Министерство науки и высшего образования Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

Колледж инновационных технологий и предпринимательства

Методические рекомендации к выполнению практических занятий по дисциплине «Прикладная информатика»
для студентов средне-профессиональных организаций

Владимир, 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Пояснительная записка....3
Тематическое планирование практических работ....4
Требования к знаниям и умениям при выполнении практических работ....5
Правила выполнения практических работ....5
Содержание отчета....6
Форма контроля и критерии оценки выполнения практических заданий....6
Практическая работа №1....7
Практическая работа № 2....10
Практическая работа № 3....13
Практическая работа № 4....15
Практическая работа № 5....17
Практическая работа № 6....22
Практическая работа № 7....27
Практическая работа № 8....32
Практическая работа № 9....37
Практическая работа №10....41
Практическая работа № 11....48
Практическая работа № 12....56
Практическая работа № 13....59
Практическая работа №14....68
Практическая работа № 15....73
Практическая работа № 16....78
Практическая работа № 17....85
Практическая работа № 18....90
Практическая работа № 19....95
Практическая работа № 20....99
Практическая работа № 21....101
Библиографический список....104

Пояснительная записка

Методические рекомендации по выполнению практических работ по естественно - научной дисциплине «Прикладная математика» предназначены для курсантов 1-го курса специальности 11.02.06 - Техническая эксплуатация транспортного радиоэлектронного оборудования (по видам транспорта).

Объем практических работы студентов определяется федеральным государственным образовательным стандартом среднего профессионального образования (ФГОС СПО).

Выполнение аудиторных практических работ является обязательным для каждого курсанта, их объём в часах определяется действующим рабочим учебным планом ОЛТК ГА филиал ФГБОУ ВПО УВАУ ГА (И)) и составляет 36 часов.

Реализуемые цели выполнения практических работ:

- формирования общих и профессиональных компетенций
- систематизации и закрепления полученных теоретических знаний и практических умений студентов;
- углубления и расширения теоретических знаний;
- развития познавательных способностей и активности курсантов, самостоятельности, ответственности и организованности;
- формирования самостоятельности мышления, способностей к саморазвитию, самосовершенствованию и самореализации.

Выполнение практических работ представляет собой планируемую, организационно и методически направляемую преподавателем деятельность курсантов по освоению дисциплины «Прикладная математика».

Перед выполнением аудиторной практической работы курсант должен внимательно выслушать инструктаж преподавателя по выполнению задания, который включает определение цели задания, его содержание, ориентировочный объем работы, основные требования к результатам работы, критерии оценки. В процессе инструктажа преподаватель предупреждает курсантов о возможных типичных ошибках, встречающихся при выполнении задания. Критериями оценки результатов аудиторной практической работы курсанта являются:

- уровень освоения курсантом учебного материала;
- умение курсанта использовать теоретические знания при выполнении практических задач;
- сформированность общеучебных умений;
- обоснованность и четкость изложения ответа;
- оформление материала в соответствии с требованиями.

Тематическое планирование практических работ

Раздел 1. Математический анализ		
Тема 1.1. Пределы и их свойства	Практическая работа №1, 2. Вычисление пределов, раскрытие неопределенностей (решение задач).	4
Тема 1.2. Производная и дифференциал функции	Практическая работа № 3, 4. Вычисление производных и дифференциала функции (решение задач).	4
Тема 1.3. Неопределенный и определенный интеграл	Практическая работа № 5, 6. Вычисление интегралов (решение задач).	4
Тема 1.4. Дифференциальные уравнения	Практическая работа № 7. Решение прикладных задач с помощью дифференциальных уравнений.	2
Тема 1.5. Последовательности и ряды	Практическая работа № 8, 9. Разложение в ряд Фурье некоторых, часто встречающихся при изучении радиотехники, функций.	4
Раздел 2. Дискретная математика		
Тема 2.1. Численное интегрирование и дифференцирование	Практическая работа №10 . Численные методы интегрирования и дифференцирования.	1
Тема 2.2. Обыкновенные дифференциальные уравнения и их решение	Практическая работа № 11. Решения дифференциальных уравнений 2-го порядка.	2
Раздел 3. Теория комплексных чисел		
Тема 3.2. Сложение и умножение комплексных чисел	Практическая работа № 12. Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами.	1
	Практическая работа № 13. Применение комплексных чисел в электротехнике. Решения электротехнических задач с применением комплексных чисел	2
Раздел 4. Линейная алгебра		
Тема 4.1. Матрицы, определители	Практическая работа № 14. Определители матриц, их вычисление. Обратная матрица.	1
	Практическая работа № 15. Применение свойств определителей при их вычислении. Вычисление обратных матриц.	2
Тема 4.2. Решение систем линейных уравнений	Практическая работа № 16. Решение систем линейных уравнений различными методами.	1
	Практическая работа № 17 Решение прикладных задач методом Крамера и методом Гаусса.	2
Раздел 5. Теория вероятностей и математическая статистика		
Тема 5.1. Теория вероятности	Практическая работа № 18. Понятие о числе сочетаний (решение типовых задач).	2
Тема 5.2. Случайная величина, ее функция распределения	Практическая работа № 19. Произвольное, равномерное и биноминальное распределение.	1
Тема 5.3. Математическое ожидание и дисперсия случайной величины	Практическая работа № 20. Основные характеристики случайных величин.	1
Тема 5.4. Предмет и основные понятия математической статистики	Практическая работа № 21. Построение вариационного ряда. Вычисление основных характеристик.	2

Требования к знаниям и умениям при выполнении практических работ

В результате выполнения практических работ, предусмотренных программой по данной специальности, курсант должен

знать:

- основные понятия и методы математического анализа, дискретной математики, теории вероятностей и математической статистики;
- основные численные методы решения прикладных задач.

уметь:

- определять производные сложных функций;
- исследовать функции с помощью производной;
- находить неопределенные интегралы;
- вычислять простейшие определенные интегралы;
- решать несложные задачи по теории вероятностей.

В каждой работе имеется теоретическая часть, включающая наиболее важные определения, теоремы и формулы.

В каждой работе разбирается один или несколько типовых примеров.

Задания, представленные в работах, соответствуют либо фронтальной, либо групповой, либо индивидуальной форме организации занятий.

По завершении работы курсант ы должны ответить на контрольные вопросы, приведенные в пособии.

Правила выполнения практических работ

1. курсант должен прийти на практическое занятие подготовленным к выполнению работы. Курсант, не подготовленный к работе, не может быть допущен к ее выполнению.
2. Каждый курсант после проведения работы должен представить отчет о проделанной работе с анализом полученных результатов и выводом по работе.
3. Отчет о проделанной работе следует выполнять в отдельной тетради. Содержание отчета указано ниже.
4. Расчет следует проводить с точностью до двух значащих цифр.
5. Если курсант не выполнил практическую работу или часть работы, то он может выполнить работу или оставшуюся часть во внеурочное время, согласованное с преподавателем.
6. Оценку по практической работе курсант получает, с учетом срока выполнения работы, если:

- расчеты выполнены правильно и полном объеме;

- студент может пояснить выполнение любого этапа работы;

- отчет выполнен в соответствии с требованиями к выполнению работы.

7. Зачет по практическим работам курсант получает при условии выполнения всех предусмотренных программой работ после сдачи отчетов по работам при удовлетворительных оценках за опросы и контрольные вопросы при выполнении практических заданий.

Содержание отчета

1. Название работы.
2. Цель работы.
3. Задание.
4. Формулы расчета.
5. Ответы на контрольные вопросы

Форма контроля и критерии оценки выполнения практических заданий.

Оценка «5» ставится, если: работа выполнена полностью; в логических рассуждениях и обосновании решения нет пробе лов и ошибок; в решении нет математических ошибок (возможна одна неточность, описка, не являющаяся следствием незнания или непонимания учебного материала).

Оценка «4» ставится, если: работа выполнена полностью, но обоснования шагов решения недостаточны (если умение обосновывать рассуждения не являлось специальным объектом проверки); допущена одна существенная ошибка или два-три несущественных ошибки.

Оценка «3» ставится, если допущены более одной существенной ошибки или более двух-трех несущественных ошибок, но курсант владеет обязательными умениями по проверяемой теме; при этом правильно выполнено не менее половины работы.

Оценка «2» ставится, если: допущены существенные ошибки, показавшие, что курсант не владеет обязательными умениями по данной теме в полной мере.

Оценка «1» ставится, если: работа показала полное отсутствие у учащегося обязательных знаний и умений по проверяемой теме или значительная часть работы выполнена не самостоятельно.

Практическая работа №1.

Вычисление пределов, раскрытие неопределенностей (решение задач).

Цель: Формирование навыков вычисления пределов с помощью замечательных пределов, раскрытия неопределенностей.

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы.

2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Вычисление пределов с помощью замечательных пределов, раскрытие неопределенностей

Число b называется пределом функции $f(x)$ при x, стремящемся к a, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta > 0$, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенству $|x-a| < \delta$, будет выполнено неравенство $|f(x)-b| < \varepsilon$.

Вычисление предела функции $f(x)$ следует начинать с подстановки предельного значения аргумента $x = a$, (a - число или один из символов ∞, $+\infty$, $-\infty$) в выражение, определяющее эту функцию. При этом приходится сталкиваться с двумя существенно различными типами примеров.

I. Если основная элементарная функция определена в предельной точке $x = a$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x) = f\left(\lim\limits_{x\to a} x\right) = f(a)$.

Имеют место основные теоремы, на которых основано вычисление пределов элементарных функций.

Если C - постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a} C = C$.

Если C - постоянная величина, то $\lim\limits_{x\to a} Cf(x) = C \cdot \lim\limits_{x\to a} f(x)$.

Если существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} f_1(x)$ и $\lim\limits_{x\to a} f_2(x)$, то:

$\lim\limits_{x\to a}\left(f_1(x) \pm f_2(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \pm \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

$\lim\limits_{x\to a}\left(f_1(x) \cdot f_2(x)\right) = \lim\limits_{x\to a} f_1(x) \cdot \lim\limits_{x\to a} f_2(x)$;

$\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f_1(x)}{f_2(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f_1(x)}{\lim\limits_{x\to a} f_2(x)}, \quad \lim\limits_{x\to a} f_2(x) \neq 0$.

II. Функция $f(x)$ в предельной точке $x = a$ не определена. Тогда вычисление предела требует в каждом случае индивидуального подхода. В одних случаях (наиболее простых) вопрос сводится к применению теорем о свойствах бесконечно малых и бесконечно больших функций и связи между ними.

Более сложными случаями нахождения предела являются такие, когда подстановка предельного значения аргумента в выражение для $f(x)$ приводит к одной из неопределенностей:

$\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, 1^{∞}, 0^0, ∞^0.

Тогда вычисление предела заключается в раскрытии полученных неопределенностей.

Здесь могут оказаться полезными:

первый замечательный предел $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$, ($x$ - радианная мера угла);

второй замечательный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim\limits_{\alpha\to 0}(1+\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}=e$.

Кроме того, при раскрытии неопределенностей используют следующие приемы:
сокращение дроби на критический множитель $(x-a)^{\alpha}$ при $x\to a$;
избавление от иррациональности в числителе или знаменателе дроби;
разложение многочленов на линейные или квадратичные множители при $x\to a$, $(a\neq\infty)$.

Пример

Вычислить пределы:

<u>Задание 1:</u> 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{4x-8}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}$;

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}$; 4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3-6x^2+5x-1\right)$.

<u>Решение:</u> 1) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{4x-8}$, $4x-8=0$ при $x\to 2$, (на ноль делить нельзя). Таким образом, $4x-8=0$ есть величина бесконечно малая, а обратная ей величина $\frac{1}{4x-8}$ - бесконечно большая. Поэтому при $x\to 2$ произведение $\frac{1}{4x-8}\cdot 5$ есть величина бесконечно большая, то есть $\lim\limits_{x\to 2}\frac{5}{4x-8}=\infty$.

2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\frac{0}{0}\Rightarrow\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x^2-2x}{2x^2-5x}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\cdot(3x-2)}{x\cdot(2x-5)}=$

$=\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x-2}{2x-5}=\frac{3\cdot 0-2}{2\cdot 0-5}=\frac{-2}{-5}=\frac{2}{5}$.

3) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\frac{x}{0}$; умножим числитель и знаменатель на сопряженный знаменателю множитель $\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}}=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{\left(\sqrt{5-x}-\sqrt{5+x}\right)\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\cdot\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt{5-x}+\sqrt{5+x}\right)}{-2}=\frac{\sqrt{5}+\sqrt{5}}{-2}=-\sqrt{5}.$$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x^3-6x^2+5x-1\right)$; вынесем x^3 за скобки, получим $\lim\limits_{x\to\infty}\left[x^3\cdot\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)\right]=\lim\limits_{x\to\infty}x^3\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{6}{x}+\frac{5}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)=\infty$ (при $x\to\infty$ $\frac{6}{x}$, $\frac{5}{x^2}$, $\frac{1}{x^3}$ - бесконечно малые величины и их пределы равны нулю).

<u>Задание 2:</u> 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^x$.

<u>Решение:</u> 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{3}{x}\right)^x$; выполним преобразования и воспользуемся вторым замечательным пределом.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{\left(\frac{x}{3}\right)\cdot 3}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x/3}\right)^{\frac{x}{3}}\right]^{3}=e^{3}.$$

2) $$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{1+x}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+1}{x}\right)^{-x}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{-1}=e^{-1}=\frac{1}{e}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-5x+6}{3x^2-9x}$;

2) $\lim\limits_{x\to -2}\left(\dfrac{1}{x+2}-\dfrac{12}{x^3+8}\right)$;

3) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{5}{4x+1}$;

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(x-\sqrt{x^2-4x}\right)$;

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^2+3}{3x^3-5}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x+3}{5x+1}$;

7) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{4x^2-7x-2}{5x^2-11x+2}$;

8) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2-\sqrt{x}}{3-\sqrt{2x+1}}$;

9) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{3x}\right)^{x}$;

10) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2+2x-15}{x^2-9}$;

11) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{2z}{\sqrt{4+z}-\sqrt{4-z}}$;

12) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{5}{4x}\right)^{x}$;

13) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-x^2+2}{x^3-x+1}$;

14) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$;

15) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}$;

16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{3}{x}\right)^{-x}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется пределом функции?
2. Каким образом определяется число e?
3. Сформулируйте основные теоремы вычисления пределов.
4. Запишите формулы соответствующие первому и второму замечательным пределам.
5. Какие приемы используются при раскрытии неопределенностей?

Практическая работа № 2.

Вычисление пределов, раскрытие неопределенностей (решение задач).

Цель: Формирование навыков вычисления односторонних пределов, классификации точек разрыва.

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы.

2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Вычисление односторонних пределов, классификация точек разрыва

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если бесконечно малому приращению аргумента в этой точке соответствует бесконечно малое приращение функции, то есть $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0$.

Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке $x = a$, если существует конечный предел функции в этой точке, который равен значению функции в точке $x = a$, то есть $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

Примером непрерывной функции может служить любая элементарная функция, которая непрерывна в каждой точке своей области определения.

Точка $x = a$ называется точкой разрыва функции $y = f(x)$, если эта функции определена в некоторой окрестности точки $x = a$, но в самой точке $x = a$ не удовлетворяет условию непрерывности.

Точки разрыва функции делятся два типа. К точкам разрыва I рода относятся такие точки, в которых существуют конечные односторонние пределы: $\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$ (левый предел) и $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$ (правый предел). К точкам разрыва II рода относятся те точки, в которых хотя бы один из односторонних пределов не существует или бесконечен.

Заметим, что точки разрыва I рода подразделяются в свою очередь на точки устранимого разрыва (когда $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = \lim\limits_{x \to a+0} f(x) \neq f(a)$) и на точки скачка функции (когда $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to a+0} f(x)$); в последнем случае разность $f(a+0) - f(a-0)$ называется скачком функции $f(x)$ в точке $x = a$.

Пример

<u>Задание 1:</u> Вычислите односторонние пределы: 1) $\lim\limits_{x \to 2\pm 0} \dfrac{4}{(x-2)^3}$;

2) $\lim\limits_{x \to 1\pm 0} \dfrac{1}{1 + 2^{\frac{1}{x-1}}}$.

<u>Решение:</u> 1) Пусть $x < 2$. Тогда при $x \to 2-0$ функция $x-2$, а, следовательно, и $(x-2)^3$ есть отрицательная бесконечно малая, поэтому функция $4 \cdot \dfrac{1}{(x-2)^3}$ - отрицательная бесконечно большая, то есть $\lim\limits_{x \to 2-0} \dfrac{4}{(x-2)^3} = -\infty$.

При $x \to 2+0$ функция $x-2$, а, следовательно, и $(x-2)^3$ - положительная бесконечно большая функция, то есть $\lim\limits_{x \to 2+0} \dfrac{4}{(x-2)^3} = +\infty$.

2) Пусть $x<1$. Тогда при $x\to 1-0$ имеем: $x-1$ - отрицательная бесконечно малая функция; следовательно, $\frac{1}{x-1}\to -\infty$ и $2^{\frac{1}{x-1}}\to 0$. Отсюда $\lim\limits_{x\to 1-0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=1$.

Если $x>1$, то при $x\to 1+0$ получим: $x-1$ - положительная бесконечно малая функция; следовательно, $\frac{1}{x-1}\to +\infty$ и $2^{\frac{1}{x-1}}\to +\infty$, тогда $\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}\to 0$. Имеем, $\lim\limits_{x\to 1+0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x-1}}}=0$.

<u>Задание 2:</u> Даны функции: 1) $y=\frac{1}{x+3}$; 2) $y=\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$. Найти точки разрыва и исследовать их характер.

<u>Решение:</u> 1) Функция $y=\frac{1}{x+3}$ определена при всех значениях x, кроме $x=-3$. Так как эта функция является элементарной, то она непрерывна в каждой точке своей области определения, состоящей из двух промежутков $(-\infty,-3)$ и $(-3,+\infty)$.

Следовательно, единственной точкой разрыва является точка $x=-3$ (функция определена в окрестности этой точки, в самой же точке нарушается условие непрерывности – функция в ней неопределена). Для исследования характера разрыва найдем левый и правый пределы этой функции при стремлении аргумента к точке разрыва $x=-3$: $\lim\limits_{x\to -3+0}\frac{1}{x+3}=+\infty$, $\lim\limits_{x\to -3-0}\frac{1}{x+3}=-\infty$.

Следовательно, при $x=-3$ функция $y=\frac{1}{x+3}$ имеет бесконечный разрыв; $x=-3$ есть точка II рода.

2) Рассуждая аналогично, получим, что точкой разрыва заданной функции является $x=0$. Найдем односторонние пределы этой функции в точке $x=0$: $\lim\limits_{x\to +0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0$, $\lim\limits_{x\to -0}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=1$.

Таким образом, левый и правый пределы исследуемой функции при $x=0$ конечны, но не равны между собой. Поэтому $x=0$ точка I рода, причем точка скачка функции.

Задания для самостоятельной работы

Вычислите односторонние пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 1\pm 0}\frac{x+2}{x-1}$; 2) $\lim\limits_{x\to 5\pm 0}\frac{3-x}{(x-5)^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}\pm 0} tg2x$;

4) $\lim\limits_{x\to 3\pi\pm 0} ctg\frac{x}{3}$; 5) $\lim\limits_{x\to \pm 0}\left(6^x+5\right)$; 6) $\lim\limits_{x\to 2-0}\frac{\lg(2-x)}{2-x}$.

Для данных функций найти точки разрыва и исследовать их характер:

1) $y=\frac{1}{2-x}$; 2) $y=\frac{1}{(x-5)^2}$; 3) $y=-\frac{2}{x^2-1}$;

4) $y=\frac{1}{4x-x^2-3}$; 5) $y=\frac{3}{2^x-1}$; 6) $y=\frac{\sin x}{x}$.

Исследуйте на непрерывность функции:

1) $y=-5x$; 2) $v=2t^2$; 3) $y=x^2+2$;

4) $s=t^2-t$; 5) $y=x^3$; 6) $y=-x^3-1$;

7) $y=2x^3$; 8) $y=x^3-5$ в точке $x=1$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение непрерывной функции.
2. Что называется точкой разрыва?
3. На какие два типа делятся точки разрыва? Дайте определение.
4. Какие пределы называются односторонними?
5. Какая точка называется точкой устранимого разрыва?
6. Какая точка называется точкой скачка? Что называется скачком?

Практическая работа № 3.

Вычисление производных и дифференциала функции (решение задач)

Цель: Формирование навыков вычисления производных функций по определению производной

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы.

2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Вычисление производных функций по определению производной

Производной функции $y = f(x)$в точке x (производной первого порядка) называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx, когда последнее стремится к нулю: $y' = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$.

Если этот предел конечен, то функция $y = f(x)$ называется дифференцируемой в точке x; в противном случае (то есть если он не существует или равен бесконечности) – недифференцируемой. В том случае, когда предел есть бесконечность, говорят, что функция $y = f(x)$ имеет в точке бесконечную производную.

Дифференциалом dy функции $y = f(x)$(дифференциалом первого порядка) называется главная часть ее приращения, пропорциональная приращению Δx независимой переменной x.

Дифференциал dx независимой переменной x равен ее приращению Δx:

$dx = \Delta x$.

Дифференциал любой дифференцируемой функции $y = f(x)$ равен произведению ее производной на дифференциал независимой переменной:

$$dy = y'(x)dx. \qquad (1)$$

Соотношение (1) остается в силе и тогда, когда x есть функция другого аргумента – в этом заключается инвариантность формы первого дифференциала.

Из соотношения (1) получаем $y'(x) = \frac{dy}{dx}$, то есть производная первого порядка функции $y = f(x)$ равна отношению первого дифференциала функции к дифференциалу ее аргумента.

Пример

<u>Задание:</u> Пользуясь определением производной, найти производную и дифференциал функции $y = \sqrt{2x-1}$. Вычислить $y'(5)$.

<u>Решение:</u> Найдем приращение функции $y = \sqrt{2x-1}$, соответствующее данному приращению Δx аргумента x:

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \sqrt{2(x+\Delta x)-1} - \sqrt{2x-1}.$$

Тогда

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{\sqrt{2x+2\Delta x-1} - \sqrt{2x-1}}{\Delta x}$$

и

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sqrt{2x+2\Delta x-1} - \sqrt{2x-1}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1}-\sqrt{2x-1}\right)\cdot\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1}+\sqrt{2x-1}\right)}{\Delta x\cdot\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1}+\sqrt{2x-1}\right)} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2}{\left(\sqrt{2x+2\Delta x-1}+\sqrt{2x-1}\right)} = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}.$$

По формуле (1) находим дифференциал функции:

$$dy = \frac{1}{\sqrt{2x-1}}dx.$$

Подставляя в выражение для y' значение $x=5$, получим

$$y'(5) = \frac{1}{\sqrt{2\cdot 5-1}} = \frac{1}{3}.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите производные и дифференциалы от указанных функций, пользуясь непосредственно определением производной:

   1) $y = 3x-5$; 2) $y = x^2-9$; 3) $y = x^2-4x+3$;

   4) $y = 4x-x^3$; 5) $y = \sqrt{3x+1}$; 6) $y = \frac{1}{x-2}$;

   7) $y = \frac{1}{x^2+5}$; 8) $y = \sin x$; 9) $y = tg2x$.

2. Дана функция $f(x) = 3x^2-4x+9$. Найти $f'(1)$.
3. Дана функция $f(x) = \sin 2x$. Найти $f'\left(\frac{\pi}{4}\right)$.
4. Дана функция $f(x) = ctg\frac{x}{2}$. Найти $f'(x)$, а затем вычислить $f'\left(\frac{\pi}{3}\right)$, $f'(\pi)$.
5. Дана функция $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Найти $f'\left(\frac{1}{8}\right)$, $f'(0)$.
6. Дана функция $f(x) = \sqrt[3]{x-1}$. Найти $f'(0)$, $f'(1)$.
7. Дана функция $\varphi(x) = \frac{8}{x}$. Показать, что $\varphi'(-2) = \varphi'(2)$.
8. Показать, что функция $y = |x|$ не дифференцируема в точке $x = 0$.

?

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение производной первого порядка.
2. Какая функция называется дифференцируемой? Какая функция называется не дифференцируемой Что называется дифференциалом первого порядка?
3. Сформулируйте определение дифференциала функции.
4. В чем заключается инвариантность формы первого дифференциала.
5. Сформулируйте общее правило нахождения производной функции.

Практическая работа № 4.

Вычисление производных и дифференциала функции (решение задач)

Цель: Формирование навыков вычисления производных сложных функций
На выполнение практической работы отводится 2 часа
Требования к выполнению практической работы:
1.Ответить на теоретические вопросы
2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

Вычисление производных сложных функций

Пусть $y = y(u)$ и $u = u(x)$ - дифференцируемые функции. Тогда сложная функция $y = (u(x))$ есть также дифференцируемая функция, причем

$y'_x = y'_u \cdot u'_x$, или $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ (1)

Это правило распространяется на цепочку из любого количества дифференцируемых функций: производная сложной функции равна произведению производных функций, ее составляющих.

Пример

Задание: Найдите производные функций: 1) $y = \ln(x^3 - 3x^2 + 4x)$;

2) $y = \cos^2 \dfrac{x}{6}$.

Решение: 1) Предположим, что $y = \ln u$, где $u = x^3 - 3x^2 + 4x$. Тогда по формуле (1) найдем

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = \frac{1}{u} \cdot (3x^2 - 6x + 4) = \frac{3x^2 - 6x + 4}{x^3 - 3x^2 + 4x}.$$

2) Предполагая, что $y = u^2$, $u = \cos v$, $v = \dfrac{x}{6}$, получим

$$y'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x = 2u \cdot (-\sin v)\frac{1}{6} = -\frac{1}{3}\cos\frac{x}{6}\sin\frac{x}{6} = -\frac{1}{6}\sin\frac{x}{3}.$$

Задания для самостоятельной работы

Вычислить производные заданных функций:

1) $y = \sin(2x - 1)$; 2) $y = (5x + 2)^4$; 3) $y = \arcsin\dfrac{x}{2}$;

4) $y = \cos x^2$; 5) $y = arctg(3 - x^2)$; 6) $y = \sin arcctgx$;

7) $y = \dfrac{2}{\cos 5x}$; 8) $y = e^{2^x}$; 9) $y = \dfrac{\sin x^2}{x}$;

10) $y = arctg\dfrac{1}{\sqrt{x}}$; 11) $y = \cos\dfrac{x}{x+1}$; 12) $y = (x - 2)\cdot\sqrt{x^2 + 1}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение производной функции.
2. Перечислите правила нахождения производной функции.
3. Какие функции называются дифференцируемыми?
4. Какая функция называется сложной?
5. Как найти производную сложной функции?

Практическая работа № 5.

Вычисление интегралов (решение задач)

Цель: Формирование навыков нахождения неопределенных интегралов методами замены переменной и по частям. Формирование навыков вычисления определенного интеграла при помощи формулы Ньютона – Лейбница

На выполнение практической работы отводится 2 часа

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы

2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

Интегрирование заменой переменной и по частям в неопределенном интеграле

Проинтегрировать функцию $f(x)$ - значит найти ее неопределенный интеграл. Непосредственное интегрирование основано на прямом использовании основных свойств неопределенного интеграла и таблицы простейших интегралов.

В основе интегрирования способом подстановки (или замены переменной) лежит свойство инвариантности формул интегрирования, которое заключается в следующем: если $\int f(x)dx = F(x) + C$, то $\int f(u)du = F(u) + C$, где $u(x)$ - произвольная дифференцируемая функция от x.

Замена переменной в неопределенном интеграле производится с помощью подстановок следующих двух типов:

$x = \varphi(t)$ - где t - новая переменная, а $\varphi(t)$ - непрерывно дифференцируемая функция. В этом случае формула замены переменной такова:

$$\int f(x)dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt \qquad (1)$$

Функцию $\varphi(t)$ стараются выбирать таким образом, чтобы правая часть формулы (1) приобрела более удобный для интегрирования вид;

$t = \psi(x)$, где t - новая переменная. В этом случае формула замены переменной имеет вид

$$\int f(\psi(x))\psi'(x)dx = \int f(t)dt \qquad (2)$$

Интегрированием по частям называется нахождение интеграла по формуле

$$\int udv = uv - \int vdu, \qquad (3)$$

где u и v - непрерывно дифференцируемые функции от x. С помощью формулы (3) отыскание интеграла $\int udv$ сводится к нахождению другого интеграла $\int vdu$, ее применение целесообразно в тех случаях, когда последний интеграл либо проще исходного, либо ему подобен.

При этом в качестве u берется функция, которая при дифференцировании упрощается, а в качестве dv - та часть подынтегрального выражения, интеграл от которой известен или может быть найден.

Так, при нахождении интегралов вида

$$\int P(x)e^{ax}dx, \quad \int P(x)\sin axdx, \quad \int P(x)\cos axdx$$

за u следует принять многочлен $P(x)$, а за dv - соответственно выражения $e^{ax}dx$, $\sin axdx$, $\cos axdx$; при отыскании интегралов вида

$$\int P(x)\ln xdx, \quad \int P(x)\arcsin axdx, \quad \int P(x)\arccos axdx$$

за u принимаются соответственно функции $\ln x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, а за dv - выражение $P(x)dx$.

Примеры

Найти интегралы: 1) $\int \sin 3xdx$; 2) $\int (x-5)\cos xdx$.

<u>Решение:</u> 1) Данный интеграл окажется табличным, если под знаком дифференциала будет находиться аргумент $3x$ подынтегральной функции $\sin 3x$. Так как $d(3x)=3dx$, то $\int \sin 3xdx = \frac{1}{3}\int \sin 3xd(3x)$. Следовательно, подстановка $3x=t$ приводит рассматриваемый интеграл к табличному: $\int \sin 3xdx = \frac{1}{3}\int \sin 3xd(3x) = \frac{1}{3}\int \sin tdt = -\frac{1}{3}\cos t + C$. Возвращаясь к старой переменной x, окончательно получим $\int \sin 3xdx = -\frac{1}{3}\cos 3x + C$.

2) Предполагая $u = x-5$, $dv = \cos xdx$, найдем $du = dx$, $v = \int \cos xdx = \sin x$. Следовательно,

$$\int (x-5)\cos xdx = (x-5)\sin x - \int \sin xdx = (x-5)\sin x + \cos x + C.$$

Вычисление определенных интегралов

Функция, $f(x)$ интегрируемая на промежутке $[a;b]$, если при любых разбиениях $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ промежутка $[a;b]$, таких, что $\Delta x = \max\limits_{1\le k\le n} \Delta x_k \to 0$ при произвольном выборе точек ξ_k (где $x_{k-1} \le \xi_k \le x_k$), сумма $\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot \Delta x_k$ при $n \to \infty$ стремится к пределу S.

Предел $S=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x$ называют определенным интегралом от функции $f(x)$ на промежутке $[a;b]$ и обозначают $\int\limits_a^b f(x)dx$, то есть $S=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\sum\limits_{k=1}^{n} f(\xi_k)\cdot\Delta x=\int\limits_a^b f(x)dx$.

Число a называется нижним пределом интеграла, b - верхним. Промежуток $[a;b]$ называется промежутком интегрирования, x - переменной интегрирования.

Для вычисления определенного интеграла от функции $f(x)$ в том случае, когда можно найти соответствующий неопределенный интеграл $F(x)$, служит формула Ньютона – Лейбница: $\int\limits_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b=F(b)-F(a)$. То есть определенный интеграл равен разности значений первообразной при верхнем и нижнем пределах интегрирования.

Примеры

Вычислить следующие определенные интегралы:

1) $\int\limits_0^1 xdx$; 2) $\int\limits_2^3 x^2dx$; 3) $\int\limits_{-1}^2 (x^2+2x+1)dx$.

Решение: 1) $\int\limits_0^1 xdx=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2}\cdot(1^2-0^2)=\frac{1}{2}$;

2) $\int\limits_2^3 x^2dx=\frac{x^3}{3}\Big|_2^3=\frac{1}{3}\cdot(3^3-2^3)=\frac{19}{3}$;

3) $\int\limits_{-1}^2 (x^2+2x+1)dx=\left[\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]\Big|_{-1}^2=\left(\frac{2^3}{3}+2^2+2\right)-$

$$-\left(\frac{1}{3}\cdot(-1)^3+(-1)^2+(-1)\right)=\left(\frac{8}{3}+4+2\right)-\left(-\frac{1}{3}+1-1\right)==\frac{8}{3}+6+\frac{1}{3}-1+1=\frac{9}{3}+6=3+6=9.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найти интегралы методом непосредственного интегрирования:

1) $\int x^7dx$; 2) $\int\frac{dx}{x^5}$;

3) $\int(x^4-4x^3+2x)dx$; 4) $\int\frac{1-6x+4x^2}{x^2}dx$;

5) $\int\frac{x^3+8}{x^2-2x+4}dx$; 6) $\int 7^x dx$;

7) $\int 8\cos x dx$; 8) $\int \frac{\sin x}{9} dx$;

9) $\int \frac{x^2-7}{9-x^2} dx$

2. Найти интегралы способом подстановки:

1) $\int \cos 5x dx$; 2) $\int (12x-5)^7 dx$; 3) $\int \sqrt{8x+9} dx$;

4) $\int \frac{dx}{6x+5}$; 5) $\int 6^{5x+2} dx$; 6) $\int e^{4-3x} dx$;

7) $\int \sin x \cos^2 x dx$; 8) $\int \frac{10x-3x^2}{x^3-5x^2} dx$; 9) $\int \cos^2 x dx$.

3. Найдите интегралы при помощи интегрирования по частям:

1) $\int (x-7)\sin x dx$; 2) $\int x^2 \cos x dx$; 3) $\int e^{2x} \cos x dx$;

4) $\int 4^x \sin x dx$; 5) $\int \sqrt{4+x^2} dx$; 6) $\int \cos\sqrt{x} dx$.

4. Вычислить определенные интегралы:

$\int_2^3 x^3 dx$; 2) $\int_1^{16} \sqrt{x} dx$; 3) $\int_{\frac{1}{3}}^{1} \frac{dx}{x^2}$;

4) $\int_{\frac{1}{e}}^{\frac{1}{\sqrt{e}}} \frac{dx}{x}$; 5) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x \sin 7x dx$ 6) $\int_{-1}^{1} (6x^2-2x-5) dx$;

7) $\int_1^{e^2} \frac{2\sqrt{x}+5-7x}{x} dx$; 8) $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin 3x dx$;

9) $\int_3^4 \frac{dx}{25-x^2}$; 10) $\int_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2+1}}$; 11) $\int_1^4 \frac{dx}{x^2-2x+10}$;

12) $\int_0^2 \frac{xdx}{x^4-9}$; 13) $\int_{\frac{\pi}{12}}^{\frac{\pi}{6}} ctg2xdx$; 14) $\int_{\frac{1}{3}}^{3} xe^{3x}dx$;

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется первообразной? Перечислите свойства первообразной функции.
2. Что называется неопределенным интегралом?
3. Какие свойства неопределенного интеграла вы знаете?
4. Перечислите основные формулы интегрирования.
5. Какие методы интегрирования вы знаете? В чем заключается их сущность?
6. Что называется интегральной суммой для функции на отрезке?
7. Дайте определение определенного интеграла.
8. Сформулируйте основные свойства определенного интеграла.
9. В чем заключается суть формулы Ньютона – Лейбница?

Практическая работа № 6.

Вычисление интегралов (решение задач)

Цель: Формирование навыков вычисления площадей фигур с помощью определенных интегралов

На выполнение практической работы отводится 2 часа

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы

2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

Вычисление площадей фигур с помощью определенных интегралов

Определенный интеграл широко применяется при вычислениях различных геометрических фигур и физических величин.

Найдем площадь S криволинейной трапеции, ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox и двумя прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a \le x \le b$, $f(x) \ge 0$ (рис. 1).

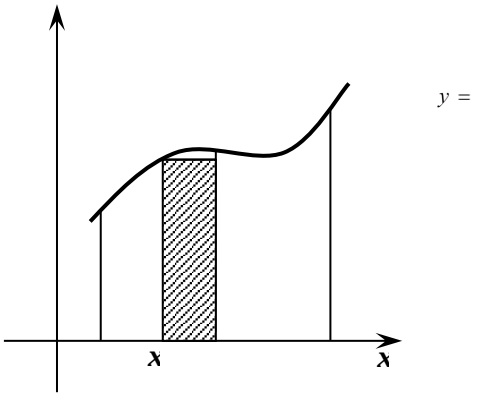
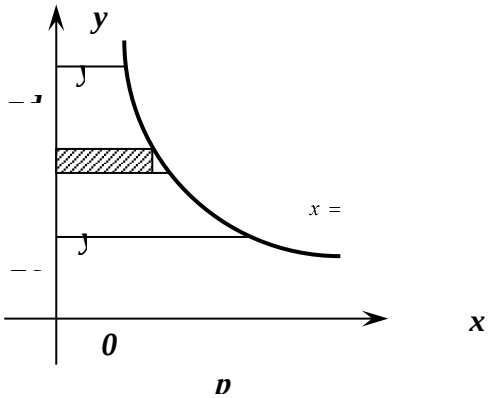


рис. 1

Так как дифференциал переменной площади S есть площадь прямоугольника с основанием dx и высотой $f(x)$, то есть $dS = f(x)dx$, то, интегрируя это равенство в пределах от a до b, получим $S = \int_a^b f(x)dx$.

Если криволинейная трапеция прилегает к оси Oy так, что $c \le x \le d$, $x = \varphi(y) \ge 0$ (рис. 2), то дифференциал переменной площади S равен $dS = f(y)dy$, откуда $S = \int_c^d \varphi(y)dy$.



p

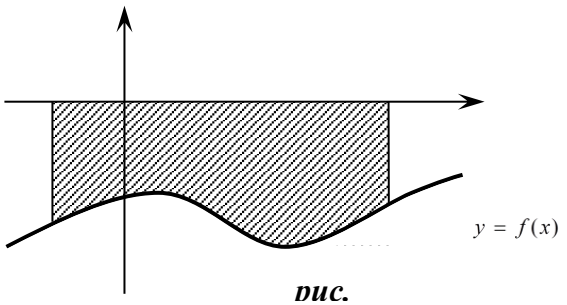
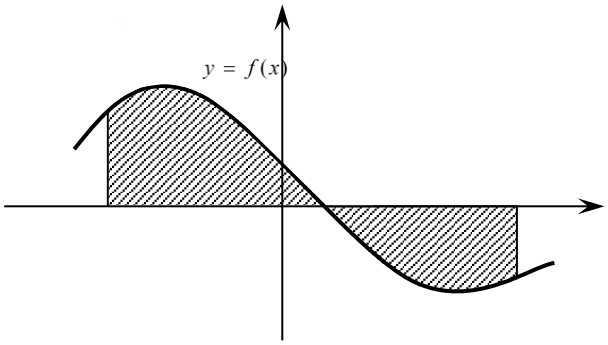


рис.

В том случае, когда криволинейная трапеция, ограниченная кривой $y = f(x)$, осью Ox и

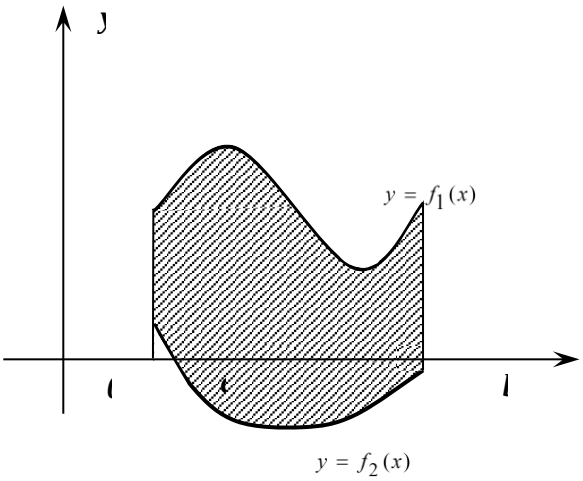


р

прямыми $x = a$ и $x = b$, лежит под осью Ox (рис.3), площадь находится по формуле $S = \int_a^b |f(x)|dx$

.

Если фигура, ограниченная кривой $f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, расположена по обе стороны от оси Ox (рис. 4), то



р

, $S = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b |f(x)|dx$.

Пусть фигура S ограничена двумя пересекающимися кривыми $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$, и прямыми $x = a$ и $x = b$, где $a \le x \le b$ и $f_1(x) \le f_2(x)$ (рис. 5). Тогда ее площадь находится по формуле $S = \int_a^b [f_2(x) - f_1(x)]dx$.

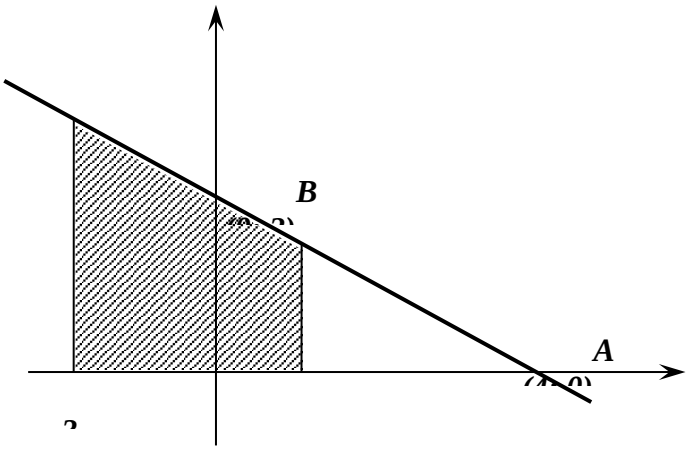
Примеры

<u>Задание:</u>Вычислить площади фигур, ограниченных указанными линиями:

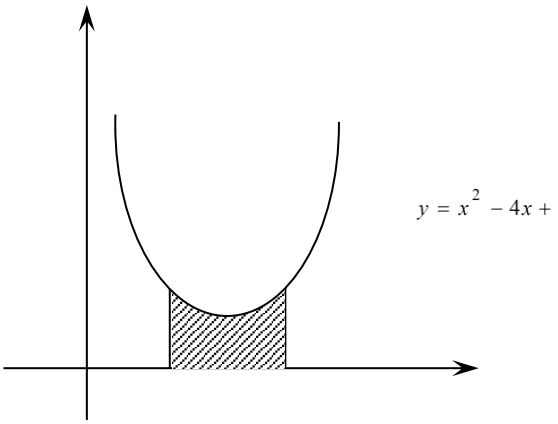
1) $x + 2y - 4 = 0$, $y = 0$, $x = -3$ и $x = 2$;

2) $y = x^2 - 4x + 5$, $y = 0$, $x = 1$ и $x = 3$.

<u>Решение:</u> 1) Строим прямую $x + 2y - 4 = 0$ по двум точкам $A(4; 0)$ и $B(0; 2)$.



Выразим y через x, получим $y = -0{,}5x + 2$. Найдем площадь полученной фигуры:



$$S = \int_{-3}^{2}(-0{,}5x+2)dx = \left[-0{,}25x^2+2x\right]\Big|_{-3}^{2} = 11{,}25$$

Ответ: $S = 11{,}25$ *кв. ед.*

2) $y = x^2 - 4x + 5$ - квадратичная функция; $D(y) = R$; график – парабола, ветви направлены вверх. Найдем координаты вершины параболы: $x_0 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-4}{2} = 2$, отсюда следует, что $y = 4 - 8 + 5 = 1$. Таким образом, вершина параболы имеет координаты: $(2;1)$. Найдем площадь полученной фигуры:

$$S = \int_{1}^{3}\left(x^2 - 4x + 5\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 5x\right)\Bigg|_{1}^{3} = (9 - 18 + 15) - \left(\frac{1}{3} - 2 + 5\right) = 6 - 3 - \frac{1}{3} = 2\frac{2}{3}.$$

Ответ: $S = 2\frac{2}{3}$ *кв. ед.*

Задания для самостоятельной работы

1. Найти площадь фигуры, ограниченной прямыми $y = -4x$, $x = -3$, $x = -1$ и осью абсцисс.
2. Найти площадь фигуры, заключенной между осями координат и прямыми $2x - y + 3 = 0$ и $y = 4$.
3. Найти площадь фигуры, ограниченной ветвью гиперболы $y = -\frac{2}{x}$ и прямыми $x = 1$, $x = 5$.
4. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y = 6x - x^2$, прямыми $x = -1$, $x = 3$ и осью абсцисс.
5. Найти площадь фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - 4x + 3$, осями координат и прямой $x = 4$.
6. Найти площадь фигуры, заключенной между прямыми $y = 2x$, $y = 5x$, $x = 2$ и $x = 6$.
7. Найти площадь фигуры, отсекаемой от параболы $y = 3x - x^2$ прямой $5x - y - 8 = 0$.
8. Вычислить площадь фигуры, ограниченной параболой $y^2 = 16x$ и прямой $y = x$.
9. Найти площадь фигуры, заключенной между параболами $y = 8x - x^2$ и $y = x^2 + 18x - 12$.
10. Вычислить площадь фигуры, заключенной между кривыми $y = 6x^2$ и $y = 2x^3$.

Вопросы для самоконтроля:

1. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, находящейся над осью Ox?
2. По какой формуле вычисляется площадь фигуры прилегающей к оси Oy?
3. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, находящейся под осью Ox?
4. По какой формуле вычисляется площадь фигуры расположенной по обе стороны оси Ox?
5. По какой формуле вычисляется площадь фигуры, ограниченной двумя пересекающимися кривыми?

Практическая работа № 7.

Решение прикладных задач с помощью дифференциальных уравнений

Цель: Формирование навыков решения дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными; однородных дифференциальных уравнений первого порядка и линейных дифференциальных уравнений первого порядка

На выполнение практической работы отводится 2 часа

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы

2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

Решение дифференциальных уравнений первого порядка с разделяющимися переменными; однородных дифференциальных уравнений первого порядка и линейных дифференциальных уравнений первого порядка

Дифференциальным уравнением называется уравнение, связывающее между собой независимую переменную x, искомую функцию y и ее производные или дифференциалы.

Символически дифференциальное уравнение записывается так:

$F(x, y, y') = 0$, $F(x, y, y'') = 0$, $F(x, y, y', y'', ..., y^{(n)}) = 0$.

Дифференциальное уравнение называется обыкновенным, если искомая функция зависит от одного независимого переменного.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной (или дифференциала), входящей в данное уравнение.

Решением (или интегралом) дифференциального уравнения называется такая функция, которая обращает это уравнение в тождество.

Общим решением (или общим интегралом) дифференциального уравнения называется такое решение, в которое входит столько независимых произвольных постоянных, каков порядок уравнения. Так, общее решение дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную.

Частным решением дифференциального уравнения называется решение, полученное из общего при различных числовых значениях произвольных постоянных. Значения произвольных постоянных находятся при определенных начальных значениях аргумента и функции.

Дифференциальным уравнением первого порядка называется уравнение, в которое входят производные (или дифференциалы) не выше первого порядка.

Дифференциальным уравнением с разделяющимися переменными называется уравнение вида

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot \varphi(y).$$

Для решения этого уравнения нужно сначала разделить переменные:

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx,$$

а затем проинтегрировать обе части полученного равенства:

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx.$$

Уравнение вида $\frac{dy}{dx} + f(x)y + \varphi(x) = 0$, где $f(x)$ и $\varphi(x)$ - функции от x, называется линейным дифференциальным уравнением первого порядка. В частности $f(x)$ и $\varphi(x)$ могут быть постоянными величинами.

Это уравнение приводится к уравнению с разделяющимися переменными с помощью подстановки $y = uz$, где u и z - новые функции от x.

Примеры

<u>Задание 1:</u> Найдите общее решение уравнения $x \cdot (1 + y^2)dx = ydy$.

<u>Решение:</u> Разделив переменные, имеем $xdx = \frac{ydy}{1+y^2}$. Интегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int xdx = \int \frac{ydy}{1+y^2}; \qquad \frac{x^2}{2} = \frac{1}{2}\ln(1+y^2) + \frac{1}{2}\ln C.$$

Так как произвольная постоянная C может принимать любые числовые значения, то для удобства дальнейших преобразований вместо C мы написали $\frac{1}{2}\ln C$. Потенцируя последнее равенство, получим $x^2 = \ln[C \cdot (1+y^2)]$.

Это и есть общее решение данного уравнения.

<u>Задание 2:</u> Найти частное решение уравнения $s \cdot tg\, t\, dt + ds = 0$, удовлетворяющее начальным условиям $s = 4$ при $t = \frac{\pi}{3}$.

<u>Решение:</u> Разделив переменные, имеем $tg\, t\, dt + \frac{ds}{s} = 0$. Проинтегрируем обе части полученного уравнения:

$$\int tg\, t\, dt + \int \frac{ds}{s} = \ln C; \qquad -\ln\cos t + \ln s = \ln C,$$

или

$\ln s = \ln C + \ln\cos t$, $\qquad s = C\cos t$.

Это общее решение данного уравнения. Для нахождения значения произвольной постоянной C подставим значения $t = \frac{\pi}{3}$ и $s = 4$ в выражение для общего решения: $4 = C\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)$, или $4 = \frac{C}{2}$, откуда $C = 8$.

Следовательно, искомое частное решение, удовлетворяющее указанным начальным условиям, имеет вид $s = 8\cos t$.

<u>Задание 3:</u> Найдите общее решение уравнения $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^3$.

<u>Решение:</u> Это линейное уравнение: здесь $f(x) = -\frac{2}{x+1}$, $\varphi(x) = -(x+1)^3$. Положим $y = uz$ и продифференцируем это равенство по x:

$$\frac{dy}{dx} = u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dz}.$$

Подставив теперь выражения для y и $\frac{dy}{dx}$ в данное уравнение, получим

$$u\frac{dz}{dx} + z\frac{du}{dz} - \frac{2uz}{x+1} = (x+1)^3,$$

или

$$u\frac{dz}{dx} + z\left(\frac{du}{dz} - \frac{2u}{x+1}\right) = (x+1)^3. \qquad (*)$$

Так как одну из вспомогательных функций u или z можно выбрать произвольно, то в качестве u возьмем одно из частных решений уравнения $\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1} = 0$. Разделив в этом уравнении переменные и проинтегрируя, имеем $\frac{du}{dx} - \frac{2u}{x+1} = 0$, $\int\frac{du}{u} = 2\int\frac{dx}{x+1}$; $\ln u = 2\ln(x+1)$,

$u = (x+1)^2$ (произвольную постоянную C принимаем равной нулю, так как находим одно из частных решений).

Подставим теперь выражение для u в уравнение $(*)$; тогда получим уравнение $(x+1)^2 \cdot \frac{dz}{dx} = (x+1)^3$, или $\frac{dz}{dx} = x+1$.

Отсюда находим $\int dz = \int (x+1)dx$; $\quad z = \frac{(x+1)^2}{2} + C$.

Зная u и z, теперь получим общее решение данного уравнения:

$$y = uz = (x+1)^2 \cdot \left[\frac{(x+1)^2}{2} + C \right] = \frac{(x+1)^4}{2} + C \cdot (x+1)^2 .$$

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите общее решение уравнений:

1) $x^2 dx = 3y^2 dy$; 2) $\sqrt{x} dy = \sqrt{y} dx$; 3) $\frac{dy}{\sqrt{x}} = \frac{3dx}{\sqrt{y}}$;

4) $(1+y)dx = (x-1)dy$; 5) $xydx = (1+x^2)dy$;

6) $y^2 dx + (x-2)dy = 0$; 7) $x^2 dy - (2xy + 3y)dx = 0$;

8) $(x^2 - yx^2)dy + (y^2 + xy^2)dx = 0$.

2. Найдите частные решения уравнений, удовлетворяющие указанным начальным условиям:

1) $ydy = xdx$; $y = 4$ при $x = -2$;

2) $xdy = ydx$; $y = 6$ при $x = 2$;

3) $ds = (3t^2 - 2t)dt$; $s = 4$ при $t = 2$;

4) $\frac{dy}{x^2} = \frac{dx}{y^2}$; $y = 2$ при $x = 0$;

5) $\frac{dy}{x-1} = \frac{dx}{y-2}$; $y = 4$ при $x = -2$;

6) $(1+y)dx = (1-x)dy$; $y = 3$ при $x = -2$;

7) $(1+x)ydx + (1-y)xdy = 0$; $y = 1$ при $x = 1$.

3. Найдите общие решения уравнения:

1) $\frac{dy}{dx} - 2y - 3 = 0$; 2) $\frac{dy}{dx} = y + 1$;

3) $x\frac{dy}{dx} - x^2 + 2y = 0$; 4) $\frac{dy}{dx} + xy = x$;

5) $\frac{dy}{dx} - \frac{2y}{x+1} = (x+1)^2$; 6) $\frac{dy}{dx} - y\,ctgx = \sin x$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какое уравнение называется дифференциальным?
2. Что называется решением дифференциального уравнения?
3. Какое решение дифференциального уравнения называется общим?
4. Какое решение дифференциального уравнения называется частным?
5. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями первого порядка?
6. Какие дифференциальные уравнения называются уравнениями с разделяющимися переменными?

Практическая работа № 8.

Разложение в ряд Фурье некоторых, часто встречающихся при изучении радиотехники, функций

Цель: Формирование навыков нахождения суммы ряда по определению и исследования сходимости положительных рядов
На выполнение практической работы отводится 2 часа
Требования к выполнению практической работы:
1.Ответить на теоретические вопросы
2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал
Нахождение суммы ряда по определению.
Исследование сходимости положительных рядов

Числовым рядом называется сумма вида

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... , \qquad (1)$$

где числа a_1, a_2, a_3, …, a_n, …, называемые членами ряда, образуют бесконечную последовательность; член a_n называется общим членом ряда.

Суммы

$S_1 = a_1$,

$S_2 = a_1 + a_2$,

$S_3 = a_1 + a_2 + a_3$,

……

$S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$,

составленные из первых членов рядя (1), называются частичными суммами этого ряда.

Каждому ряду можно сопоставить последовательность частичных сумм S_1, S_2, S_3, …, S_n …. Если при бесконечном возрастании номера n частичная сумма ряда S_n стремится к пределу S, то ряд называется сходящимся, а число S - суммой сходящегося ряда, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = S$ или $\lim\limits_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n) = S$. Эта запись равносильна записи $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... = S$.

Если частичная сумма S_n ряда (1) при неограниченном возрастании n не имеет конечного предела (в частности, стремится к $+\infty$ или к $-\infty$), то такой ряд называется расходящимся.

Если ряд сходится, то значение S_n при достаточно большом n является приближенным выражением суммы ряда S .

Разность $r_n = S - S_n$ называется остатком ряда. Если ряд сходится, то его остаток стремится к нулю, то есть $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$, и наоборот, если остаток стремится к нулю, то ряд сходится.

Для знакоположительных числовых рядов имеет место признак сравнении, при помощи которого можно установить сходимость или расходимость.

<u>Признак сравнения</u>. Если члены положительного ряда

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n, \qquad (2)$$

начиная с некоторого номера, не превосходят соответствующих членов ряда

$$b_1 + b_2 + b_3 + \ldots + b_n, \qquad (3)$$

то из сходимости ряда (3) следует сходимости ряда (2), а из расходимости ряда (2) следует расходимость ряда (3).

При исследовании рядов на сходимость и расходимость по этому признаку часто используются геометрическая прогрессия $a + aq + aq^2 + aq^3 + \ldots + aq^n + \ldots \left(a > 0\right)$, которая сходится при $|q| < 1$ и расходится при $|q| \geq 1$, и гармонический ряд $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots$, являющийся расходящимся рядом.

Примеры

<u>Задание 1:</u>Найти сумму членов ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \frac{1}{1\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 5} + \frac{1}{5\cdot 7} + \ldots + \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} + \ldots$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots$.

<u>Решение:</u> 1) Находим частичные суммы членов ряда:

$S_1 = a_1 = \frac{1}{3}$; $\quad S_2 = a_1 + a_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{15} = \frac{2}{5}$; $\quad S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = \frac{2}{5} + \frac{1}{35} = \frac{3}{7}$;

$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{3}{7} + \frac{1}{63} = \frac{4}{9}$; ….

Запишем последовательность частичных сумм: $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{4}{9}$, …, $\frac{n}{2n+1}$, … . Общий член этой последовательности есть $\frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2 + \frac{1}{n}}$. Следовательно, $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{2 + \frac{1}{n}} = \frac{1}{2}$. Последовательность частичных сумм имеет предел, равный $\frac{1}{2}$. Итак, рая сходится и его сумма равна $\frac{1}{2}$.

2) Это бесконечно убывающая геометрическая прогрессия, в которой $a_1 = \frac{1}{2}$, $q = \frac{1}{2}$. Используя формулу $S = \frac{a_1}{1-q}$, получим $S = \frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 1$. Значит, ряд сходится и его сумма равна 1.

<u>Задание 2:</u> С помощью признака сравнения исследовать на сходимость ряды:

1) $\frac{1}{5\cdot 2} + \frac{1}{5\cdot 2^2} + \frac{1}{5\cdot 2^3} + \ldots + \frac{1}{5\cdot 2^n} + \ldots$;

2) $1 + \frac{1}{\sqrt[3]{2}} + \frac{1}{\sqrt[3]{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt[3]{n}} + \ldots$.

<u>Решение:</u> 1) Сравним данный ряд с рядом

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{2^n} + \ldots. \qquad (*)$$

Ряд $(*)$ сходится, так как его член образует бесконечно убывающую геометрическую прогрессию со знаменателем $q = \frac{1}{2}$. При это каждый член $a_n = \frac{1}{5\cdot 2^n}$ исследуемого ряда меньше соответствующего члена $b_n = \frac{1}{2^n}$ ряда $(*)$. Поэтому, согласно признака сравнения, данный ряд сходится.

2) Сравним данный ряд с гармоническим рядом

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} + \ldots. \qquad (**)$$

Каждый член $a_n = \frac{1}{\sqrt[3]{n}}$ исследуемого ряда, начиная со второго, больше соответствующего члена $b_n = \frac{1}{n}$ ряда $(**)$. Так как гармонический ряд расходится, то, согласно признаку сравнения, расходится и данный ряд.

Задания для самостоятельной работы

1. Найдите первые пять членов ряда по его заданному общему члену:

1) $a_n = \dfrac{n}{n+1}$; 2) $a_n = \dfrac{2n}{2n-1}$;

3) $a_n = \dfrac{2^n+3}{2^{n+1}}$; 4) $a_n = \dfrac{1+(-1)^{n+1}}{n}$;

5) $a_n = (-1)^{n-1} \cdot \dfrac{1}{2n+1}$; 6) $a_n = \dfrac{(n+1)!}{2n}$;

7) $a_n = (-1)^{n+1} \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{n}}$; 8) $a_n = \dfrac{1}{(3n-1)\cdot(2n+1)}$;

9) $a_n = \dfrac{n^2}{(n+1)\cdot(n+2)}$.

2. Найти формулу общего члена ряда по его данным первым членам:

1) $\dfrac{1}{2}+\dfrac{3}{5}+\dfrac{5}{6}+\dfrac{7}{8}+\ldots$; 2) $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{9}+\ldots$;

3) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{\sqrt[3]{2}}{1\cdot 2\cdot 3}+\dfrac{\sqrt[3]{3}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}+\dfrac{\sqrt[3]{4}}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}+\ldots$;

4) $\dfrac{2}{4}-\dfrac{4}{9}+\dfrac{6}{16}-\dfrac{8}{25}+\ldots$; 5) $\dfrac{2}{1}+\dfrac{4}{4}+\dfrac{8}{9}+\dfrac{16}{16}+\ldots$;

6) $\dfrac{1}{9}+\dfrac{1\cdot 2}{25}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3}{49}+\dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{81}+\ldots$;

7) $\dfrac{1}{3\cdot 6}+\dfrac{1}{5\cdot 8}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\dfrac{1}{9\cdot 12}+\ldots$; 8) $\dfrac{2}{5}-\dfrac{3}{8}+\dfrac{4}{11}-\dfrac{5}{14}+\ldots$.

3. Вычислите сумму членов ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot(n+1)} = \dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+1)}+\ldots$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)} = \dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{4\cdot 7}+\dfrac{1}{7\cdot 10}+\ldots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\ldots$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{4n^2-1} = \dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{15}+\dfrac{1}{35}+\ldots+\dfrac{1}{4n^2-1}+\ldots$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot(n+3)} = \dfrac{1}{1\cdot 4}+\dfrac{1}{2\cdot 5}+\dfrac{1}{3\cdot 6}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot(n+3)}+\ldots$

4. Пользуясь признаком сравнения, исследовать на сходимость следующие ряды:

1) $\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2\cdot 4^2}+\dfrac{1}{3\cdot 4^3}+\ldots+\dfrac{1}{n\cdot 4^n}+\ldots$;

2) $\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}+\ldots+\frac{1}{\ln n}+\ldots$;

3) $\frac{1}{8}+\frac{1}{7^2+1}+\frac{1}{7^3+1}+\ldots+\frac{1}{7^n+1}+\ldots$;

4) $\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{8}+\ldots+\frac{1}{3n-1}+\ldots$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется числовым рядом, членами ряда, общим членом ряда?
2. Что называют частичными суммами ряда?
3. Какой ряд называется сходящимся, расходящимся?
4. Что называется остатком ряда?
5. Сформулируйте признак сравнения для знакоположительного числового ряда.
6. Какие известные ряды используются при исследовании рядов на сходимость и расходимость?

Практическая работа № 9.

Разложение в ряд Фурье некоторых, часто встречающихся при изучении радиотехники, функций.

Цель: Формирование навыков исследования сходимости знакочередующихся рядов; исследования числовых рядов на абсолютную и условную сходимость

На выполнение практической работы отводится 2 часа

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы

2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

Исследование сходимости знакочередующихся рядов.

Исследование числовых рядов на абсолютную и условную сходимость

Числовой ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n + ... \qquad (1)$$

называется знакопеременным, если среди его членов имеются как положительные, так и отрицательные числа.

Числовой ряд (1) называется знакочередующимся, если любые два стоящие рядом члена имеют противоположные знаки. Этот ряд является частным случаем знакопеременного ряда.

<u>Признак сходимости Лейбница для знакочередующихся рядов.</u> Если члены знакочередующегося ряда (1) монотонно убывают по абсолютной величине и общий член a_n стремиться к нулю при $n \to \infty$, то ряд (1) сходится.

Этот признак служит достаточным признаком сходимости знакочередующихся рядов.

Знакопеременный ряд (1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$|a_1| + |a_2| + |a_3| + ... + |a_n| + ..., \qquad (2)$$

составленный из абсолютных величин его членов, то есть всякий абсолютно сходящийся ряд является сходящимся.

Если знакопеременный ряд (1) сходится, а составленный из абсолютных величин его членов ряд (2) расходится, то данный ряд (1) называется условно (неабсолютно) сходящимся. Заметим, что из расходимость ряда (2) в общем случае не следует расходимость ряда (1).

Для установления абсолютной сходимости знакопеременного (и знакочередующегося) ряда используются те же признаки, что и для сходимости ряда с положительными членами.

Для решения вопроса об абсолютной или условной сходимости знакочередующегося ряда необходимо рассмотреть ряд, составленный из абсолютных величин членов знакочередующегося ряда.

Если при исследовании этого ряда с помощью одного из признаков сходимости (признака Даламбера, признака сравнения рядов) ряд окажется сходящимся, то данный знакочередующийся ряд сходится абсолютно; если же ряд окажется расходящимся, то знакочередующийся ряд сходится условно.

Примеры

Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующийся ряд:

1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}+\ldots$;

2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{2n-1}=1-\frac{2}{3}+\frac{3}{5}-\frac{4}{7}+\ldots+(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{2n-1}+\ldots$;

3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{2^3}+\ldots+(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$;

4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}=-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+(-1)^{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$.

<u>Решение:</u> 1) Члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают: $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\frac{1}{4}>\ldots$ и $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. Следовательно, согласно признаку Лейбницу, ряд сходится. Выясним, сходится ли этот ряд абсолютно или условно.

Ряд $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$, составленный из абсолютных величин членов данного ряда, который, как, известно, расходится. Поэтому данный ряд сходится условно.

2) Члены данного ряда по абсолютной величине монотонно убывают $1>\frac{2}{3}>\frac{3}{5}>\frac{4}{7}>\ldots$, но $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2-\frac{1}{n}}=\frac{1}{2}\neq 0$. Ряд расходится, так как признак Лейбница не выполняется.

3) Используя признак Лейбница, получим $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{2^2}>\frac{1}{2^3}>\ldots$; $\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n-1}}=0$, то есть ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного ряда: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\ldots+\frac{1}{2^{n-1}}+\ldots$. Это геометрический ряд вида $\sum_{n=0}^{\infty}aq^n\ \left(q=\frac{1}{2}\right)$, который сходится. Поэтому данный ряд сходится абсолютно.

4) Используя признак Лейбница, имеем $1 > \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{\sqrt{3}} > \frac{1}{\sqrt{4}} > \ldots$; $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0$, то есть ряд сходится.

Рассмотрим ряд, составленный из абсолютных величин членов данного рада: $1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{4}}+\ldots+\frac{1}{\sqrt{n}}+\ldots$, или $1+\frac{1}{2^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{3^{\frac{1}{2}}}+\frac{1}{4^{\frac{1}{2}}}+\ldots+\frac{1}{n^{\frac{1}{2}}}+\ldots$. Это обобщенный гармонический ряд, который расходится, так как $p=\frac{1}{2}<1$. Следовательно, данный ряд сходится условно.

Задания для самостоятельной работы

1. Используя признак Лейбница, исследуйте сходимость знакочередующегося ряда:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{2n}$;

2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{4n-1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n}{6n-1}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(n+1)!}$.

2. Исследовать на сходимость (абсолютную или условную) знакочередующиеся ряды:

1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{(3n-1)^2}$;

2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{n-1}{2n+1}$;

3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$;

4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{n^{\frac{1}{4}}}$;

5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot\frac{1}{n\cdot 3^n}$;

6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(n+1)\cdot 2^n}$;

7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{(4n-1)^2}$;

8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{2n+1}{2^n}$;

9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\cdot\frac{1}{(3n+1)^2}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какой ряд называется знакопеременным?
2. Какой ряд называется знакочередующимся?
3. Сформулируйте признак Лейбница для знакочередующихся рядов.
4. Какой ряд называется абсолютно сходящимся, условно сходящимся?

5. Какие признаки используются для установления абсолютной сходимости знакопеременного ряда?

Практическая работа №10 .

Численные методы интегрирования и дифференцирования

Цель: Формирование навыков вычисления определенных интегралов методами прямоугольников, трапеций, вычисления производной функции с помощью формул: первого порядка точности, второго порядка точности для первой производной

На выполнение практической работы отводится 1 час

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы

2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

Численное интегрирование

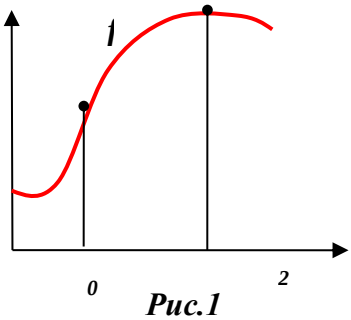


Рис.1

Требуется вычислить определенный интеграл:

$$I = \int_a^b f(x)dx \quad (1.1)$$

Если интеграл вычисляется, тогда можно применить формулу Ньютона-Лейбница:

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a). \qquad (1.2)$$

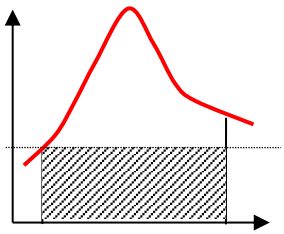
Когда f(x) сложная можно её аппроксимировать простыми формулами, например, построить интерполяционные полиномы по нескольким точкам.

Такая аппроксимация позволяет приближенно заменить определенный интеграл конечной суммой

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_0^n \alpha_i y_i, \qquad (1.3)$$

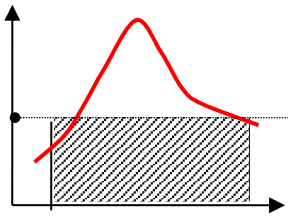
где y_i - значения функции в узлах интерполяции, α_i - числовые коэффициенты. Соотношение (1.3) называется квадратурной формулой, а его правая часть - квадратурной суммой. В зависимости от способа ее вычисления получаются разные методы численного интегрирования (квадратурные формулы) - методы прямоугольников, трапеций, парабол.

1.1. Метод прямоугольников



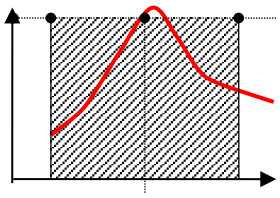
Различают метод левых, правых и средних прямоугольников. Суть метода ясна из рисунка. На каждом шаге интегрирования функция аппроксимируется полиномом нулевой степени – отрезком, параллельным оси абсцисс.

$I = (b-a) * f(a)$ - левая формула (формула левых прямоугольников).



. Пра-
ла

$I = (b-a) * f(b)$ - правая формула (формула правых прямоугольников).

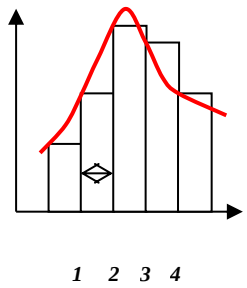


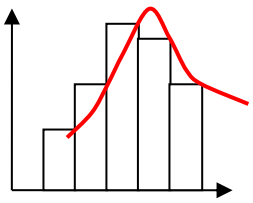
4. Цен-
фор-

$I = (b-a) * f(\frac{a+b}{2})$ - центральная формула (формула средних прямоугольников).

Для увеличения точности этих формул интервал $[a,b]$ можно разбить на несколько частей и для каждого участка применить эти формулы.

Интервал $[a,b]$ разобьем на п частей $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$.Тогда $h_i = x_i - x_{i-1}$ - шаг. Удобно работать, когда $h = \frac{b-a}{n} = const$.





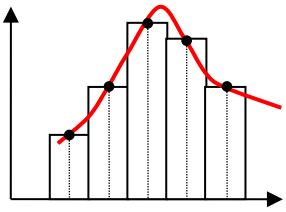


Рис. 5. Левая формула ***Рис. 6. Правая формула*** ***Рис. 7. Центральная фор-***

$$I = \sum_{i=1}^{n} S_i + \varepsilon_n^{ПУ} = h\sum_{i=1}^{n} f(x_i) + \varepsilon_n^{ПУ} \qquad (1.4)$$

(1.4) - формула прямоугольников.

Погрешность $\varepsilon_n^{ПУ}$ имеет порядок h ($\varepsilon_n^{ПУ} \sim O(h)$)

<u>Пример:</u> Требуется вычислить определенный интеграл методом прямоугольников:

$$I = \int_0^1 (x^2 + 1)dx$$

<u>Решение:</u> Выберем на отрезке интегрирования [0,1] n=8 различных узлов

$0=x_0<x_1<x_2<...< x_8 =1$

Шаг разбиения для равноотстоящих узлов $h = x_{i+1}-x_i$ определяем по формуле

$h = (b-a)/n = (1-0)/8 =0,125$

Тогда определенный интеграл приближенно можно вычислять по формуле прямоугольников

$$\int_0^1 (x^2+1)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$

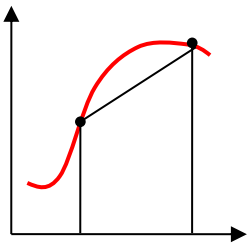
$$I = h\sum_{i=1}^{n}(x_i^2+1)$$

$$I = 0.125 * (f(0) + f(0.125) + \ldots + f(1)) = 1,273437$$

Таким образом, ответ: $I = 1,2734375 \approx 1,27$

1.2. Метод трапеций

Аппроксимация в этом методе осуществляется полиномом первой степени. Суть метода ясна из рисунка (рис. 8.). Функция аппроксимируется наклонной линией.



За значение интеграла принимается площадь трапеций.

$$I \approx \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a)$$

Рис. 8. Метод трапеций

Р

Если интервал $[a,b]$ разобьем на п частей

$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$,

где $h_i = x_i - x_{i-1}$ - шаг. Благодаря этому погрешность уменьшается (рис. 9).

Формула для метода трапеций записывается следующим образом:

$$I = \frac{h}{2}[f(x_0)+2(f(x_1)+f(x_2)+\ldots+f(x_{n-1}))+f(x_n)] \qquad (1.5)$$

Точность формулы имеет порядок h^2, $\varepsilon_n^{TP} = O(h^2)$. Это означает, что, если шаг уменьшить в 2 раза, то погрешность уменьшится в 4 раза.

Пример: Требуется вычислить определенный интеграл методом трапеций:

$$I = \int_0^1 (x^2+1)dx$$

Решение: Выб е интегрирования [0,1] n=8 различных узлов

$0=x_0<x_1<x_2<...< x_8 =1$

Шаг разбиения для равноотстоящих узлов $h = x_{i+1}-x_i$ определяем по формуле

$h = (b-a)/n = (1-0)/8 =0,125$

Тогда определенный интеграл приближенно можно вычислять по формуле трапеций

$$I = \frac{h}{2}[f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + \ldots + f(x_{n-1})) + f(x_n)]$$

Определенный интеграл вычислим по формуле трапеций

$$I = \frac{0,125}{2}[f(0) + 2(f(0.125) + f(0,25) + \ldots + f(0,75)) + f(0,875)] = 1,100585938$$

Таким образом, ответ: $I = 1,100585938 \approx 1,1005$

Задания для самостоятельной работы

(варианты заданий)

1. $\int \frac{\lg(x+2)}{x} dx;$ $a = 1.2, b = 2$
2. $\int (x+1)\sin x\, dx;$ $a = 1.6, b = 2.4$
3. $\int \frac{\operatorname{tg} x^2}{x^2+1} dx;$ $a = 0.2, b = 1$
4. $\int \frac{\cos x}{x+1} dx;$ $a = 0.6, b = 1.4$
5. $\int \sqrt{x}\cos x^2 dx;$ $a = 0.4, b = 1.2$
6. $\int \frac{\sin 2x}{x^2} dx;$ $a = 0.8, b = 1.2$
7. $\int \frac{\lg(x^2+1)}{x+1} dx;$ $a = 0.8, b = 1.6$
8. $\int \frac{\cos x}{x+2} dx;$ $a = 0.4, b = 1.2$
9. $\int (2x+0.5)\sin x\, dx;$ $a = 0.4, b = 1.2$
10. $\int \frac{tg(x^2+0.5)}{2x^2+1} dx;$ $a = 0.4, b = 0.8$
11. $\int \frac{\sin x}{x+1} dx;$ $a = 0.18, b = 0.98$
12. $\int (\sqrt{x}+1)\cos x^2\, dx;$ $a = 0.2, b = 1.8$
13. $\int x^2 \lg x\, dx;$ $a = 1.4, b = 3$
14. $\int \frac{\lg(x^2+0.5)}{x+1} dx;$ $a = 1.4, b = 2.2$

15. $\int \frac{dx}{\sqrt{3-3x^2}}$; $a=0, b=0.8$

16. $\int \frac{\cos x^2}{x+1} dx$; $a=0.4, b=1.2$

17. $\int (x^2+1)\sin(x-0.5)\, dx$; $a=0.8, b=1.6$

18. $\int x^2 \cos x\, dx$; $a=0.6, b=1.4$

19. $\int \frac{\lg(x^2+3)}{2x} dx$; $a=1.2, b=2$

20. $\int \frac{\lg(x^2+0.8)}{x-1} dx$; $a=2.5, b=3.3$

21. $\int \frac{\operatorname{tg} x^2}{x+1} dx$; $a=0.5, b=1.2$

22. $\int \frac{\sin(x^2-1)}{2\sqrt{x}} dx$; $a=1.3, b=2.1$

23. $\int (x+1)\cos x^2\, dx$; $a=0.2, b=1.0$

24. $\int \frac{\sin(x^2-0.4)}{x+2} dx$; $a=0.8, b=1.2$

25. $\int (\sqrt{x}+1)\lg(x+3)\, dx$; $a=0.15, b=0.63$

2. Численное дифференцирование

Производной функции $y=f(x)$ называется предел отношения приращения функции Δy к приращению аргумента Δx при стремлении Δx к нулю:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}, \qquad \Delta y = f(x+\Delta x) - f(x). \quad (2.1)$$

Компьютер не может работать с бесконечно малыми величинами, поэтому от бесконечно малой величины $\Delta x \to 0$ перейдем к бесконечно малому Δx, тогда:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} + O(\varepsilon), \text{ где } O(\varepsilon) \text{ - погрешность} \qquad (2.2)$$

Существует два подхода к численному дифференцированию:

конечноразностные формулы;

дифференцирование с помощью интерполяционных полиномов.

Рассмотрим разные формулы для вычисления производной в одной и той же точке:

$$\Delta y_1 = y_1 - y_0, \quad \Delta x = h, \quad y_1' \approx \frac{y_1 - y_0}{h} \qquad (2.3)$$

с помощью левых разностей;

$$\Delta y_1 = y_2 - y_1, \quad \Delta x = h, \quad y_1' \approx \frac{y_2 - y_1}{h} \qquad (2.4)$$

с помощью правых разностей;

$$\Delta y_1 = y_2 - y_0, \quad \Delta x = 2h, \quad y_1' \approx \frac{y_2 - y_0}{2h} \qquad (2.5)$$

с помощью центральных разностей.

Можно найти также выражения для старших производных.

$$y_1'' = \left(y_1'\right)' \approx \frac{y_2' - y_1'}{h} \approx$$
$$\approx \frac{\left(y_2 - y_1\right)/h - \left(y_1 - y_0\right)/h}{h} = \frac{y_2 - 2y_1 + y_0}{h^2}. \qquad (2.6)$$

Таким образом, используя формулу (2.2), можно найти приближенные значения производных любого порядка. Однако при этом остается открытым вопрос о точности полученных значений.

Задания для самостоятельной работы

(варианты заданий)

	x	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5
1	y	1.3694	1.2661	1.1593	1.0472	0.9273
2	y	0.3948	0.5830	0.7610	0.9272	1.0808
3	y	0.5482	0.5974	0.6248	0.6703	0.7340
4	y	1.9852	1.8264	1.7187	1.6056	1.4517
5	y	2.1622	2.3115	2.3647	2.4401	2.5124
6	y	1.4812	1.5519	1.6781	1.8385	1.9615
7	y	1.6452	1.5760	1.4573	1.3689	1.2108
8	y	2.8845	2.7214	2.6541	2.5168	2.4289
9	y	1.0654	1.1342	1.2074	1.2613	1.3317
10	y	0.2881	0.3506	0.4112	0.5049	0.6138
11	y	1.6485	1.5747	1.4209	1.3738	1.2564
12	y	2.8845	2.7315	2.6642	2.5702	2.4863
13	y	0.1751	0.2378	0.3416	0.4723	0.5206
14	y	1.5478	1.5976	1.6305	1.7205	1.8057
15	y	2.5170	2.4615	2.3843	2.2844	2.2063
16	y	0.9868	0.8546	0.7402	0.6241	0.5614
17	y	1.5578	1.4726	1.3620	1.2477	1.1623
18	y	0.4523	0.5148	0.6489	0.6920	0.8045
19	y	2.4385	2.5747	2.6302	2.7055	2.7605
20	y	1.9758	1.8373	1.7485	1.7103	1.6478
21	y	1.2678	1.3302	1.3974	1.4823	1.5648
22	y	0.3714	0.5280	0.6954	0.7783	0.8661
23	y	2.6553	2.5247	2.4175	2.2846	2.2016
24	y	1.7841	1.7175	1.6255	1.5469	1.3980
25	y	1.1754	1.2362	1.2981	1.3521	1.4167

Вопросы для самоконтроля:

1. В чем сходство и различия между методами прямоугольников, трапеций,
2. Симпсона? Чем эти методы отличаются от метода Монте-Карло?
3. Как влияет на точность интегрирования величина шага h?
4. Как можно прогнозировать примерную величину шага для достижения заданной
5. точности интегрирования?
6. Можно ли добиться неограниченного уменьшения погрешности интегрирования,
7. уменьшая величину шага?
8. Что называется левой, правой и центральной разностными производными? Какой
9. порядок аппроксимации обеспечивают разностные производные?
10. Почему операцию вычисления разностных отношений называют некорректной?
11. Как строятся формулы численного дифференцирования, основанные на
12. применении интерполяционного многочлена?
13. Какой порядок аппроксимации обеспечивают эти формулы численного
14. дифференцирования?

Практическая работа № 11.

Решения дифференциальных уравнений 1-го порядка

Цель: Формирование навыков решения обыкновенных дифференциальных уравнений методами Эйлера, модификации Эйлера, Рунге-Кутта

На выполнение практической работы отводится 2 часа

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы

2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

Решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений

Пусть требуется решить задачу Коши для уравнения первого порядка:

$y'=f(x,y), \qquad y(x_0)=y_0 \qquad (3.1)$

на отрезке [a,b].

На данном отрезке выбираем некоторую совокупность узловых точек $a=x_0<x_1<x_2<\ldots<x_n=b$ и разложим искомую функцию y(x) в ряд Тейлора в их окрестностях.

1. Метод Эйлера

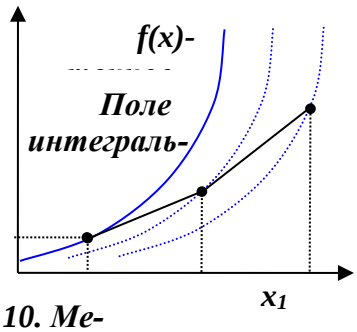


Рис. 10. Метод Эйлера

Если отбросить все члены, содержащие производные второго и более высоких порядков, и считать узлы равностоящими, т.е. $\Delta x_i=x_{i+1}-x_i=h$, то это разложение можно записать в виде:

$$y(x_{i+1}) = y_{i+1} = y_i + h\, f(x_i,y_i), \qquad (3.2)$$

$$i=0,1,\ldots,n-1.$$

Соотношения (3.2) имеют вид рекуррентных формул, с помощью которых значение сеточной функции y_{i+1} в любом узле x_{i+1} вычисляется по ее значению y_i в предыдущем узле x_i. На каждом шаге погрешность имеет порядок $O(h^2)$. На рис. 10 дана геометрическая интерпретация метода Эйлера. В силу невысокой точности формулой Эйлера редко пользуются в практических расчетах и используют более точные методы. Например, модифицированный метод Эйлера.

Пример: Решить задачу Коши методом Эйлера для дифференциального уравнения

$y' = x^2 + 2*y$, y(0)= 1 на отрезке [0;0,4] с

шагом 0,1.

Решение: По формуле (3.2) вычислим значение y_1

$y_1 = y_0 + h\, f(x_0,y_0) = 1 + 0{,}1\,(0^2 + 2*1) = 1{,}2$

Аналогично вычисляются последующие значения функции в узловых точках

$y_2 = y_1 + h\, f(x_1,y_1)=1{,}2+0{,}1\cdot(0{,}1^2+2*1{,}2) = 1{,}441$

$y_3 = y_2 + h\ f(x_2,y_2)=1{,}441+0{,}1\cdot(0{,}2^2+2*1{,}441) = 1{,}733$

$y_4 = y_3 + h\ f(x_3,y_3)=1{,}7332+0{,}1\cdot(0{,}3^2+2*1{,}7332) =2{,}089$

Сеточную функцию записываем в виде таблицы

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,2	1,441	1,7332	2,089

Задания для самостоятельной работы

(варианты заданий)

1. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{5}});\ y(1{,}8) = 2{,}6;\ x \in [1{,}8;2{,}8].$

2. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{3}});\ y(1{,}6) = 4{,}6;\ x \in [1{,}6;2{,}6].$

3. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{10}});\ y(0{,}6) = 0{,}8;\ x \in [0{,}6;1{,}6].$

4. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{7}});\ y(0{,}5) = 0{,}6;\ x \in [0{,}5;1{,}5].$

5. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{\pi}});\ y(1{,}7) = 5{,}3;\ x \in [1{,}7;2{,}7].$

6. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{2{,}25}});\ y(1{,}4) = 2{,}2;\ x \in [1{,}4;2{,}4].$

7. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{e}});\ y(1{,}4) = 2{,}5;\ x \in [1{,}4;2{,}4].$

8. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{2}});\ y(0{,}8) = 1{,}4;\ x \in [0{,}8;1{,}8].$

9. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{3}});\ y(1{,}2) = 2{,}1;\ x \in [1{,}2;2{,}2].$

10. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{11}});\ y(2{,}1) = 2{,}5;\ x \in [2{,}1;3{,}1].$

11. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{5}});\ y(1{,}8) = 2{,}6;\ x \in [1{,}8;2{,}8].$

12. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{3}});\ y(1{,}6) = 4{,}6;\ x \in [1{,}6;2{,}6].$

13. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{10}});\ y(0{,}6) = 0{,}8;\ x \in [0{,}6;1{,}6].$

14. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{7}});\ y(0{,}5) = 0{,}6;\ x \in [0{,}5;1{,}5].$

15. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{\pi}}); y(1,7) = 5,3; x \in [1,7;2,7].$

16. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{2,8}}); y(1,4) = 2,2; x \in [1,4;2,4].$

17. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{e}}); y(1,4) = 2,5; x \in [1,4;2,4].$

18. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{2}}); y(0,8) = 1,3; x \in [0,8;1,8].$

19. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{3}}); y(1,1) = 1,5; x \in [1,1;2,1].$

20. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{11}}); y(0,6) = 1,2; x \in [0,6;1,6].$

21. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{1,25}}); y(0,5) = 1,8; x \in [0,5;1,5].$

22. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{15}}); y(0,2) = 1,1; x \in [0,2;1,2].$

23. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{1,3}}); y(0,1) = 0,8; x \in [0,1;1,1].$

24. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{0,3}}); y(0,5) = 0,6; x \in [0,5;1,5].$

25. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{0,7}}); y(1,2) = 1,4; x \in [1,2;2,2].$

.2. Модифицированный метод Эйлера

Модифицированный метод Эйлера позволяет уменьшить погрешность на каждом шагу до величины $O(h^3)$ вместо $O(h^2)$ в обычном методе (3.2). Запишем разложение функции в ряд Тейлора в виде:

$$y_{i+1} = y_i + h\, y'_i + h^2/2\, y''_i + O(h^3). \qquad (3.3)$$

Аппроксимируем вторую производную с помощью отношения конечных разностей: $y''_i = (y'_{i+1} - y'_i) / h$.

Подставляя это соотношение в (3.3) и пренебрегая членами порядка $O(h^3)$, получаем

$$y_{i+1} = y_i + h/2\, [f(x_i,y_i) + f(x_{i+1},y_{i+1})]. \qquad (3.4)$$

Полученная схема является неявной, поскольку искомое значение y_{i+1} входит в обе части соотношения (3.4) и его нельзя выразить явно. Если имеется хорошее начальное приближение y_i, то можно построить решение с использованием двух итераций следующим образом. Сначала по формуле (3.2) вычисляют первое приближение $\tilde{y}_{i+1}$

$$y_{i+1} = y_i + hf(x_i, y_i). \qquad (3.5)$$

Вычисленное значение $\tilde{y}_{i+1}$ подставляем вместо y_{i+1} в правую часть соотношения (3.4) и находим окончательное значение

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, \tilde{y}_{i+1})]. \qquad (3.6)$$

Алгоритм (3.5), (3.6) можно записать в виде одного соотношения:

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2}[f(x_i, y_i) + f(x_{i+1}, y_i + hf(x_i, y_i))], \quad i = 0,1,\ldots \qquad (3.7)$$

Данные рекуррентные соотношения описывают новую разностную схему, являющуюся модификацией метода Эйлера, которая называется методом Эйлера с пересчетом. Этот метод отличается от метода Эйлера большей точностью.

<u>Пример:</u> Решить задачу Коши модифицированным методом Эйлера для дифференциального уравнения

$y' = x^2 + 2*y$, y(0)= 1 на отрезке [0;0,4]

с шагом 0,1.

<u>Решение:</u> По формуле (3.5) вычислим первое приближение $\tilde{y}_1$

$\tilde{y}_1 = y_0 + h\, f(x_0,y_0) = 1 + 0{,}1\,(0^2 + 2*1) = 1{,}2$

Используя формулу (3.6), находим окончательное значение в точке x_1=0.1

$y_1=y_0+h[f(x_0,y_0)+f(x_1, \tilde{y}_1)]/2=1+0{,}1\cdot(0^2+2*1+0{,}1^2+2*1{,}2)/2=1{,}22$

Аналогично вычисляются последующие значения функции в узловых точках

$\tilde{y}_2 = y_1 + hf(x_1, y_1)=1{,}221+0{,}1\cdot(0{,}1^2+2\cdot 1{,}221) =1{,}466$

$y_2 = y_1 + \frac{h}{2}[f(x_1, y_1) + f(x_2, \tilde{y}_2)]=1{,}221+0{,}1\cdot (0{,}1^2+2*1{,}221+0{,}2^2+2\cdot 1{,}466)/2=1{,}492$

$\tilde{y}_3 = y_2 + hf(x_2, y_2)=1{,}492+0{,}1\cdot(0{,}2^2+2\cdot 1{,}492) = 1{,}794$

$y_3 = y_2 + \frac{h}{2}[f(x_2, y_2) + f(x_3, \tilde{y}_3)]=1{,}492+0{,}1\cdot(0{,}2^2+2\cdot 1{,}492+$

$+0{,}3^3+2\cdot 1{,}794)/2 =1{,}827$

$\tilde{y}_4 = y_3 + hf(x_3, y_3)=1{,}827+0{,}1\cdot(0{,}3^2+2\cdot 1{,}827) =2{,}205$

$y_4 = y_3 + \frac{h}{2}[f(x_3, y_3) + f(x_4, \tilde{y}_4)]=1{,}827+0{,}1\cdot(0{,}3^2+2\cdot 1{,}827+$

$+0{,}4^2+2\cdot 2{,}205)/2=2{,}242$

Сеточную функцию записываем в виде таблицы

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,221	1,492	1,827	2,242

3. Метод Рунге-Кутта

На основе метода Рунге-Кутта могут быть построены разностные схемы разного порядка точности. Наиболее употребительной является следующая схема четвертого порядка:

$y_{i+1}=y_i+(k_0+2k_1+2k_2+k_3)/6.$ (3.8)

где

$k_0 = h\, f(x_i, y_i),$

$k_1 = h\, f(x_i+h/2, y_i+ k_0 /2),$

$k_2=hf(x_i+h/2,y_i+k_1/2),$ (3.9)

$k_3= h\, f(x_i+h, y_i+ k_2).$

Таким образом, метод Рунге-Кутта требует на каждом шаге четырехкратного вычисления правой части уравнения. Однако это окупается повышенной точностью, что дает возможность проводить счет с относительно большим шагом.

Пример: Решить задачу Коши методом Рунге-Кутта для дифференциального уравнения $y'=x^2+2*y$, $y(0)= 1$ на отрезке [0,0.4] с шагом 0.1.

Решение:

По формулам (3.9) вычислим значения k_0 , k_1, k_2, k_3

$k_0=h\, f(x_0,y_0)=0,1\cdot(0^2+2\cdot 1)=0,2$

$k_1=h\, f(x_0+h/2, y_0+k_0 /2)=0,1\cdot ((0+0,1/2)^2+2\cdot(1+0,2/2))=0,2203$

$k_2=h\, f(x_0+h/2,y_0+k_1 /2)=0,1\cdot ((0+0,1/2)^2+2\cdot(1+0,2203/2))=0,2223$

$k_3= h\, f(x_0+h, y_0+ k_2)=0,1\cdot ((0+0,1)^2+2\cdot(1+0,2223))=0,24546$

Используя формулу (3.8), находим значение y_1 в точке $x_1=0.1$

$y_1=y_0+(k_0+2k_1+2k_2+k_3)/6=$

$=1+(0,2+2\cdot 0,2203+2\cdot 0,2223+0,24546)/6=1,2218$

Аналогично вычисляются последующие значения функции в узловых точках

$k_0=h\, f(x_1,y_1)=0,1\cdot (0,1^2+2\cdot 1,2218)=0,24536$

$k_1=hf(x_1+h/2,y_1+k_0/2)=0,1\cdot((0,1+0,1/2)^2+2\cdot(1,2218+0,24536/2))=$

$=0,271146$

$k_2=hf(x_1+h/2,y_1+k_1/2)=0,1\cdot((0,1+0,1/2)^2+2\cdot(1,2218+0,271146/2))=$

$=0,27372$

$k_3= h\, f(x_1+h,y_1k_2)=0,1\cdot ((0,1+0,1)^2+2\cdot(1,2218+0,2737246))=0,3031$

$y_2=y_1+(k_0+2k_1+2k_2+k_3)/6=$

$=1,2218+(0,24536+2\cdot 0,271146+2\cdot 0,2737246+0,3031)/6=1,4948$

$k_0=h\ f(x_2,y_2)=0,1\cdot\ (0,2^2+2\cdot 1,4948)=0,303$

$k_1=hf(x_2+h/2,y_2+k_0/2)=0,1\cdot\ ((0,2+0,1/2)^2+2\cdot(1,4948+$

$+0,303/2))=0,33551$

$k_2=hf(x_2+h/2,y_2+k_1/2)=0,1\cdot((0,2+0,1/2)^2+2\cdot(1,4948+0,33551/2))=$

$=0,338761$

$k_3=h\ f(x_2+h,y_2+k_2)=0,1\cdot\ ((0,2+0,1)^2+2\cdot(1,4948+$

$+0,338761))=0,3757122$

$y_3=y_2+(k_0+2k_1+2k_2+k_3)/6=$

$=1,4948+(0,303+2\cdot 0,33551+2\cdot 0,338761+0,3757122)/6=1,8326$

$k_0=h\ f(x_2,y_2)=0,1\cdot\ (0,3^2+2\cdot 1,8326)=0,3704$

$k_1=h\ f(x_2+h/2,\ y_2+k_0/2)=0,1\cdot((0,3+0,1/2)^2+2\cdot(1,8326+$

$+0,3704/2))=0,4187$

$k_2=h\ f(x_2+h/2,y_2+k_1/2)=0,1\cdot\ ((0,3+0,1/2)^2+2\cdot(1,8326+$

$+0,4187/2))=0,4155$

$k_3=h\ f(x_2+h,y_2+k_2)=0,1\cdot\ ((0,3+0,1)^2+2\cdot(1,8326+0,4155))=0,4605$ $y_3=y_2+(k_0+2k_1+2k_2+k_3)/6=$

$=1,8326+(0,3704+2\cdot 0,4187+2\cdot 0,4155+0,\ 0,4605)/6=2,2519$

Сеточную функцию записываем в виде таблицы

x	0	0,1	0,2	0,3	0,4
y	1	1,2218	1,4948	1,8326	2,2519

Задания для самостоятельной работы

(варианты заданий)

1. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{5}});\ y(1,8) = 2,6;\ x \in [1,8;2,8].$

2. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{3}});\ y(1,6) = 4,6;\ x \in [1,6;2,6].$

3. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{10}});\ y(0,6) = 0,8;\ x \in [0,6;1,6].$

4. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{7}});\ y(0,5) = 0,6;\ x \in [0,5;1,5].$

5. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{\pi}});\ y(1,7) = 5,3;\ x \in [1,7;2,7].$

6. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{2,25}})$; $y(1,4) = 2,2$; $x \in [1,4;2,4]$.

7. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{e}})$; $y(1,4) = 2,5$; $x \in [1,4;2,4]$.

8. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{2}})$; $y(0,8) = 1,4$; $x \in [0,8;1,8]$.

9. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{3}})$; $y(1,2) = 2,1$; $x \in [1,2;2,2]$.

10. $y' = x + \cos(\frac{y}{\sqrt{11}})$; $y(2,1) = 2,5$; $x \in [2,1;3,1]$.

11. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{5}})$; $y(1,8) = 2,6$; $x \in [1,8;2,8]$.

12. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{3}})$; $y(1,6) = 4,6$; $x \in [1,6;2,6]$.

13. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{10}})$; $y(0,6) = 0,8$; $x \in [0,6;1,6]$.

14. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{7}})$; $y(0,5) = 0,6$; $x \in [0,5;1,5]$.

15. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{\pi}})$; $y(1,7) = 5,3$; $x \in [1,7;2,7]$.

16. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{2,8}})$; $y(1,4) = 2,2$; $x \in [1,4;2,4]$.

17. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{e}})$; $y(1,4) = 2,5$; $x \in [1,4;2,4]$.

18. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{2}})$; $y(0,8) = 1,3$; $x \in [0,8;1,8]$.

19. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{3}})$; $y(1,1) = 1,5$; $x \in [1,1;2,1]$.

20. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{11}})$; $y(0,6) = 1,2$; $x \in [0,6;1,6]$.

21. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{1,25}})$; $y(0,5) = 1,8$; $x \in [0,5;1,5]$.

22. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{15}})$; $y(0,2) = 1,1$; $x \in [0,2;1,2]$.

23. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{1,3}})$; $y(0,1) = 0,8$; $x \in [0,1;1,1]$.

24. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{0,3}})$; $y(0,5) = 0,6$; $x \in [0,5;1,5]$.

25. $y' = x + \sin(\frac{y}{\sqrt{0,7}})$; $y(1,2) = 1,4$; $x \in [1,2;2,2]$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Можно ли самостоятельно использовать только одношаговые методы, только многошаговые методы?
2. Можно ли в многошаговых методах использовать только аппроксимационную, только интерполяционную формулу?
3. Как сменить шаг в 9 точке при решении дифференциального уравнения одношаговым методом, многошаговым методом?

Практическая работа № 12.

Решение квадратных уравнений с действительными коэффициентами

Цель: Формирование навыков решения квадратных уравнений с отрицательным дискриминантом.

На выполнение практической работы отводится 1 час

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы

2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

Решение квадратных уравнений в поле комплексных чисел.

Вывод формулы корней квадратного уравнения в поле комплексных чисел ничем не отличается от такового в поле действительных чисел (как, впрочем, и в любом поле, в том числе и в конечном). Вспомним этот вывод.

Теорема. Пусть $a, b, c \in C, a \neq 0$, z – комплексная переменная. Тогда квадратное уравнение $az^2 + bz + c = 0$ имеет ровно два корня (они могут быть равными), которые можно найти по формуле: $z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2}$.

Доказательство. Выделим полный квадрат в левой части квадратного уравнения:

$$az^2 + bz + c = a(z^2 + \frac{b}{a}z + \frac{b^2}{4a^2}) - \frac{b^2}{4a} + c = a(z + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Теперь квадратное уравнение можно записать в виде:

$$a(z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a} \Rightarrow (z + \frac{b}{2a})^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2} \Rightarrow \; z + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\sqrt{\frac{1}{4a^2} \cdot (b^2 - 4ac)} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2}.$$

Здесь мы применили следствие из п.6. Доказываемая формула очевидно следует из последнего равенства.

Теорема доказана.

Пример. Решить уравнение $z^2 - (7 - 2i)z + 13(1 - i) = 0$.

Решение. Вычисляем дискриминант $D = b^2 - 4ac = (7 - 2i)^2 - 4 \cdot 13(1 - i) = 49 - 28i - 4 - 52 + 52i =$

$= -7 + 24i$. Вычисляем корни из дискриминанта по формуле квадратныхкорней из комплексного числа:

$$\sqrt{-7 + 24i} = \pm\left(\sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + 24^2} - 7}{2}} + i \cdot \sqrt{\frac{\sqrt{7^2 + 24^2} + 7}{2}}\right) =$$

$$=\pm\left(\sqrt{\frac{25-7}{2}}+i\cdot\sqrt{\frac{25+7}{2}}\right)=\pm(3+4i)$$.

Вычисляем корни уравнения по формуле корней квадратного уравнения:

$z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}=\frac{(7-2i)\pm(3+4i)}{2}$ или $z_1=\frac{(7-2i)-(3+4i)}{2}=2-3i$; $z_2=\frac{(7-2i)+(3+4i)}{2}=5+i$.

Ответ: $z_1=2-3i; z_2=5+i$.

Замечание. Аналогично решаются квадратные уравнения с действительными коэффициентами, но с отрицательным дискриминантом.

Пример. Решить уравнение $x^2+3x+3=0$.

Решение. Вычислим дискриминант. $D=b^2-4ac=9-12=-3<0$. Отсюда следует, что действительных корней квадратное уравнение не имеет, но, согласно теореме, оно имеет два корня в поле комплексных чисел. Для вычисления корня из дискриминанта применяем следствие из предыдущего п.6, смотри там же пример. Получаем:

$\sqrt{D}=\sqrt{-3}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{3}\cdot(\pm i)=\pm\sqrt{3}\cdot i$. Теперь подставляем в формулукорней квадратного уравнения: $z_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2}=\frac{-3\pm i\cdot\sqrt{3}}{2}=-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$.

Ответ: $-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot i$.

Задания для самостоятельной работы

1. Решить уравнения:

а) $x^2 = — 16$; б) $x^2 = — 2$; в) $3x^2 = — 5$.

2. Найти все комплексные числа, квадраты которых равны:

а) i; б) $^1/_2 — ^{\sqrt{3}}/_2\, i$;

3. Решить квадратные уравнения:

а) $x^2 — 2x + 2 = 0$; б) $4x^2 + 4x + 5 = 0$; в) $x^2— 14x + 74 = 0$.

4. Доказать, что корни квадратного уравнения с действительными коэффициентами и отрицательным дискриминантом являются взаимно сопряженными.

5. Доказать, что теорема Виета верна для любых квадратных уравнений, а не только для уравнений с неотрицательным дискриминантом.

6. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, корнями которого являются:

а) $x_1= 5 — i$, $x_2 = 5 + i$; б) $x_1 = 3i$, $x_2 = — 3i$.

7. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, один из корней которого равен (3 — i) (2i — 4).

8. Составить квадратное уравнение с действительными коэффициентами, один из корней которого равен 32 — i .

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение комплексного числа.
2. Какие числа называются комплексно – сопряженными?
3. Какие комплексные числа называются равными?
4. Дайте определение тригонометрической формы комплексного числа.
5. Как умножаются и делятся комплексные числа, заданные в тригонометрической форме?
6. Как возводится в степень комплексное число, заданное в тригонометрической форме?
7. По какой формуле извлекается корень n-ой степени из комплексного числа, заданного в тригонометрической форме?
8. Как записывается комплексное число в показательной форме?
9. Что называется тождеством Эйлера?
10. Какие действия выполняются над комплексными числами, заданными в показательной форме? Запишите формулы.

Практическая работа № 13.

Применение комплексных чисел в электротехнике.
Решения электротехнических задач с применением комплексных чисел

Цель: Установить связь теории комплексных чисел с расчетами в цепях переменного тока
На выполнение практической работы отводится 2 часа
Требования к выполнению практической работы:
1.Ответить на теоретические вопросы
2.Оформить задания в тетради для практических работ

Теоретический материал

В математике очень широко применяется решение задач с помощью комплексных чисел, но что такое комплексные числа и как они нашли себя в электротехнике?

Первоначально математики столкнулись с мнимой единицей i=$\sqrt{-1}$, когда стало не хватать действительного числа, а именно при решении простейшего квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, где «p» и «q» — действительные числа. При вычислении его корней по всем известным формулам, математики еще до XVI века сталкивались с проблемой отрицательного корня. В действительности, никто не мог объяснить какой смысл следует придавать этому выражению и, в следствие, решили, что корень из отрицательного числа не имеет смысла. И это работало, было легко показать, что при отрицательном корне, решением было ни положительное число, ни отрицательное, ни нуль.

Однако в дальнейшем, при решении кубических уравнений отказываться от отрицательного корня уже было невозможно. В 1543 году несколько итальянских ученых выдвинули формулу «Кардано» позволяющую решать уравнения третьей степени вида: $x^3 + px + q = 0$, а именно: $x = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{D}}$, где $D = \left(\frac{P}{3}\right)^3 + \left(\frac{P}{2}\right)^3$, она вполне рабочая, но при решении уравнений имеющих три различных действительных корня она не дает ожидаемого результата. Например, корнями уравнения $x^3 - x = 0$ легко доказать, являются числа 0,1,–1, но при решении уравнения методом, изложенным выше, результат удивляет: $x = \sqrt[3]{\sqrt{-\frac{1}{27}}} + \sqrt[3]{-\sqrt{-\frac{1}{27}}}$ и как же получить из этого три нужных нам корня?

После этого математики пошли на изучение мнимых чисел, дали возможность им существовать. Затем было обнаружено, что многие громоздкие задачи в математике решаются гораздо проще, если пользоваться мнимыми числами. К.Ф. Гаусс предложил называть мнимые числа комплексными, что впоследствии прижилось.

С похожей проблемой ученые столкнулись при решении задач электротехники.

Описание электромагнитных процессов в цепях переменного тока сводится к решению множества интегралов, а решение их становится столь сложным, что взять их не пол силу даже опытным математикам. Определение крайне упростилось и стало более элегантно при применении комплексных чисел.

Из физики мы знаем, что переменным током называется ток, изменяющийся во времени. Из всех возможных форм периодических токов наибольшее распространение имеет синусоидальный ток, так как у него есть преимущество в плане экономии энергоресурсов.

Любая синусоидальная функция времени «a(t)» может быть однозначно задана тремя параметрами: амплитудой, частотой и начальной фазой. Ее формула для любого момента времени «t»: $a(t) = A_m \sin(\omega t + \psi_a)$, где A_m — максимальное значение функции или её амплитуда; ω – угловая частота, ψ_a начальная фаза (угол функции в момент времени принятый за начало отсчета, т. е. при $t = 0$), аргумент $(\omega t + \psi_a)$ называется фаза или фазовый угол, он определяет значение функции $a(t)$ в любой момент времени. В электрических цепях переменного тока синусоидальными функциями времени являются ток, падение напряжения и ЭДС:

$$i(t) = I_m \sin(\omega t + \psi_i)\,;\;\; u(t) = U_m \sin(\omega t + \psi_u)\,;\;\; e(t) = E_m \sin(\omega t + \psi_e)$$

В электротехнике принято обозначать мгновенные значения токов строчными буквами в виде: i, u, e; А амплитуду заглавной с нижним индексом «m» : I_m, U_m, E_m.

Так же существует действующий(эффективный) ток. По закону Джоуля-Ленца на участке тока сопротивлением «r», за время «T», соответствующее периоду тока «i», будет выделено количество тепла равное: $Q = \int_0^T i^2 r dt$, с другой сто-

роны при постоянном токе на этом же участке выделится равное количество энергии: $Q = I^2 r dT$, если приравнять данные формулы, можно вывести действующее значение тока I.

$$I = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T i^2 r dt} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T [I_m \sin(\omega t + \psi_i)]^2 dt} = \sqrt{\frac{{I_m}^2}{T}\int_0^T sin^2(\omega t + \psi_i) dt}$$
$$= \sqrt{\frac{{I_m}^2}{T}\int_0^T \frac{1 - \cos[2(\omega t + \psi_i)]}{2} dt} = \sqrt{\frac{1}{2}{I_m}^2 - 0} = I_m\sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}$$
$$= 0.707\ I_m$$

Отсюда — действующий ток это среднеквадратичное значение переменного тока. По аналогии можно рассчитать действующее значение напряжения и ЭДС, которые так же равняются среднеквадратичной своей соответствующей.

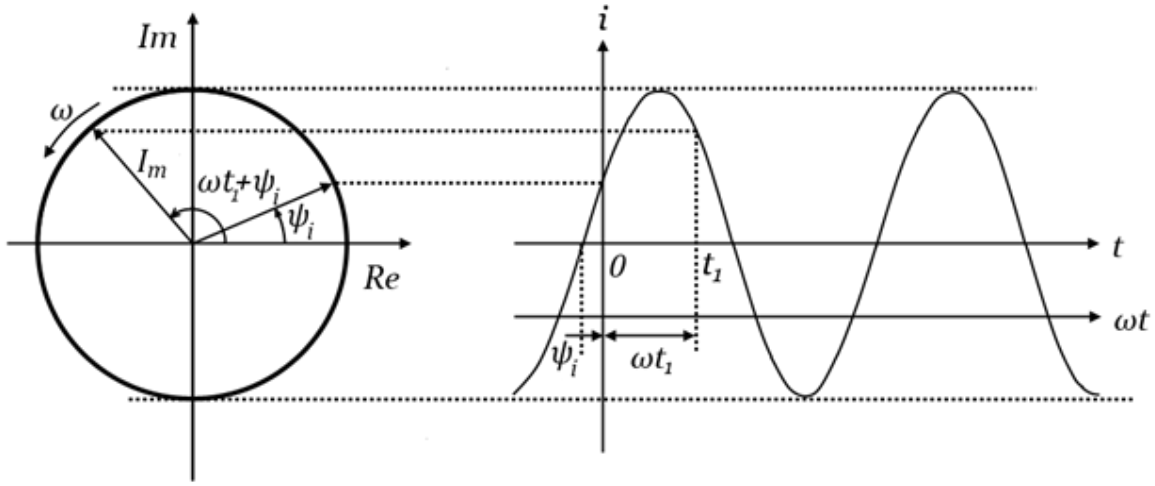


Рисунок 1. Представление синусоиды тока в виде вращающегося вектора

Из курса математики известно, что синусоидальная функция времени может быть представлена в виде вращающегося вектора длиной I_m с угловой частотой ω. Положение этого вектора в начальный момент времени t = 0 должно составлять угол ψ_i с осью абсцисс.

Наиболее удобная для проведения расчетов координатная система стала комплексная, так как вектор можно определить четырьмя различными формами записи:

· Алгебраическая форма: $\dot{I}_m = a + jb$, надо заметить, что в математике знак мнимой части используется как «i», но в электротехнике этим знаком обозначается ток, по этому было решено заменить его на «j». Знак «$+$» не говорит ни о каком-либо сложении, он только указывает на то, что мы объединяем два действительных числа в нечто единое. На комплексной плоскости «a» и «b» координаты конца вектора тока, по мнимой и действительной оси.

· Тригонометрическая форма: $\dot{I} = I_m(\cos\psi_i + j\sin\psi_i)$ запись результата вещественной и мнимой части через модуль «I_m» и аргумент «ψ_i»

· Показательная форма: $\dot{I} = I_m e^{j\psi_i}$ — получается путем применения формулы Эйлера к тригонометрической.

· Полярная форма: $\dot{I} = I_m \angle\psi_i$ — запись, не использующаяся для расчетов.

Рассмотрим типичную задачу в электротехнике: сложение токов.

Включим в цепь переменного тока две параллельные ветви, содержащие некое сопротивление. Нам известны: амплитуда, частота и начальная фаза токов, равная нулю. $i_1 = 2\sin(\omega t)$, $i_2 = 1\sin(\omega t)$

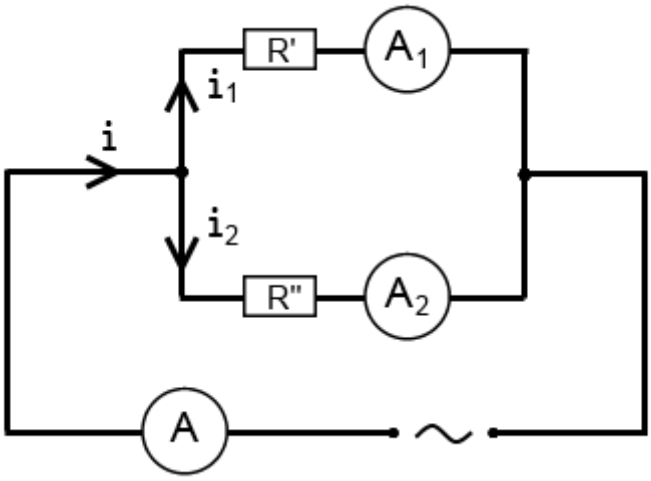


Рисунок 2. Токи в параллельных ветвях цепи переменного тока

По одному из главных постулатов электротехники, а именно по I-му закону Кирхгофа (Алгебраическая сумма токов в узле равна нулю $\sum_{k=1}^{n} i_k = 0$) $i_1 + i_2 - i = 0$, отсюда $i = i_1 + i_2$, графически это можно определить так:

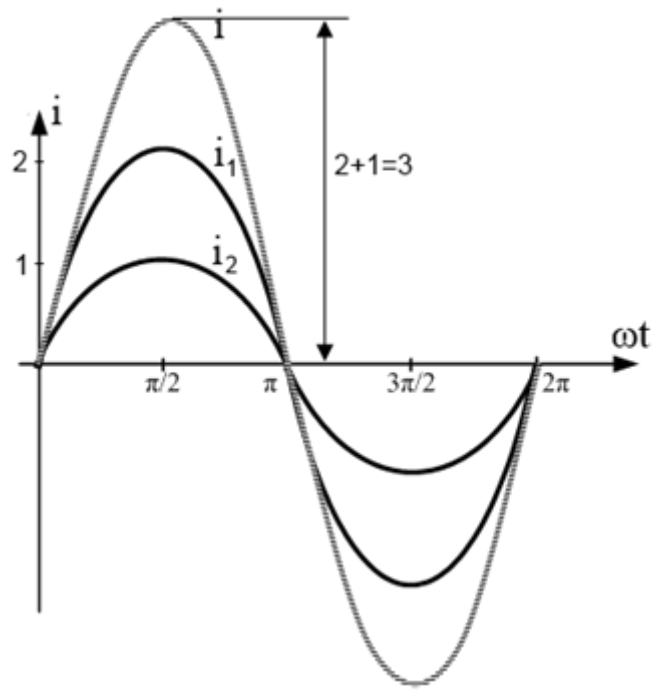


Рисунок 3. Сложение синусоид тока

Как видно, это было легко, при фазе равной нулю решение такой задачи обуславливается сложением значения амплитуд в каждый момент времени. $i = 2\sin(\omega t) + 1\sin(\omega t) = 3\sin(\omega t)$. Всё просто.

А теперь представим, что фаза у токов отличается. Например, ψ_{i1} равняется не нулю, а скажем, 30°, попробуем проделать задачу тем же способом:

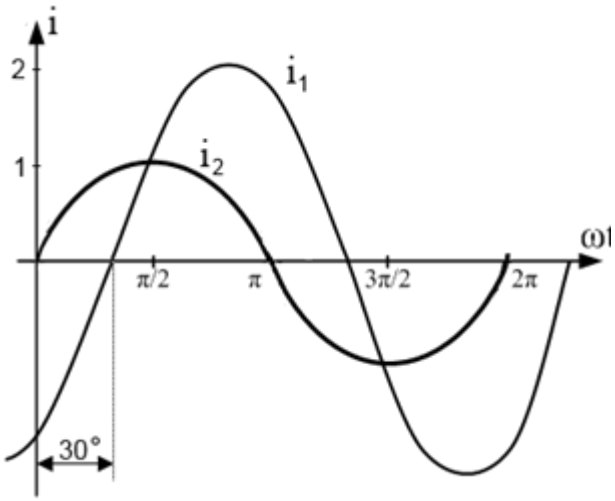


Рисунок 4. Синусоиды тока с разной фазой

Решение:

$$i = 2\sin(\omega t + 30°) + 1\sin(\omega t);$$

по формуле суммы углов:

$$\sin(\omega t + 30°) = \sin(\omega t)\cos(30°) + \cos(\omega t)\sin(30°).$$

$$i = 2\sin(\omega t)\frac{\sqrt{3}}{2} + 2\cos(\omega t)\frac{1}{2} + \sin(\omega t);$$

$$i = (1 + \sqrt{3})\sin(\omega t) + \cos(\omega t);$$

Воспользуемся методом введения дополнительного угла, чтобы привести уравнение к виду: $\sin(A + B) = \sin(A)\cos(B) + \cos(A)\sin(B)$;

Так как у нас есть составляющие: $\cos(B)$ и $\sin(B)$, найдем $\sin(A)$ и $\cos(A)$.

По основному тождеству тригонометрии: $sin^2(A) + cos^2(A) = 1$, значит:

$$[\frac{1 + \sqrt{3}}{x}]^2 + [\frac{1}{x}]^2 = 1 => x = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}};$$

Находим cos и sin через $arccos$ и $arcsin$:

$$arccos\frac{1 + \sqrt{3}}{\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} \approx cos20°; arcsin\frac{1}{\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} \approx sin20°$$

Подставляем в i:

$$\frac{i}{\sqrt{5 + 2\sqrt{3}}} = \cos(20°)\sin(\omega t) + \sin(20°)\cos(\omega t);$$

$$i = \sqrt{5 + 2\sqrt{3}}\sin(\omega t + 20°); \ \boldsymbol{i \approx 2,91\sin(\omega t + 20°)}.$$

Как видим, такая, простая на первый взгляд, задача переливается в уравнение, которое заставит посидеть и подумать «как же оно решается?», а ведь это самое наипростейшее усложнение.

Теперь рассмотрим эту задачу с применением комплексных чисел, мы уже знаем, что такое комплексное число и в состоянии перевести в него уравнение синусоиды тока.

Итак:

$$i_1 = 2\sin(\omega t + 30°) = 2e^{j30°} = 1.732 + j; \qquad i_2 = 1\sin(\omega t) = e^{j0°} = 1,$$

сложим:

$$i = i_1 + i_2 = 1 + \ 1.732 + j = 2.732 + j \approx 2.91e^{20^\circ} \approx \mathbf{2.91\sin(\omega t + 20^\circ)}.$$

Решение в 2 строки, а результаты те же.

Проверим это на векторной диаграмме:

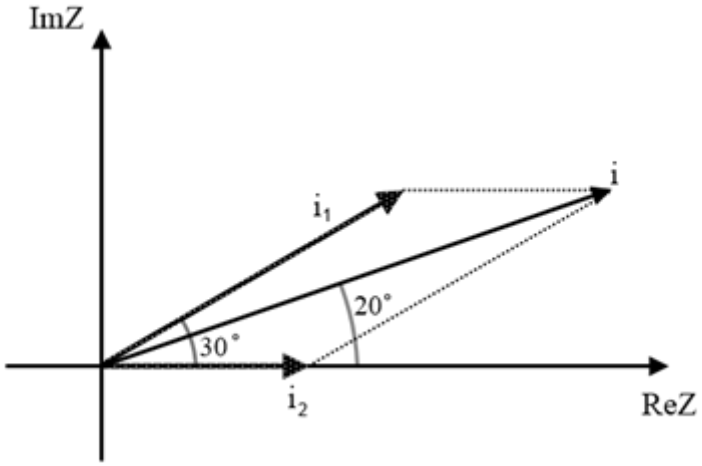


Рисунок 5. Векторная диаграмма

Выводы: На этом простейшем примере хорошо видно как комплексные числа упростили решение. Сейчас же ни одна задача в электротехнике не решается без них. Мнимые числа необходимая составляющая электротехники.

Задания для самостоятельной работы

Задача № 1

Получить формулу, описывающую комплексное сопротивление Z двухполюсника с двумя резисторами и двумя конденсаторами.

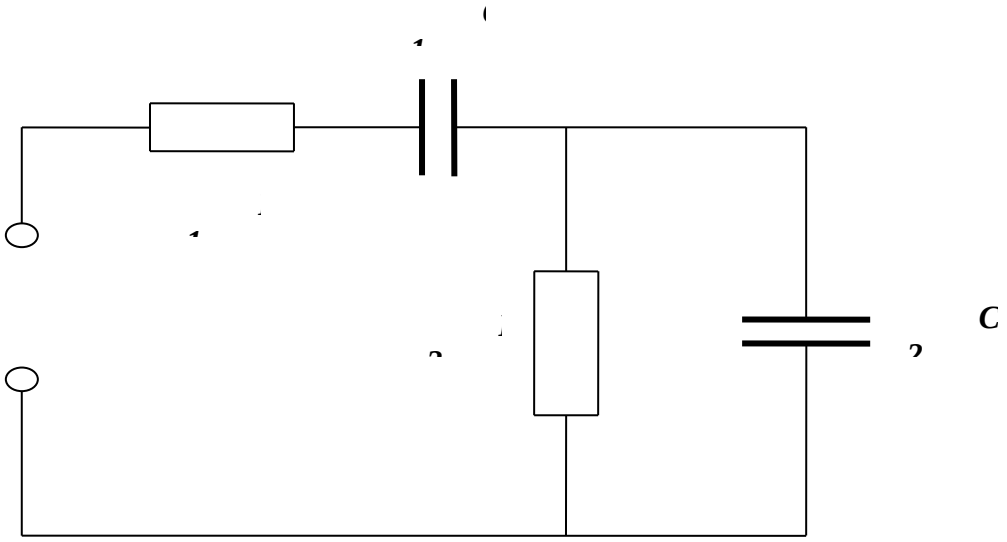


Схема цепи к задаче № 1

Задача № 2

Определить комплексное сопротивление двухполюсника (см. рис.), если известны R_1; R_2; L; C.

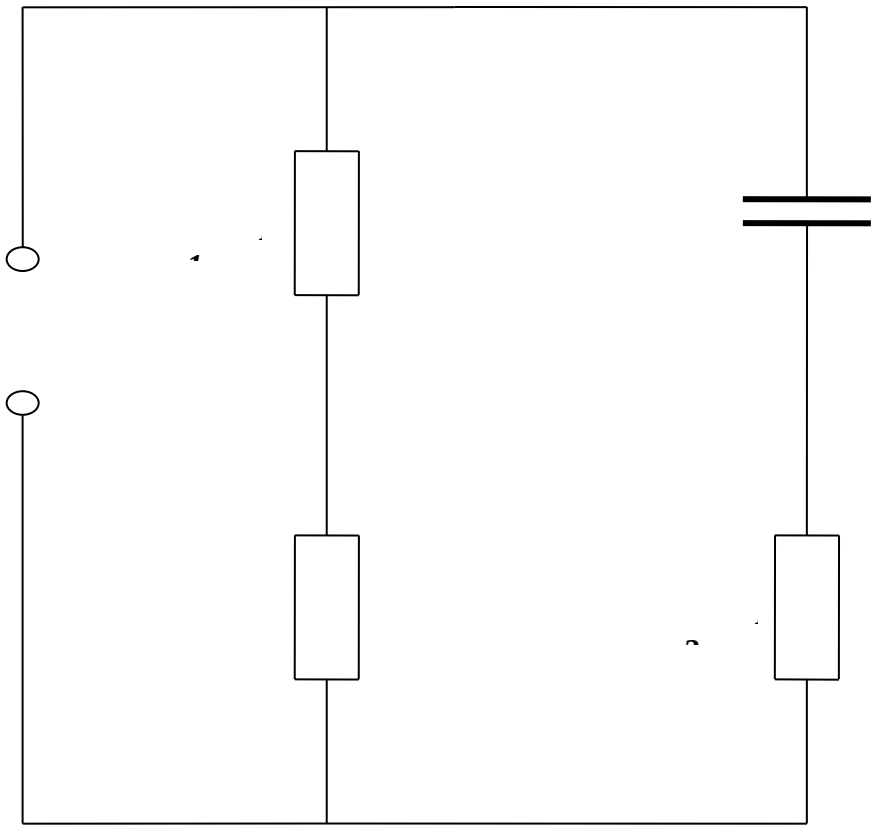


Схема цепи к задаче № 2

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется действительной и мнимой частью комплексного числа?
2. Какие комплексные числа называются равными?
3. Как можно геометрически изобразить комплексное число?
4. Как используются комплексные числа в электротехнике?
5. Какие преимущества получает исследователь электрических цепей при использовании комплексных чисел?

Практическая работа № 14.

Определители матриц, их вычисление. Обратная матрица.

Цель: Формирование навыков выполнения операций над матрицами и вычисления определителей второго, третьего и четвертого порядков.

На выполнение практической работы отводится 1 час.

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы.

2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Операции над матрицами. Вычисление определителей

Прямоугольная матрица A размера $m \times n$ ($m \times n$-матрица) имеет вид таблицы, состоящей из m строк и n столбцов:

$$A = \left(a_{ij}\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Элемент матрицы a_{ij} находится на пересечении i-ой строки и j-го столбца, $i = 1, 2, \dots, m$; $j = 1, 2, \dots, n$.

У нулевой матрицы 0 все элементы равны нулю:

$$0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица – столбец ($m \times 1$-матрица) состоит из одного столбца:

$$\underset{(m\times 1)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix},$$

а матрица – строка ($1 \times n$-матрица) из одной строки:

$$\underset{(1\times n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \end{pmatrix}.$$

Произведением двух матриц A и B называется матрица C, каждый элемент которой определяется по правилу строка на столбец, то есть элемент стоки матрицы A умножается на элемент столбца матрицы B стоящие на соответствующих местах.

Из определения произведения матриц следует, что не любые две матрицы можно перемножать. Произведение AB имеет смысл только тогда, когда число столбцов первой матрицы-

сомножителя равно числу строк второй матрицы-сомножителя, что символически записывается так:

$$(m \times k) \cdot (k \times n) = (m \times n).$$

Транспонирование $m \times n$-матрицы заключается в замене строк столбцами, а столбцов – строками с теми же номерами:

$$\underset{(n \times m)}{A}^{T} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Матрица $C = (c_{ij})$ размера $m \times n$ называется суммой двух $m \times n$-матриц $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$, если каждый элемент матрицы C равен сумме соответствующих элементов матриц A и B:

$$C = \underset{(m \times n)}{A} + B \Leftrightarrow c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}.$$

Определителем второго порядка называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}. \qquad (1)$$

Числа $a_{11}, a_{22}, a_{12}, a_{21}$ называются элементами определителя; при этом элементы a_{11} и a_{22} образуют главную диагональ, а элементы a_{12} и a_{21} - побочную диагональ. Таким образом, определитель второго порядка равен произведению элементов главной диагонали минус произведение элементов побочной диагонали.

Определителем третьего порядка называется число, определяемое равенством

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - \qquad (2)$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Таким образом, каждый член определителя третьего порядка представляет собой произведение трех его элементов, взятых по одному из каждой строки и каждого столбца. Эти произведения берутся с определенными знаками: со знаком «плюс» – члена, состоящие из элементов главной диагонали и из элементов, расположенных в вершинах треугольников с основаниями, параллельными главной диагонали; со знаком «минус» – три члена, расположенные аналогичным образом относительно побочной диагонали.

Указанное правило, называется правилом треугольников.

Минором M_{ij} элемента a_{ij} называется определитель D_{n-1}, полученный из D_n вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Алгебраическим дополнением A_{ij} элемента a_{ij} называется его минор, умноженный на $(-1)^{i+j}$:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Определитель n-го порядка равен сумме произведений элементов какой – либо строки или столбца на их алгебраические дополнения:

$$D_n = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \ldots + a_{in}A_{in}$$

(разложение определителя по элементам i-ой строки) или

$$D_n = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \ldots + a_{nj}A_{nj}$$

(разложение определителя по элементам j-го столбца).

В частности, для определителя третьего порядка имеем

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} =$$

$$= a_{11} \cdot \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \cdot \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31},$$

что совпадает с результатом, полученным по формуле (2).

Примеры

<u>Задание 1:</u> Найти сумму и разность матриц $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \\ -5 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 2 & -3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

<u>Решение:</u> Здесь даны матрицы одного размера 3×2, следовательно, существуют их сумма и разность. Согласно определению алгебраической суммы матриц имеем

$$A + B = \begin{pmatrix} 2+7 & -1+5 \\ 3+2 & 0-3 \\ -5+0 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 5 & -3 \\ -5 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A - B = \begin{pmatrix} 2-7 & -1-5 \\ 3-2 & 0-(-3) \\ -5-0 & -2-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & -6 \\ 1 & 3 \\ -5 & -3 \end{pmatrix}.$$

Задание 2: Вычислить определители: 1) $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix}$.

Решение: 1) По формуле (1) находим $\begin{vmatrix} -2 & 7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -2 \cdot 8 - 7 \cdot 3 = -37$.

2) Разлагая данный определитель, например, по элементам первой строки, находим

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -2 & 6 \end{vmatrix} (-4) \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 8 & 6 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 8 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 28 - 4 \cdot (-46) + 1 \cdot (-22) = 218.$$

Тот же результат получится, если воспользоваться формулой (2):

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 \cdot 6 + (-1) \cdot (-2) \cdot 1 + 4 \cdot 5 \cdot 8 - 8 \cdot 3 \cdot 1 -$$

$$-2 \cdot 5 \cdot (-2) - 4 \cdot (-1) \cdot 6 = 218.$$

Задания для самостоятельной работы

Найдите сумму матриц $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 & 7 \\ 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Транспонируйте матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 & -5 \\ -7 & 5 & 1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Укажите размеры данной и транспонированной матриц.

Даны матрицы: $A = \begin{pmatrix} 7 & -6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 \\ 5 \end{pmatrix}$. Произведите указанные действия, а в случае, когда это невозможно, указать причину: 1) $2A - B$;

2) $A^T + 4B$.

Даны матрицы $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & -1 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$. Найдите матрицу $C = A \cdot B$.

Вычислите определители второго порядка: а) $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} -\sqrt{a} & a \\ 1 & \sqrt{a} \end{vmatrix}$.

Вычислите определители третьего порядка: а) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$;

б) $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 6 & -6 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{vmatrix}$.

Вычислите определитель четвертого порядка $\begin{vmatrix} -2 & 3 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется матрицей? Как установить размеры матрицы?
2. Назовите линейные операции над матрицами. Как они производятся?
3. Какие матрицы можно перемножать? Как это делается?
4. Что называется определителем? Как вычисляются определители второго и третьего порядков?
5. Что называется минором и алгебраическим дополнением для произвольного элемента a_{ij} определителя?

Практическая работа № 15.

Применение свойств определителей при их вычислении. Вычисление обратных матриц.

Цель: Формирование навыков нахождения обратной матрицы.
На выполнение практической работы отводится 2 часа.
Требования к выполнению практической работы:
1.Ответить на теоретические вопросы.
2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Нахождение обратной матрицы

Матрица, состоящая из n строк и n столбцов, называется квадратной матрицей порядка n:

$$\underset{(n\times n)}{A} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Элементы a_{ii} образуют главную диагональ матрицы.

У единичной матрицы E порядка n элементы главной диагонали равны единицы, а остальные элементы равны нулю: $a_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j; \\ 0, & i \neq j, \end{cases}$ то есть

$$\underset{(n\times n)}{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}.$$

Для $n \times n$ - матриц справедливы равенства $AE = EA = A$.

Каждой $n \times n$ - матрице A соответствует определитель n -го порядка, который состоит из тех же элементов, расположенных в том же порядке, что и в матрице:

$$\det A = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Произведение двух квадратных матриц всегда определено; при этом определитель матрицы – произведения равен произведению определителей матриц – сомножителей: $\underset{n\times n}{AB} = C \Rightarrow \det A \cdot \det B = \det C$.

Квадратная матрица называется невырожденной, если ее определитель отличен от нуля $(\det A \neq 0)$, и вырожденной в противном случае $(\det A = 0)$.

Всякая невырожденная матрица $A = (a_{ij})$ порядка n имеет обратную матрицу того же порядка $A^{-1} = (a_{ij}^{-1})$, удовлетворяющую соотношениям

$$A^{-1}A = AA^{-1} = E.$$

Обратная матрица имеет вид

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}, \qquad (1)$$

где A_{ij} - алгебраическое дополнение элемента a_{ij} в определителе $|A|$ матрицы A, то есть элементы обратной матрицы находятся по формулам $a_{ij}^{-1} = \frac{1}{|A|} \cdot A_{ji}$.

<u>Свойства обратной матрицы</u>

(здесь A, B - матрицы, α - число)

$(A^{-1})^{-1} = A$;

$(AB)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$;

$(A^{-1})^{T} = (A^{T})^{-1}$;

$(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} \cdot A^{-1}$;

$$\det\left(AA^{-1}\right)=1.$$

Пример

<u>Задание:</u> Для матрицы $A=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}$ найти обратную матрицу и проверить, что

$$A^{-1}A=AA^{-1}=E.$$

<u>Решение:</u> Так как $\det A=|A|=\begin{vmatrix}3 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{vmatrix}=-3\neq 0$, то матрица A имеет обратную матрицу, элементы которой равны $a_{ij}^{-1}=\dfrac{1}{|A|}\cdot A_{ji}$.

2) Вычислим алгебраические дополнения A_{ij} элементов a_{ij} для $\det A$:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=-1; \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=2;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 3\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-2; \qquad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 0\end{vmatrix}=-2; \qquad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-1;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}1 & 1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=-2; \qquad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 1\end{vmatrix}=1;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}3 & 1\\ 4 & 3\end{vmatrix}=5.$$

Теперь, используя формулу (1), находим обратную матрицу

$$A^{-1}=\frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3}\\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}\\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3}\end{pmatrix}.$$

Далее вычислим произведение

$$A^{-1}A=\frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}=\frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix}-3 & 0 & 0\\ 0 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -3\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Аналогично находим

$$AA^{-1}=\begin{pmatrix}3 & 1 & 1\\ 4 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{-3}\cdot\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 2 & -2 & 1\\ -2 & -1 & 5\end{pmatrix}=E$$

. Итак, обратная матрица вычислена правильно.

Задания для самостоятельной работы

№1. Для заданной матрицы $A=\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ 2 & 0 & 3\\ 4 & -1 & 2\end{pmatrix}$ найти указанные элементы обратной матрицы A^{-1}:

1) a_{12}^{-1}; 2) a_{13}^{-1}; 3) a_{21}^{-1};

4) a_{22}^{-1}; 5) a_{31}^{-1}; 6) a_{33}^{-1}.

№2. Для матриц $A=\begin{pmatrix}-91 & 46 & -83\\ 1 & 11 & -19\\ -53 & 43 & 40\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-18 & 80 & 93 & -13\\ 64 & 94 & 85 & -31\\ -65 & -13 & 43 & -19\\ 76 & 98 & -22 & -38\end{pmatrix}$ найдите обратные матрицы, A^{-1} и B^{-1}. Проверить, верно, ли они найдены.

Вопросы для самоконтроля:

1. Какая матрица называется квадратной?
2. Какая матрица называется единичной, верхнетреугольной, нижнетреугольной, диагональной?
3. Дайте определение обратной матрицы. Всегда ли существует обратная матрица?
4. Как найти обратную матрицу?

Практическая работа № 16.

Решение систем линейных уравнений различными методами.

Цель: Формирование навыков решения СЛАУ по правилу Крамера и матричным методом.

На выполнение практической работы отводится 1 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы.

2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Решение систем алгебраических уравнений по правилу Крамера и матричным методом

Теорема Крамера. Рассмотрим «квадратную» систему линейных уравнений (число неизвестных совпадает с числом уравнений) вида

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}. \qquad (*)$$

Если определитель матрицы системы (*) отличен от нуля ($|A| \neq 0$), то данная система имеет единственное решение, причем значения неизвестных находятся по формулам

$$x_i = \frac{|A|_i}{|A|}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

где $|A|_i$ - определитель матрицы, полученной из исходной матрицы системы путем замены i-го столбца на столбец свободных членов.

<u>Пример .</u> Решить систему $\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$ методом Крамера.

Решение. Выписываем А - матрицу системы и В - столбец свободных членов: $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 4 \\ 11 \\ 11 \end{pmatrix}$. Далее вычисляем определители:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & 4 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2(16-4) - (-1)(12+16) - 1(-6-12) = 60 \neq 0;$$

$$|A|_1 = \begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ 11 & 4 & -2 \\ 11 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 4(16-4) - (-1)(44+22) - 1(-22-44) = 180;$$

$$|A|_2 = \begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 3 & 11 & -2 \\ 3 & 11 & 4 \end{vmatrix} = 2(44+22) - 4(12+6) - 1(33-33) = 60;$$

$$|A|_3 = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 11 \\ 3 & -2 & 11 \end{vmatrix} = 2(44+22) - (-1)(33-33) + 4(-6-12) = 60.$$

По теореме Крамера $x_1 = \frac{|A|_1}{|A|} = \frac{180}{60} = 3$; $x_2 = \frac{|A|_2}{|A|} = \frac{60}{60} = 1$; $x_3 = \frac{|A|_3}{|A|} = \frac{60}{60} = 1$. Для проверки результата подставим полученные значения неизвестных в каждое уравнение системы: $2 \cdot 3 - 1 - 1 \equiv 4$, $3 \cdot 3 + 4 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \equiv 11$, $3 \cdot 3 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot 1 \equiv 11$. Все уравнения обратились в тождества, значит, решение найдено верно.

Пример

<u>Задание:</u> Показать, что система имеет единственное решение и найти его двумя способами: а) по правилу Крамера;

б) матричным методом.

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 13 \\ 4x + 7y \quad = -13 \\ -x - 2y + 5z = 4 \end{cases}$$

<u>Решение:</u> Данная система имеет размер 3×3 (три уравнения и три неизвестных). Составим матрицу A из коэффициентов при неизвестных:

$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$. Матрица A квадратная (3×3). Вычислим определитель матрицы Δ, используя формулу его разложения по элементам первой строки:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 7 & 0 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} + (-3) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} + 1 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= 2 \cdot 35 + (-3) \cdot (-20) + 1 \cdot (-1) = 129.$$

Так как определитель системы $\Delta = 129 \neq 0$, то данная система имеет единственное решение. Это решение можно найти по правилу Крамера: $x = \frac{\Delta_x}{\Delta}$; $y = \frac{\Delta_y}{\Delta}$; $z = \frac{\Delta_z}{\Delta}$, где $\Delta = 129$ - главный определитель системы; Δ_x, Δ_y, Δ_z - вспомогательные определители, которые получаются из главного путем замены соответствующего столбца на столбец свободных членов, и вычисляются аналогично определителю Δ.

$$\Delta_x = \begin{vmatrix} 13 & -3 & 1 \\ -13 & 7 & 0 \\ 4 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 13 \cdot 7 \cdot 5 + (-3) \cdot 0 \cdot 4 + 1 \cdot (-13) \cdot (-2) -$$

$$-1 \cdot 7 \cdot 4 - (-3) \cdot (-13) \cdot 5 - 13 \cdot 0 \cdot (-2) = 455 + 26 - 28 - 195 = 258;$$

$$\Delta_y = \begin{vmatrix} 2 & 13 & 1 \\ 4 & -13 & 0 \\ -1 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-13) \cdot 5 + 13 \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot 4 \cdot 4 -$$

$$-1 \cdot (-13) \cdot (-1) - 13 \cdot 4 \cdot 5 - 2 \cdot 0 \cdot 4 = -130 + 16 - 13 - 260 = -387;$$

$$\Delta_z = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 13 \\ 4 & 7 & -13 \\ -1 & -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 7 \cdot 4 + (-3) \cdot (-13) \cdot (-1) + 13 \cdot 4 \cdot (-2) -$$

$$-13 \cdot 7 \cdot (-1) - (-3) \cdot 4 \cdot 4 - 2 \cdot (-13) \cdot (-2) = 56 - 39 - 104 + 91 +$$
$$+ 48 - 52 = 0.$$

Отсюда по правилу Крамера имеем:

$$x = \frac{\Delta_x}{\Delta} = \frac{258}{129} = 2; \qquad y = \frac{\Delta_y}{\Delta} = \frac{-387}{129} = -3;$$

$$z = \frac{\Delta_z}{\Delta} = \frac{0}{129} = 0.$$

Решение системы единственно, это совокупность чисел $(2; -3\ 0)$.

<u>Проверка:</u> Подставим найденное решение во все уравнения исходной системы линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 3 \cdot (-3) + 1 \cdot 0 = 13 \\ 4 \cdot 2 + 7 \cdot (-3) = -13 \\ -1 \cdot 2 - 2 \cdot (-3) + 5 \cdot 0 = 4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 13 = 13 \\ -13 = -13 \\ 4 = 4 \end{cases}$$

Так как все уравнения системы обратились в равенства, то решение найдено верно.

Ответ: $(2; -3\ 0)$.

Решим данную систему матричным способом. Рассмотрим матрицы:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix}; \quad X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix}; \quad B=\begin{pmatrix} 13 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix};$$

A - матрица коэффициентов при неизвестных, X - матрица – столбец неизвестных, B - матрица – столбец свободных членов.

Данную систему можно записать в виде:

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 7 & 0 \\ -1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ -13 \\ 4 \end{pmatrix};$$

При умножении матриц каждая строка матрицы A умножается на столбец матрицы X и в результате получается соответствующий элемент матрицы B. Таким образом, последняя матричная запись содержит все три уравнения данной системы линейных алгебраических уравнений. Коротко ее можно записать так:

$$A \cdot X = B \qquad (1)$$

Рассмотрим матрицу A^{-1}, обратную к матрице A. Это такая матрица, которая при умножении на данную матрицу A дает единичную матрицу E: $A^{-1} \cdot A = E$, где $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Умножая обе части матричного равенства (2) на матрицу A^{-1} слева, получим:

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B,$$

$$E \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

$$E \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \cdot x & 0 \cdot y & 0 \cdot z \\ 0 \cdot x & 1 \cdot y & 0 \cdot z \\ 0 \cdot x & 0 \cdot y & 1 \cdot z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = X$$, и окончательно имеем:

$$X = A^{-1} \cdot B \qquad (2)$$

Формула (2) используется для нахождения решения системы линейных алгебраических уравнений. Предварительно нужно вычислить обратную матрицу. Обратная матрица вычисляется по формуле: $A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$ (3), где A_{ij} - алгебраическое дополнение всех элементов матрицы A,

Δ - главный определитель системы $(\Delta \neq 0)$.

В нашем примере $\Delta = 129 \neq 0$.

Найдем теперь алгебраические дополнения для всех элементов матрицы A:

$$A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot\begin{vmatrix}7 & 0\\ -2 & 5\end{vmatrix}=35;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\cdot\begin{vmatrix}4 & 0\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-20;$$

$$A_{13}=(-1)^{1+3}\cdot\begin{vmatrix}4 & 7\\ -1 & -2\end{vmatrix}=-1;\quad A_{21}=(-1)^{2+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ -2 & 5\end{vmatrix}=13;$$

$$A_{22}=(-1)^{2+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ -1 & 5\end{vmatrix}=11;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ -1 & -2\end{vmatrix}=7;$$

$$A_{31}=(-1)^{3+1}\cdot\begin{vmatrix}-3 & 1\\ 7 & 0\end{vmatrix}=-7;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\cdot\begin{vmatrix}2 & 1\\ 4 & 0\end{vmatrix}=4;$$

$$A_{33}=(-1)^{3+3}\cdot\begin{vmatrix}2 & -3\\ 4 & 7\end{vmatrix}=26.$$

Составим матрицу алгебраических дополнений:

$$\begin{pmatrix}35 & -20 & -1\\ 13 & 11 & 7\\ -7 & 4 & 26\end{pmatrix}.$$

Транспонируем ее, то есть поменяем местами столбцы и строки с одинаковыми номерами:

$$\begin{pmatrix}35 & 13 & -7\\ -20 & 11 & 4\\ -1 & 7 & 26\end{pmatrix}.$$

Обратную матрицу получим по формуле (3), умножая каждый элемент последней матрицы на число, равное $\frac{1}{129}$:

$$A^{-1}=\frac{1}{129}\cdot\begin{pmatrix}35 & 13 & -7\\ -20 & 11 & 4\\ -1 & 7 & 26\end{pmatrix}.$$

Решение системы линейных алгебраических уравнений находим по формуле (2) умножением матрицы A^{-1} на матрицу свободных членов B:

$$X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ x\end{pmatrix}=\frac{1}{129}\cdot\begin{pmatrix}35 & 13 & -7\\ -20 & 11 & 4\\ -1 & 7 & 26\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}13\\ -13\\ 4\end{pmatrix}=$$

$$=\frac{1}{129}\cdot\begin{pmatrix}35\cdot13+13\cdot(-13)-7\cdot4\\ (-20)\cdot13+11\cdot(-13)+4\cdot4\\ (-1)\cdot13+7\cdot(-13)+26\cdot4\end{pmatrix}=\frac{1}{129}\cdot\begin{pmatrix}258\\ -387\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 0\end{pmatrix}$$ Отсюда следует, что $x=2$, $y=-3$, $z=0$.

Найденное решение $(2; -3\ 0)$ было проверено выше, и совпадает с результатом, полученным по правилу Крамера.

Ответ: $(2; -3\ 0)$ - единственное решение системы.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. По расширенной матрице выписать СЛАУ.

1) $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 8 & -2 & 5 & 6 & -4 \\ 2 & 0 & 4 & 1 & 15 \end{array}\right)$

2) $(A|B)=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -4 & 1 \\ 12 & 0 & 1 & 11 \\ 5 & 4 & 10 & -3 \end{array}\right)$

3) $(A|B)=\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 3 & -1 & 10 & 7 & 12 \\ 1 & 3 & -1 & 3 & 4 & -3 \\ -7 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$

4) $(A|B)=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 7 & -1 \\ 0 & 8 & 6 & 8 & 6 \end{array}\right)$

Задание 2. Решить системы уравнений методом Крамера.

1) $\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 3x_1 + 2x_2 + 2x_3 = -2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \end{cases}$

2) $\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 = 1 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 1 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 - x_2 + 3x_3 = 9 \\ -2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = -16 \\ x_1 + 6x_3 = 13 \end{cases}$

Задание 3. Решить СЛАУ (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения).

1) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 6 \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 4x_3 = 4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ -3x_1 + 4x_2 + 4x_3 = -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - 2x_3 = -1 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = 4 \\ -2x_1 - x_2 + 8x_3 = 20 \end{cases}$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 5 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ 2x + y + 3z = 11 \end{cases}.$$

Вопросы для самоконтроля:

1. Что называется решение СЛАУ?
2. Какие случаи могут представиться при решении СЛАУ?
3. Какие СЛАУ называются совместными, несовместными?
4. Напишите формулу Крамера. В каком случае они применимы?
5. При каком условии СЛАУ имеет единственное решение?
6. Что можно сказать о СЛАУ, если ее определитель равен нулю?
7. Как записать СЛАУ в матричном виде?
8. В чем состоит матричный метод решения СЛАУ?

Практическая работа № 17

Решение прикладных задач методом Крамера и методом Гаусса.

Цель: Формирование навыков решения СЛАУ методом Гаусса
На выполнение практической работы отводится 2 часа.
Требования к выполнению практической работы:
1.Ответить на теоретические вопросы.
2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал
Решение систем алгебраических уравнений методом Гаусса

Задачи, посвященные решению систем линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) методом исключения неизвестных для случая, когда СЛАУ имеет бесконечное множество решений (совместная неопределенная СЛАУ). При решении системы предлагается использовать одну из равносильностей метода исключения неизвестных – метод Жордана – Гаусса или метода полного исключения.

В процессе решения система преобразуется в равносильные (эквивалентные) системы, то есть СЛАУ с тем же множеством решений.

К элементарным преобразованиям, сохраняющим равносильность СЛАУ, относятся следующие преобразования:

- смена мест уравнений СЛАУ;
- отбрасывание одного из двух одинаковых уравнений СЛАУ;
- умножение обеих частей какого-либо уравнения на число, отличное от нуля;
- замена одного из уравнений СЛАУ уравнением, полученным его почленным сложением с другим уравнением СЛАУ.

Сущность метода исключения состоит в том, что с помощью указанных элементарных преобразований, не нарушающих равносильности СЛАУ, выбранное неизвестное (ведущее) исключается из всех уравнений системы, кроме одного (ведущего уравнения). Метод осуществляется по шагам. На каждом шаге исключается только одно неизвестное. Шаги заканчиваются, когда ведущим побывают все уравнения системы (либо будет получено очевидное противоречие, говорящее об отсутствии решений СЛАУ).

Пример

<u>Задание:</u> Пользуясь методом исключения неизвестных найти общее решение системы линейных уравнений, а также два частных ее решения, одно из которых базисное:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -7 \\ 4x_1 + 16x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1 \\ -2x_1 - 19x_2 + 8x_3 + 2x_4 = -8 \end{cases}$$

Решение: Система имеет размер 3×4 (три уравнения, четыре неизвестных). На каждом шаге выбираем одно ведущее уравнение и в нем одно ведущее неизвестное. Ведущим каждое уравнение и каждое неизвестное могут быть только один раз. На следующем шаге их за ведущие брать нельзя.

Шаг первый. Выберем в качестве ведущего уравнения первое, а в нем ведущее неизвестное x_3, так как коэффициент при x_3 равен единице, что упрощает вычисления.

Ведущее уравнение, то есть первое, оставляем без изменения. Исключим ведущее неизвестное x_3 из второго и третьего уравнений. Для этого нужно преобразовать эти уравнения к виду, когда коэффициенты при x_3 в них станут равными нулю.

Умножим обе части ведущего уравнения на число 7 и почленно сложим со вторым уравнением. Аналогично, умножим обе части ведущего уравнения на «-8» и почленно сложим с третьим уравнением. В итоге получим систему, равносильную исходной:

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -7 \\ 4x_1 + 16x_2 - 7x_3 + 3x_4 = 1 \quad \Big| + I\cdot 7 \\ -2x_1 - 19x_2 + 8x_3 + 2x_4 = -8 \Big| + I\cdot(-8) \end{cases} \Rightarrow$$

$$\begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -7 \\ 18x_1 - 5x_2 \quad + 38x_4 = -48 \\ -18x_1 + 5x_2 \quad - 38x_4 = 48 \end{cases} \Rightarrow$$

Теперь переменная x_3 содержится только в первом уравнении. Заметим также, что два последних уравнения станут одинаковыми, если в одном из них поменять знаки. Поэтому, отбросим одно из этих уравнений, например, третье.

Шаг второй. Выберем в качестве ведущего второе (другое) уравнение. Так как в нем нет неизвестного с коэффициентом 1, то берем любое неизвестное, с коэффициентом, отличным от нуля, и делим обе части нового ведущего уравнения на этот коэффициент. Например, выберем во втором уравнении в качестве ведущего неизвестное x_2, с коэффициентом «-5», и поделим обе части этого уравнения на «-5»:

$$\Rightarrow \begin{cases} 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 5x_4 = -7 \\ -3{,}6x_1 + x_2 \quad - 7{,}6x_4 = 9{,}6 \Big| + II\cdot 3 \end{cases} \Rightarrow$$

Чтобы исключить x_2 из первого уравнения, умножим обе части ведущего (второго) уравнения на 3 и почленно сложим с первым. Ведущее уравнение перепишем без изменения.

$$\Rightarrow \begin{cases} -8{,}8x_1 \quad + x_3 - 17{,}8x_4 = 21{,}8 \\ -3{,}6x_1 + x_2 \quad - 7{,}6x_4 = 9{,}6 \end{cases} \Rightarrow$$

Ведущая переменная содержится теперь только во втором (ведущем) уравнении. Так как все уравнения уже были ведущими (каждое на своем шаге), то преобразования закончены.

Выразим из каждого уравнения то неизвестное, которое было в нем ведущим, и поэтому, не содержится в других уравнениях:

$$\Rightarrow \begin{cases} x_3 = 21{,}8 + 8{,}8x_1 + 17{,}8x_4 \\ x_2 = 9{,}6 + 3{,}6x_1 + 7{,}6x_4 \end{cases}.$$

Получено общее решение данной системы. Переменные x_2 и x_3, которые мы выразили, называются базисными. Остальные переменные x_1 и x_4 - называются свободными, они задаются произвольно (свободно)

Общее решение СЛАУ представляет собой такую запись СЛАУ, когда часть ее переменных, называемых базисными, выражены через оставшиеся переменные, называемые свободными.

Частные решения СЛАУ могут быть получены из общего решения. Для этого задаем произвольно свободные переменные и вычисляем базисные по общему решению.

Например, пусть $x_1 = 1$; $x_4 = -2$. Тогда

$$\begin{cases} x_3 = 21{,}8 + 8{,}8 \cdot 1 + 17{,}8 \cdot (-2) = 30{,}6 - 35{,}6 = -5 \\ x_2 = 9{,}6 + 3{,}6 \cdot 1 + 7{,}6 \cdot (-2) = 13{,}2 - 15{,}2 = -2 \end{cases}.$$

Таким образом, получено частное решение системы: $(1; -2; -5; -2)$. Придавая свободным переменным x_1 и x_4 другие значения, найдем, аналогичным образом, любое количество частных решений СЛАУ.

Базисное решение СЛАУ, это такое частное решение, когда свободные переменные равны нулю, то есть $x_1 = 0$; $x_4 = 0$, тогда $\begin{cases} x_3 = 21{,}8 + 8{,}8 \cdot 0 + 17{,}8 \cdot 0 = 21{,}8 \\ x_2 = 9{,}6 + 3{,}6 \cdot 0 + 7{,}6 \cdot 0 = 9{,}6 \end{cases}$. Получено базисное решение системы: $(0; 9{,}6; 21{,}8; 0)$.

<u>Проверка:</u> Проверим правильность нахождения двух частных решений, из которых базисное, подстановкой в исходную систему.

1) Проверяем решение $(1; -2; -5; -2)$:

$$\begin{cases} 2 \cdot 1 - 3 \cdot (-2) + (-5) + 5 \cdot (-2) = 2 + 6 - 5 - 10 = -7 \\ 4 \cdot 1 + 16 \cdot (-2) - 7 \cdot (-5) + 3 \cdot (-2) = 4 - 32 + 35 - 6 = 1 \\ -2 \cdot 1 - 19 \cdot (-2) + 8 \cdot (-5) + 2 \cdot (-2) = -2 + 38 - 40 - 4 = -8 \end{cases}$$ таким образом, все уравнения СЛАУ выполняются.

2) Проверим решение $(0; 9{,}6; 21{,}8; 0)$:

$$\begin{cases} 2\cdot 0-3\cdot 9{,}6+21{,}8+5\cdot 0=-28{,}8+21{,}8=-7 \\ 4\cdot 0+16\cdot 9{,}6-7\cdot 21{,}8+3\cdot 0=153{,}6-152{,}6=1 \\ -2\cdot 0-19\cdot 9{,}6+8\cdot 21{,}8+2\cdot 0=-182{,}4+174{,}4=-8 \end{cases}.$$

Решение удовлетворяет всем уравнениям исходной СЛАУ.

Ответ: $\begin{cases} x_3=21{,}8+8{,}8x_1+17{,}8x_4 \\ x_2=9{,}6+3{,}6x_1+7{,}6x_4 \end{cases}$ - общее решение СЛАУ,

$(1;-2;-5;-2)$ - частное решение СЛАУ,

$(0;9{,}6;21{,}8;0)$ - базисное решение СЛАУ.

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Пользуясь методом исключения неизвестных, найти общее решение системы линейных уравнений, а также два частных ее решения, одно из которых базисное.

$$\begin{cases} -x-y-2z+t=9 \\ y+2z+3t=5 \\ x+3y+6z+5t=1 \end{cases}.$$

Задание 2. Решить системы уравнений методом Гаусса.

1) $\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3=2 \\ 3x_1+2x_2+2x_3=-2 \\ x_1-2x_2+x_3=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 3x_1+x_2+3x_3=2 \\ 5x_1-2x_2+2x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=1 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3=5 \\ 2x_1+x_2+x_3=1 \\ x_1+3x_2+4x_3=1 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1-x_2+3x_3=9 \\ -2x_1+3x_2-4x_3=-16 \\ x_1+6x_3=13 \end{cases}$

Задание 3. Решить СЛАУ (в случае неопределенной системы выписывать общее и два любых частных решения).

1) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-1 \\ x_1+3x_2-x_3=4 \\ -x_1+4x_3=6 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-1 \\ x_1+3x_2-x_3=4 \\ -x_1+4x_3=4 \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1-x_2-x_3=1 \\ -3x_1+4x_2+4x_3=-2 \\ 2x_1+2x_2+3x_3=10 \end{cases}$ 4) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3=-1 \\ x_1+3x_2-x_3=4 \\ -2x_1-x_2+8x_3=20 \end{cases}$

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение эквивалентных (равносильных) СЛАУ.
2. Назовите элементарные преобразования, не нарушающие равносильности СЛАУ.
3. В чем состоит сущность метода Жордана – Гаусса для решения СЛАУ? Как осуществляется этот метод? Когда он применим?
4. Что называется общим решение СЛАУ?
5. Какие переменные называются базисными, а какие свободными?
6. Как найти частное решение СЛАУ? Сколько частных решений имеет СЛАУ?
7. Что называется базисным решением СЛАУ? Сколько базисных решений имеет СЛАУ?

Практическая работа № 18.

Понятие о числе сочетаний (решение типовых задач).

Цель: Формирование навыков решения задач по определению вероятностей
На выполнение практической работы отводится 2 часа.
Требования к выполнению практической работы:
1.Ответить на теоретические вопросы.
2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

1.Основные понятия и определения

Теоремы о сложении вероятностей

Если события А и В несовместны, то вероятность суммы событий равна сумме вероятностей этих событий

$$P_{(A+B)} = P_{(A)} + P_{(B)};$$

Если события А и В совместны и зависимы, то вероятность суммы событий определяется по формуле:

$$P_{(A+B)} = P_{(A)} + P_{(B)} - P_{(AB)};$$

Если события А и В совместны, но независимы, то вероятность суммы событий определяется по формуле:

$$P_{(A+B)} = P_{(A)} + P_{(B)} - P_{(A)}P_{(B)};$$

2.Решение задач

Задача № 1 Спортсмен стреляет по мишени, разделенной на три сектора. Вероятность попадания в первый сектор равна 0,5, во второй – 0,3. Какова вероятность попадания либо в первый, либо во второй сектор?

Решение.

Так как события А и В несовместны, то

$$P_{(A+B)} = P_{(A)} + P_{(B)};$$
$$P_{(A+B)} = 0{,}5 + 0{,}3 = 0{,}8.$$

Задача № 2 Два стрелка стреляют по мишени с вероятностью 0,7 и 0,8, соответственно. Найти вероятность того, что хотя бы один из них попадает в цель.

Решение

Так как события совместны и независимы, то

$$P_{(A+B)} = P_{(A)} + P_{(B)} - P_{(A)}P_{(B)};$$
$$P_{(A+B)} = 0{,}7 + 0{,}8 - 0{,}7 \cdot 0{,}8 = 0{,}94.$$

Задача № 3 Симметричная монета подброшена три раза. Какова вероятность того, что цифра выпадет два раза?

Решение

событие A_1 - «при первом подбрасывании выпадает цифра»;

событие A_2 - «при втором подбрасывании выпадает цифра»;

событие A_3 - «при третьем подбрасывании выпадает цифра»

Событие А - «при трех подбрасываниях цифра выпадает два раза»

Поскольку события $A = A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3$

$A_1 A_2 \overline{A_3}$; $A_1 \overline{A_2} A_3$; и $\overline{A_1} A_2 A_3$

являются независимыми, то

$$p_{(A)} = p_{(A_1 A_2 \overline{A_3})} + p_{(A_1 \overline{A_2} A_3)} + p_{(\overline{A_3} A_2 A_3)};$$

События A_1, A_2 и A_3 - независимы, поэтому

$$p_{(A)} = p_{(A_1)} p_{(A_2)} p_{(\overline{A_3})} + p_{(A_1)} p_{(\overline{A_2})} p_{(A_3)} + p_{(\overline{A_1})} p_{(A_2)} p_{(A_3)};$$

$$P_{(A)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{8};$$

Задача № 4 Три стрелка попадают в мишень соответственно с вероятностями 0,8; 0,7 и 0,6. Найти вероятность того, что при одном выстреле хотя бы один из них попадет в мишень.

Решение

А – «первый стрелок попадает в мишень»

В – «второй стрелок попадает в мишень»

С – «третий стрелок попадает в мишень»

Тогда событие:

$D = A + B + C$ – «хотя бы один из стрелков попадает в цель».

Событие, противоположное событию D: $\overline{D} = \overline{A + B + C} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$

Теперь, вероятность р события D:

$$p_{(D)} = 1 - p_{(\overline{D})} = 1 - p_{(\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C})} = 1 - p_{(\overline{A})} p_{(\overline{B})} p_{(\overline{C})} = 1 - q_1 q_2 q_3,$$

где

$q_1 = 1 - p_1$; $q_2 = 1 - p_2$; $q_3 = 1 - p_3$;

$$p(D) = 1 - 0{,}2 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}4 = 0{,}976.$$

Задания для самостоятельной работы

Задание 1. По данным задачи №4 ответить на следующие вопросы:

а) Какова вероятность того, что в мишень попадет только один стрелок?

б) Какова вероятность того, что в мишень попадут два стрелка?

в) Какова вероятность того, что в мишень попадут три стрелка?

г) Какова вероятность того, что в мишень не попадет ни один стрелок?

Задание 2. Используя классическое определение вероятности события, решить следующие задачи:

1. В коробке 4 красных, 5 зеленых, 8 желтых, 7 белых и 1 черный шар. Найти вероятность вытащить: красный шар; синий шар; белый шар; цветной шар; или зеленый или белый шар; не красный шар; шар одного из цветов светофора.

2. В семье – двое детей. Какова вероятность, что старший ребенок – девочка, если известно, что в семье есть дети обоего пола?

3. Мастер, имея 10 деталей, из которых 4 – нестандартных, проверяет детали одну за другой, пока ему не попадется стандартная. Какова вероятность, что он проверит ровно две детали?

4. В одном ящике 3 белых и 7 черных шаров, в другом ящике – 6 белых и 8 черных шара. Найти вероятность того, что хотя бы из одного ящика будет вынут белый шар, если из каждого ящика вынуто по одному шару.

5. Издательство отправило газеты в три почтовых отделения. Вероятность своевременной доставки газет в первое отделение равна 0,9, во второе - 0,7, в третье - 0,85. Найти вероятность следующих событий:

а) только одно отделение получит газеты вовремя;

б) хотя бы одно отделение получит газеты с опозданием.

6. В первой урне находятся 12 белых и 4 черных шаров, а во второй 5 белых и 10 черных шаров. Из каждой урны вынули по шару. Какова вероятность того, что оба шара окажутся черными? Какова вероятность, что оба шара окажутся белыми?

7. В партии из 25 деталей находятся 8 бракованных. Вынимают из партии наудачу две детали. Определить, какова вероятность того, что обе детали окажутся бракованными.

8. Подброшены две игральные кости. Найти вероятность события А того, что выпадет хотя бы одна шестерка.

9. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, большее 4.

10. Найти вероятность, что при бросании игральной кости выпадет число, не меньшее 2 и не большее 5.

Задание 3. Используя формулы полной вероятности и Байеса, решить следующие задачи:

1. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 2 урны?

2. Детали, изготовляемые цехом завода, попадают для проверки их на стандартность к одному из двух контролеров. Вероятность того, что деталь попадет к первому контролеру =0,5, ко второму =0,6. Вероятность того, что годная деталь будет признана стандартной первым контролером =0,94, а вторым =0,92. Годная деталь при проверке была признана стандартной. Найти вероятность того, что эту деталь проверил первый контролер.

3. Имеется два набора деталей. Вероятность того, что деталь первого набора стандартная равна 0,9, а второго – 0,8. Найти вероятность того, что взятая наудачу деталь – стандартная.

4. Имеются 3 одинаковые урны. В первой урне находятся 6 синих и 4 черных шаров, во второй – только синие и в третьей – только черные. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Какова вероятность, что этот шар синий?

5. Имеются 2 одинаковые урны. В первой урне находятся 7 белых и 3 черных шаров, во второй – 6 белых и 4 черных. Наугад выбираются урна и из нее извлекается один шар. Выбранный шар оказался черным. Какова вероятность, что этот шар из 1 урны?

Задание 4. Используя формулу Бернулли, решить следующие задачи:

1. Вероятность того, что расход электроэнергии на продолжении одних суток не превысит установленной нормы равна 0,75. Найти вероятность того, что в ближайшие 6 суток расход электроэнергии в течение 4 суток не превысит нормы.

2. Найти вероятность осуществления от одного до трех разговоров по телефону при наблюдении шести независимых вызовов, если вероятность того, что разговор состоится, равна 0,6.

3. Прибор состоит из пяти элементов, включенных в цепь параллельно и работающих независимо друг от друга. Вероятность безотказной работы каждого элемента за время Т равна 0,5. Для безаварийной работы прибора достаточно, чтобы хотя бы один элемент был исправен. Какова вероятность того, что за время Т прибор будет работать безотказно?

4. Вероятность выигрыша по одному лотерейному билету =0,3. Какова вероятность того, что из семи приобретенных билетов три билета окажутся выигрышными?

5. Магазин получил 40 деталей. Вероятность наличия нестандартной детали в партии равна 0,04. Найти наиболее вероятное число нестандартных деталей в этой партии.

6. Вероятность изготовления на автоматическом станке стандартной детали равна 0,8. Найдя вероятности возможного числа появления бракованных деталей среди 5 отобранных,

найти наивероятнейшее число появления бракованных деталей из 5 отобранных, указав его вероятность.

7. Сколько раз необходимо подбросить игральную кость, чтобы наивероятнейшее выпадение тройки было равно 10?

8. Для данного участника игры вероятность набросить кольцо на колышек =0,3. Какова вероятность того, что при шести бросках 3 кольца окажутся на колышке?

9. На самолете имеются 4 одинаковых двигателя. Вероятность нормальной работы каждого двигателя в полете равна p. Найти вероятность того, что в полете могут возникнуть неполадки в одном двигателе.

10. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,4. Что вероятнее ожидать: отказ двух приборов при испытании четырех или отказ трех приборов при испытании шести, если приборы испытываются независимо друг от друга?

11. Вероятность того, что на некотором предприятии расход электроэнергии не превысит суточной нормы равна 0,8. Какова вероятность того, что в течение пяти рабочих дней из семи перерасхода электроэнергии не будет?

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте классическое определение вероятности.
2. Какое событие называется достоверным, какое – невозможным и какое – случайным?
3. В каком диапазоне изменяется вероятность случайного события?
4. Что такое диаграмма Эйлера-Венна применительно к теории вероятности?
5. Записать формулы для вероятности суммы и произведения случайных событий.

Практическая работа № 19.

Произвольное, равномерное и биноминальное распределение

Цель: научиться применять формулу Бернулли для составления закона распределения случайной величины, изображать закон графически, находить вероятности конкретных значений случайной величины.

На выполнение практической работы отводится 1 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы.

2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

1. Формула Бернулли

Пусть производится конечное число одинаковых испытаний, в результате каждого из которых может произойти или не произойти некоторое событие А. Будем считать, что вероятность события А в каждом испытании одна и та же P(A) = p и не зависит от того, произойдет или нет событие А в других испытаниях. Такие испытания называются независимыми. Найдем вероятность того, что среди n независимых испытаний событие А произойдет ровно m раз. Искомую вероятность обозначим $P_n(m)$ и для ее нахождения используем формулу Бернулли:

$$P_n(m) = n!/(m!\cdot (n-m)!) \cdot p^m \cdot (1-p)^{n-m}.$$

<u>Пример 1</u>

Вероятность попадания в цель при одном выстреле составляет p=0,8. Найти вероятность четырех попаданий при шести выстрелах.

Решение

Здесь n = 6, m = 4, p = 0,8. По формуле Бернулли находим

$P_6(4) = 6! / (4! \cdot (6-4)!) \cdot 0{,}8^4 \cdot (1-0{,}8)^{6-4} = 0{,}246.$

2. Закон распределения случайной величины

Случайной величиной называется переменная величина, которая может принимать те или иные значения в зависимости от случая. Случайные величины обозначаются прописными буквами латинского алфавита: X, Y, Z и т. д., а их значения – соответствующими строчными буквами: x, y, z и т. д.Случайные величины делятся на дискретные (или прерывные) и непрерывные.

Случайная величина называется дискретной, если множество ее значений конечно или счетно, т. е. множество ее значений представляет собой конечную последовательность $x_1, x_2,\ldots, x_n$ или бесконечную последовательность $x_1, x_2,\ldots, x_n,\ldots$

Функция, связывающая значения случайной величины с соответствующими им вероятностями, называется законом распределения дискретной случайной величины. Его удобно задавать в виде следующей таблицы:

Значения	x_i	1	2	3	n
Вероятности	p_i	1	2	3	n

Таблица 1. Закон распределения случайной величины

События $X = x_i$ ($i = 1, 2, 3, \ldots, n$) являются несовместными и единственно возможными, т. е. они образуют полную систему событий. Поэтому сумма их вероятностей равна единице:

$p_1 + p_2 + p_3 + \ldots + p_n = 1$.

<u>Пример 2</u>

Разыгрываются две вещи стоимостью по 5 тыс. руб. и одна вещь стоимостью 30 тыс. руб. Составить закон распределения выигрыша для человека, купившего один билет из 50.

Решение

Искомая случайная величина X представляет собой выигрыш и может принимать три значения: 0, 5 и 30 тыс. руб. Первому результату благоприятствует 47 случаев, второму результату – два случая и третьему – один случай. Найдем их вероятности:

$P(x_1) = 47/50 = 0{,}94$;
$P(x_2) = 2/50 = 0{,}04$;
$P(x_3) = 1/50 = 0{,}02$.

Закон распределения случайной величины имеет вид

Значения	x_i	0	5	30	n
Вероятности	p_i	0,94	0,04	0,02	n

В качестве проверки найдем

$P(x_1) + P(x_2) + P(x_3) = 0{,}94 + 0{,}04 + 0{,}02 = 1$.

3. Биномиальное распределение

Пусть производится определенное число n независимых испытаний, причем в каждом из них с одной и той же вероятностью может наступить некоторое событие A. Рассмотрим случайную величину X, представляющую собой число наступлений события A в n испытаниях. Закон ее распределения имеет вид

Значения	x_i	0	1	2	…	n
Вероятности	p_i	$P_n(0)$	$P_n(1)$	$P_n(2)$	…	$P_n(n)$

где $P_n(m)$ вычисляются по формуле Бернулли. Закон распределения случайной величины X, который характеризуется такой таблицей, называется биномиальным распределением.

Задания для самостоятельной работы

Задача № 1

По мишени стреляют 15 раз, причем вероятность попадания при одном выстреле равна 0,3. Выполнить следующие задания:

1) Составить закон распределения случайной величины X – число попаданий в цель.

2) Изобразить графически закон распределения.

3) Найти наименее вероятное число попаданий.

4) Найти наиболее вероятное число попаданий.

5) Определить вероятность того, что число попаданий

а) $m \geq 4$; б) $m < 5$; в) не менее 10; г) более 6; д) от 6 до 12

Задача № 2

По мишени стреляют 14 раз, причем вероятность попадания при одном выстреле равна 0,6. Выполнить следующие задания:

1) Составить закон распределения случайной величины X – число попаданий в цель.

2) Изобразить графически закон распределения.

3) Найти наименее вероятное число попаданий.

4) Найти наиболее вероятное число попаданий.

5) Определить вероятность того, что число попаданий

а) $m > 9$; б) $m \leq 11$; в) менее 8; г) не более 6; д) более 10, но менее 13

Задача № 3

По мишени стреляют 12 раз, причем вероятность попадания при одном выстреле равна 0,4. Выполнить следующие задания:

1) Составить закон распределения случайной величины X – число попаданий в цель.

2) Изобразить графически закон распределения.

3) Найти наименее вероятное число попаданий.

4) Найти наиболее вероятное число попаданий.

5) Определить вероятность того, что число попаданий

а) $m>9$; б) $m\leq 8$; в) менее 5; г) не более 10; д) более 3, но не более 10

Вопросы для самоконтроля:

1. Какая величина называется случайной?
2. Какая случайная величина называется дискретной?
3. Опишите схему Бернулли. Какие элементарные события повторяются в этих испытаниях?
4. Запишите формулу Бернулли.
5. Что называется законом распределения случайной величины?

6 Какой закон распределения называется биномиальным?

Практическая работа № 20.

Основные характеристики случайных величин. Построение закона распределения случайной величины

Цель: Освоение методов построения закона распределения случайной величины
На выполнение практической работы отводится 1 часа.
Требования к выполнению практической работы:
1.Ответить на теоретические вопросы.
2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

1.Основные понятия и определения

Если для случайной величины X известны все значения $x_1, x_2, x_3, \ldots x_n$, которые она может принимать, и все вероятности $p_1, p_2, \ldots, p_n$, с которыми эти значения принимаются, то говорят, что задан закон распределения случайной величины.

Закон распределения обычно записывают в виде таблицы:

x_1	x_2	x_3	…	x_n
p_1	p_2,	p_3	…	p_n

Нетрудно заметить, что, поскольку события

A_1 – « случайная величина X принимает значение x_1»;

A_2 - « случайная величина X принимает значение x_2»;

……

A_n - « случайная величина X принимает значение x_n»

несовместны, то их сумма является достоверным событием, то есть, сумма всех вероятностей $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

2. Примеры

Пример №1. Пусть случайная величина X – число очков, выпавших при подбрасывании игральной кости. Найти закон распределения.

Решение. Случайная величина X принимает значения $x_1=1$, $x_2=2$, …, $x_6=6$, с вероятностями $p_1= p_2=\ldots p_6=1/6$.Поэтому закон распределения задается таблицей

1	2	3	4	5	6
1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6

Пример №2. Симметричная монета подбрасывается два раза. Случайная величина X – число появлений герба. Найти закон распределения.

Решение: Случайная величина X принимает значения 0, 1 и 2.

Полная группа событий может быть представлена следующим образом:

Г Г Г Ц Ц Г Ц Ц

Т.е., полную группу событий составляют четыре элементарных исхода. Из них два элементарных исхода благоприятствуют событию, когда число появлений герба равно одному, один элементарный исход благоприятствуют событию, когда число появлений герба равно нулю и один элементарный исход благоприятствуют событию, когда число появлений герба равно двум.

Поэтому, согласно формуле классической вероятности, $p_1 = \frac{1}{4}$; $p_2 = \frac{2}{4}$ и $p_3 = \frac{1}{4}$;

Таким образом, закон распределения имеет вид:

X	0	1	2
P	1/4	2/4	1/4

Задания для самостоятельной работы

1. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	0,2	0,4	0,6	0,8	1
P	0,1	0,2	0,4	P_4	0,1

Найти вероятность P_4.

2. Дискретная случайная величина X имеет закон распределения:

X	3	4	5	6	7
P	p1	0,15	p3	0,25	0,35

Найти вероятности p_1 и p_3, если известно, что p_3 в четыре раза больше p_1.

3. Подбрасываются два игральных кубика. Подсчитывается число очков, выпавших на обеих верхних гранях. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – суммы выпавших очков на двух игральных кубиках.

4. В урне 7 шаров, из которых 4 синих, а остальные красные. Из урны извлекаются 3 шара. Найти закон распределения дискретной случайной величины X – число синих шаров в выборке.

Вопросы для самоконтроля:

1. Дайте определение закона распределения случайной величины.
2. Чему равна сумма всех вероятностей, указанных в законе распределения?
3. Какая случайная величина называется дискретной, а какая - непрерывной?

Практическая работа № 21.

Построение вариационного ряда. Вычисление основных характеристик.

Цель: Освоение методов определения математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения случайной величины, заданной законом распределения

На выполнение практической работы отводится 2 часа.

Требования к выполнению практической работы:

1.Ответить на теоретические вопросы.

2.Оформить задания в тетради для практических работ.

Теоретический материал

Нахождение математического ожидания, дисперсии и среднего квадратичного отклонения случайной величины, заданной законом распределения

1. Основные понятия и определения.

Пусть дан закон распределения дискретной случайной величины X

x_1	x_2	x_3	…	x_n
p_1	p_2,	p_3	…	p_n

Математическим ожиданием дискретной случайной величины X называется сумма произведений ее значений на их соответствующие вероятности.

$$M(X) = x_1 p_1 + x_2 p_2 + ... + x_n p_n = \sum_{k=1}^{n} x_k p_k;$$

при этом $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1.$

Для математического ожидания используются и другие символы: EX, a, m_x

Математическое ожидание дискретной случайной величины приближенно равно среднему арифметическому всех ее возможных значений.

Свойства математического ожидания дискретной случайной величины.

1.Значения математического ожидания дискретной случайной величины X заключено между ее наибольшим и наименьшим значениями:

$$a \le M(X) \le b$$

2.Математическое ожидание постоянной величины равно этой постоянной:

$$M(C) = C;$$

3.Постоянный множитель можно вынести за знак математического ожидания:

$$M(CX) = CM(X);$$

4. Математическое ожидание суммы двух случайных величин равно сумме их математических ожиданий:

$$M(X+Y)=M(X)+M(Y);$$

5. Математическое ожидание разности двух случайных величин равно разности их математических ожиданий:

$$M(X-Y)=M(X)-M(Y);$$

6. Математическое ожидание произведения двух случайных величин равно произведению их математических ожиданий:

$$M(XY)=M(X)M(Y);$$

Пример. Найти математическое ожидание дискретной случайной величины, закон распределения которой задан таблицей

X	3	4	5	6	7
P	0.1	0,2	0, 4	0,2	0,1

$$M(x)=3\cdot 0{,}1+4\cdot 0{,}2+5\cdot 0{,}4+6\cdot 0{,}2+7\cdot 0{,}1=5$$

Разность X – M (X) называется отклонением случайной величины X от ее математического ожидания.

Дисперсией, или рассеянием, случайной величины X называется математическое ожидание квадрата ее отклонения:

$$D(X)=M\left((X-M(X))^2\right);$$

Дисперсию можно вычислять по формуле:

$$D(x)=M\left(X^2\right)-\left(M(X)\right)^2.$$

Средним квадратичным отклонением случайной величины X называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}.$$

<u>2. Пример</u>

Закон распределения случайной дискретной величины X задан таблицей

X	-2	-1	0	1	2
P	0.1	0,2	0, 4	0,2	0,1

Вычислить дисперсию случайной дискретной величины X

<u>Решение</u>

$$M(X)=-2\cdot 0{,}1-1\cdot 0{,}2+0\cdot 0{,}4+1\cdot 0{,}2+2\cdot 0{,}1=0$$

Закон распределения случайной дискретной величины $\left(X-M(X)\right)^2$:

$(X - M(X))^2$	$(-2-0)^2$	$(-1-0)^2$	$(0-0)^2$	$(1-0)^2$	$(2-0)^2$
P	0,1	0,2	0,4	0,2	0,1

Дисперсия случайной величины X :

$$D(X) = 4 \cdot 0{,}1 + 1 \cdot 0{,}2 + 0 \cdot 0{,}4 + 1 \cdot 0{,}2 + 4 \cdot 0{,}1 = 1{,}2.$$

Задания для самостоятельной работы

1. Известны математические ожидания двух случайных величин X и Y: M(X) = 3; M(Y) = 5

Найти математические ожидания суммы и разности этих величин.

2. Найти математическое ожидание случайной величины Y = 8X + 5 , если известно, M(X) = 2

3. Закон распределения случайной дискретной величины X задан таблицей

X	1	2	3	4	5
P	0.05	0,15	0, 3	0,4	0,1

Вычислить дисперсию случайной дискретной величины X

4. Закон распределения случайной дискретной величины X задан таблицей

X	-0,1	0	0,1	0,4
P	0.3	0,15	0, 3	0,25

Вычислить $M(X);\ D(X);\ \sigma(X)$ случайной дискретной величины X

Вопросы для самоконтроля:

1.Что такое математическое ожидание случайной величины?

2. Перечислить свойства математического ожидания.

3. Что такое дисперсия случайной величины?

4. Что такое среднее квадратичное отклонение случайной величины?

Библиографический список

Основные источники:

1. Григорьев В.П., Дубинский Ю.А. «Элементы высшей математики. Учебник для среднего профессионального образования». – М.: Академия, 2008.
2. Гмурман В.Е. «Теория вероятностей и математическая статистика». - М., Высшая школа, 2006.
3. Гмурман В.Е. «Руководство к решению задач по теории вероятностей и математическая статистика». - М., Высшая школа, 2006.
4. Дадаян А.А. «Математика. Учебник для среднего профессионального образования». – М.: Форум – Инфра – М, 2003.
5. Дадаян А.А. «Сборник задач по математике. Учебное пособие для среднего профессионального образования». – М.: Форум – Инфра – М, 2003.
6. Кудрявцев В.А., Демидович Б. П. «Краткий курс высшей математики» - М.: Наука, 2005.
7. В.С. Шипачев «Сборник задач по высшей математике», М.: Высшая школа, 2006.
8. В.С Шипачев «Задачи по высшей математике», М., Высшая школа, 1996.

Дополнительные источники:

1. Богомолов Н.В. «Практическое занятие по математике». – М.: Высшая школа, 2000.
2. Валуцэ И.И., Дилигул Г.Д. Математика для техникумов. – М.: Наука, 1989.
3. Замков О.О., Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике. – М.: «ДИС», 1999.
4. Зубков А.М., Севастьянов Б.А., Чистяков В.П. Сборник задач по теории вероятностей. – М.: Наука, 1989.
5. Калинина В.Н., Панкин В.Ф. «Математическая статистика. Учебник для среднего профессионального образования». – М.: Высшая школа, 1998.
6. Фомин Г.П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности. – М.: Финансы и статистика, 2005.