверх, называется *выпуклой*, а кривая, обращенная выпуклостью вниз – называется *вогнутой*.

***Теорема* 6.** Если функция $f(x)$ имеет на интервале (a,b) вторую производную и $f''(x)>0$ ($f''(x_0)<0$) во всех точках данного интервала, то график функции имеет на (a,b) выпуклость, направленную *вниз* (*вверх*).

Точка, отделяющая выпуклую часть кривой от вогнутой, называется *точкой перегиба*. Точками перегиба могут служить только *критические точки второго рода*, т.е. точки, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в ноль или не существует.

***Теорема* 7.** Пусть кривая определяется уравнением $y=f(x)$. Если вторая производная $f''(x)=0$ или не существует и при переходе через точку $x=x_0$ $f''(x)$ меняет знак, то точка кривой с абсциссой $x=x_0$ является точкой перегиба.

Правила нахождения точек перегиба.

1) Найти вторую производную функции.
2) Найти критические точки второго рода.
3) Исследовать знак второй производной в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции.
4) Определить точки перегиба и найти значение функции в этих точках.

Физический смысл производной функции $s=s(t)$ – мгновенная скорость движения.

Соответственно, *вторая производная функции* – ускорение.

Тема3.3.Первообразная и интеграл

ЛЕКЦИЯ 1. Первообразная.

- Определение первообразной.
- Интегрирование – операция, обратная дифференцированию.
- Признак постоянства функции.
- Основное свойство первообразных.
- Общий вид первообразных.
- Таблица первообразных.
- Правила нахождения первообразных.
- Примеры нахождения первообразных.

Функция $F(x)$ называется *первообразной функцией* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$, если в любой точке этого отрезка верно равенство:

$$F'(x)=f(x).$$

Надо отметить, что первообразных для одной и той же функции может быть бесконечно много. Они будут отличаться друг от друга на некоторое постоянное число, т.е. $F_1(x) = F_2(x) + C$.

Таблица первообразных

№	Функция	Первообразная
1	κ	$\kappa x+C$
2	x^n	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + C, n \neq -1$
3	$\frac{1}{x^2}$	$-\frac{1}{x}$
4	$\frac{1}{\sqrt{x}}$	$2\sqrt{x}$
5	$\sin x$	$-\cos x + C$
6	$\cos x$	$\sin x + C$
7	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$tgx + C$
8	$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-ctgx + C$

Правила нахождения первообразных

№	Функция	Первообразная
1	$f \pm g$	$F \pm G$
2	$k \cdot f$	$k \cdot F$
3	$f(kx+b)$	$\frac{1}{k} \cdot F(kx+b)$

Неопределенным интегралом функции $f(x)$ называется совокупность первообразных функций, которые определены соотношением:

$$F(x) + C.$$

Записывают: $\int f(x)dx = F(x) + C;$ здесь $\int$ – знак интеграла, $f(x)$ – подынтегральная функция, $f(x)\,dx$ – подынтегральное выражение.

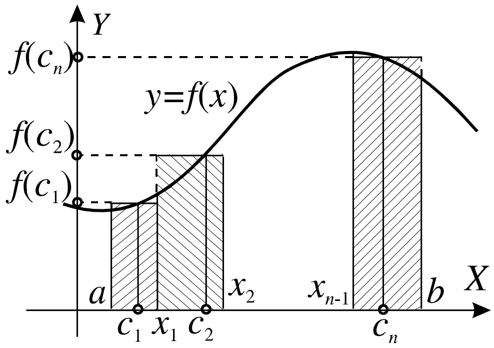
Вычисление неопределенного интеграла от заданной функции называется *интегрированием*.

ЛЕКЦИЯ 2 .Криволинейная трапеция. Определенный интеграл.

- Криволинейная трапеция.
- Площадь криволинейной трапеции.
- Определенный интеграл.
- Формула Ньютона-Лейбница.
- Вычисление интегралов.

Определенный интеграл.

Пусть функция $f(x)$ определена на отрезке $[a,b]$. Разобьем отрезок $[a,b]$ на n произвольных частей точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{i-1} < x_i < \ldots < x_n = b$. На каждом из частичных отрезков выберем произвольно по одной точке: $c_1 \in [a, x_1]$, $c_2 \in [x_1, x_2]$, …, $c_n \in [x_{n-1}, b]$.



Введем обозначения: $\Delta x_1 = x_1 - a$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1$, …, $\Delta x_n = b - x_{n-1}$.

Составим сумму: $\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, которая называется *интегральной суммой* функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Геометрический смысл σ: Каждое слагаемое интегральной суммы представляет собой площадь прямоугольника с основанием Δx_i и высотой $f(c_i)$, покрытого штриховкой на рисунке.

Обозначим через $\lambda = \max(\Delta x_i)$, i = 1, 2, …, n – длину наибольшего частичного отрезка. Величину λ иногда называют *параметром разбиения*.

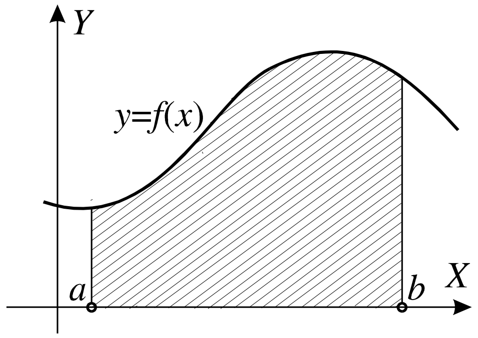
Рассмотрим процесс, при котором число точек разбиения неограниченно возрастает таким образом, что величина λ стремится к нулю.

Если существует предел интегральной суммы $I = \lim_{\lambda \to 0} \sigma$, то он называется *определенным интегралом* от функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$ и обозначается

$$I = \int_a^b f(x)dx$$

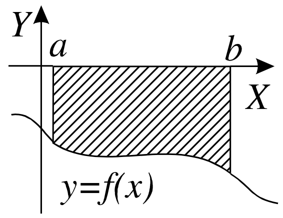
В этом случае функция $f(x)$ называется *интегрируемой на отрезке* $[a,b]$. Число a называется *нижним пределом интегрирования*, а число b – *верхним пределом интегрирования*.

Если такой предел существует, то он не зависит от первоначального разбиения отрезка $[a,b]$ и выбора точек c_i. Из определения определенного интеграла следует, что его величина зависит только от вида функции $f(x)$ и от чисел a и b. Следовательно, если заданы $f(x)$ и пределы интегрирования, то интеграл определяется однозначно и представляет собой некоторое число.



Геометрический смысл *определенного интеграла*: Если $f(x)>0$ на отрезке $[a,b]$, то определенный интеграл $\int_a^b f(x)dx$ геометрически представляет собой площадь криволинейной трапеции – фигуры, ограниченной линиями $y=f(x)$, $x=a$, $x=b$, $y=0$.

Если $f(x)<0$ на отрезке $[a,b]$, то $S=-\int_a^b f(x)dx$.



Свойства определенного интеграла

1. $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$;
2. $\int_a^a f(x)dx=0$;
3. Если $c\in[a,b]$, то $\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$;
4. $\int_a^b [f(x)+g(x)]dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$;
5. $\int_a^b kf(x)dx=k\int_a^b f(x)dx$, где k – произвольное число.

Формула Ньютона-Лейбница

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$ и функция $F(x)$ является ее первообразной на этом отрезке, то имеет место *формула Ньютона-Лейбница*

$$\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a),$$

то есть определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

ЛЕКЦИЯ 3.Вычисление площадей через интеграл.

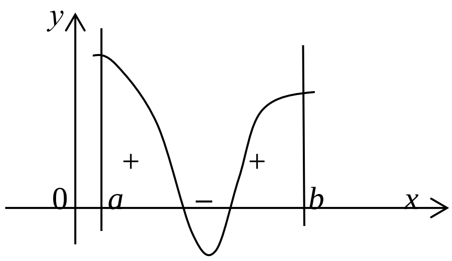
- Площадь криволинейной трапеции через интеграл.
- Площади различных фигур, ограниченных графиками функций.
- Примеры решения задач.

Геометрические приложения определенного интеграла.

Площадь плоской фигуры.

а) Площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, прямыми $x = a$ и $x = b$ и отрезком $[a,b]$, вычисляется по формуле $S = \int_a^b f(x)dx$

Если график расположен ниже оси *Ox*, т.е. $f(x) < 0$, то площадь имеет знак “–“, если график расположен выше оси *Ox*, т.е. $f(x) > 0$, то площадь имеет знак “+”.



Таким образом, для нахождения суммарной площади используется формула

$$S = \left| \int_a^b f(x)dx \right|.$$

б) Площадь фигуры, ограниченной кривыми $y_1 = f_1(x)$ и $y_2 = f_2(x)$ $\left(f_1(x) \le f_2(x)\right)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, находится по формуле

$$S = \int_a^b \left[f_2(x) - f_1(x) \right] dx$$

ЛЕКЦИЯ 4.Применение интеграла в геометрии и физике.

- Нахождение объемов геометрических тел.
- Нахождение пути материальной точки.
- Нахождение работы переменной силы.
- Примеры решения практических задач.

С помощью интеграла можно вычислять не только площади плоских фигур, но и объемы пространственных тел.

Пусть задано тело объемом V, причем плоскость, перпендикулярная выбранной оси Ох и проходящая через точку х, пересекает это тело. Площадь сечения тела этой плоскостью равна $S(x)$. Если функция S непрерывна на $[a, в]$, то

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

Пусть криволинейная трапеция опирается на отрезок $[a, в]$ оси Ох и ограничена сверху графиком функции $f(x)$, неотрицательной и непрерывной на отрезке $[a, в]$. При вращении этой криволинейной трапеции вокруг оси Ох получим тело вращения, объем которого находится по формуле

$$V = \pi \int_a^b f^2(x)dx$$

Если скорость материальной точки при прямолинейном движении есть производная пройденного пути, то путь, пройденный точкой за промежуток времени от t_1 до t_2, можно найти по формуле

$$S = \int_{t_1}^{t_2} v(t)dt,$$

А скорость движения, зная ускорение, находим аналогично по формуле

$$v = \int_{t_1}^{t_2} a(t)dt.$$

Пусть точка движется по оси Ох под действием силы, проекция которой на ось Ох есть функция $f(x)$ - непрерывная функция. Под действием этой силы материальная точка переместилась из точки $M(a)$ в точку $M(в)$. то работа этой силы равна

$$A = \int_a^b f(x)dx$$

ПРИМЕР.

Сила упругости пружины , растянутой на $5 см$, равна $3 Н$. Какую работу надо произвести, чтобы растянуть пружину на 5 см?

РЕШЕНИЕ.

По закону Гука сила F, растягивающая пружину на величину x, вычисляется по формуле F=kx, Значит, $3 = k \cdot 0{,}05$. Следовательно, k=60 и сила F=60x.

$$A = \int_0^{0{,}05} 60x dx = 0.075(Дж)$$