Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**
(ВлГУ)

Колледж инновационных технологий и предпринимательства

Методические рекомендации к выполнению практических занятий по дисциплине «Математика» для студентов средне-профессиональных организаций

Составил:
преподаватель КИТП
Гаврилова И. Е.

Владимир 20___ г.

Пояснительная записка

Методические указания подготовлены с целью повышения эффективности профессионального образования и самообразования в ходе практических занятий по учебной дисциплине «Математика».Методические указания включают в себя учебную цель, перечень образовательных результатов, заявленных во ФГОС СПО, задачи, обеспеченность занятия, краткие теоретические и учебно-методические материалы по теме, вопросы для закрепления теоретического материала, задания для практической работы студентов и инструкцию по ее выполнению. Выполнение студентами практических занятий направлено на:

— обобщение, систематизацию, углубление теоретических знаний;
— формирование умений применять полученные знания в практической деятельности;
— развитие аналитических, проектировочных, конструктивных умений;
— выработку самостоятельности, ответственности, точности и творческой инициативы.

Цели и задачи практических занятий:

В результате выполнения практических занятий обучающийся должен **уметь:**

- решать прикладные задачи в области профессиональной деятельности.

знать:

- значение математики в профессиональной деятельности и при освоении профессиональной образовательной программы;
- основные математические методы решения прикладных задач в области профессиональной деятельности;
- основные понятия и методы математического анализа, линейной алгебры, теории комплексных чисел;
- основы интегрального и дифференциального исчисления.

Практические занятия - один из видов практического обучения, имеющий целью закрепление теоретических знаний и формирование практических умений и навыков. Практическая работа по математике заключается в выполнении студентами под руководством преподавателя комплекса учебных заданий, направленных на усвоение основ учебной дисциплины «Математика», приобретение практических навыков решения примеров и задач.

Основные темы курса

Комплексные числа и действия над ними (2 часа)

Матрицы и определители (4 часа)

Методы решения систем линейных уравнений (6 часов)

Прямая на плоскости и её уравнение (4 часа)

Теория пределов (4 часа)

Производная и дифференциал (6 часов)

Неопределенный интеграл (4 часа)

Определенный интеграл (4 часа)

Дифференциальные уравнения (4 часа)

Элементы теории вероятностей (6 часов)

Элементы математической статистики (4 часа)

Итого: 48 часов

Раздел 1. Основные понятия комплексных чисел

Тема 1.1 Комплексные числа и действия над ними (2 часа)

Основные понятия:

Понятие комплексного числа.

Модуль и аргумент числа.

Формы записи комплексных чисел.

Действия над комплексными числами.

Области на комплексной плоскости.

Алгебраические уравнения.

1. Алгебраическая форма комплексного числа

Определение: комплексным числом называется число вида$z = a + bi, a, b$действительные числа, i – мнимая единица ($i^2 = -1$).

Определение: Число a называется действительной частью комплексного числа.

Обозначение:$a = Re\ z$.

Определение: Число bi называется мнимой частью комплексного числа, b- коэффициент мнимой части.

Обозначение:$b = Im\ z$.

Определение:$\bar{z} = a - bi$называется сопряженным с$z = a + bi$.

Действия над комплексными числами в алгебраической форме $z_1 = a + bi$и $z_2 = c + di$.

1. Сложение $z_1 + z_2 = (a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)i$

2. Вычитание $z_1 - z_2 = (a + bi) - (c + di) = (a - c) + (b - d)i$

3. Умножение $z_1 \cdot z_2 = (a + bi) \cdot (c + di) = ac + dci + adi + bdi^2 = (ac - bd) + (bc + ad)i$

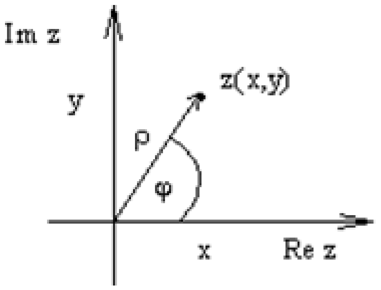
4. Деление (при делении комплексных чисел, числитель и знаменатель умножают на число, сопряженное знаменателю)

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a + bi}{c + di} \cdot \frac{c - di}{c - di} = \frac{(ac - bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} = \frac{ac - bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}$$

5. Возведение в степень $z_1^2 = (a + bi)^2 = \begin{cases} \text{по формуле} \\ (a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 \end{cases} = a^2 + 2abi + (bi)^2 = (a^2 - b^2) + 2abi$

2. Геометрическая форма комплексного числа

Определение:геометрическая интерпретация комплексного числа состоит в том, что комплексному числу $z = x + yi$ставится в соответствие точка с координатами (x, y)на координатной плоскости таким образом, что действительная часть представляет собой абсциссу, а коэффициент при мнимой части – ординату точки.



Определение: модулем комплексного числа называется абсолютная величина вектора соответствующего этому числу.

Обозначение:$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Определение: аргументом комплексного числа $z \neq 0$называется величина угла φ между положительным направлением действительной оси и вектором, соответствующим данному числу.

Обозначение:$\varphi = \arg z, \arg(x + yi)$.

Алгоритм нахождения аргумента комплексного числа $z = x + yi$:

1. Найти острый угол $\alpha = arctg \left|\frac{y}{x}\right|$.

2. Найти аргумент комплексного числа в зависимости от того, в какой координатной четверти лежит вектор, соответствующий этому числу:

- I четверть $\varphi = \alpha$
- II четверть $\varphi = \pi - \alpha$

- III четверть $\varphi = \pi + \alpha$
- IV четверть $\varphi = 2\pi - \alpha$

3. Тригонометрическая форма комплексного числа

Если обозначить через rрасстояние точки (x, y)от начала координат, через φ угол наклона к положительной оси Oxвектора, идущего из начала координат в точку (x, y), то

$x = rcos\,\varphi$

$y = r\sin\varphi$

$x + yi = r(cos\,\varphi + i\sin\varphi)$ – тригонометрическая запись комплексного числа

$z = |z| \cdot (\cos\arg(z) + isinarg\,(z))$

Действия над комплексными числами в тригонометрической форме

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + isin\varphi_1)$ и $z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + isin\varphi_2)$

1. Умножение $z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2(\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + isin(\varphi_1 + \varphi_2))$

2. Деление $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + isin(\varphi_1 - \varphi_2))$

3. Возведение в степень $z^n = \big(r(\cos\varphi + isin\,\varphi)\big)^n = r^n(\cos n\varphi + isin\,n\varphi)$

4. Извлечение корня

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{\big(r(\cos\varphi + isin\varphi)\big)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + isin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right), \sqrt[n]{r} - \text{арифметический корень}, k = 0,1, \ldots . n - 1$$

4. Решение квадратных уравнений с комплексными числами

Замечание: одно из причин введения комплексного числа состоит в том, чтобы добиться разрешимости любого квадратного уравнения:

Значение $D = b^2 - 4ac$	Корни уравнения
$D > 0$	Уравнение имеет два различных действительных корня $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$
$D = 0$	Уравнение имеет один действительный корень $$x = \frac{-b}{2a}$$
$D < 0$	Уравнение имеет два различных (сопряженных) мнимых корня $$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}i}{2a}$$

Задача. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, z_1^2, если $z_1 = 10 + 5i$ и $z_2 = 3 - 4i$.

Решение.

$z_1 + z_2 = (10 + 5i) + (3 - 4i) = 13 - i$

$z_1 - z_2 = (10 + 5i) - (3 - 4i) = 7 + 9i$

$z_1 \cdot z_2 = (10 + 5i) \cdot (3 - 4i) = 30 - 40i + 15i + 20 = 50 - 25i$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{(10 + 5i) \cdot (3 + 4i)}{(3 - 4i) \cdot (3 + 4i)} = \frac{30 - 15i + 40i + 20i^2}{3^2 - (4i)^2} = \frac{10 + 55i}{25} = 0{,}4 + 2{,}2i$$

$z_1^2 = (10 + 5i)^2 = 100 + 100i - 25 = 75 + 100i$

Задача. Записать число $z = -\sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме

Решение.

1. Находим $r = \sqrt{\left(-\sqrt{3}\right)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3 + 1} = 2$

2. Находим α, $\alpha = arctg\left|\frac{-1}{-\sqrt{3}}\right| = arctg\,\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6}$

3. III четверть $\varphi = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6}$

4. $z = -\sqrt{3} - i = 2\left(\cos\frac{7\pi}{6} + isin\,\frac{7\pi}{6}\right)$

Задача. Найти $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_1}{z_2}$, если $z_1 = 12(\cos 225° + isin225°)$ и $z_2 = \frac{3}{2}(\cos 75° + isin75°)$

Решение.

$$z_1 \cdot z_2 = 12 \cdot \frac{3}{2}(\cos(225° + 75°) + isin(225° + 75°)) = 18(cos300° + isin300°)$$

$$= 18\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 9 - 9\sqrt{3}i$$

$$\frac{z_1}{z_2} = 12 \cdot \frac{2}{3}(\cos(225° - 75°) + isin(225° - 75°)) = 8(cos150° + isin150°)$$

$$= 8\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -4\sqrt{3} + 4i$$

Задача. Вычислить $\sqrt[4]{-81}$, если $-81 = 81(\cos\pi + isin\pi)$

Решение. $\sqrt[4]{-81} = \sqrt[4]{81(\cos\pi + isin\pi)} = \sqrt[4]{-81}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{4} + isin\,\frac{\pi+2\pi k}{4}\right), k = 0,1,2,3$

$$z_0 = \frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}i}{2}, z_1 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \frac{3\sqrt{2}i}{2}, z_2 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}i}{2}, z_3 = \frac{3\sqrt{2}}{2} - \frac{3\sqrt{2}i}{2}$$

Задача. Решить уравнения $x^2 - 4x + 5 = 0$ и $z^2 - 3iz + 4 = 0$ во множестве комплексных чисел

Решение.

$$x^2 - 4x + 5 = 0 \quad z^2 - 3iz + 4 = 0$$

$$D = b^2 - 4ac = -4 < 0 \quad D = 9i^2 - 16 = -25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}i}{2a} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i \quad x_{1,2} = \frac{-3i \pm 5i}{2} = i \text{ или } -4i$$

Задания для самостоятельного решения

Задача 1. Найти $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$, $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_2}{z_1}$, z_1^2, если $z_1 = 1 - i$ и $z_2 = 4i - 2$.

Задача 2. Найдите модуль и аргумент комплексного числа $z = 4 + 4i$

Задача 3. Представьте данное комплексное число z (см. задачу №2) в тригонометрической форме и вычислите z^9.

Задача 4. Выполните действия $3\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right) \times \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$

Задача 5. Решите уравнение $x^2 - 4x + 13 = 0$

Определение: степень e^z с комплексным показателем $z = x + iy$ определяется равенством

$$e^z = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n$$

Замечание: можно доказать, что $e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$, т.е. $e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$.

В частности, при $x = 0$ получается соотношение $e^{iy} = \cos y + i\sin y$, называемой формулой Эйлера.

Замечание: для комплексных показателей остаются в силе основные правила действий с показателями; например, при умножении чисел показатели складываются, при делении – вычитаются, при возведении в степень – перемножаются.

Замечание: показательная функция имеет период, равный $2\pi i$, т.е. $e^{z+2\pi i} = e^z$. При $z = 0$, получим $e^{2\pi i} = 1$.

Определение: тригонометрическую форму комплексного числа $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ можно заменить показательной формой: $z = re^{\varphi i}$.

Действия над комплексными числами в показательной форме

1. $r_1e^{i\varphi_1} \cdot r_2e^{i\varphi_2} = r_1 \cdot r_1e^{i(\varphi_1+\varphi_2)}$

2. $\frac{r_1e^{i\varphi_1}}{r_2e^{i\varphi_2}} = \frac{r_1}{r_2}e^{i(\varphi_1-\varphi_2)}$

3. $\left(re^{i\varphi}\right)^n = r^n e^{in\varphi}$

4. $\sqrt[n]{re^{i\varphi}} = \sqrt[n]{r} \cdot e^{\frac{\varphi+2\pi k}{n}i}$ $(k = 0,1,2, \dots n-1)$

Замечание: формула Эйлера устанавливает связь между тригонометрическими функциями и показательной функцией.

$e^{\varphi i} = cos\varphi + isin\varphi, e^{-\varphi i} = cos\varphi - isin\varphi$.Складывая и вычитая эти равенства, получим

$$cos\varphi = \frac{\left(e^{\varphi i} + e^{-\varphi i}\right)}{2}$$

$$cos\varphi = \frac{\left(e^{\varphi i} - e^{-\varphi i}\right)}{2i}$$

Задача. Найти $e^{\frac{i\pi}{4}}$

Решение. По формуле, найдеме$^{\frac{i\pi}{4}} = cos\left(\frac{\pi}{4}\right) + isin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Задача. Представить в показательной форме числа: 1) $z = 2i$; 2) $z = -1 + i$

Решение. 1) Здесь $a = 0, b = 2, r = 2, \varphi = \frac{\pi}{2}$. По формуле, получим $z = 2e^{\frac{i\pi}{2}}$

2) Здесь $a = -1, b = 1, r = \sqrt{2}, tg\varphi = -1, \varphi = \frac{3\pi}{4}$ По формуле, получим $z = \sqrt{2}e^{\frac{3i\pi}{4}}$

Задача. Представив числа $z_1 = 1 + i, z_2 = 1 - i\sqrt{3}$в показательной форме, вычислить:

1)$z_1 \cdot z_2$; 2)z_1/z_2; 3) z_1^6; 4) $\sqrt[4]{z_1}$

Решение. Для числа $z_1 = 1 + i$ имеем: $a = 1, b = 1, r = \sqrt{2},\ \varphi = \frac{\pi}{4}$.По формуле, получим $z = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}$. Для числа $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$ имеем: $a = 1, b = -\sqrt{3}, r = 2,\ \varphi = -\frac{\pi}{3}$.По формуле, получим $z_2 = 2e^{\frac{-i\pi}{3}}$.

1) $z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}} \cdot 2e^{\frac{-i\pi}{3}} = 2\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{12}}$

2) $\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}}{2e^{\frac{-i\pi}{3}}} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{i\pi}{4}-(-\frac{i\pi}{3})} = \frac{\sqrt{2}}{2}e^{\frac{7\pi i}{12}}$

3) $z_1^6 = \left(\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}\right)^6 = 8e^{i3\pi/2}$

4) $z_k = \sqrt[4]{z_1} = \sqrt[4]{\sqrt{2}e^{\frac{i\pi}{4}}} = \sqrt[8]{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+2\pi k\right)\frac{i}{4}}, k = 0,1,2,3$

Если $k = 0$, то $z_0 = \sqrt[8]{2}e^{\frac{i\pi}{16}}$

Если $k = 1$, то $z_1 = \sqrt[8]{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+2\pi\right)\frac{i}{4}} = \sqrt[8]{2}e^{\frac{9\pi i}{16}}$

Если $k = 2$, то $z_2 = \sqrt[8]{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+4\pi\right)\frac{i}{4}} = \sqrt[8]{2}e^{\frac{17\pi i}{16}} = \sqrt[8]{2}e^{\frac{-15\pi i}{16}}$

Если $k = 3$, то $z_3 = \sqrt[8]{2}e^{\left(\frac{\pi}{4}+6\pi\right)\frac{i}{4}} = \sqrt[8]{2}e^{\frac{25\pi i}{16}} = \sqrt[8]{2}e^{\frac{-7\pi i}{16}}$

Задания для самостоятельного решения

Задача 1. Найдите $e^{\frac{i\pi}{2}}$

Задача 2. Представьте в показательной форме числа 1) $3 + i\sqrt{3}$

Задача 3. Представив числа $z_1 = \sqrt{3} + i$и $z_2 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$в показательной форме, вычислите: 1)$z_1 \cdot z_2$; 2)z_2/z_1; 3) z_2^4; 4) $\sqrt[3]{z_1}$; $\sqrt[4]{z_2}$

Задача 4. Вычислите $\sqrt[4]{i}$

Задача 5. Решите уравнение $x^3 - 8 = 0$

Контрольные вопросы по теме.

1. Как записывается комплексное число в тригонометрической форме?
   Как записывается комплексное число в показательной форме? Формула Эйлера.
2. Сформулируйте правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической и обратно.
3. Сформулируйте правило перехода от алгебраической формы комплексного числа к показательной и обратно.
4. Как перейти от тригонометрической формы комплексного числа к показательной и обратно.
5. Как умножаются комплексные числа, записанные в тригонометрической форме.
6. Как умножаются комплексные числа, записанные в показательной форме?
7. Сформулируйте правило деления комплексных чисел в тригонометрической форме.
8. Сформулируйте правило деления комплексных чисел в показательной форме.
9. Как возвести в степень комплексное число, записанное в тригонометрической форме.
10. Как возвести в степень комплексное число, записанное в показательной форме?
11. Сформулируйте правило извлечения корня n –й степени из комплексного числа, записанного в тригонометрической форме.
12. Сформулируйте правило извлечения корня n –й степени из комплексного числа, записанного в показательной форме.
13. Сколько значений имеет корень n-й степени из комплексного числа?

Раздел 2. Элементы линейной алгебры

Тема 2.1. Матрицы и определители (4 часа)

Основные понятия:

Определители, их свойства и вычисление.

Матрицы и действия над ними.

Линейные операции над матрицами. Умножение матриц.

Ранг матрицы. Обратная матрица.

Матрицей размером $m \times n$ называется совокупность $m \cdot n$ чисел, расположенных в виде прямоугольной таблицы из m строк и n столбцов. Эту таблицу обычно заключают в круглые скобки. Например, матрица может иметь вид:

$$\underset{2\times 2}{\begin{pmatrix} 2-\frac{1}{3} & 0 \\ 1 & \pi & 1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{3\times 3}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & \sqrt{2} & 0 \\ 1.5 & 3 & -1 \end{pmatrix}}, \quad \underset{3\times 1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}}, \quad \underset{1\times 1}{(4)}$$

Для краткости матрицу можно обозначать одной заглавной буквой, например, A или B.

В общем виде матрицу размером $m \times n$ записывают так

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа, составляющие матрицу, называются *элементами матрицы*. Элементы матрицы удобно снабжать двумя индексами a_{ij}: первый указывает номер строки, а второй – номер столбца. Например, a_{23} – элемент стоит во 2-ой строке, 3-м столбце.

Если в матрице число строк равно числу столбцов, то матрица называется *квадратной*, причём число ее строк или столбцов называется *порядком* матрицы. В приведённых выше примерах квадратными являются вторая матрица – её порядок равен 3, и четвёртая матрица – её порядок 1.

Матрица, в которой число строк не равно числу столбцов, называется *прямоугольной*. В примерах это первая матрица и третья.

Различаются также матрицы, имеющие только одну строку или один столбец.

Матрица, у которой всего одна строка $A = (a_{11} \quad a_{12} \quad \dots \quad a_{1n})$, называется *матрицей – строкой* (или строковой), а матрица, у которой всего один столбец, *матрицей – столбцом*. Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается (0), или просто 0. Например,

$$0 = (0 \quad 0 \quad \dots \quad 0), \quad 0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Главной диагональю квадратной матрицы назовём диагональ, идущую из левого верхнего в правый нижний угол.

$$\begin{pmatrix} \underline{1} & 3 & -1 \\ 0 & \underline{2} & -2 \\ 4 & 1 & \underline{3} \end{pmatrix}$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, лежащие ниже главной диагонали, равны нулю, называется *треугольной* матрицей.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22} & a_{23} \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме, быть может, стоящих на главной диагонали, равны нулю, называется *диагональной* матрицей. Например, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Диагональная матрица, у которой все диагональные элементы равны единице, называется *единичной* матрицей и обозначается буквой Е. Например, единичная матрица 3-го порядка имеет вид $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

ДЕЙСТВИЯ НАД МАТРИЦАМИ.

Равенство матриц. Две матрицы A и B называются равными, если они имеют одинаковое число строк и столбцов и их соответствующие элементы равны $a_{ij} = b_{ij}$. Так если $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}$, то $A=B$, если $a_{11} = b_{11}$, $a_{12} = b_{12}$, $a_{21} = b_{21}$ и $a_{22} = b_{22}$.

Транспонирование. Рассмотрим произвольную матрицу *A* из m строк и n столбцов. Ей можно сопоставить такую матрицу *B* из n строк и m столбцов, у которой каждая строка является столбцом матрицы *A* с тем же номером (следовательно, каждый столбец является строкой матрицы *A* с тем же номером). Итак, если $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ . & . & . & . \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$, то

$$B=\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & \dots & a_{m2} \\ . & . & . \\ a_{1n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Эту матрицу *B* называют *транспонированной* матрицей *A*, а переход от *A* к *B* *транспонированием*.

Таким образом, транспонирование – это перемена ролями строк и столбцов матрицы. Матрицу, транспонированную к матрице *A*, обычно обозначают A^T.

Связь между матрицей *A* и её транспонированной можно записать в виде $a_{ij}^T = a_{ji}$.

Пример. Найти матрицу, транспонированную данной.

1. $$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A^T=\begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 0 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. $$B=\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad B^T=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Сложение матриц. Пусть матрицы *A* и *B* состоят из одинакового числа строк и одинакового числа столбцов, т.е. имеют одинаковые размеры. Тогда для того, чтобы сложить матрицы *A* и *B* нужно к элементам матрицы *A* прибавить элементы матрицы *B*, стоящие на тех же местах. Таким образом, суммой двух матриц *A* и *B* называется матрица *C*, которая определяется по правилу, например,

$$A+B=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{pmatrix}$$

или

$$(c_{ij})=(a_{ij}+b_{ij})$$

Примеры. Найти сумму матриц:

1. $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{pmatrix}$.
2. $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. размеры матриц различны.
3. $(1 \quad 2 \quad 3) + (0 \quad -1 \quad 1) = (1 \quad 1 \quad 4)$.

Легко проверить, что сложение матриц подчиняется следующим законам: коммутативному $A+B=B+A$ и ассоциативному $(A+B)+C=A+(B+C)$.

Умножение матрицы на число. Для того чтобы умножить матрицу A на число k нужно каждый элемент матрицы A умножить на это число. Таким образом, произведение матрицы A на число k есть новая матрица, которая определяется по правилу $kA = k \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_{11} & ka_{12} \\ ka_{21} & ka_{22} \\ ka_{31} & ka_{32} \end{pmatrix}$ или $(c_{ij}) = (ka_{ij})$.

Для любых чисел a и b и матриц A и B выполняются равенства:

1. $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A)$
2. $\alpha(A+B) = \alpha A + \alpha B$
3. $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A$.

Примеры.

1. $-2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 4 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 0 \\ 2 & -4 & -8 \\ -4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$.
2. Найти 2A-B, если $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix}$.

   $2A - B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & -4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & -2 & -3 \\ -1 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ 5 & -4 & -5 \end{pmatrix}$.
3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$. Найти $C=-3A+4B$.

   Матрицу C найти нельзя, т.к. матрицы A и B имеют разные размеры.

Умножение матриц. Эта операция осуществляется по своеобразному закону. Прежде всего, заметим, что размеры матриц–сомножителей должны быть согласованы.

Перемножать можно только те матрицы, у которых число столбцов первой матрицы совпадает с числом строк второй матрицы (т.е. длина строки первой равна высоте столбца второй). *Произведением* матрицы A не матрицу B называется новая матрица $C=AB$, элементы которой составляются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22} & a_{11}b_{13}+a_{12}b_{23} \\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22} & a_{21}b_{13}+a_{22}b_{23} \end{pmatrix}.$$

Таким образом, например, чтобы получить у произведения (т.е. в матрице C) элемент, стоящий в 1-ой строке и 3-м столбце c_{13}, нужно в 1-ой матрице взять 1-ую строку, во 2-ой – 3-й столбец, и затем элементы строки умножить на соответствующие элементы столбца и полученные произведения сложить. И другие элементы матрицы-произведения получаются с помощью аналогичного произведения строк первой матрицы на столбцы второй матрицы.

В общем случае, если мы умножаем матрицу $A = (a_{ij})$ размера $m\times n$ на матрицу $B = (b_{ij})$ размера $n\times p$, то получим матрицу C размера $m\times p$, элементы которой вычисляются следующим образом: элемент c_{ij} получается в результате произведения элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B и их сложения.

Из этого правила следует, что всегда можно перемножать две квадратные матрицы одного порядка, в результате получим квадратную матрицу того же порядка. В частности, квадратную матрицу всегда можно умножить саму на себя, т.е. возвести в квадрат.

Другим важным случаем является умножение матрицы–строки на матрицу–столбец, причём ширина первой должна быть равна высоте второй, в результате получим матрицу первого порядка (т.е. один элемент). Действительно,

$$\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \end{pmatrix}.$$

Примеры.

1. Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \quad C = AB.$

   Найти элементы c_{12}, c_{23} и c_{21} матрицы C.

   $c_{12} = 0-2+3=1, \quad c_{23} = 0+0+1=1, \quad c_{21} = 0-3+1=-2.$

2. Найти произведение матриц.

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 3 & 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\\ 2 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2 & 4+1\\ 3+2+2 & 6+1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 5\\ 7 & 9\end{pmatrix}.$$

3. $$\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2-2+2 & -3-2-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2 & -7\end{pmatrix}.$$

4. $\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 2\end{pmatrix}$ - нельзя, т.к. ширина первой матрицы равна 2-м элементам, а высота второй – 3-м.

5. Пусть $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{pmatrix}.$

   Найти *AB* и *BA*.

   $AB=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 5 & 1\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 8 & -1\end{pmatrix}.$

6. $A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ -1 & -3\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1\\ 2\end{pmatrix}.$

   Найти *AB* и *BA*.

   $AB=\begin{pmatrix}-3\\ -7\end{pmatrix}$, $B\cdot A$ – не имеет смысла.

ПОНЯТИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЕЙ.

Пусть дана матрица второго порядка – квадратная матрица, состоящая из двух строк и двух столбцов $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix}$.

Определителем второго порядка, соответствующим данной матрице, называется число, получаемое следующим образом: $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.

Определитель обозначается символом $|A|=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$.

Итак, для того чтобы найти определитель второго порядка нужно из произведения элементов главной диагонали вычесть произведение элементов по второй диагонали.

Примеры. Вычислить определители второго порядка.

1. $\begin{vmatrix}2 & 5\\ 3 & -4\end{vmatrix}=-8-15=-23$

2. $\begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0+6=6$.

3. Вычислить определитель матрицы *D*, если *D*= -*A*+2*B* и

$$A=\begin{pmatrix} 11 & -2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix} -11 & 2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 10 & -2 \\ 14 & 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 17 & 0 \end{pmatrix},\quad |D|=0.$$

Аналогично можно рассмотреть матрицу третьего порядка и соответствующий ей определитель.

Определителем третьего порядка, соответствующим данной квадратной матрице третьего порядка, называется число, обозначаемое и получаемое следующим образом:

$$|A|=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}-a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}+a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}.$$

Таким образом, эта формула даёт разложение определителя третьего порядка по элементам первой строки a_{11}, a_{12}, a_{13} и сводит вычисление определителя третьего порядка к вычислению определителей второго порядка.

Примеры. Вычислить определитель третьего порядка.

1.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=2\begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}-3\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}-4\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=8-3\cdot(-1)-4\cdot 2=3.$$

2.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1+2\cdot 4=9$$

Задания для совместной работы.

1. Найдите матрицу C = A + B, если $A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

2. Найдите матрицу C = A + B, если $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -7 & 4 \\ 6 & 5 & 2 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -3 \\ 5 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3. Вычислите: 2A + 3B – C, если $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -4 & 0 \end{pmatrix}$, $C = \begin{pmatrix} -7 & -4 \\ 18 & -8 \end{pmatrix}$.

4. Произведите умножение двух матриц а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$,

б) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ -1 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

5. Вычислите определитель второго порядка $\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$.

6. Вычислите определитель третьего порядка $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 6 & 3 \end{bmatrix}$.

7. Запишите все миноры определителя $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 3 & 7 & -1 \\ 5 & 4 & 2 \end{bmatrix}$.

8. Найдите алгебраические дополнения A_{13}, A_{21}, A_{31} для определителя $\begin{bmatrix} -1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

9. Разложите определитель $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{bmatrix}$ по:

а) элементам первой строки;

б) элементам второго столбца.

10. Найдите обратную матрицу для матрицы $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 7 \end{pmatrix}$.

Контрольные вопросы по теме.

1. Что называется матрицей?
2. Что называется матрицей-строкой, матрицей столбцом?
3. Какие матрицы называются прямоугольными, квадратными?
4. Какие матрицы называются равными?
5. Что называется главной диагональю матрицы?
6. Какая матрица называется диагональной?
7. Какая матрица называется единичной?
8. Какая матрица называется треугольной?
9. Что значит транспонировать матрицу?
10. Что называется суммой матриц?
11. Что называется произведением матрицы на число?

12. Как найти произведение двух матриц?

13. В чем состоит обязательное условие существования произведения матриц?

14. Что называется определителем матрицы?

15. Как вычислить определитель третьего порядка по схеме треугольников?

16. Что называется минором?

17. Что называется алгебраическим дополнением элемента определителя?

18. Как разложить определитель по элементам столбца или строки?

19. Перечислите свойства определителя.

20. Какая матрица называется невырожденной?

21. Какая матрица называется обратной по отношению к данной?

22. Каков алгоритм нахождения обратной матрицы?

Тема 2.2. Методы решения систем линейных уравнений (6 часов)

Основные понятия:

Системы линейных алгебраических уравнений.

Методы Крамера, Гаусса, матричный.

Метод Крамера.

(Габриель Крамер (1704-1752) швейцарский математик)

Данный метод также применим только в случае систем линейных уравнений, где число переменных совпадает с числом уравнений. Кроме того, необходимо ввести ограничения на коэффициенты системы. Необходимо, чтобы все уравнения были линейно независимы, т.е. ни одно уравнение не являлось бы линейной комбинацией остальных.

Для этого необходимо, чтобы определитель матрицы системы не равнялся 0.

$$\det A \neq 0;$$

Действительно, если какое- либо уравнение системы есть линейная комбинация остальных, то если к элементам какой- либо строки прибавить элементы другой, умноженные на какое- либо число, с помощью линейных преобразований можно получить нулевую строку. Определитель в этом случае будет равен нулю.

Теорема. (Правило Крамера):

Теорема. *Система из n уравнений с n неизвестными*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

в случае, если определитель матрицы системы не равен нулю, имеет единственное решение и это решение находится по формулам:

$$x_i = \Delta_i/\Delta, \text{ где}$$

Δ = detA, а Δ_i – определитель матрицы, получаемой из матрицы системы заменой столбца i столбцом свободных членов b_i.

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} a_{11}\ldots a_{1i-1} & b_1 & a_{1i+1}\ldots a_{1n} \\ a_{21}\ldots a_{2i-i} & b_2 & a_{2i+1}\ldots a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}\ldots a_{ni-1} & b_n & a_{ni+1}\ldots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Пример.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}; \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}; \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix};$$

$$x_1 = \Delta_1/\det A; \qquad x_2 = \Delta_2/\det A; \qquad x_3 = \Delta_3/\det A;$$

Пример. Найти решение системы уравнений:

$$\begin{cases} 5x - y - z = 0 \\ x + 2y + 3z = 14 \\ 4x + 3y + 2z = 16 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5(4 - 9) + (2 - 12) - (3 - 8) = -25 - 10 + 5 = -30;$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 14 & 2 & 3 \\ 16 & 3 & 2 \end{vmatrix} = (28 - 48) - (42 - 32) = -20 - 10 = -30.$$

$x_1 = \Delta_1/\Delta = 1$;

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 0 & -1 \\ 1 & 14 & 3 \\ 4 & 16 & 2 \end{vmatrix} = 5(28 - 48) - (16 - 56) = -100 + 40 = -60.$$

$x_2 = \Delta_2/\Delta = 2$;

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 14 \\ 4 & 3 & 16 \end{vmatrix} = 5(32 - 42) + (16 - 56) = -50 - 40 = -90.$$

$x_3 = \Delta_3/\Delta = 3$.

Если система однородна, т.е. $b_i = 0$, то при $\Delta \neq 0$ система имеет единственное нулевое решение $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

При $\Delta = 0$ система имеет бесконечное множество решений.

Задания для совместной работы.

1. Решите систему линейных уравнений методом Крамера.

а) $\begin{cases} 5x + 3y = 12, \\ 2x - y = 7. \end{cases}$ б) $\begin{cases} 2x + 3y = 7, \\ 4x - 5y = 2. \end{cases}$ в) $\begin{cases} 3x + 2y + z = 3, \\ 5x - 2y - 2z = 3, \\ x + y - z = -2. \end{cases}$ г) $\begin{cases} x - y + z = 6, \\ x - 2y + z = 9, \\ x - 4y - 2z = 3. \end{cases}$

2. Решите систему 4-х линейных уравнений с четырьмя неизвестными методом Крамера

$$\begin{cases} 7x_1 + 6x_2 + 3x_3 + 7x_4 = 3; \\ 3x_1 + 5x_2 + 7x_3 + 2x_4 = -1; \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 1; \\ 5x_1 + 6x_2 + 5x_3 + 4x_4 = 2. \end{cases}$$

3. Исследовать системы линейных алгебраических уравнений (установить совместность, найти общее решение, проверить):

1. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=4, \\ 2x_1+x_2+4x_3+x_4=4; \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=4, \\ 3x_2+2x_3-x_4=-4; \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=2, \\ x_1-x_2+x_3=0, \\ 2x_1+x_2+4x_3=2; \end{cases}$

4. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_4=2, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-1, \\ -3x_2-3x_3+3x_4=3; \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5=0, \\ x_1+x_2-2x_3-x_4+2x_5=0, \\ 2x_1-x_3-3x_4+3x_5=0; \end{cases}$ 6. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_4=-3, \\ 3x_1-x_2-2x_3=1, \\ 2x_1+x_2+2x_3-x_4=4; \end{cases}$

7. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ x_1-x_2+x_3-x_4+x_5=0; \end{cases}$ 8. $\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ 2x_1+2x_3+2x_5=1; \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3=-3, \\ 2x_1-4x_2+2x_3=-6; \end{cases}$

10. $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=0, \\ x_1-x_2+x_3+2x_4=4, \\ 3x_1+3x_2+7x_3=4; \end{cases}$ 11. $\begin{cases} x_1-x_2+2x_4=2, \\ x_1+2x_2+3x_3-x_4=-1, \\ 2x_1+x_2+3x_3+x_4=1; \end{cases}$ 12. $\begin{cases} x_1-x_2+x_3-2x_4+x_5=1, \\ x_1+x_2-2x_3-x_4+2x_5=2, \\ 2x_1-x_3-3x_4+3x_5=3. \end{cases}$

Раздел 3. Основы аналитической геометрии.

Тема 3.1 Прямая на плоскости и её уравнение. (4 часа)

Прямые на плоскости могут быть заданы следующими уравнениями:

1. Общее уравнение прямой $Ax+By+C=0$, где A и B- координаты нормального вектора.

Вектор n, перпендикулярный данной прямой, называется нормальным $\vec{n}=(A;B)$.

2. Уравнение прямой, проходящей через данную точку $M(x_0;y_0)$ перпендикулярно данному вектору $\vec{n}(A;B)$, т.е.$\vec{n}\perp\overrightarrow{MM_0}$, значит $\vec{n}\cdot\overrightarrow{MM_0}=0$,где $M(x;y)$-текущая точка прямой l. И в координатной форме $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$.

3. Уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$

$$l:\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}$$

4. Параметрические уравнения прямой.

Любой вектор $\vec{a}(a_1;\ a_2)$,определенный прямой l ,называется направляющим вектором.

Пусть прямая l проходит через 2 точки $M(x;y)$ и $M_0(x_0;y_0)$.t- параметр, принимающий различные числовые значения.

$$\boldsymbol{x=x_0+a_1t}$$

$$\boldsymbol{y=y_0+a_2t}$$

5. Каноническое уравнение прямой.

Пусть прямая l проходит через точку $M_0(x_0;y_0)$, параллельно вектору $\vec{a}(a_1;a_2)$

$$\frac{x-x_0}{a_1}=\frac{y-y_0}{a_2}\ .$$

6. Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

Тангенс угла наклона прямой к положительному направлению оси O_x, называется угловым коэффициентом, т.е.$tg\alpha=k$.

Пусть даны 2 точки прямой $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$,тогда$k=\frac{y_2-y_1}{}$.

$-x_1$

Угол между прямыми,заданными

1. общими уравнителями.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы общими уравнителями

l_1: $A_1 x + B_1 y + C_1=0$

l_2: $A_2 + B_2 y + C_2=0$, тогда $\cos\varphi = \dfrac{|A_1 A_2+ B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2+ B_2^2}}$;

2. уравнениями с угловым коэффициентом.

$l_1: k_1 x+b_1$,тогда $\cos\varphi = \dfrac{|k_1\cdot k_2+1|}{\sqrt{k_1^2+1}\cdot\sqrt{k_2^2+1}}$;

l_2: $k_2 x + b_2$

3. Каноническими уравнениями.

Пусть прямые l_1 и l_2 заданы уравнениями

$l_1: \dfrac{x-x_1}{a_1} = \dfrac{y-y_1}{a_2}$, тогда $\cos\varphi = \dfrac{|a_1b_1+ a_2 b_2|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\cdot\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$.

$l_2: \dfrac{x-x_2}{b_1} = \dfrac{y-y_2}{b_2}$

Условия перпендикулярности прямых,заданных

1. общими уравнениями.

$A_1 A_2+ B_1 B_2=0$;

2. уравнениями с угловым коэффициентом. $k_1\cdot k_2= -1$;

3. каноническими уравнениями.

$a_1b_1+ a_2 b_2=0$.

Пример 1. Найти угол между прямыми l_1: $5x-12y-16=0$ и l_2: $3x+4y-12=0$.

Решение. Прямые l_1 и l_2 заданы общим уравнением, поэтому используем формулу

$\cos\varphi = \dfrac{|A_1 A_2 + B_1 B_2|}{\sqrt{A_1^2+ B_1^2}\cdot\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$.

У нас $A_1 = 5$, $B_1 = -12$, $A_2=3$, $B_2=4$,подставляя в формулу получаем

$\cos\varphi = \dfrac{5\cdot 3 -12\cdot 4}{\sqrt{5^2+(-12)^2}\cdot\sqrt{3^2+ 4^2}} = \dfrac{33}{65}$; $\varphi = \arccos\dfrac{33}{65} \approx 59{,}5^\circ$.

Пример 2. При каком значении параметра k прямые l_1:$y=5x+4$ и l_2:$y=kx-2$ перпендикулярны?

Решение. Прямые заданы уравнениями с угловыми коэффициентами. Условие перпендикулярности имеет вид $k_1\cdot k_2= -1$.

У нас $k_1 = 5$, k_2 - неизвестно, значит $5\cdot k_2 = -1$, $k_2= -\dfrac{1}{}$.

5

Пример 3. Вычислить угол между прямыми, заданными каноническими уравнениями $l_1: \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{5}$; $l_2: \dfrac{x}{2} = \dfrac{y+1}{-3}$.

Решение. Косинус угла между прямыми будем вычислять по формуле

$$\cos\varphi = \frac{\left|\vec{a}\cdot\vec{b}\right|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{|1\cdot 5 - 5\cdot 3|}{\sqrt{1^2+5^2}\cdot\sqrt{2^2+(-3)^2}} = \frac{13}{\sqrt{26}\cdot\sqrt{13}} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad \varphi = \arccos\frac{1}{\sqrt{2}} = 45^\circ.$$

Пример 4. В треугольнике с вершинами в точках $M_1(-5;\ 2)$, $M_2(5;\ 6)$, $M_3(-1;\ 2)$ проведена медиана M_1A_1. Составить уравнение прямой, проходящей через точку A_1 перпендикулярно медиане M_1A_1.

Решение. За нормальный вектор искомой прямой можно принять вектор $\vec{n} = \overrightarrow{M_1A_1}$. Чтобы найти координаты вектора n, найдем координаты точки A_1; точка A_1 - середина отрезка M_2M_3, поэтому $x_1 = \dfrac{5+1}{2} = 3$; $y_1 = \dfrac{6-2}{2} = 2$.

Вектор $\vec{n} = M_1A_1$ имеет координаты $3-(-5)=8$ и $2-2=0$, т.е. $\overrightarrow{M_1A_1}(8;\ 0)$. Уравнение искомой прямой ищем как уравнение прямой, проходящей через данную точку, перпендикулярно данному вектору $8(x-3)+0(y-2)=0$, $x=3$.

Пример 5. Найти координаты точек пересечения прямых $l_1: x+y-3=0$ и $l_2: 3x+2y-9=0$.

Решение. Чтобы найти координаты точки пересечения прямых, решаем систему уравнений

$$\begin{cases} x+y-3=0 \\ 3x+2y-9=0 \end{cases} \quad \begin{cases} x=3-y \\ 3(3-y)+2y-9=0 \end{cases} \quad y=0;\ x=3.$$

Ответ: точка $A(3;\ 0)$.

1. Проверьте принадлежат ли точки А (3; 14), В(4; 13), С(-3;0), Д(0; 5) прямой 7х-3у+21=0.
2. Постройте прямые: 1) х = 5; х = -3, х=0; 2) у = 4, у = -2, у = 0.
3. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку М (2; -4) и перпендикулярной вектору $\vec{n}$= (4; 2).
4. Вычислите длину отрезка прямой 3х + 4у – 24 = 0, заключенного между осями координат.
5. На прямой 2х + у – 6 = 0 найдите точку М, равноудаленную от точек А(3; 5) и В(2; 6).
6. Вычислите углы наклона к оси Ох для прямых: 1) у = х; 2) у = -х.
7. Составьте уравнение прямой, проходящей через начало координат, если её угловой коэффициент: 1) k = 6; 2) k =-2.
8. Найдите острый угол между прямыми 5х – 2у -16 = 0 и 3х+4у – 12 = 0.
9. Составьте уравнение прямой, проходящей через точку М (-2; -4) параллельно прямой 2х -3у + 16 = 0.
10. Проверьте, перпендикулярны ли следующие прямые:

1) 3х – 4у + 12 = 0 и 4х+ 3у – 6 = 0;
2) 4х + 4у – 8 = 0 и 3х – 2у + 4 = 0.

Контрольные вопросы по теме.

1. Что называется, уравнением прямой?

2. Каким уравнением описывается прямая на плоскости?
3. Как записывается каноническое уравнение прямой?
4. Запишите уравнения осей координат.
5. Запишите уравнения прямых, параллельных осям координат.
6. Сформулируйте правило составления уравнения прямой на плоскости.
7. Запишите уравнение прямой с угловым коэффициентом.
8. Сформулируйте условие параллельности прямых.
9. Сформулируйте условие перпендикулярности прямых.
10. Как найти угол между прямыми?

Раздел 4. Основы математического анализа

Тема 4.1. Теория пределов (4 часа)

Краткие теоретические сведения

Пусть дана функция f(x) = x^2 + x и известно, что $x \to 2$, т.е. принимает значения достаточные близкие к 2. Очевидно, что f(x) будет принимать значения близкие к 6, т.е. f(2).

При этом пишут $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+x)=6$, или в общем виде: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$. И читают: предел функции f(x) при в точке a (или при x стремящемся к a) равен b. (Никогда не говорите «лим» или «лимит»)

Но не все так просто! Рассмотрим функцию: $f(x)=\dfrac{x^2+3x-4}{x-1}$. Очевидно, что эта функция существует при всех действительных x, кроме x = 1 – обратите на это особое внимание!

Пусть функция y = f(x) определена в некоторой окрестности точки x = a, кроме, быть может, в самой этой точке.

<u>Определение 1.</u> Число *b* называется пределом функции *f*(*x*) в точке x_0, если для всех значений *x*, достаточно близких к x_0и отличных от x_0, значения функции *f*(*x*) сколь угодно мало отличаются от числа *b*. Пишут: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=b$.

<u>Определение 2.</u>Число b называется пределом этой функции в точке x = a (или при $x \to a$), если по любому сколь угодно малому, наперед заданному числу ε > 0 найдется такое число δ > 0, что для всех x удовлетворяющих неравенству 0 < $|x-a|<\delta$, соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству: $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Пусть функция y = f(x) определена слева от точки x = a.

Число b называется *левосторонним пределом* этой функции при $x \to a$-, если по любому сколь угодно малому, наперед заданному числу ε > 0 найдется такое число δ > 0, что для всех x удовлетворяющих неравенству $a - x < \delta$, соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Аналогично. Пусть функция y = f(x) определена справа от точки x = a.

Число b называется *правосторонним пределом* этой функции при $x \to a+$, если по любому сколь угодно малому, наперед заданному числу ε > 0 найдется такое число δ > 0, что для всех x удовлетворяющих неравенству $x - a < \delta$, соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

Говорят, что предел функции существует, если существуют односторонние пределы и они равны: $\lim\limits_{x \to a-} f(x) = \lim\limits_{x \to a+} f(x) = b$.

Пусть функция y = f(x) определена при достаточно больших x (при $x \to \infty$).
Число b называется пределом этой функции при $x \to \infty$, если по любому сколь угодно малому, наперед заданному числу ε > 0 найдется такое значение аргумента x = M, что для всех x > M соответствующие значения функции будут удовлетворять неравенству: $|f(x) - b| < \varepsilon$.

<u>Свойства пределов</u>. Пусть существуют пределы $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = a$ и $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = b$. Тогда:

1. Предел константы равен самой константе: $\lim\limits_{x \to x_0} c = c$.
2. Предел суммы двух функций равен сумме пределов этих функций: $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = a + b$.
3. Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций: $\lim\limits_{x \to x_0} [f(x) \cdot g(x)] = a \cdot b$.
4. Постоянный множитель выносится за знак предела: $\lim\limits_{x \to x_0} [k \cdot f(x)] = k \cdot a$.
5. Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций: $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$, если $g(x) \neq 0$.
6. Показатель степени можно выносить за знак предела: $\lim\limits_{x \to x_0} (f(x))^n = \left[\lim\limits_{x \to x_0} f(x)\right]^n = a^n$.

Помните, что $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ или в более общем виде: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{k}{x^n}=0$, где k и n – константы, а $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}=\infty$.

Примеры: Вычислить пределы функции.

а) $\lim\limits_{x\to 1}(x^3+6x^2-5x-1)=1^3+6\cdot 1^2-5\cdot 1-1=1$

б) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\frac{\lim\limits_{x\to 2}(x^2+14x-32)}{\lim\limits_{x\to 2}(x^2-6x+8)}=\frac{2^2+14\cdot 2-32}{2^2-6\cdot 2+8}=\left(\frac{0}{0}\right).$

Получили неопределенность вида $\frac{0}{0}$. Для ее раскрытия разложим числитель и знаменатель дроби на множители, затем сократим дробь на (x-2).

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+14x-32}{x^2-6x+8}=\lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(x+16)}{(x-2)(x-4)}=\lim_{x\to 2}\frac{x+16}{x-4}=\frac{2+16}{2-4}=-9.$$

в) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3+3x^2-7x+15}{2x^3+5x+3}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

Получили неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$. Для ее раскрытия числитель и знаменатель почленно разделим на x^3.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4x^3}{x^3}+\frac{3x^2}{x^3}-\frac{7x}{x^3}+\frac{15}{x^3}}{\frac{2x^3}{x^3}+\frac{5x}{x^3}+\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{3}{x}-\frac{7}{x^2}+\frac{15}{x^3}}{2+\frac{5}{x^2}+\frac{3}{x^3}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4+\frac{3}{\infty}-\frac{7}{\infty^2}+\frac{15}{\infty^3}}{2+\frac{5}{\infty^2}+\frac{3}{\infty^3}}=$$

$$\frac{4+0-0+0}{2+0+0}=2.$$

Следующие пределы вычислите самостоятельно.

1. $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+5x-6}{2x^2+3x-5}$ 2. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{4x^2-11x-3}{x-3}$ 3. $\lim\limits_{t\to 2}\frac{t^2-6t+8}{t^2+t-6}$

4. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-4x-21}{3x^2+8x-3}$; 5. $\lim\limits_{x\to -3}\frac{x^2-4x-21}{3x^2+8x-3}$; 6. $\lim\limits_{x\to 0,5}\frac{2x^2-7x-4}{6x^2+7x+2}$

В теории пределов рассматривается несколько видов неопределенностей. Один из них $\infty-\infty$. Действительно, говоря нематематическим языком: «очень много вычесть очень много не означает, что получится ноль». Рассмотрим неопределенность вида $\infty-\infty$ на простом примере.

Пример: $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+1})$ = (перейдем к неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$, для чего помножим и разделим выражение под знаком предела на сопряженное выражение, а именно $\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1}$ = $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{(\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1}}$ = (применяя формулы сокращенного умножения, будем иметь) =

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+2-x^2-1}{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x+1}{\sqrt{x^2+3x+2}+\sqrt{x^2+1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{1}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}}+\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = \frac{3+0}{\sqrt{1+0+0}+\sqrt{1+0}} = \frac{3}{2}.$$

Задания: Повторить правила раскрытия неопределённостей $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Практическая работа «Предел функции»

Цель работы: отработка навыков вычисления пределов функций

Непосредственное вычисление пределов

1) $\lim\limits_{x\to5}(x+2)$; 2) $\lim\limits_{x\to2}(3x^2-2x)$; 3) $\lim\limits_{x\to4}\dfrac{x^2-2x}{x-3}$; 4) $\lim\limits_{x\to5}\dfrac{7x-5}{10+2x}$; 5) $\lim\limits_{x\to-2}(x^3+3x^2)$;

6) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{5x^2-2x+4}{(x-1)(x+1)}$; 7) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x^2+2}}{2-\sqrt{x}}$; 8) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x^2+2x+2}{x^2-1}$; 9) $\lim\limits_{x\to0,1}\dfrac{5x+4}{1-x}$

; 10) $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{(x+3)(x-2)}{x+2}$; 11) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2-5x-3}{4x^2-13x+3}$; 12) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{3x^2+x}{4x^3+x+10}$;

13) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^3-4x+5}{x^2+6}$; 14) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{3}{2x-6}$; 15) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x^2-5x-1}{2x^2-x-1}$.

Раскрытие неопределенности вида $\dfrac{0}{0}$

I. 16) $\lim\limits_{x\to2}\dfrac{x^2-4}{x^2-2x}$; 17) $\lim\limits_{x\to3}\dfrac{x^2-6x+9}{x^2-3x}$; 18) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^4-16}{x+2}$; 19) $\lim\limits_{x\to\sqrt{2}}\dfrac{x^4-4x^2+4}{x^3-2x}$;

20) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-5x+6}{x-2}$; 21) $\lim\limits_{x\to \frac{3}{2}}\dfrac{4x^2-9}{2x+3}$; 22) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x^3+x}{x}$; 23) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-7x+10}{x^2-9x+20}$;

24) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-2x-3}$; 25) $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-4}{x+2}$; 26) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3-x}{x^3-27}$; 27) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{3x^2-11x+6}{2x^2-5x-3}$;

28) $\lim\limits_{x\to \sqrt{5}}\dfrac{x^4-25}{x^2-5}$; 29) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$; 30) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-8x+4}{5x^2-14x+8}$; 31) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{5x^2-9x-2}$;

II. 32) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2+x}-\sqrt{2-x}}{5x}$; 33) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{1+3x}-1}$; 34) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{x}$; 35) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{2-\sqrt{x-1}}$;

36) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x-6}{\sqrt{x+3}-3}$; 37) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sqrt{x+4}-2}$; 38) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x^2-49}$; 39) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{3x}$;

40) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{\sqrt{x+2}-3}{x-7}$; 41) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x-\sqrt{x}}{x^2-x}$; 42) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\sqrt{1-x^2}}{x^2}$; 43) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{1-2x}}{x+x^2}$;

44) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+3x^2}-1}{x^2+x^3}$; 45) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{2x-1}-\sqrt{5}}{x-3}$; 46) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{1+3x}-\sqrt{2x+6}}{x^2-5x}$; 47) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x-2}{\sqrt{2x}-2}$

Раскрытие неопределенности вида $\dfrac{\infty}{\infty}$

48) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x+3}{5x-7}$; 49) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3-2x^2+3}{7x-4}$; 50) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{4x+9}{2x^2-3x+5}$; 51) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{2x^3-3x^2+5x+7}{3x^3+4x^2-x+2}$;

52) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}$; 53) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3+x^4}{x^5+x^6}$; 54) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x^2-x-6}{3x-x^2}$; 55) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^3-2x+6}{3x^3+x^2-26}$;

56) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{10x^4-8x^2+3}{5x^4+3x^3+5}$; 57) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-4x+3}{x+5}$; 58) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{x^2-2x+5}{x^3+3x+7}$;

59) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{3x^3-4x+8}{5x^3+27x^2+x}$; 60) $\lim\limits_{x\to \infty}\dfrac{5x^3+4x^2-1}{8x^2-6x+3}$.

Студенты, имеющие в списке нечетные порядковые номера (1,3,5,…) выполняют задания с нечетными номерами, студенты с четными порядковыми номерами (2,4,6,…) выполняют задания с четными номерами.

Контрольные вопросы по теме:

1. Функция. Понятие функции. График функции. Способы задания.
2. Основные характеристики функции.
3. Обратная функция. Сложная функция.
4. Предел функции в точке и на бесконечности, односторонние пределы.
5. Связь предела функции и предела последовательности. Единственность предела.

6. Свойства предела.

Тема 4.2. Производная и дифференциал (6 часов)

Практическая работа «Дифференциальное исчисление»

Цель работы: отработка навыков вычисления производной функций и практического применения производной.

Краткие теоретические сведения

<u>**Определение.**</u> ***Производной функции y = f(x) называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента при произвольном стремлении последнего к нулю.***

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Формулы дифференцирования		**Правила дифференцирования**	**Применение производной**
$c' = 0$ $x' = 1$ $(x^n)' = nx^{n-1}$ $(kx)' = k$ $(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ $\left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2}$ $(a^x)' = a^x \ln a$ $(e^x)' = e^x$ $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}$ $(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\sin x)' = \cos x$ $(\cos x)' = -\sin x$ $(tgx)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ $(ctgx)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$ $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(arctgx)' = \frac{1}{1+x^2}$ $(arcctgx)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(u+v)' = u' + v'$ $(uv)' = u'v + v'u$ $(cu)' = cu'$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$, $v \neq 0$ $[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$	$f'(x) = tg\alpha = k$ $v(t) = S'(t)$ $a(t) = v'(t)$ Уравнение касательной: $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ $f(x)$ возрастает на I, если $f'(x) > 0$ на I. $f(x)$ убывает на I, если $f'(x) < 0$ на I. Выпуклость графика функции и его перегибы: $y'' > 0$, выпуклость вниз y'' _> 0, выпуклость вверх

Задания:

I. Вычислить производные следующих функций:

1) $y = 2x^2 - 3x + 5$; **2)** $y = 4 - x^4$; **3)** $y = x^4 - x^2$; **4)** $y = 5x^4 - 7x^2 + x - 3$; **5)** $y = x^4 + 4x^3 - 8x^2 + 9x - 5$;

6) $y = \frac{2x^3}{3} - 3x^2 + 6x - 1$; **7)** $y = \frac{3x^6}{2} + 4x^5 - 2x^3 - \frac{1}{2x}$; **8)** $y = 2 - \frac{x}{2} - 5x^2 - \frac{3}{x^2}$;

9) $y = \frac{x^5 + 2x^3 - 9x + 7}{x}$; **10)** $y = \frac{5x^6 - 4x^5 - 7x^4 + 3x^3 - 3x^2 + 6x - 11}{3x^2}$; **11)** $y = (2x - 3)^2$;

12) $y = (2x - 3)(3x^4 + 5x - 8)$; **13)** $y = 3x^{-2}$; **14)** $y = 4x^{-3}$; **15)** $y = 3x^{-\frac{2}{3}}$; **16)** $y = 5x^{-\frac{3}{5}}$;

17) Найти $f'(-1), \quad если \quad f(x) = 4x^3 - 2x^2 + x - 5$;

18) Найти $f'(0{,}5), \quad если \quad f(x) = -x^3 + 9x^2 - x + 2$;

19) $y = (x^3 - 2)(x^2 + x + 1)$; **20)** $y = (x + 2)(2x^3 - x)$; **21)** $y = \frac{x^2 - 1}{x^3 + 1}$; **22)** $y = \frac{1 - x^5}{1 + x^5}$;

22а) $y = e^x x^2$; **22б)** $y = 3x^4 \sin x$.

II. Вычислите производные сложных функций:

23) $y = 3\sin 5x$; **24)** $y = 4\cos\frac{x}{2}$; **25)** $y = \arccos 3x$; **26)** $y = \ln\sqrt{2x - 1}$;

27) $y = (x^4 - x - 1)^4$;

28). $y = \sqrt{x^3 + 2x - 5}$; **29)** $y = \sqrt{(1 - x^2)^2}$; **30)** $y = \cos^2 x$; **31)** $y = \sin^3 x$; **32)** $y = \ln\sin 3x$;

33) $y = \ln\sqrt{2x - 1}$; **34)** $y = 3^{\sin x} - 2^{2x} + e^{5x}$; **35)** $y = 3^{\sqrt{x}} - 4^{7x} + 3e^{2x}$; **36)** $y = \arcsin\ln x$;

37) $y = arctg x^3$; **38)** $y = arctg \cos x$.

III. Вычислите производные высших порядков:

39) $f'''(x), \quad если \quad f(x) = 4x^3$; **40)** $f^{(5)}(x), \quad если \quad f(x) = \frac{1}{7}x^7$;

41) $f''(x), \quad если \quad f(x) = \cos x$; **42)** $f^{(4)}(x), \quad если \quad f(x) = 2\sin 3x$.

IV. Вычислите производные показательно-степенных функций:

43) $y = x^x$; **44)** $y = x^{x^x}$; **45)** $y = x^{\frac{1}{x}}$; **46)** $y = x^{\ln x}$; **47)** $y = x^{tgx}$; **48)** $y = (arctgx)^{\ln x}$;

49) $y = (arctgx)^x$; **50)** $y = (x + x^2)^x$.

V. Геометрический и физический смысл производной.

51) Составьте уравнение касательной к параболе $y = x^2 - 4x$ в точке с абсциссой **а)** $x_0 = -1$; **б)** $x_0 = 0$; **в)** $x_0 = 1$.

52) Дана кривая $y = 2x^3 - 4x^2 + 5x - 1$. Составьте уравнение касательной в точке, абсцисса которой равна **а)** −1; **б)** 0; **в)**1.

53) В какой точке касательная к кривой $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x + 4$ параллельна прямой **а)** $2x + 2y - 5 = 0$; **б)** y – 3x -5 =0; **в)** y + x =0?

54) В какой точке касательная к кривой $y = x^2 + 2$ образует с осью *Ox* **а)** угол 30°; **б)** угол 45⁰; **в)** угол 135⁰ ?

55) Составьте уравнения касательных к кривой $y = x^2 - 4x$, проходящих через точку *A* (0; -1). Выполните чертеж.

56) Найдите скорость и ускорение материальной точки в конце третьей секунды, если движение точки задано уравнением $S(t) = t^2 + 11t + 30$.

57) Тело массой 8 кг движется прямолинейно по закону $S(t) = 2t^2 + 3t - 1$. Найдите кинетическую энергию тела ($\frac{mv^2}{2}$) через 3 *с* после начала движения.

VI. Проведите исследование функций и постройте их графики:

58) $y = 8 - 2x - x^2$; **59)** $y = x^3 - 3x^2 + 4$; **60)** $y = 3 - 3x + x^3$; **61)** $y = 4x^2 - x^4 - 3$; **62)** $y = x^3 - 12x$; ;

63) $y = x^4 + 2x^3 - 5x^2$; **64)** $y = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$; **65)** $y = x\sqrt{2 - x}$; **66)** $y = \ln(x^2 + 1)$;

67) $y = \frac{x}{x^2 - 1}$; **68)** $y = x^2\sqrt{1 + x}$; **69)** $y = 2x^4 - 8x^2 + 3$ **70)** $y = 2x^3 - 9x^2 + 15x - 6$;

71) $y = 3x - x^3$; **72)** $y = \frac{x}{x^2 + 1}$; **73)** $y = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3$

VII. Вычислите приближенно:

74) $2{,}005^4$; **75)** $2{,}995^5$; **76)** $1{,}995^{10}$; **77)** $\sqrt{1{,}07}$; **78)** $\sqrt{0{,}84}$; **79)** $\sqrt{25{,}4}$; **80)** $\sqrt{81{,}8}$; **81)** $\sqrt{36{,}7}$; **82)** $\cos 61^\circ$; **83)** $\sin 60^\circ 3'$; **84)** $2^{2{,}98}$.

VIII. Решите задачи на наибольшее и наименьшее значение функции:

85) Найдите наибольшее и наименьшее значение функции $y = x^3 - 6x$ на отрезке $[-3; \quad 4]$.

86) Число 54 представьте в виде суммы трех положительных слагаемых, два из которых пропорциональны числам 1 и 2, таким образом, чтобы произведение всех слагаемых было наибольшим.

87) Найдите число, которое, будучи сложено со своим квадратом, дает наименьшую сумму.

88) Число 24 представьте в виде суммы двух неотрицательных слагаемых так, чтобы сумма квадратов этих чисел была наименьшей.

89) Найти такое положительное число, чтобы разность между этим утроенным числом и его кубом была наибольшей.

90) Площадь прямоугольника 64 см^2. Какую длину должны иметь его стороны, чтобы периметр был наименьшим?

91) Требуется вырыть силосную яму объемом 32м^3, имеющую квадратное дно, так, чтобы на облицовку ее дна и стен пошло наименьшее количество материала. Каковы должны быть размеры ямы?

92) Из круглого бревна вырезают балку с прямоугольным сечением наибольшей площади. Найдите размеры сечения балки, если радиус сечения бревна равен 20см.

93) Открытый бак, имеющий форму прямоугольного параллелепипеда с квадратным основанием, должен вмещать 13,5 л жидкости. При каких размерах бака на его изготовление потребуется наименьшее количество металла?

Дифференциалы высших порядков.

Напомним, что дифференциал функции $f(x)$ (называемый также *первым дифференциалом*, или *дифференциалом первого порядка*) задаётся формулой

$$df(x;dx) = f'(x)dx.$$

Рассмотрим это выражение (при фиксированном приращении dx аргумента x) как функцию переменного x и найдём её дифференциал $d(df(x;dx)) = d^2f(x;dx)$:

$$d^2f(x;dx) = (f'(x)dx)'dx = f''(x)(dx)^2.$$

Этот дифференциал от первого дифференциала называется *вторым дифференциалом* от функции $f(x)$, или *дифференциалом второго порядка*. Аналогично, дифференциал от второго дифференциала называется *третьим дифференциалом*; он задаётся формулой

$$d^3f(x;dx) = (f''(x)(dx)^2)'dx = f'''(x)(dx)^3.$$

Вообще, n*-й дифференциал* $d^nf(x;dx)$, или *дифференциал* n*-го порядка*, определяется как дифференциал от $(n-1)$-го дифференциала (при постоянном приращении dx); для него имеет место формула:

$$d^n f(x; dx) = f^{(n)}(x)(dx)^n.$$

Примеры.

1. Найти значение производной функции

$y = \sin(4x - \frac{\pi}{6})$ в точке $x_0 = \frac{\pi}{12}$

Решение.

Найдем производную данной функции по правилу дифференцирования сложной функции:

$$y' = \left(\sin\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)\right)' = \left(4x - \frac{\pi}{6}\right)' \cdot \cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\left(4x - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$y'\left(\frac{\pi}{12}\right) = 4\cos\left(4 \cdot \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{6}\right) = 4\cos\frac{\pi}{6} = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 2\sqrt{3}$$

Ответ: $2\sqrt{3}$.

Примеры.

1. Если $y = 3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$, то $y' = (3 \cdot \frac{1}{\sqrt{x}})' = 3(x^{-1/2})' = -\frac{3}{2}x^{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2x\sqrt{x}}.$

2. $y = x^3 - 3x^2 + 5x + 2$. Найдем $y'(-1)$.

$y' = 3x^2 - 6x + 5$. Следовательно, $y'(-1) = 14$.

3. $y = \ln x \cdot \cos x$, то $y' = (\ln x)' \cos x + \ln x (\cos x)' = 1/x \cdot \cos x - \ln x \cdot \sin x$.

4. $y = \frac{x^3}{\cos x}, \quad y' = \frac{(x^3)' \cos x - x^3(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{3x^2 \cos x + x^3 \sin x}{\cos^2 x}.$

$$y = tgx,$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x(\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

1. Найдите производную следующих функций:

а) $y = x^2 + 4x + 3;$

б) $y = \frac{6}{x} + 2\sqrt{x};$

в) $y = \frac{x^6 - 4x + 1}{x};$

г) $y = \frac{3x-4}{3};$

д) $y = \frac{3x-4}{7-2x};$

е) $y = 3sin2x;$

ж) $y = \sqrt{x^2 - 4x;}$

з) $y = (3 + 2x)(2x - 3), y'(0,25)-?$

2. Найдите производную и дифференциал второго порядка заданных функций:

а) $y = x^3$;

б) $y = cos^2 x;$

в) $y = \ln(3x^2 - 2x + 5)$.

Общая схема исследования функции и построения её графика.

1. Находят область определения функции;
2. Проверяют функцию на четность и нечетность (заметим, что графики четных функций симметричны относительно оси (ОУ), а нечетных – относительно начала координат); проверяют функцию на периодичность;
3. Находят точки пересечения графика с координатными осями (ось ОХ имеет уравнение $y = 0$, ось ОУ имеет уравнение $x = 0$);
4. Находят асимптоты графика функции;
5. Исследуют функцию на монотонность и находят точки экстремума;
6. Находят интервалы выпуклости графика функции и точки его перегиба;
7. Строят график.

Для применения данной схемы, вспомним некоторые основные понятия и определения. Прямая $y = kx + b$ называется ***наклонной асимптотой*** для графика функции $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$ (1)

Числа k и b в уравнении асимптоты находятся из условий:

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \qquad b = \lim_{x\to\infty}(f(x) - kx) \qquad (2)$$

Если $k = 0$, то прямая $y=b$ называется ***горизонтальной асимптотой***.

Прямая $x = a$ называется ***вертикальной асимптотой*** графика функции $y = f(x)$, если

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \infty \quad \textit{или} \quad \lim_{x\to a+0} f(x) = \infty .$$

Заметим, что при нахождении вертикальных асимптот графика функции $y = f(x)$ в качестве точки a, через которую может проходить вертикальная асимптота, следует рассматривать точку разрыва данной функции.

Правило нахождения интервалов монотонности и точек экстремума:

1. Найти область определения функции.
2. Вычислить производную функции $f'(x)$;
3. Найти критические точки функции, т.е. точки в которых $f'(x) = 0$ или не существует;
4. Исследовать знак производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции этими критическими точками;
5. Если в рассматриваемом интервале

$f'(x) \pi 0$, то на этом интервале функция убывает;

$f'(x) \phi 0$, то на этом интервале функция возрастает.

6. Если x_0 - критическая точка и при переходе через нее $f'(x)$ меняет знак с «+» на « - », то x_0 - точка максимума; если же она меняет знак с « - » на «+», то x_0 - точка минимума.

Правило нахождения интервалов выпуклости графика функции и точек перегиба:

1. Вычислить вторую производную функции $f''(x)$;
2. Найти у функции критические точки 2-го рода, т.е. точки в которых $f''(x) = 0$ или не существует;
3. Исследовать знак второй производной функции в интервалах, на которые разбивается область определения функции критическими точками 2-го рода;
4. Если в рассматриваемом интервале

$f''(x) \pi 0$, то на этом интервале график функции выпуклый вверх;

$f''(x) \phi 0$, то на этом интервале график функции выпуклый вниз;

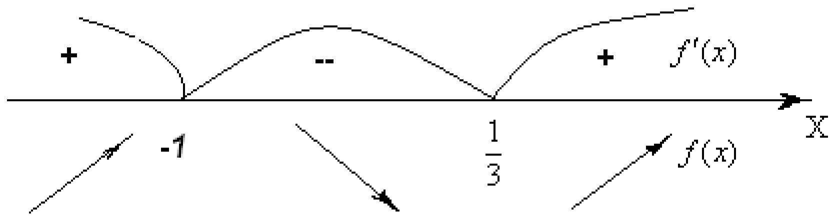
5. Если x_0 - критическая точка 2-го рода и при переходе через нее $f''(x)$ меняет знак, то x_0 - точка перегиба.

Пример 1: Исследовать функцию $y = x^3 + x^2 - x - 1$ и построить ее график.

Решение: исследуем функцию по схеме:

1. D(y)=R;
2. $y(-x) = (-x)^3 + (-x)^2 - (-x) - 1 = -x^3 + x^2 + x - 1 = -(x^3 - x^2 - x + 1)$ - функция не будет ни четной, ни нечетной; функция непериодическая;
3. Найдем точки пересечения с (ОХ): $x^3 + x^2 - x - 1 = 0$. Перебирая делители свободного члена, находим целые нули функции: $x = -1 \quad и \quad x = 1$.

   Найдем точки пересечения графика функции с осью (ОУ): если $x = 0$, то $y = -1$;
4. Асимптот нет;
5. Для нахождения интервалов монотонности функции найдем ее производную: $y' = 3x^2 + 2x - 1$. Найдем критические точки функции: $y' = 3x^2 + 2x - 1 = 0$. Получим: $x_1 = -1 \quad и \quad x_2 = \frac{1}{3}$. Найдем интервалы возрастания и убывания функции:



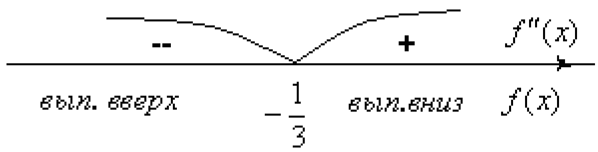
Из чертежа имеем, что функция возрастает на $(-\infty;-1)\ и\ (\frac{1}{3};+\infty)$, убывает на $(-1;\frac{1}{3})$. Найдем экстремумы функции:

$\max f(x) = f(-1) = 0$. Значит, точка максимума имеет координаты $(-1;\ 0)$

$\min f(x) = f(\frac{1}{3}) = -1\frac{5}{27}$. Значит, точка минимума имеет координаты $(\frac{1}{3};-1\frac{5}{27})$

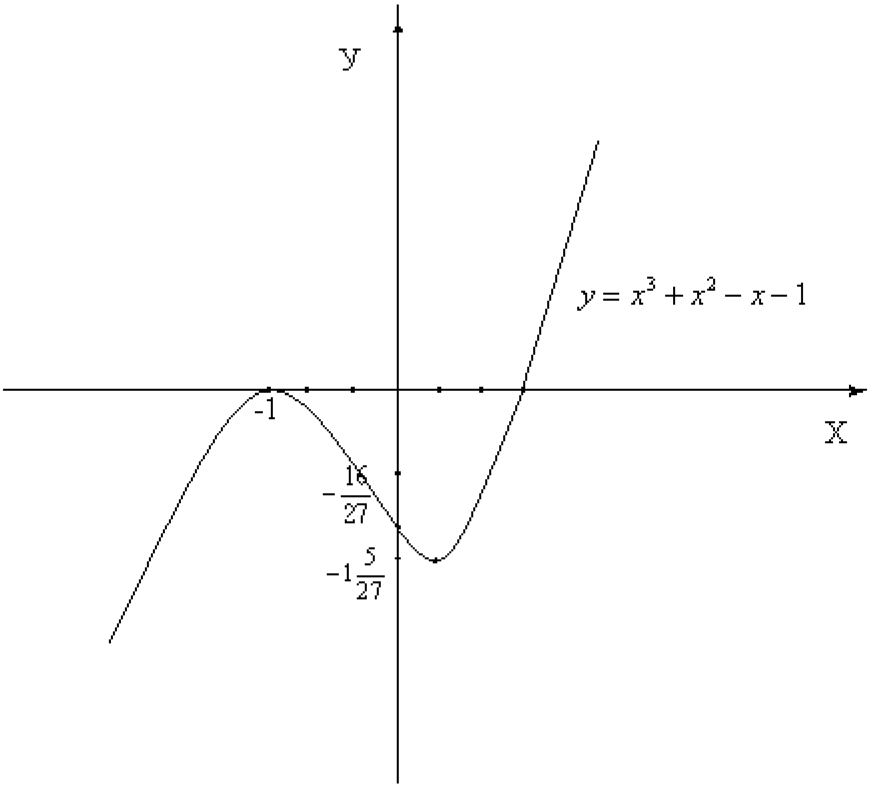
6. Для нахождения интервалов выпуклости графика функции вычислим вторую производную: $y'' = 6x + 2$. Найдем критические точки 2 рода функции:

$6x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$. Определим знак второй производной в интервалах, на которые разбивается область определения



Значит, график функции будет выпуклым вверх на $(-\infty;-\frac{1}{3})$ и выпуклым вниз на $(-\frac{1}{3};+\infty)$. Т.к. вторая производная меняет знак при переходе через точку $x=-\frac{1}{3}$, то в ней график будет иметь перегиб. Вычислим: $f(-\frac{1}{3})=-\frac{16}{27}$. Значит, точка перегиба $(-\frac{1}{3};-\frac{16}{27})$.

7. Построим график:



Пример 2. Построить график функции $y=\dfrac{x^2+1}{x^2-1}$

Решение:

1. Найдем область определения функции. Она задается условиями x ≠ 1, x ≠ -1 (при значениях x ≠ 1, x ≠ -1 знаменатель дроби обращается в нуль). Итак,

D(*f*)=(-∞;1)(-1:1)(1;+∞).

2. Исследуем функцию на честность:

$$f(-x)=\frac{(-x)^2+1}{(-x)^2-1}=\frac{x^2+1}{x^2-1}=f(\text{x})$$

Значит, заданная функция четна, ее график симметричен относительно оси ординат, а потому можно для начала ограничиться построением ветвей графика при x ≥ 0.

3. Точек пересечения графика функции с осью ОХ нет,

Найдем точки пересечения графика функции с осью ОУ: если $x=0 \quad то\ y=-1$

20

4. Найдем асимптоты графика. Вертикальной асимптотой является прямая x = 1, поскольку при этом значении x знаменатель дроби обращается в нуль, а числитель отличен от нуля. Для отыскания горизонтальной асимптоты надо вычислить $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x^2-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x^2}{x^2}+\frac{1}{x^2}}{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^2}}{1-\frac{1}{x^2}}=1.$$

Значит, y = 1 – горизонтальная асимптота графика функции.

5. Найдем критические точки, точки экстремума и промежутки монотонности функции:

$$\text{y}'\left(\frac{x^2+1}{x^2-1}\right)'=\frac{\left(x^2+1\right)'\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2+1\right)\cdot\left(x^2-1\right)'}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{2x\cdot\left(x^2-1\right)-\left(x^2-1\right)\cdot 2x}{\left(x^2-1\right)^2}=\frac{-4x}{\left(x^2-1\right)^2}.$$

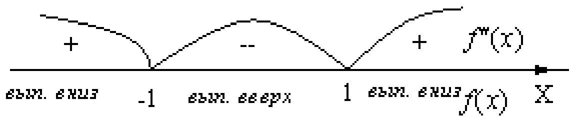
Критические точки найдем из соотношения $y'=0$. Получаем $-4x=0$, откуда находим, что $x=0$. При x < 0 имеем y′> 0, а при x > 0 имеем y′< 0. Значит, x = 0 – точка максимума функции, причем $y_{max}=f(0)=\frac{0^2+1}{0^2-1}=-1$.

При x > 0 имеем y′< 0, но следует учесть наличие точки разрыва x = 1. Значит, вывод о промежутках монотонности будет выглядеть так: на промежутке [0;1) функция убывает, на промежутке (1;+∞) функция также убывает.

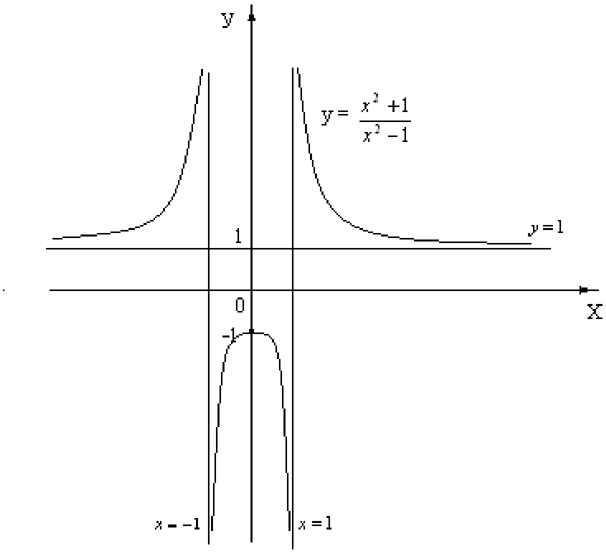
6. Вычислим вторую производную

$$f''(x)=\left(\frac{-4x}{(x^2-1)^2}\right)'=\frac{-4(x^2-1)^2+4x\cdot 2(x^2-1)\cdot 2x}{(x^2-1)^4}=\frac{-4(x^2-1)+16x^2}{(x^2-1)^3}=\frac{12x^2+4}{(x^2-1)^3}$$

$f''(x)$ нигде не обращается в ноль, критическими точками будут только точки $x=\pm 1$. Определим знак $f''(x)$ в интервалах:



7. Отметим (0;-1) – точку максимума, построим прямые y = 1 – горизонтальную асимптоту, что x = 1 и x = - 1– вертикальные асимптоты,



1. Найти промежутки монотонности функции $y = e^x - x$.
2. Исследовать на экстремум функцию $y = x^3 - 6x^2$+9x+3.
3. Найти наибольшее и наименьшее значение функции $y = 2x^3 - 15x^2 + 24x + 3$ на промежутке $[2; 3]$.
4. Найти промежутки выпуклости и точки перегиба функции $y = \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + 8x - 4$.
5. Исследуйте и постройте график данной функции $y = x^3 - x^2 - x + 3$.

Контрольные вопросы по теме.

1. Что называется приращением независимой переменной и приращением функции?
2. Дайте определение непрерывной функции. Какими свойствами на отрезке она обладает?
3. Что характеризует скорость изменения функции относительно изменения аргумента? Дайте определение производной.

4. Какая функция называется дифференцируемой в точке и на отрезке? Сформулируйте зависимость между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
5. Из каких операций складывается общее правило нахождения производной данной функции? Как вычислить частное значение производной?
6. Можно ли вычислить производную любой функции, пользуясь определением производной?
7. Выпишите в таблицу основные правила и формулы дифференцирования функций.
8. Повторите определение сложной функции. Как найти ее производную?
9. Каков геометрический смысл производной? Как геометрически определить значение производной в точке?
10. В чем заключается механический смысл производной?
11. Что называется производной второго порядка и, каков ее механический смысл?
12. Что называется дифференциалом функции, чему он равен, как обозначается и каков его геометрический смысл?
13. Повторите определения возрастающей и убывающей функций. В чем заключается признак возрастания и убывания функций?
14. В чем заключаются необходимый и достаточный признаки существования экстремума? Перечислите порядок операций для отыскания максимума и минимума функции с помощью первой производной.
15. В чем различие между нахождением максимума и минимума функции и нахождением ее наибольшего и наименьшего значений?
16. Как пишется наибольшее и наименьшее значения функции на данном отрезке?
17. Как определяются геометрически и по знаку второй производной выпуклость и вогнутость кривой?
18. Что называется точкой перегиба и каковы необходимый и достаточный признаки ее существования? Сформулируйте правило нахождения точки перегиба.
19. Какой схемой рекомендуется пользоваться при построении графика функции?

Тема 4.3. Неопределенный интеграл (4 часа)

Понятие первообразной функции

Это понятие возникает из следующей задачи математического анализа: по данной функции $f(x)$ найти такую функцию $F(x)$, производная которой равна функции $f(x)$.

Первообразная функция для функции $y = f(x)$ называется такая функция $F(x)$, что имеет место равенство

$$F'(x) = f(x).$$

Неопределенный интеграл функции $y = f(x)$ - это совокупность всех первообразных функций $F(x) + C$ для функции $f(x)$.

Обозначается символом

$$\int f(x)dx = F(x) + C,$$

где $\int$ – *знак интеграла* (это стилизованная латинская букваS,означающаясуммирование);

$f(x)$ - *подынтегральная функция*;

$f(x)dx$ – *подынтегральное выражение*;

С – *постоянная интегрирования*, способная принимать любое значение;

x - *переменная интегрирования*.

Интегрирование ***-это отыскание первообразной по ее производной.Это действие,обратное дифференцированию.***

Геометрический смысл неопределенного интеграла–это семействокривых, зависящих от одного параметра, которые получаются путем параллельного сдвига вдоль оси Oy .

Основные свойства неопределенного интеграла (правила интегрирования)

1. $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x);$
2. $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)dx;$
3. $\int dF(x) = F(x) + C;$

4. $\int kf(x)dx = k\int f(x)dx,$ где k – постоянная;

$$\int [f(x) \pm g(x)]dx = \int f(x)dx \pm \int g(x)dx.$$

Основные способы интегрирования

1.Метод непосредственного интегрирования,который заключается в

использовании основных свойств неопределенного интеграла и приведении подынтегрального выражения к табличному виду.

Формулы интегрирования:

1. $\int dx = x + C$
2. $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + C; \quad n \neq -1$
3. $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$
4. $\int e^x dx = e^x + C$
5. $\int a^x dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$
6. $\int \sin x dx = -\cos x + C$
7. $\int \cos x dx = \sin x + C$
8. $\int tgx dx = -\ln|\cos x| + C$
9. $\int ctgx dx = \ln|\sin x| + C$
10. $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = tgx + C$
11. $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -ctgx + C$
12. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x} + C$
13. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C = -\arccos x + C$
14. $\int \dfrac{dx}{1+x^2} = arctgx + C = arcctgx + C$
15. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \dfrac{x}{a} + C = -\arccos \dfrac{x}{a} + C$
16. $\int \dfrac{dx}{x^2 - a^2} = \dfrac{1}{2a} \ln\left|\dfrac{x-a}{x+a}\right| + C$
17. $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2 \pm a^2}\right| + C$

Задача: Найти неопределенные интегралы:

$$a)\int 5x^7dx=5\int x^7dx=5\cdot\frac{x^8}{8}+C.$$

Метод подстановки или метод замены переменной.

Этот метод является одним из наиболее эффективных и распространенных приемов интегрирования, позволяющих во многих случаях упростить вычисление интеграла.

Пусть функция $y=f(x)$ непрерывна на отрезке $[a,b]$. Положим $x=\varphi(t)$, где функция $\varphi(t)$ дифференцируемая на отрезке $[\alpha,\beta]$ и $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$. Тогда имеет место следующая формула: $\boxed{\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt}$.

Задача. Найти неопределенные интегралы методом подстановки:

$$a)\int\cos 3xdx=\begin{cases}3x=t, & x=\dfrac{t}{3}\\ dx=x'dt=\left(\dfrac{t}{3}\right)'dt=\dfrac{1}{3}dt\end{cases}=\int\frac{1}{3}\cos tdt=\frac{1}{3}\sin t+C=\frac{1}{3}\sin 3x+C.$$

$$б)\int\frac{6}{(3x-1)^3}dx=\begin{cases}3x-1=t, & x=\dfrac{t+1}{3}\\ dx=x'dt=\left(\dfrac{t+1}{3}\right)'dt=\dfrac{1}{3}dt\end{cases}=\int\frac{6}{t^3}\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{6}{3}\cdot\frac{t^{-2}}{-2}+C=-\frac{1}{t^2}+C=-\frac{1}{(3x-1)^2}+C.$$

$$в)\int\frac{xdx}{x^2+1}=\frac{1}{2}\int\frac{d\left(x^2+1\right)}{x^2+1}=\frac{1}{2}\ln\left|x^2+1\right|+C.$$

Замечание: Этот пример допускает следующий общий вывод:

$$\boxed{\int\frac{f'(x)}{f(x)}dx=\ln|f(x)|+C}\text{ или }\boxed{\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C}$$

Метод интегрирования по частям.

Пусть функции $u=u(x)$ и $v=v(x)$ определены и непрерывно дифференцируемые функции, то справедлива формула интегрирования по частям:

$$\boxed{\int udv=uv-\int vdu}$$

Чаще всего формула применяется к интегралам вида:

1. $\int P(x)\cdot e^{\alpha x}dx$, $\int P(x)\cdot\sin\alpha xdx$, $\int P(x)\cdot\cos\alpha xdx$, где $P(x)$ - многочлен, $\alpha\neq 0$.

   В этих интегралах $u=P(x)$, $dv=e^{\alpha x}dx$, $dv=\sin\alpha xdx$, $dv=\cos\alpha xdx$.

2. $\int R(x)\cdot\ln xdx$, $\int R(x)\cdot arctg\alpha xdx$, $\int R(x)\cdot arcctg\alpha xdx$, где $R(x)$ - рациональная функция, $\alpha\neq 0$. В этих интегралах $dv=R(x)dx$, $u=\ln x$, $u=arctg\alpha xdx$, $u=arcctg\alpha xdx$.

Задача. Найти неопределенные интегралы методом интегрирования по частям:

а) $$\int x\cdot\cos xdx = \begin{cases} u = x, & dv = \cos xdx \\ du = x'dx = dx & v = \int dv = \int \cos xdx = \sin x \end{cases} =$$

$$= x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C.$$

б) $$\int \ln xdx = \begin{cases} u = \ln x, & dv = dx \\ du = (\ln x)' dx = \dfrac{dx}{x} & v = \int dv = \int dx = x \end{cases} =$$

$$= x\ln x - \int x\frac{dx}{x} = x\ln x - x + C.$$

3. Содержание работы

Вариант 1.

1. вычислите интегралы методом замены

1) $\int \frac{e^x dx}{(e^x+1)^3}$

2) $\int \frac{z^2 dz}{1+z^3}$

3) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}} dx}{x^2}$

4) $\int x cos(x^2+1)\, dx$

5) $\int \frac{e^{\varphi} d\varphi}{\sqrt{1-e^{2\varphi}}}$

6) $\int \frac{e^x dx}{1+e^{2x}}$

2. вычислите интегралы методом интегрирования по частям

1) $\int \arcsin x \, dx$

2) $\int e^x \cos x \, dx$

3.найдите интеграл

$$\int \frac{x^2 + x\sqrt[3]{x} + \sqrt{x}}{x\sqrt{x}} dx$$

Контрольные вопросы:

1. Первообразная.
2. Теорема о первообразных.
3. Неопределенный интеграл.
4. Простейшие свойства неопределенного интеграла.
5. Таблица неопределенных интегралов.
6. Метод непосредственного интегрирования.
7. Интегрирование подстановкой и по частям в неопределенном интеграле.

Тема 4.4. Определенный интеграл (4 часа)

*Определение:*Определенный интеграл – это общий предел всех интегральных сумм функции $f(x)$ на отрезке $[a,b]$.

Интегральная сумма $S = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где ξ_i - произвольная точка существующего отрезка.

Обозначение: $\int_a^b f(x)dx = \lim_{\Delta x \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$, где $f(x)$ - подынтегральная функция,

x - переменная интегрирования.

*Теорема:*Если $F(x)$ - первообразная функция для непрерывной функции $y = f(x)$, т.е. $F(x)' = f(x)$. То имеет место формула: $\boxed{\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$

Определение: Определенный интеграл – это разность значений любой первообразной функции для $y = f(x)$ при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Задача: Вычислить:

$$а)\ \int_2^3 3x^2 dx = 3\int_2^3 x^2 dx = x^3\Big|_2^3 = 3^3 - 2^3 = 19$$

$$б)\ \int_0^{\pi} \sin x dx = -\cos x\Big|_0^{\pi} = -\cos\pi + \cos 0 = 2$$

Основные свойства определенного интеграла:

1. При перестановке пределов изменяется знак интеграла:

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx.$$

2. Интеграл с одинаковыми пределами равен нулю:

$$\int_a^a f(x)dx = 0.$$

3.Отрезок интегрирования можно разбить на части:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \text{ (свойство аддитивности).}$$

4. Определенный интеграл от алгебраической суммы функций равен алгебраической сумме их определенных интегралов:

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx.$$

5. Постоянный множитель можно выносить за знак определенного интеграла:

$$\int_a^b C \cdot f(x)dx = C\int_a^b f(x)dx.$$

6. Если функция $f(x) \geq 0$ всегда на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

7. Если $f(x) \leq g(x)$ всюду на отрезке $[a,b]$, то

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Задача: Вычислить:

а) $\int_0^3 (3x - x^2)dx = 3\int_0^3 x dx - \int_0^3 x^2 dx = 3 \cdot \frac{x^2}{2}\Big|_0^3 - \frac{x^3}{3}\Big|_0^3 = \frac{27}{2} - 9 = 4{,}5$.

Основные способы вычисления определенного интеграла:

1. Формула Ньютона-Лейбница.
2. Метод подстановки или замена переменной.
3. Интегрирование по частям.

Задача. Вычислить:

а) $\int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{4x^3+2}{x^2}dx$. На отрезке $\left[-4, -\frac{1}{2}\right]$ подынтегральная функция непрерывна, следовательно, интегрируема.

$$\int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{4x^3+2}{x^2}dx = \int_{-4}^{-\frac{1}{2}} 4x dx + \int_{-4}^{-\frac{1}{2}} \frac{2dx}{x^2} = \left(2x^2 - \frac{2}{x}\right)\Big|_{-4}^{-\frac{1}{2}} = -28 .$$

б) $\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}}$. Вводим новую переменную интегрирования, полагая $\sqrt{1+3x} = t$. Отсюда находим новые пределы интегрирования: $t_1 = 1$ при $a = 0$ и $t_2 = 4$ при $b = 5$. Подставляя, получим:

$$\int_0^5 \frac{xdx}{\sqrt{1+3x}} = \left\{\begin{array}{l} \sqrt{1+3x} = t, \\ 1+3x = t^2, \\ x = \dfrac{t^2-1}{3}, \\ dx = \dfrac{2t}{3}dt \end{array}\right. = \int_1^4 \frac{(t^2-1)\cdot 2tdt}{3\cdot t\cdot 3} = \frac{2}{9}\int_1^4 (t^2-1)dt = \frac{2}{9}\cdot\frac{t^3}{3}\Big|_1^4 - \frac{2}{9}\cdot t\Big|_1^4 = 4 .$$

в) Интегрируем по частям.

$$\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \arccos 2x dx = \left\{\begin{array}{l} u = \arccos 2x, \\ du = -\dfrac{2dx}{\sqrt{1-4x^2}}, \\ dv = dx, \\ v = x \end{array}\right. = \left[\int_a^b u dv = uv\Big|_a^b - \int_a^b v du\right] = (x \cdot \arccos 2x)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} + 2\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{xdx}{\sqrt{1-4x^2}} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\arccos 1 + \frac{1}{2}\arccos(-1)\right) - \frac{1}{4}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{d(1-4x^2)}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{0}{2} + \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\left(\sqrt{1-4x^2}\right)\Big|_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}(0-0) = \frac{\pi}{2}$$

Вычислите:

1. $\int\limits_2^3 x^3 dx$ 2. $\int\limits_1^{10} \frac{dx}{x^2}$

3. $\int\limits_0^3 \left(x^2+4x-1\right)dx$ 4. $\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \left(\frac{2}{x^3}+8\right)dx$

5. $\int\limits_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{3}} \frac{dx}{\sin^2 x}$ 6. $\int\limits_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$

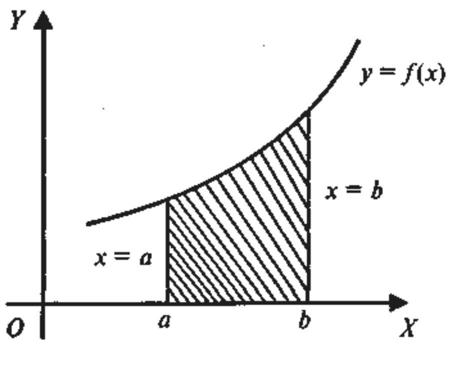
7. $\int\limits_1^2 (1-x)^3 dx$ 8. $\int\limits_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\frac{x}{2}dx$

9. $\int\limits_0^3 \left(\frac{2}{\sqrt{x+1}}+3x^2\right)dx$ 10. $\int\limits_0^4 e^{0,5x-1}dx$

Геометрический смысл определённого интеграла

Площадь фигуры, ограниченной кривой $y = f(x)$, где $f(x) > 0$, осью *OX* и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$ (рис. 1), выражается определённым интегралом:

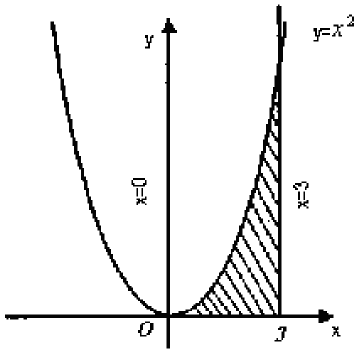
$$S = \int\limits_a^в f(x)dx$$



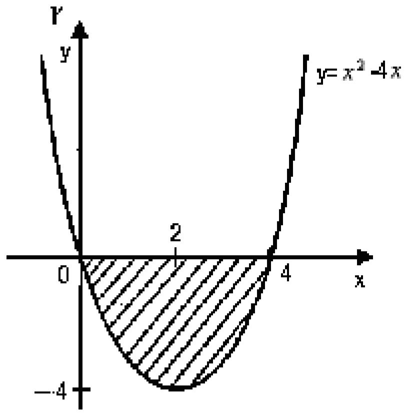
Примеры:

1. Определить площадь S фигуры, заключённой между ветвью кривой $y = x^2$, осью OX и прямыми $x = 0$, $x = 3$ (рис.2).

Решение: $S = \int\limits_0^3 x^2 dx = \left.\dfrac{x^3}{3}\right| = 9(\text{кв.ед.})$



2) Найти площадь S фигуры, заключённой между осью OX и кривой $y = x^2 - 4x$(рис.3)



36

Решение: рассмотрим точки пересечения кривой $y = x^2 - 4x$ с осью OX:

$y = 0$; $\Leftrightarrow x^2 - 4x = 0 \Leftrightarrow x(x-4) = 0$; $\Leftrightarrow x_1 = 0$ или $x_2 = 4$.

Найдём производную функции $y' = 2x - 4$, и точки экстремума:

$y' = 0 \Leftrightarrow 2x - 4 = 0$; $\Leftrightarrow x = 2$; $y'' = 2 > 0$; $\Leftrightarrow x = 2$ – точка min; $y(2) = -4$.

Искомая площадь ограничена сверху осью OX, снизу графиком функции $y = x^2 - 4x$, слева прямой $x = 0$, справа прямой $x = 4$. Так как на отрезке $[0;4]$ $y < 0$, то

$$S = \left|\int\limits_0^4 (x^2 - 4x)dx\right| = \left|\left.\left(\frac{x^3}{3} - 2x^2\right)\right|_0^4\right| = \left|\frac{64}{3} - 32\right| = \left|21\frac{1}{2} - 32\right| = \left|-10\frac{2}{3}\right| = 10\frac{2}{3}\,(\text{кв.ед.})$$

3) Найти площадь фигуры, заключённой между линиями $y = x^3$, $x = -1$. $x = 2$ и осью OX

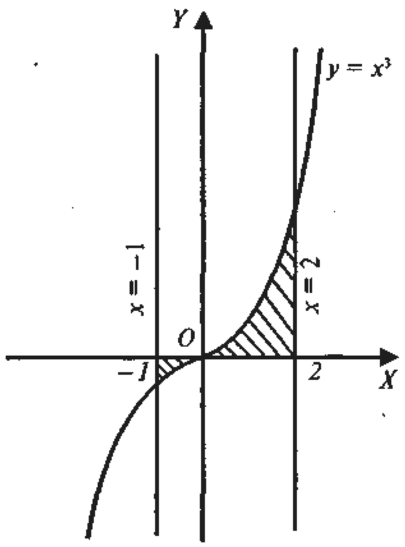


рис.4

Решение: найдем точки пересечения графика функции $y = x^3$ с осью OX(см. рис 4): $y = x^3; y = 0 \Leftrightarrow x = 0;$ Вычислим производную функции: $y' = 3x^2;$ $y' = 0 \Leftrightarrow x = 0.$ Найдем значение второй производной в точке $x=0$: $y'' = 6x;$ $y''(0) = 0.$ Вычислим $y''(-1) = -=6;$ $y''(1) = 6;$ $\Leftrightarrow$ Т.к. y'' меняет знак при переходе через $x = 0 \Leftrightarrow$ т. $(0;0)$ – точка перегиба. Искомая площадь состоит из двух частей, поэтому:

$$S = \int_0^2 x^3 dx + \left|\int_{-1}^0 x^3 dx + \right| = \left.\frac{x^4}{4}\right|_0^2 + \left|\left.\frac{x^4}{4}\right|_{-1}^0\right| = 4 + \left|0 - \frac{1}{4}\right| = 4\frac{1}{4} \text{ (кв.ед.)}$$

Вычислите площадь фигуры, ограниченной линиями. Выполните рисунок.

1. $y = -x^2 + 4; y = 0.$
2. $y = sinx; x = 0; y = 0.$
3. $y = x^2; y = 9.$

Контрольные вопросы:

1. Что такое определенный интеграл?
2. Что в записи $\int_a^b f(x)$ означают: а) числа a и b; б) x; в) $f(x)$; г) $f(x)dx$?
3. Зависит ли приращение $F(b) - F(a)$ от выбора первообразной?
4. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
5. В чем состоит геометрический смысл определенного интеграла?
6. Перечислите все пять случаев применения определенного интеграла к вычислению площадей плоских фигур.

7. Может ли площадь криволинейной трапеции быть равна отрицательной величине, нулю и почему?

8. Приведите примеры физических и технических задач, которые можно решить с помощью определенного интеграла.

Тема 4.5. Дифференциальные уравнения (4 часа)

Определение: дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

Обозначение: $F(x, y, y') = 0, F(x, y, y'') = 0, F\left(x, y, y', y'', .., y^{(n)}\right) = 0.$

Определение: дифференциальным уравнением называется обыкновенным, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Определение: порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Определение: решением (или интегралом) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Определение: общим решением (или общим интегралом) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения.

Замечание: общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Определение: частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. *Замечание:* значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

Определение: дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Определение: дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y)$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx$$

Далее проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx$$

Задача. Найти общее решение уравнения $x(1+y^2)dx = ydy$.

Решение. Разделив переменные, имеем

$$xdx = \frac{ydy}{1+y^2}$$

Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int xdx = \int \frac{ydy}{1+y^2}; \ \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \frac{1}{2}\ln C$$

Так как произвольная постоянная C может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований вместо C мы написали $\frac{1}{2}\ln C$. Потенцируя последнее равенство, получим $x^2 = \ln[C(1+y^2)]$. Это и есть общее решение данного уравнения.

Задача. Найти частное решение уравнения $s\, tgt\, dt + ds = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $s = 4$при $t = \frac{\pi}{3}$.

Решение. Разделив переменные, имеем $tgt\, dt + \frac{ds}{s} = 0$.

Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int tgtdt + \int \frac{ds}{s} = \ln C; \ -\ln cost + \ln s = \ln C$$

или $\ln s = \ln C + \ln cost, \quad s = Ccost$

Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной C подставим значения $t = {}^{\pi}/_{3}$и $s = 4$в выражение для общего решения:

$$4 = Ccos\left(\frac{\tilde{\pi}}{3}\right), \text{или } 4 = {}^{C}/_{2}, \text{откуда } C = 8$$

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеем вид $s = 8cost$.

1. Найти общие решения уравнений

1)$xydx = (1+x^2)dy$

2) $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$

3) $(1+y^2)dx - \sqrt{x}dy = 0$

2. найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям

1) $\frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y^2}$; $y = 2$ при $x = 0$

2) $(1 + y)dx = (1 - x)dy$; $\quad y = 3$ при $x = -2$

3. Составить уравнение кривой, проходящей через точку $M(2; -1)$ и имеющей касательную с угловым коэффициентом $k = {}^{1}/_{2y}$.

Однородные уравнения

Определение однородного дифференциального уравнения

Дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

называется *однородным*, если правая часть удовлетворяет соотношению

$$f(tx, ty) = f(x, y)$$

для всех значений *t*. Другими словами, правая часть должна являться однородной функцией нулевого порядка по отношению к переменным *x* и *y*:

$$f(tx, ty) = t^0 f(x, y) = f(x, y).$$

Однородное дифференциальное уравнение можно также записать в виде

$$y' = f\left(\frac{x}{y}\right),$$

или через дифференциалы:

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0,$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ − однородные функции одинакового порядка.

Линейные дифференциальные уравнения первого порядка

Определение линейного уравнения первого порядка

Дифференциальное уравнение вида

$$y' + a(x)y = f(x),$$

где $a(x)$ и $b(x)$ − непрерывные функции *x*, называется *линейным неоднородным дифференциальным уравнением первого порядка*.

Решите дифференциальные уравнения:

1. $\frac{dy}{dx} = \frac{dx}{x-1}$;
2. $y' = x,$ если $y = 0$ при $x = 2$;

3. $(1+x^3)dy = 3x^2ydx.$

Контрольные вопросы:

1) Какие уравнения называются дифференциальными?
2) Что называют решением дифференциального уравнения?
3) Как определить порядок дифференциального уравнения?
4) Какие решения дифференциального уравнения называются общими, а какие частными?
5) Что называют дифференциальным уравнением первого порядка?
6) Что называютдифференциальным уравнением с разделяющимися переменными?
7) Однородные и неоднородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Раздел 6. Основы теории вероятностей и математической статистики

Тема 6.1. Элементы теории вероятностей (6 часов)

<u>Основные понятия:</u>

Комбинаторика (перестановки, сочетания, размещения). Выборки элементов.

События и их классификация.

Классическое и статистическое определения вероятности случайного события.

Сумма и произведение событий. Вероятность независимых событий.

Комбинаторные уравнения и неравенства:

1) $A_n^3 - 5C_{15}^3 = 455$ 2) $A_5^3 + 5C_n^{15} = 165$ 3) $P_5 - 3A_n^2 = 30$ 4) $A_n^3 - C_n^3 = 10C_{n-1}^3$

5) $3C_{2n}^{n-1} = 5C_{2n-1}^n$ 6) $C_n^{n-2} + C_n^{n-1} = 55$ 7) $\dfrac{C_{2n}^{n-1}}{C_{2n+1}^{n-1}} = \dfrac{7}{13}$ 8) $\dfrac{C_{2n+1}^{n-1}}{C_{2n}^{n+1}} = \dfrac{13}{7}$ 9) $\dfrac{C_{2n-1}^{n}}{C_{2n}^{n-1}} = \dfrac{9}{17}$

10) $C_n^3 = \dfrac{1}{5}C_{n+2}^4$ 11) $\dfrac{C_{2n-1}^{n}}{C_{2n}^{n-1}} = \dfrac{9}{17}$ 12) $\dfrac{C_{2n}^{n-1}}{C_{2n-1}^{n}} = \dfrac{17}{9}$ 13) $\dfrac{P_{2n-1}}{P_{2n}} = \dfrac{P_{n-2}}{2P_n}$

14) $\dfrac{P_{2n}}{P_{2n-1}} = \dfrac{2P_n}{2P_{n-2}}$ 15) $\dfrac{A_n^7}{C_{15}^5} = 1920$ 16) $C_{n-1}^{19} < C_n^{19}$ 17) $C_{n-2}^{15} > C_n^{15}$ 18) $C_n^{n-1} < C_{2n}^{n+1}$

19) $C_n^k < C_n^{k+1}$ 20) $C_{2n}^7 > C_{2n}^5$ 21) $P_n > C_{10}^2$ 22) $A_n^5 = 18A_{n-2}^4$ 23) $A_n^6 = 28A_{n-2}^5$

24) $A_{n+1}^3 P_{n-2} = 30P_n$; 25) $2C_{n+2}^{n-2} = A_n^2$; 26) $4C_{n+4}^{n-1} = 3A_{n+2}^3$; 27) $2C_{n+5}^2 - 15C_n^1 = 75$

Комбинаторные задачи

1) В карточке спортлото 36 клеток. Играющий должен отметить 6. Каково число всех возможных вариантов?

2) Сколькими способами можно выбрать четырех человек на 4 различные должности из 15 кандидатов на эти должности?

3) В группе 28 студентов. Сколькими способами можно избрать 6 делегатов на профсоюзную конференцию?

4) Правление фирмы выбирает трех человек на различные должности из 10 кандидатов. Сколькими способами это можно сделать?

5) Сколькими способами можно выбрать 6 пирожных в кондитерской, где есть 4 разных сорта пирожных?

6) Из 20 милиционеров необходимо составить наряд из 6 человек.. Сколькими способами это можно сделать?

7) Сколько прямых можно провести через 8 точек, никакие три из которых не лежат на одной прямой?

8) Сколько различных правильных дробей можно составить из чисел 1,2,3,5,7,11,13, берущихся попарно? (а любых, в том числе неправильных?)

9) В группе детского сада 10 детей. Сколькими способами их можно поставить в колонну парами?

10) Сколькими способами можно переставить буквы слова «хорошо» так, чтобы три буквы «о» не шли подряд?

11) Сколько трехзначных чисел можно из множества цифр 1,2,3,4,5,6 а)без повторений; б)с повторениями?

12) Сколькими способами можно переставить цифры числа 123456789 так, чтобы четные цифры остались на четных местах?

13) Студенту необходимо сдать 4 экзамена на протяжении 8 дней. Сколькими способами это можно сделать?

14) На конференции по математике должны выступить 4 студента А, Б, С, Д. Сколькими способами их можно разместить в списке докладчиков, если Б не может выступать до того момента пока не выступит А?

15) Специалист по информационным технологиям ежедневно «посещает» 6 определенных сайтов в Интернете. Если порядок просмотра этих сайтов случаен, то сколько существует способов его осуществления?

16) В премьер лиге чемпионата страны по футболу 16 команд, в сезоне они встречаются друг с другом 2 раза: на своем и чужом поле. Сколько игр проводится в премьер лиге?

Команды, занявшие 1,2,3 места, награждаются соответствующими медалями. Сколькими способами могут распределиться призеры? А команды, занявшие 2 последних места, покидают премьер лигу. Сколькими способами может сформироваться «клуб неудачников»? Сколькими способами могут распределиться места с 1-го по 16-е?

17) В скольких точках пересекаются диагонали выпуклого 10-тиугольника, если никакие три из них не пересекаются в одной точке?

18) Из скольких различных предметов можно составить 210 размещений по два элемента в каждом?

19) Замок сейфа открывается, если набрана правильная комбинация из четырех цифр от 0 до 9. Кода Вы не знаете. Найти наибольшее число безуспешных попыток для а) код не содержит одинаковых цифр; б) код содержит одинаковые цифры.

20) Из отделения военнослужащих 12 человек формируется караул, состоящий из начальника караула, его заместителя и трех караульных. Сколькими способами возможно сформировать такой караул? Найдите три различных подхода к решению задачи.

21) Сколько различных «слов» можно составить, переставляя буквы слова «математика»?

22) Сколько можно сделать костей домино, используя числа 0,1,2,3,4,5,6,7,8,9?

23) Сколькими способами можно разместить 12 предметов в трех различных ящиках?

24) Сколькими способами можно разбить 2n рабочих на бригады по два человека?

25) На погранзаставе 40 рядовых и 8 офицеров. Сколькими способами можно составить наряд по охране границы, если он состоит из дух офицеров и четырех рядовых?

26) В стройотряде 15 студентов. Сколькими способами можно их можно разбить на три бригады численностью 3, 7 и 5 человек? Решите эту же задачу при условии, что в каждой бригаде назначается старший.

27) Сколько можно изготовить трехцветных флажков, если использовать следующие цвета: белый, синий, красный, желтый, зеленый, черный?

28) Группа из 28 студентов обменялась фотокарточками. Сколько было фотокарточек?

29)В команду должны быть отобраны 4 спортсмена из 10. Сколькими способами это можно сделать, если два определенных спортсмена должны войти в команду?

30) Сколькими способами можно 5 шариков разбросать по 8 лункам, если каждая лунка может уместить все 5 шариков?

31)В корзине 12 яблок, 10 груш и 20 слив. Сколькими способами могут разделить между собой эти фрукты двое ребят, так чтобы каждый из них получил не менее четырех фруктов каждого вида?

32) Аккорд – одновременное звучание двух и более нот. Сколько аккордов модно воспроизвести на семи нотах?

33)Как известно, автомобильные номера содержат три буквы (используется 26) и три цифры. Сколько различных номеров существует? В нашем городе автомобильные номера начинаются с «К». Сколько таких номеров можно составить?

34)Сколькими способами можно расставить белые фигуры (2 коня, 2 слона, 2 ладьи, короля и ферзя) на первой линии шахматной доски?

35) Сколькими способами можно расставить на 32 черных полях шахматной доски 12 белых и 12 черных шашек?

36)На плоскости проведено n прямых, причем никакие две из них не параллельны и никакие три не пересекаются в одной точке. Сколько точек пересечения имеют эти прямые?

37)На одной из параллельных прямых отмечено 10 точек, на другой 7. Каждая точка одной прямой соединена с каждой точкой другой прямой. Найдите число точек пересечения полученных отрезков, если никакие три из них не пересекаются в одной точке.

Задачи на непосредственное вычисление вероятностей

1) На трех одинаковых карточках напечатаны буквы К,Н,Х. Карточки положены буквами вниз и перемешаны. После чего извлекаются по одной, переворачиваются и кладутся слева на право. Какова вероятность, что Вы прочтете название нашего учебного заведения?

2)Та же по смыслу задача, но на карточках напечатано В,М,Э,1,2. Какова вероятность, что Вы прочтете название группы? А если на карточках напечатано В,М,Э,2,2 то искомая вероятность останется прежней?

3)Куб, все грани которого окрашены распилен на 1000 кубиков одинакового размера, которые затем тщательно перемешаны. Найти вероятность того, что наудачу извлеченный кубик будет иметь окрашенных граней а) одну, б) две, в)три.

4)При стрельбе относительная частота попаданий оказалась равной 0.85. Найти число попаданий, если всего было произведено 120 выстрелов.

5)Участники жеребьевки тянут из ящика жетоны с номерами от 1 до 100. Найти вероятность того, что номер первого наудачу извлеченного жетона не содержит цифры 5.

6)Набирая номер телефона абонент забыл последние 2 цифры и, помня лишь то, что эти цифры различны набрал их наудачу. Найти вероятность того, что набраны нужные цифры.

7)В ящике из 10 деталей 7 стандартных. Найти вероятность того, что среди взятых на удачу 6 деталей 4 стандартных. (Это, так называемая задача о выборке, обобщите ее и составьте аналогичные.)

8)Восемь различных книг расставляются рядом на одной полке. Найти вероятность того, что две определенные книги окажутся поставленными рядом.

9)В забеге участвуют 5 спортсменов: А, Б, В, Г, Д, каждый из которых имеет одинаковые шансы на успех. Какова вероятность того, что парвые три места займут соответственно бегуны А, Б, В?

10)Автобус должен сделать 8 остановок. Найти вероятность того, что никакие два пассажира из пяти, едущих в автобусе, не выйдут на одной и той же остановке.

11)Из 15 билетов выигрышными являются четыре. Какова вероятность того, что среди 6-ти билетов, взятых на удачу, будет два выигрышных?

12)Монета подброшена два раза. Найти вероятность того, что хотя бы один раз появится цифра.

13)В круг вписан квадрат. Какова вероятность того, что точка, наудачу поставленная в круге, окажется внутри квадрата?

14)Квадрат со стороной а разбит на 4 части отрезками прямых, соединяющих середины противоположных сторон. В этот квадрат брошена монета радиуса $r<a/4$. Найти вероятность того, что монета не пересечет ни одной из сторон квадратов, на которые разбит основной квадрат.

15)Внутри круга радиуса 20см. проведены две непересекающиеся окружности – одна радиусом 5см., другая – радиусом 10 см. Найти вероятность того, что точка, взятая наудачу внутри большого круга, окажется лежащей внутри одной из малых окружностей.

16)Двое друзей условились встретиться в определенном месте между 13 и 14 часами. Пришедший первым ждет второго в течение 20 минут, после чего уходит. Определить вероятность встречи друзей, если моменты их прихода в указанном промежутке времени равновозможны.

17)Из коробки, содержащей карточки с буквами а, к, о, р, р, т, т извлекают одну за другой буквы и располагают в порядке извлечения. Какова вероятность, что Вы прочтете слово трактор?

18)(Занимательная задача: легкомысленный член жюри) В жюри из трех человек два члена независимо друг от друга принимают правильное решение с вероятностью р, а третий для выяснения решения бросает монету. Окончательное решение выносится большинством голосов. Жюри из одного человека выносит справедливое решение с вероятностью р. Какое из этих жюри вынесет правильное решение с большей вероятностью?

Задачи на теоремы сложения и умножения вероятностей

1) В магазин поступило 30 телевизоров, 5 среди которых имеют скрытые дефекты. Наудачу отбираются 2 телевизора для проверки. Какова вероятность того, что оба они не имеют дефектов?

2) Вероятность безотказной работы двух независимо работающих сигнализаторов равна 0.6 и 0.7. Найти вероятность того, что сработают: а) оба сигнализатора, б) хотя бы один сигнализатор.

3) Изделия проверяются на стандартность. Вероятность того, что изделие стандартно равна 0.8. Найти вероятность того, что из двух проверенных изделий только одно стандартно.

4) Партия товара, состоящая из 15 ящиков, подлежит приемке, если при проверке наугад двух выбранных ящиков окажется, что содержащиеся в них изделия удовлетворяют стандарту. Найти вероятность приемки партии, содержащей в 5 ящиках нестандартные изделия.

5) В группе специалистов 3 экономиста и 5 юристов. Для проведения проверки работы фирмы наудачу отбираются 4 специалиста. Какова вероятность того, что в эта группа состоит из двух юристов и двух экономистов?

6) В партии деталей 12 стандартных изделий и 3 нестандартных. 5 деталей, выбранных наудачу, проверяют на соответствие стандарту. Найти вероятность того, что среди них не окажется нестандартных.

7) В экзаменационном билете три вопроса, Вероятность ответа на первый вопрос - 0.9; на второй - 0.7; на третий - 0.5. Найти вероятность различных оценок.

8) На складе телевизионного ателье из имеющихся 20 микросхем 6 изготовлены первым заводом, остальные - вторым. Найти вероятность того, что две наудачу взятых микросхемы изготовлены первым заводом.

9) Студент знает 20 вопросов из 25-ти. Найти вероятность того, что студент знает предложенные ему экзаменатором три вопроса.

10) В рабочем поселке 11 торговых точек, 8 из которых - ИЧП. Для проверки наудачу отбираются 5. Какова вероятность того, что в число проверяемых попадут только частные торговые предприятия?

11)Брошены монета и игральная кость. Найти вероятность совмещения событий: «появился герб», появилось 6 очков».

12)Монета бросается до тех пор пока 2 раза подряд не выпадет одной и той же стороной. Найти вероятности следующих событий: а)опыт окончится до шестого бросания; б)потребуется четное число бросаний.

13)Вероятности поражении цели первым стрелком равна 0,8, вторым 0,6. Найти вероятности следующих событий: а) цель поражена двумя попаданиями; б) одним выстрелом; в) цель не поражена.

14)В урне находится 5 белых, 4 черных и 3 синих шара. Каждое испытание состоит в том, что наудачу извлекают один шар, не возвращая его в урну. Найти вероятность того, что при первом испытании появится белый шар, при втором черный и при третьем – синий.

15)Три электрические лампочки последовательно включены в цепь. Вероятность того, что одна (любая) лампочка перегорит, если напряжение в сети превысит номинальное, равна 0,6. Найти вероятность того, что при повышенном напряжении тока в цепи не будет.

16)В урне 7 белых и 9 красных шаров. Из урны наугад вынимают первый шар, определяют цвет. Затем второй шар. Найдите вероятность, что они оба белые.

16.1)Из урны (задача 16) одновременно вынимают два шара. Найдите вероятность того, что они оба белые. (Это разные задачи?)

Тема 6.2. Элементы математической статистики (4 часа)

Основные понятия:

Задачи математической статистики.

Генеральная и выборочная совокупность статистических данных.

Выборочный метод. Вычисление числовых характеристик.

Виды графического представления результатов.

Задачи на составление вариационных рядов

1) При обследовании 50 членов семей рабочих и служащих установлено следующее количество членов семьи: 5; 3; 2; 1; 4; 6; 3; 7; 9; 1; 3; 2; 5; 6; 8; 2; 5; 2; 3; 6; 8; 3; 4; 4; 5; 6; 5; 4; 7; 5; 6; 4; 8; 7; 4; 5; 7; 8; 6; 5; 7; 5; 6; 6; 7; 3; 4; 6; 5; 4. Составьте вариационный ряд распределения частот. Постройте полигон распределения частот, кумуляту. Определите среднее число членов семьи. Охарактеризуйте колеблемость размера семьи с помощью показателей вариации

Объясните полученные результаты, сделайте выводы.

2) Имеются данные о еженедельном количестве проданных компьютеров одной из фирм: 398, 412, 560, 474, 544, 690, 587, 600, 613, 457, 504, 477, 530, 641, 359, 566, 452, 633, 474, 499. 580, 606, 344, 455,505, 396, 347, 441, 390, 632, 400, 582. Составьте вариационный ряд. Найдите среднее количество проданных компьютеров. Рассчитайте показатели вариации

3) Администрацию магазина интересует частота покупок калькуляторов. Менеджер в течении января регистрировал данные о покупке МК и собрал следующие данные: 8, 4, 4, 9, 3, 3, 1, 2, 0, 4, 2, 3, 5, 7, 10, 6, 5, 7, 3, 2, 9, 8, 1, 4, 6, 5, 4, 2, 1, 0, 8. Постройте вариационный ряд, определите его числовые характеристики. Какие рекомендации вы дали бы администрации универсама?

4) Число пассажиров одного из рейсов за 30 дней составило: 128, 121, 134, 118, 123, 109, 120, 116, 125, 128, 121, 129, 130, 131, 127, 119, 114, 124, 110, 126, 134, 125, 128, 123, 128, 133, 132, 136, 134, 129. Составьте вариационный ряд. Найдите среднее число пассажиров в рейсе? Рассчитайте показатели вариации. Сделайте анализ полученных результатов.

5) Имеются данные о годовой мощности предприятий в 2003 году

Предприятия с годовой мощностью, тыс.т	Количество предприятий
До 500	27
500 – 1000	11
1000 – 2000	8
2000 – 3000	8
Свыше 3000	2

Постройте гистограмму, кумуляту. Рассчитайте среднюю мощность предприятий. Найдите дисперсию. среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Сделайте анализ полученных результатов.

6) По данным выборочного обследования получено следующее распределение по среднедушевому доходу

Среднедушевой доход семьи в месяц, у.е.	до 25	25 – 50	50 – 75	75 – 100	100 – 125	125 – 150	150 и выше
Количество обследованных семей	46	236	250	176	102	78	12

Постройте гистограмму, кумуляту. Рассчитайте среднюю мощность предприятий. Найдите дисперсию. среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Сделайте анализ полученных результатов.

7) Постройте гистограмму частот, найдите среднюю заработную плату работников одного из цехов «Азота»

Заработная плата, у.е	50 – 75	75 – 100	125 – 150	150 – 175	175 – 200	200 - 225
Число работников	12	23	37	19	15	9

Рассчитайте среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации заработной платы.

8) Продажа акций на аукционе характеризуется следующими данными:

Продажа акций в %	9 - 15	15 – 21	21 – 27	27 – 33
Число акционерных обществ	3	5	4	2

Постройте гистограмму распределения частот. Найдите средний процент продажи акций. Охарактеризуйте колеблемость процента продажи акций с помощью соответствующих показателей.

9) Для оценки состояния деловой активности предприятий были проведены обследования и получены следующие результаты:

Показатель деловой активности	0 – 8	8 – 16	16 – 24	24 - 32
Число предприятий	10	15	8	5

Постройте гистограмму распределения частот. Найдите среднее значение показателя деловой активности, дисперсию. среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации. Сделайте анализ полученных результатов.

10) Имеются данные о числе сделок, заключённых брокерскими фирмами:

Число сделок	10 – 30	30 – 50	50 – 70	70 – 90
Число фирм	20	18	12	5

Постройте гистограмму распределения частот. Найдите средне число заключённых сделок, среднее квадратическое отклонение, коэффициент вариации, размах вариации. Объясните полученные результаты.

11) В колледже собранны данные о числе часов пропущенных по неуважительной причине студентами третьего курса:

Число пропущенных часов в текущем месяце	0	1	2	3	4	5
Число студентов	10	27	25	28	30	17

Постройте полигон распределения частот. Найдите среднее число пропущенных дней, стандартное отклонение, коэффициент вариации. Является ли распределение симметричным?

Задачи по теме «Статистическое оценивание».

1) С помощью собственно – случайного повторного отбора фирма провела обследование 900 своих служащих. Средний стаж работы в фирме равен 8,7 года, а среднее квадратическое отклонение – 2,7 года. Среди обследованных оказалось 270 женщин. Считая стаж работы служащих распределённым по нормальному закону определите: а) с вероятностью 0,95 доверительный интервал, в котором окажется средний стаж работы всех служащих фирмы; б) с вероятностью 0.9 доверительный интервал, накрывающий неизвестную долю женщин во всём коллективе фирмы.

2) Владелец автостоянки опасается обмана со стороны служащих. В течении года владельцем автостоянки проведено 40 проверок. По данным проверок среднее число автомобилей, оставляемых на ночь на охрану, составило 400 единиц, а стандартное отклонение их числа – 10 автомобилей. Считая отбор собственно случайным, с вероятностью 0,99 оцените с помощью доверительного интервала истинное среднее число автомобилей, оставляемых на ночь. Обоснованы ли опасения владельца стоянки, если по отчётности охранников среднее число автомобилей составляет 395 автомобилей.

3) В 24 из 40 проверок число автомобилей на автостоянке не превышало 400 единиц. С вероятностью 0,98 найдите доверительный интервал для оценки истинной доли дней в течении года, когда число оставляемых на стоянке автомобилей не превышало 400 единиц.

4) Служба контроля Энергосбыта провела выборочную проверку расхода электроэнергии жителями одного из домов. С помощью собственно – случайного отбора выбрано 10 квартир и определён расход электроэнергии в течении месяцев: 125; 78; 102; 140; 90; 45; 50; 125; 115; 112. С вероятностью 0. 95 определите доверительный интервал для оценки среднего расхода электроэнергии на 1 квартиру во всём доме при условии, что в доме 70 квартир, а отбор был: а) повторным; б) бесповторным.

5) С целью изучения размеров выручки киосков была произведена 10% -ая случайная бесповторная выборка из 1000 киосков города. В результате были получены данные о

средней выручке составившие 500 у.е. В каких пределах с доверительной вероятностью 0,95 может находиться средняя дневная выручка, если среднее квадратическое отклонение составило 150 у. е.?

6) Фирма торгующая компьютерами собирает информацию о состоянии местного компьютерного рынка. С этой целью из 8 746 лиц в возрасте 18 лет и старше, проживающих в этом городе, отобрано 500 человек. Среди них оказалось 29 человек, планирующих приобрести компьютер в новом году. Оцените долю лиц в генеральной совокупности в возрасте 18 лет и старше, планирующих приобрести компьютер в новом году, если $\alpha = 0, 05$

7) Для оценки числа безработных среди рабочих в порядке случайной повторной выборки отобраны 400 человек. 25 из них оказались безработными. Используя 95% доверительный интервал, оцените истинные размеры безработицы.

8) Туристическое агентство утверждает, что для черноморского курорта характерна идеальная погода со среднегодовой температурой 20^0С. Пусть случайно отобраны 35 дней в году. Какова вероятность того, что отклонение средней температуры за отобранные дни от среднегодовой температуры не превысит по абсолютной величине 2^0С, если температура воздуха распределена по нормальному закону, а стандартное отклонение дневной температуры составляет 4^0С ?

9) В целях изучения среднедушевого дохода семей города Невинномысска, была произведена 1%-я повторная выборка из 30 тыс. семей. По результатам обследования среднедушевой доход семьи в месяц составил 1700 руб. со средним квадратическим отклонением 150 руб. С вероятностью 0,95 найдите доверительный интервал, в котором находится величина среднедушевого дохода всех семей города.

10) Выборочные обследования малых предприятий города показали, что 95% малых предприятий нерентабельны. Приняв доверительную вероятность равной 0,954, определите, в каких границах находится доля нерентабельных предприятий, если в выборку попали 100 предприятий.

11) Для изучения демографических характеристик населения выборочно обследовано 300 семей города Невинномысска. Оказалось, что среди обследованных семей 15% состоят из 2 человек. В каких пределах находится в генеральной совокупности доля семей, состоящих из 2 человек, если принять доверительную вероятность равной 0,95?

12) По данным выборочного обследования в 2003 году прожиточный минимум населения Северо-Кавказского региона составил в среднем на душу населения 1600 руб. в месяц. Каким должен был быть минимально необходимый объём выборки, чтобы с вероятностью 0,997 можно было утверждать, что этот показатель уровня жизни населения в выборке

отличается от своего значения в генеральной совокупности не более чем на 100 рублей, если среднее квадратическое отклонение принять равным 300 рублей.

13) Строительная компания хочет оценить возможность успешного бизнеса на рынке ремонтно-строительных работ. Провели случайную бесповторную выборку, из 1000 домовладельцев отобрали 600 человек. По этой выборке определено, что средняя стоимость строительных работ, которую предполагает оплатить отдельный домовладелец, составляет 500 у.е. С какой вероятностью можно гарантировать, что эта стоимость будет отличаться от средней стоимости строительных работ в генеральной совокупности по абсолютной величине не более чем на 10 у.е., если стандартное отклонение стоимости строительных работ в выборке составило 50 у.е.?

14) Коммерческий банк, изучая возможности предоставления долгосрочных кредитов, опрашивает своих клиентов для определения среднего размера кредита. Из 9706 клиентов опрошено 1000 человек. Среднее значение необходимого кредита в выборке составило 675 у.е. со стандартным отклонением 146 у.е. Найдите границы 95% доверительного интервала для оценки неизвестного среднего значения кредита в генеральной совокупности.

15) Выборочные обследования показали, что доля покупателей, предпочитающих новую модификацию компьютеров, составляет 60% от общего числа покупателей данного товара. Каким должен быть объём выборки, чтобы можно было получить оценку генеральной доли с точностью не менее 0,05 при доверительной вероятности 0,9

16) При выборочном опросе 1200 телезрителей оказалось, что 456 из них регулярно смотрят программы телеканала СТС. Постройте 99%-й доверительный интервал, оценивающий долю всех телезрителей, предпочитающих программы телеканала СТС.

17) Для оценки остаточных знаний по математическим дисциплинам были протестированы 25 студентов 3-го курса групп ЭВМ. Получены следующие результаты в баллах: 107, 90, 114, 88, 117, 110, 103, 120, 96, 122, 93, 100, 121, 110, 135, 85, 120, 89, 100, 126, 90, 94, 99, 116, 111. По этим данным найдите 95%-й интервал для оценки среднего балла тестирования всех студентов 3-го курса.

18) Среднемесячный бюджет студентов Невинномысский химический колледж оценивается по случайной выборке. С вероятностью 0,954 найдите наименьший объём выборки, необходимый для такой оценки. если среднее квадратическое отклонение предполагается равным 100 рублей, а предельная ошибка средней не должна превышать 20 рублей.

Список используемой литературы:

Основные источники:

1. Дадаян А. А. Математика: Учебник / А.А. Дадаян. - 3-е изд. - М.: Форум: НИЦ ИНФРА-М, 2013. - 544 с.: 60x90 1/16. - (Профессиональное образование). (переплет)ISBN 978-5-91134-460-3, 2000 экз.
2. Шипачев В. С. Задачник по высшей математике: Учебное пособие / В.С. Шипачев. - 10-е изд., стер. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 304 с.: 60x90 1/16. - (Высшее образование) (Переплёт) ISBN 978-5-16-010071-5
3. Шипачев В. С. Начала высшей математики [Электронный ресурс] : учебное пособие. — Электрон. дан. — СПб. : Лань, 2013. — 382 с. — ISBN- 978-5-8114-1476-5

Дополнительные источники:

1. Григорьев С.Г. Математика: учебник для студ. Сред .проф.учреждений/ С.Г. Григорьев, С.В. Задулина; под ред. В.А. Гусева. -4-е изд., стер.- М.: Издательский центр "Академия",2009-384 с. ISBN 978-5-7695-6325-7 .
2. Спирина. М.С. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник для студ. учреждений сред. проф. образования / М.С. Спирина, П.А. Спирин. -4-е изд.– М.: Издательский центр «Академия», 2013. – 352 с. ISBN: 978-5-7695-9711-
3. Григорьев В.П. Элементы высшей математики: учебник для студ. Учреждений сред. проф. образования / В.П. Григорьев , Ю.А. Дубинский. – 10-е изд., стер. – М. : Издательский центр «Академия» , 2014. – 320 с. ISBN 978-5-4468-0784-0.

Интернет-ресурсы

1. www.fcior.edu.ru (Информационные, тренировочные и контрольные материалы).
2. www.school-collection.edu.ru (Единая коллекция цифровых образовательных ресурсов).
3. http://www.studentlibrary.ru/ Электронно-Библиотечная Система «Консультант Студента».
4. http://e.lanbook.com/ Электронная библиотечная система издательства «Лань».
5. http://www.biblio-online.ru/ Электронно-библиотечная система.
6. http://znanium.com/ Электронно-библиотечная система.
7. http://www.iprbookshop.ru/ Электронно-библиотечная система.