

ВЛАДИМИРСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

Ю.Е. МИШУЛИН

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ
ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

**Методические указания
к выполнению практических заданий**

ВЛАДИМИР 2015

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)**

Ю.Е. МИШУЛИН

**МАТЕМАТИЧЕСКИЕ ОСНОВЫ ПОСТРОЕНИЯ
ЦИФРОВЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ**

Методические указания к выполнению практических заданий

Владимир 2015

ОГЛАВЛЕНИЕ

Практическое занятие №1 ЛОГИЧЕСКИЕ АРГУМЕНТЫ И ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ.....	3
Практическое занятие №2 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ....	8
Практическое занятие №3 МИНИМИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ КАРТ КАРНО-ВЕЙЧА	11
Практическое занятие №4 СИНТЕЗ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ	13
Практическое занятие №5 ИЗУЧЕНИЕ РАБОТЫ ТРИГГЕРОВ	16
Практическое занятие №6 РЕАЛИЗАЦИЯ СЧЕТЧИКОВ С ЗАДАННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПЕРЕСЧЕТА	24
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК	26

Практическое занятие №1

ЛОГИЧЕСКИЕ АРГУМЕНТЫ И ЛОГИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Для описания алгоритмов работы цифровых устройств необходим соответствующий математический аппарат. Такой аппарат для решения задач формальной логики в середине прошлого века разработал ирландский математик Д. Буль. По его имени математический аппарат и получил название булевой алгебры или алгебры логики. Алгебра логики является теоретической основой построения ЭВМ и цифровых устройств.

Булева алгебра—это математическая система, оперирующая двумя понятиями: событие истинно и событие ложно. Естественно ассоциировать эти понятия с цифрами, используемыми в двоичной системе счисления. Далее будем их называть соответственно логическими единицей (лог. 1) и нулем (лог. 0). Два элемента булевой алгебры, а именно событие истинно и событие ложно, называются ее константами. Будем понимать под ними значения соответственно лог. 1 и лог. 0.

Для того чтобы описать при помощи булевой алгебры поведение и структуру цифровой схемы, ее входным, выходным и внутренним узлам ставят в соответствие булевы переменные, которые могут принимать только два значения: $x = 0$, и $x = 1$.

Различают события постоянно истинные – (солнце светит), события постоянно ложные – (уголь белый), события и истинные и ложные (на улице дождь).

По содержанию события или высказывания бывают простыми, которые называются логическими аргументами и сложными – логические функции.

Между аргументами могут существовать самые различные связи, т.е. логические функции могут принимать различные значения.

Для задания логической функции используют аналитический способ и табличный (таблица истинности).

При аналитическом способе задания логической функции используют логические уравнения, например: $y = (x_1 + x_3 \cdot \bar{x}_3)(\bar{x}_2 + x_3)$.

Таблица истинности для логических функций одного аргумента приведена в табл.1.1. Существует четыре функции одного аргумента. Если число аргументов функции равно n , то число различных сочетаний аргумента составляет 2^n , а число различных возможных функций n -аргументов – 2^{2^n} . Так при $n = 2$ число наборов аргументов равно $2^2 = 4$, число функций – $2^{2^2} = 16$. Таблица истинности для логических функций двух аргументов приведена в табл.1.2.


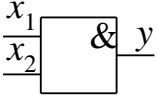
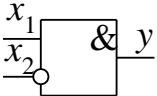
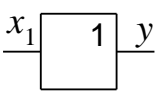
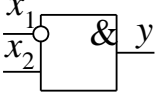
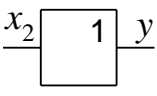
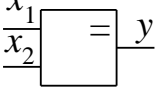
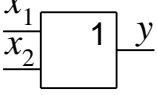
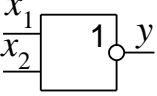
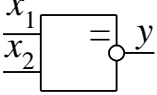
Таблица 1.1

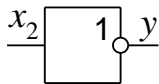
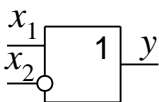
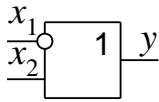
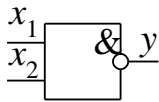
Функции одного аргумента

x	0	1	Функция	Название функции
Y_0	0	0	$y = 0$	Константа 0
Y_1	0	1	$y = x$	Переменная x
Y_2	1	0	$y = \bar{x}$	Инверсия x
Y_3	1	1	$y = 1$	Константа 1

Таблица 1.2

Функции двух аргументов

x_1	0 0 1 1	Функция	Название функции	Название элемента	Обозначение элемента
x_2	0 1 0 1				
1	2	3	4	5	6
y_0	0 0 0 0	$y = 0$	Константа 0	Генератор нуля	
y_1	0 0 0 1	$y = x_1 \wedge x_2$ $y = x_1 \cdot x_2$	Конъюнкция	Логическое «И»	
y_2	0 0 1 0	$y = x_1 \Delta x_2$	Запрет по x_1	Запрет	
y_3	0 0 1 1	$y = x_1$	Переменная x_1	Повторитель	
y_4	0 1 0 0	$y = x_2 \Delta x_1$	Запрет по x_2	Запрет	
y_5	0 1 0 1	$y = x_2$	Переменная x_2	Повторитель	
y_6	0 1 1 0	$y = x_1 \oplus x_2$	Сумма по модулю 2	Исключающее «ИЛИ»	
y_7	0 1 1 1	$y = x_1 \vee x_2$ $y = x_1 + x_2$	Дизъюнкция	Логическое «ИЛИ»	
y_8	1 0 0 0	$y = x_1 \downarrow x_2$	Стрелка Пирса	Логическое «ИЛИ-НЕ»	
y_9	1 0 0 1	$y = x_1 \equiv x_2$	Эквивалентность	Исключающее «ИЛИ-НЕ»	

1	2	3	4	5	6
y_{10}	1 0 1 0	$y = \overline{x_2}$	Инверсия x_2	Логическое «НЕ»	
y_{11}	1 0 1 1	$y = x_2 \rightarrow x_1$	Импликация от x_2 к x_1	Импликатор	
y_{12}	1 1 0 0	$y = \overline{x_1}$	Инверсия x_1	Логическое «НЕ»	
y_{13}	1 1 0 1	$y = x_1 \rightarrow x_2$	Импликация от x_1 к x_2	Импликатор	
y_{14}	1 1 1 0	$y = x_1 x_2$	Штрих Шеффера	Логическое «И-НЕ»	
y_{15}	1 1 1 1	$y = 1$	Константа 1	Генератор единицы	

Основные законы алгебры логики

В математике установлен определенный порядок выполнения операций в сложном выражении. Для логического выражения также установлен порядок выполнения операций: вначале выполняются операции инверсии, затем операции конъюнкции и в последнюю очередь операции дизъюнкции. Если требуется изменить порядок выполнения операций, то используются скобки. Например, в выражении $(x_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$ выполняются сначала операции в скобках (дизъюнкция), а затем операция конъюнкции.

При записи логических выражений допускается для обозначения дизъюнкции использовать вместо символа \vee символ $+$, а для обозначения конъюнкции – вместо символа \wedge символ умножения. Т.е. предыдущее выражение можно записать в виде $(x_1 + \bar{x}_2) \cdot (x_1 + x_3)$.

Для операций конъюнкции и дизъюнкции справедливы следующие законы алгебры логики. В выражениях символ $+$ (сложение) обозначает операцию дизъюнкции (логическое «ИЛИ»), а символ умножения операцию конъюнкции (логическое «И»).

1. Переместительный закон

$$x + y = y + x; \quad x \vee y = y \vee x;$$

$$x \cdot y = y \cdot x; \quad x \wedge y = y \wedge x.$$

2. Сочетательный закон

$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$

$$(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z).$$

3. Распределительный закон

$$(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z;$$
$$x \cdot y + z = (x + z)(y + z).$$

4. Закон инверсии (формулы де Моргана)

$$\overline{x + y} = \bar{x} \cdot \bar{y}; \quad \overline{x \cdot y} = \bar{x} + \bar{y}.$$

5. Закон двойного отрицания

$$\overline{\bar{x}} = x.$$

6. Закон исключенного третьего

$$x + 1 = 1; \quad x + \bar{x} \cdot y = x + y;$$
$$x + \bar{x} = 1; \quad x(\bar{x} + y) = x \cdot y.$$

7. Закон противоречия

$$x \cdot 0 = 0;$$
$$x \cdot \bar{x} = 0.$$

8. Закон идентичности

$$x \cdot x = x;$$
$$x + x = x.$$

9. Закон поглощения

$$x \cdot 1 = x;$$
$$x \cdot x \cdot x \cdot \dots \cdot x = x;$$
$$x(x + y) = x;$$
$$x + x \cdot y = x;$$
$$x + x + \dots + x = x;$$
$$x + x \cdot y + x \cdot z = x.$$

Следствия законов:

1. Если логическая сумма двоичных аргументов или функций содержит хотя бы одну пару взаимно инверсных слагаемых, то эта сумма всегда истинна

$$x + y + z \cdot y + \bar{x} = 1;$$
$$P + Q + L + \bar{Q} = 1.$$

2. Если логическое произведение двоичных аргументов или функций содержит хотя бы одну пару взаимно инверсных сомножителей, то это произведение всегда ложно

$$x \cdot y \cdot z \cdot \bar{x} = 0;$$
$$P \cdot Q \cdot L \cdot \bar{Q} = 0.$$

Формы логических функций

Элементарная конъюнкция – *минтерм* – образуется логическим умножением переменных и их отрицаний

$$P = x \cdot y \cdot \bar{z};$$
$$Q = \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}.$$

Элементарная дизъюнкция – *макстерм* – образуется логическим сложением переменных и их отрицаний

$$P = x + y + \bar{z};$$

$$Q = \bar{x} + \bar{y} + z.$$

Число переменных, составляющих минтерм или макстерм, называется *рангом*.

$P = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 \cdot x_4$ – элементарная конъюнкция четвертого ранга.

$M = x_1 + \bar{x}_2 + x_3$ – элементарная дизъюнкция третьего ранга.

Функция в дизъюнктивной нормальной форме (ДНФ) является логической суммой элементарных конъюнкций

$$P = \bar{x} \cdot y + x \cdot \bar{y} + x \cdot y \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}.$$

Функция в конъюнктивной нормальной форме (КНФ) является логическим произведением элементарных дизъюнкций

$$P = (x + y) \cdot (x + \bar{y}) \cdot (\bar{x} + y + z).$$

Если в состав логической формулы входят наборы аргументов одинакового ранга, то такая форма называется *совершенной* (СКНФ и СДНФ).

Требования к совершенной форме:

1. В функции не должно быть двух одинаковых конъюнкций (дизъюнкций).
2. Ни одна конъюнкция (дизъюнкция) не содержит двух одинаковых двоичных переменных.
3. Ни одна конъюнкция (дизъюнкция) не содержит двоичную переменную вместе с ее отрицанием.
4. Все конъюнкции (дизъюнкции) одного ранга.

Задание.

1. Реализовать логические функции «запрет», «повторитель», «сумма по модулю 2», «стрелка Пирса», «эквивалентность», «импликатор», «штрих Шеффера» используя только логические элементы «И», «ИЛИ», «НЕ».

2. Реализовать логические функции «запрет», «повторитель», «сумма по модулю 2», «эквивалентность», «импликатор», «штрих Шеффера», «конъюнкция», «дизъюнкция», «инверсия» используя только логическую функцию «стрелка Пирса».

3. Реализовать логические функции «запрет», «повторитель», «сумма по модулю 2», «эквивалентность», «импликатор», «стрелка Пирса», «конъюнкция», «дизъюнкция», «инверсия» используя только логическую функцию «штрих Шеффера».

Контрольные вопросы

1. Назовите основные операции булевой алгебры. Как они описываются с помощью таблиц истинности; с помощью аналитических выражений?

2. Приведите пример описания функции алгебры логики в словесной форме; в виде таблицы истинности; в виде аналитического выражения; в дизъюнктивной и конъюнктивной нормальной форме.

Практическое занятие №2 ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛОГИЧЕСКИХ СХЕМ

Для задания логической функции используют аналитический способ и табличный (таблица истинности).

При аналитическом способе задания логической функции используют логические уравнения, например: $y = (x_1 + x_3 \cdot \bar{x}_3)(\bar{x}_2 + x_3)$.

Полученное логическое выражение в ряде случаев можно значительно упростить, или минимизировать. Для этого используется несколько методов.

1. Метод непосредственных преобразований. При этом методе используются законы алгебры логики.

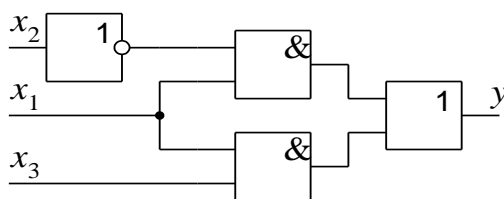
Пример 1.

Пусть дана логическая функция трех переменных $y = f(x_1, x_2, x_3)$, записанная в виде выражения $y = (x_1 + x_3)(x_1 + \bar{x}_3)(\bar{x}_2 + x_3)$. Выполним преобразования функции с целью ее минимизации, используя законы алгебры логики.

$$\begin{aligned} y &= (x_1 + x_3)(x_1 + \bar{x}_3)(\bar{x}_2 + x_3) = \text{<распределительный закон №3>} \\ &= (x_1 + x_3 \cdot \bar{x}_3)(\bar{x}_2 + x_3) = \text{<закон противоречия №7>} \\ &= (x_1 + 0)(\bar{x}_2 + x_3) = x_1 \cdot (\bar{x}_2 + x_3) = \text{<распределительный закон №3>} \\ &= x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_3. \end{aligned}$$

Очевидно, что полученное выражение значительно проще исходного. Построим структурную схему на логических элементах, реализующую данную функцию.

Аргумент \bar{x}_2 получается использованием элемента логическое «НЕ» (инвертор). Операции конъюнкции $x_1 \cdot \bar{x}_2$ и $x_1 \cdot x_3$ выполняются с помощью элемента «И». И, наконец, операция дизъюнкции выполняется на элементе «ИЛИ». Структурная схема имеет следующий вид:



Пример 2.

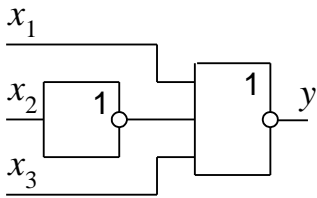
$$y = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3.$$

Выполним преобразования, используя законы алгебры логики.

$$y = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 = \bar{x}_2(\bar{x}_1 + x_1) + x_2(x_1 + x_3) = \bar{x}_2 + x_2(x_1 + x_3).$$

Далее используем закон исключенного третьего $x + \bar{x} \cdot y = x + y$.

Обозначим x как \bar{x}_2 , а y как $x_1 + x_3$ и подставим эти значения в выражение. В соответствии с правой частью закона получилось итоговое выражение $y = \bar{x}_2 + x_1 + x_3$ и структурная схема, реализующая эту функцию.



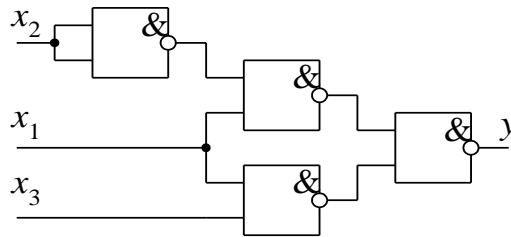
Часто необходимо формировать логическую схему на элементах только одного типа, например, «2И–НЕ». Преобразуем выражение, рассмотренное в первом примере, используя формулы де Моргана, чтобы исключить

а) операцию логического «ИЛИ» и реализовать схему на элементах «2И–НЕ» (цифра 2 обозначает, что элемент имеет два входа).

Преобразуем формулу де Моргана $\bar{x} + \bar{y} = \overline{x \cdot y}$, используя следующие обозначения: x обозначим как \bar{x} , а y как \bar{y} . Тогда формула де Моргана запишется в виде $x + y = \overline{\bar{x} \cdot \bar{y}}$. Используя полученное выражение, выполним преобразование логической функции. В полученное выражение формулы де Моргана введем подстановки: $x = x_1 \cdot \bar{x}_2$, $y = x_1 \cdot x_3$. Тогда получим

$x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_3 = \overline{\overline{x_1 \cdot \bar{x}_2} \cdot \overline{x_1 \cdot x_3}}$. Аргумент \bar{x}_2 можно записать в виде $\bar{x}_2 = \overline{x_2 \cdot x_2}$. Конечное выражение записывается в виде $\overline{x_1 \cdot (\overline{x_2 \cdot x_2}) \cdot x_1 \cdot x_3}$.

Получаем структурную схему, реализованную только на элементах «И–НЕ», имеющих по два входа:

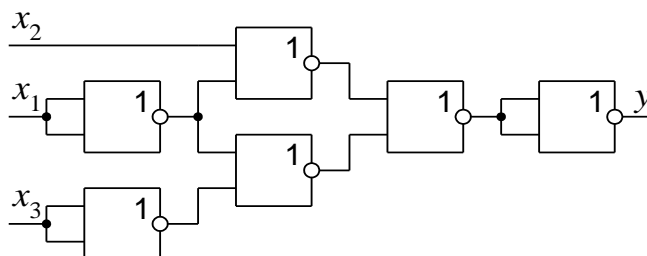


б) операцию логического «И» (на элементах «2ИЛИ–НЕ»).

Выполним аналогичные преобразования формулы де Моргана $\bar{x} \cdot \bar{y} = \overline{x + y}$. Обозначим x как \bar{x} , а y как \bar{y} . Формула де Моргана запишется в виде $x \cdot y = \overline{\bar{x} + \bar{y}}$. Выполнив соответствующие подстановки и преобразования, получим:

$$x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_3 = \overline{\overline{\bar{x}_1 + x_2} + \overline{\bar{x}_1 + \bar{x}_3}} = \overline{(x_1 + x_1) + x_2 + (x_1 + x_1) + (x_3 + x_3)}.$$

Получаем структурную схему, заменив $\bar{x}_1 = x_1 + x_1$ и $\bar{x}_3 = x_3 + x_3$.



Задание. Дана функция четырех переменных $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Минимизировать логическое выражение методом непосредственных преобразований. Построить функциональную схему устройства для минимального выражения.

Задания к практической работе

Вар.	Функция
1.	$y = \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot \bar{x}_2 + x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3$
2.	$y = x_1 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_2 + \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_4$
3.	$y = x_1 \cdot \bar{x}_4 + x_2 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot x_3$
4.	$y = x_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_4 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot x_3 + x_2 \cdot x_3$
5.	$y = \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + x_2 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot x_3$
6.	$y = x_2 \cdot x_3 + x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_4$
7.	$y = x_1 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 + x_2 \cdot \bar{x}_3$
8.	$y = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + x_2 \cdot \bar{x}_3 + x_3 \cdot \bar{x}_4$
9.	$y = \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_4 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3$
10.	$y = \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3$
11.	$y = x_1 \cdot x_3 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4$
12.	$y = x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + x_2 \cdot \bar{x}_4 + \bar{x}_1$
13.	$y = x_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 + \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot \bar{x}_4$
14.	$y = x_1 \cdot \bar{x}_3 + \bar{x}_1 \cdot x_4 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4 + \bar{x}_2 \cdot x_3$
15.	$y = x_2 \cdot x_4 + \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 + x_2 \cdot x_3 + \bar{x}_3 \cdot x_4$
16.	$y = x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 + x_1 \cdot x_3 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot x_4$
17.	$y = x_1 \cdot x_4 + \bar{x}_2 \cdot \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 + \bar{x}_1 \cdot x_3$
18.	$y = \bar{x}_1 \cdot x_2 + x_2 \cdot x_3 \cdot \bar{x}_4 + x_3 \cdot \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \cdot x_4$
19.	$y = \bar{x}_1 \cdot x_3 + \bar{x}_2 \cdot x_4 + \bar{x}_1 \cdot x_3 \cdot x_4 + \bar{x}_2 \cdot x_3$
20.	$y = x_2 \cdot \bar{x}_4 + \bar{x}_1 \cdot \bar{x}_2 \cdot x_3 + \bar{x}_3 \cdot \bar{x}_4 + x_1 \cdot x_3$

Контрольные вопросы

1. Как строится структурная схема логического устройства по заданному логическому выражению?
2. В чем заключается цель и принцип минимизации логической функции?

Практическое занятие №3

МИНИМИЗАЦИЯ ЛОГИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ МЕТОДОМ КАРТ КАРНО-ВЕЙЧА

Метод непосредственных преобразований применяется в том случае, если логическая функция задана небольшим количеством аргументов, обычно 2-3 аргумента. Если число аргументов больше, то этот становится трудоемким. Поэтому применяют такие методы минимизации, как метод Квайна, Квайна – Мак-Класки, Петрика, карт Вейча и другие.

Пример. Пусть задана логическая функция четырех переменных $P = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Функция записывается в виде

$$P = \{0,1,4,6,7,8,9,10,14,15\}.$$

Данная запись обозначает, что функция P равна единице при указанных значениях десятичных эквивалентов логических аргументов. В остальных случаях функция равна нулю. Таблица истинности данной функции приведена в табл.3.1.

После подстановки единичных значений функции в карту можно выделить четыре контура (рис.3.1). Контур I и II содержат по четыре единицы, а контуры III и IV – по две. Запишем конъюнкцию для первого контура $k_I = x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4$. Аргументы x_1 и x_4 в этом контуре принимают значения 0 и 1, поэтому их можно исключить из выражения. Аргументы x_2 и x_3 принимают значение 1, и их записывают без инверсии. Если аргумент в контуре равен нулю, то его записывают с инверсией. В итоге конъюнкция для первого контура запишется в виде $k_I = x_2 \cdot x_3$.

Аналогично записываем конъюнкции для остальных контуров

$$k_{II} = \overline{x_2} \cdot \overline{x_3};$$

$$k_{III} = x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4};$$

$$k_{IV} = \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}.$$

Таблица 3.1
Таблица истинности функции

ДЭ	x_1	x_2	x_3	x_4	P
0	0	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1
2	0	0	1	0	0
3	0	0	1	1	0
4	0	1	0	0	1
5	0	1	0	1	0
6	0	1	1	0	1
7	0	1	1	1	1
8	1	0	0	0	1
9	1	0	0	1	1
10	1	0	1	0	1
11	1	0	1	1	0
12	1	1	0	0	0
13	1	1	0	1	0
14	1	1	1	0	1
15	1	1	1	1	1

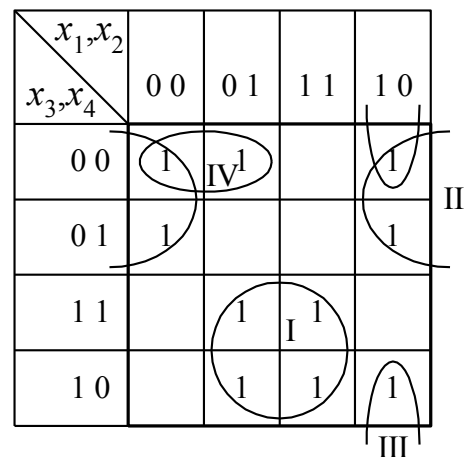


Рис.3.1. Карта Карно

Минимальную функцию получаем дизъюнкцией полученных значений конъюнкций для каждого контура

$$P \min = x_2 \cdot x_3 + \overline{x_2} \cdot \overline{x_3} + x_1 \cdot \overline{x_2} \cdot \overline{x_4} + \overline{x_1} \cdot \overline{x_3} \cdot \overline{x_4}.$$

Функциональная схема устройства, соответствующая минимальной функции приведена на рис.3.2.

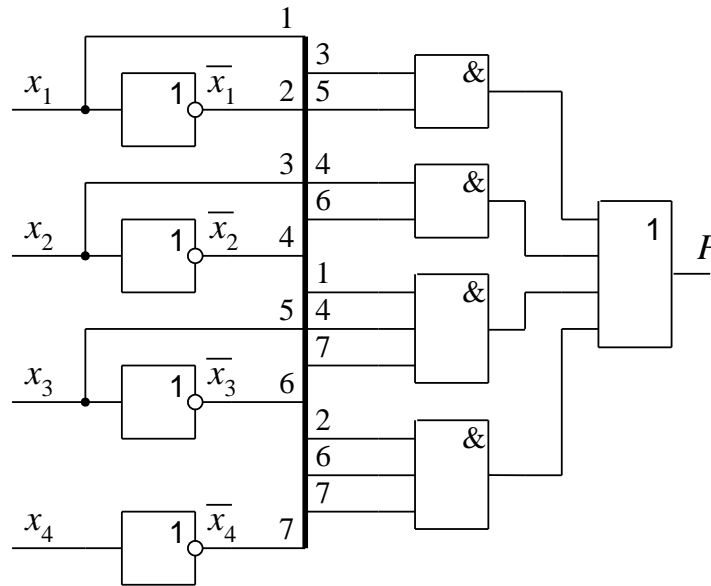


Рис.3.2. Функциональная схема устройства

Задание. Дана функция четырех переменных $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4)$. Минимизировать логическое выражение с использованием карт Карно. Построить функциональную схему устройства для минимального выражения.

Задания к выполнению лабораторной работы

Вар.	Функция	Вар.	Функция
1.	$y = \{4,5,12,13,14,15\}$	7.	$y = \{4,5,7,8,9,10,11\}$
2.	$y = \{0,1,4,5,12,13,14\}$	8.	$y = \{3,8,10,12,13,14,15\}$
3.	$y = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$	9.	$y = \{0,1,9,12,13,14,15\}$
4.	$y = \{1,5,8,9,10,11\}$	10.	$y = \{2,4,5,6,7,10,12,13\}$
5.	$y = \{2,3,11,12,13,14,15\}$	11.	$y = \{0,2,4,6,8,9,10,11\}$
6.	$y = \{2,3,4,5,8,9,10,11\}$	12.	$y = \{2,3,6,7,8,10,14,15\}$

Контрольные вопросы

1. В каких случаях применяется метод минимизации с использованием карт Карно?
2. В чем сущность метода минимизации логических функций с использованием карт Карно?

Практическое занятие №4 СИНТЕЗ КОМБИНАЦИОННЫХ СХЕМ

Синтез логических устройств состоит из нескольких этапов.

1. Формируются логические условия работы схемы в виде таблицы истинности.

Рассмотрим пример. Имеется резервуар с тремя впускными клапанами. По условию работы резервуар можно наполнять только в том случае, если открыт только один впускной клапан (см. рис.4.1).

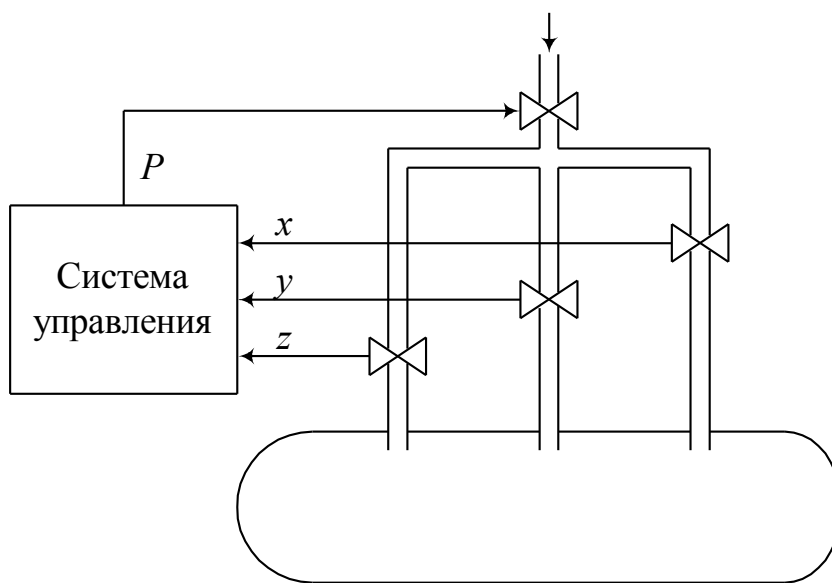


Рис.4.1. Устройство управления

Необходимо сформировать логическую функцию P , удовлетворяющую заданным условиям работы. Аргументами функции являются переменные x , y , z , которые информируют о состоянии впускных клапанов. Функция P равна единице только тогда, когда только один из аргументов равен единице.

Составим таблицу истинности (табл.4.1). Число возможных комбинаций состояний аргументов равно 2^n , где n – число аргументов.

Функция P имеет три аргумента. Следовательно, в нашем примере число комбинаций равно $2^3 = 8$. В первом столбце таблицы записывается десятичный эквивалент (ДЭ) состояний аргументов. Например ДЭ = 6, что соответствует состоянию аргументов 110 – это число шесть, записанное в двоичной системе счисления ($x = 1, y = 1, z = 0$). В столбце P записывается значение функции. Функция $P = 1$, если один из аргументов равен нулю, что соответствует деся-

Таблица 4.1

Таблица истинности

ДЭ	x	y	z	P
0	0	0	0	0
1	0	0	1	1
2	0	1	0	1
3	0	1	1	0
4	1	0	0	1
5	1	0	1	0
6	1	1	0	0
7	1	1	1	0

тичным эквивалентам 1, 2 и 4. В остальных случаях функция равна нулю.

2. Составление СДНФ (или СКНФ) логической функции

Правила образования СДНФ:

1. По каждому набору двоичной переменной, при котором функция принимает значение = 1, составляется элементарная конъюнкция.
2. Логические переменные записываются инверсными, если они заданы нулем.
3. Элементарные конъюнкции объединяются дизъюнкцией.

Правила образования СКНФ:

1. По каждому набору двоичной переменной, при котором функция принимает значение = 0, составляется элементарная дизъюнкция.
2. Логические переменные записываются инверсными, если они заданы единицей.
3. Элементарные дизъюнкции объединяются конъюнкцией.

В табл.4.2. записаны СКНФ и СДНФ логической функции.

Таблица 4.2

Таблица истинности функции

ДЭ	x	y	Z	P	СДНФ	СКНФ
0	0	0	0	0		$x + y + z$
1	0	0	1	1	$\bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z$	
2	0	1	0	1	$\bar{x} \cdot y \cdot \bar{z}$	
3	0	1	1	0		$x + \bar{y} + \bar{z}$
4	1	0	0	1	$x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z}$	
5	1	0	1	0		$\bar{x} + y + \bar{z}$
6	1	1	0	0		$\bar{x} + \bar{y} + z$
7	1	1	1	0		$\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}$

В результате получены:

СДНФ: $P = \bar{x} \cdot \bar{y} \cdot z + \bar{x} \cdot y \cdot \bar{z} + x \cdot \bar{y} \cdot \bar{z} .$

СКНФ: $P = (x + y + z)(x + \bar{y} + \bar{z})(\bar{x} + y + \bar{z})(\bar{x} + \bar{y} + z)(\bar{x} + \bar{y} + \bar{z}).$

3. Производится минимизация логической функции.

Используется метод непосредственных преобразований или методы Квайна, Квайна – Мак-Класки, Петрика, карт Вейча и другие.

4. Строится функциональная схема устройства.

5. Разрабатывается принципиальная схема с минимальным числом элементов или на указанной элементной базе.

Задание. Выполнить синтез комбинационной схемы логической функции пяти переменных, заданной в виде значений десятичных эквивалентов логических аргументов $y = f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$. Составить СДНФ, провести минимизацию логической функции, построить функциональную схему устройства.

Задания к выполнению лабораторной работы

Вар.	Функция
1.	$y = \{4,5,12,13,14,15,19,23,24,25\}$
2.	$y = \{0,1,4,5,12,13,14,17,19,27,28,29\}$
3.	$y = \{0,1,2,3,4,5,6,7,17,21,24,25,26,27\}$
4.	$y = \{1,5,8,9,10,11,20,21,22,23,24,25,26,27\}$
5.	$y = \{2,3,11,12,13,14,15,16,17,18,19,28,29\}$
6.	$y = \{4,5,19,20,21,22,23,24,25,26\}$
7.	$y = \{0,5,10,17,19,21,23,26,29,31\}$
8.	$y = \{3,7,8,9,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25\}$
9.	$y = \{2,3,4,5,8,9,10,11,28,29,30,31\}$
10.	$y = \{4,5,7,8,9,10,11,16,17,18,19,24,25\}$
11.	$y = \{0,1,6,7,12,13,18,19,24,25,26,27\}$
12.	$y = \{3,8,10,12,13,14,15,16,17,18,19\}$
13.	$y = \{4,5,6,7,9,11,16,17,18,19,20,21\}$
14.	$y = \{4,5,8,9,12,13,19,28,29,30,31\}$
15.	$y = \{0,1,9,12,13,14,15,17,21,25,26\}$
16.	$y = \{4,5,8,9,14,15,17,21,25,29\}$
17.	$y = \{2,4,5,6,7,10,12,13,16,17,30,31\}$
18.	$y = \{1,5,8,10,14,15,16,17,20,21,30,31\}$
19.	$y = \{0,2,4,6,8,9,10,11,23,28,29,30,31\}$
20.	$y = \{2,3,6,7,8,10,14,15,28,30,31\}$
21.	$y = \{0,1,2,3,10,11,16,20,21,22,23,24\}$
22.	$y = \{1,3,5,7,10,11,16,20,21,24,26,27,30\}$
23.	$y = \{10,11,16,17,19,20,21,26,27,28,30\}$
24.	$y = \{0,3,7,8,11,15,16,19,20,23,27,28,31\}$
25.	$y = \{0,1,2,3,5,7,10,11,16,20,21,24,26,27,30\}$

Контрольные вопросы

1. В чем заключается минимизация функции с помощью карт Вейча?
2. Представьте карты Карно для функции четырех, пяти и шести переменных.
3. Перечислите этапы синтеза комбинационных схем.
4. Как строится структурная схема логического устройства?

Практическое занятие №5 ИЗУЧЕНИЕ РАБОТЫ ТРИГГЕРОВ

Триггер – это устройство, способное формировать два устойчивых значения выходного сигнала и изменять эти значения под действием входного управляющего сигнала. Триггер может использоваться как элемент хранения 1 бита двоичной информации.

По моменту реакции на входной сигнал триггеры подразделяются на асинхронные и синхронные. Асинхронный триггер изменяет свое состояние непосредственно в момент изменения сигнала на его информационных входах. Синхронный триггер изменяет свое состояние лишь в строго определенные (тактовые) моменты времени, соответствующие действию активного сигнала на его синхронизирующем входе C , и не реагирует на любые изменения информационных сигналов при пассивном значении сигнала на входе C .

По виду активного логического сигнала, действующего на информационных входах, триггеры различают на статические – управляемые уровнем, и динамические – управляемые перепадом входного сигнала. При этом входя могут быть прямыми и инверсными. Для переключения триггера на его прямой вход необходимо подать сигнал x , а на инверсный – сигнал \bar{x} .

Одноступенчатые триггеры

Асинхронный RS -триггер имеет два информационных входа: R – вход сброса (Reset) и S – вход установки (Set). Простейший триггер может быть реализован на элементах «И-НЕ» или «ИЛИ-НЕ» (рис.5.1).

RS -триггер, реализованный на элементах «ИЛИ-НЕ», имеет прямые входы, а на элементах «И-НЕ» – инверсные. Условное графическое обозначение асинхронных RS -триггеров с прямыми и инверсными входами показано на рис.5.1. *в* и *г* соответственно.

Принцип работы рассмотрим на примере триггера с прямыми входами.

Для данного триггера активными сигналами являются уровни логической единицы.

На входах S и R может быть четыре комбинации набора нулей и единиц. Если на обоих входах присутствует уровень логического нуля (не активный уровень), то состояние выходов триггера остается неизменным.

При подаче на вход установки S логической единицы триггер устанавливается в единичное состояние (на

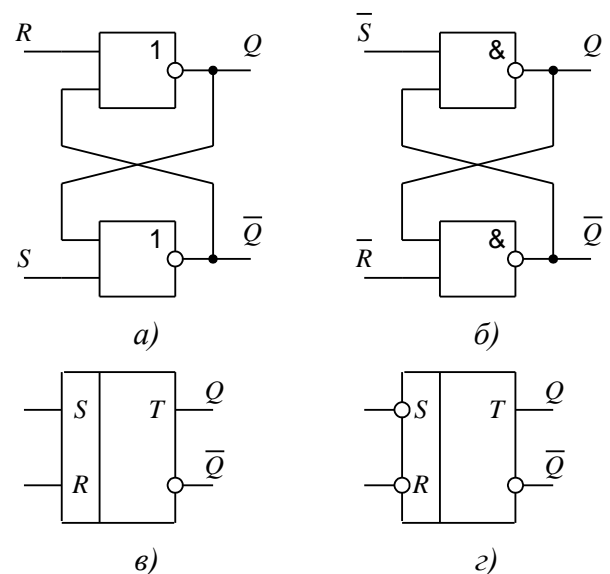


Рис.5.1. RS -триггеры

выходе Q устанавливается уровень логической единицы, а на выходе \bar{Q} – уровень логического нуля). При подаче на вход сброса R логической единицы триггер переключается (на выходе Q – уровень логического нуля, а на выходе \bar{Q} – уровень логической единицы). Если на оба входа подать активный уровень логической единицы, то состояние триггера будет не определено. Эта комбинация является запрещенной.

Для триггера с инверсными входами активными сигналами являются уровни логического нуля. Переключение триггера будет осуществляться подачей логического нуля на соответствующий вход. Два нуля на входах является запрещенной комбинацией.

Принцип работы триггера можно также отобразить с помощью таблицы состояний (табл. 5.1, 5.2.) и временной диаграммы (рис.5.2).

Таблица 5.1.

Таблица 5.2.

Таблица состояний RS-триггера с прямыми входами

S	R	Q_n	\bar{Q}_n
0	0	Q_{n-1}	\bar{Q}_{n-1}
0	1	0	1
1	0	1	0
1	1	Не определено	Не определено

Таблица состояний RS-триггера с инверсными входами

\bar{S}	\bar{R}	Q_n	\bar{Q}_n
0	0	Не определено	Не определено
0	1	1	0
1	0	0	1
1	1	Q_{n-1}	\bar{Q}_{n-1}

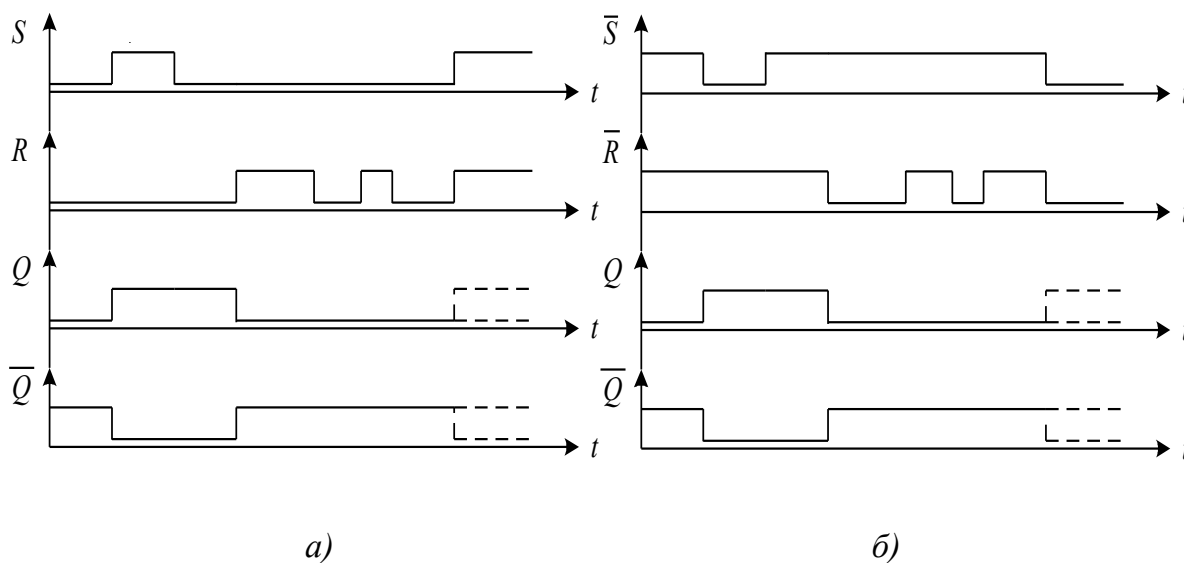


Рис.5.2. Временная диаграмма работы RS-триггера с прямыми входами (а) и инверсными входами (б)

Синхронный RS-триггер получается из асинхронного введением дополнительной логической схемы, которая разрешает переключение триггера только при наличии дополнительного сигнала синхронизации (рис.5.3).

В триггер введён дополнительный управляющий вход C , разрешающий ввод сигналов R и S . Временная диаграмма работы синхронного RS-триггера показана на рис.5.4.

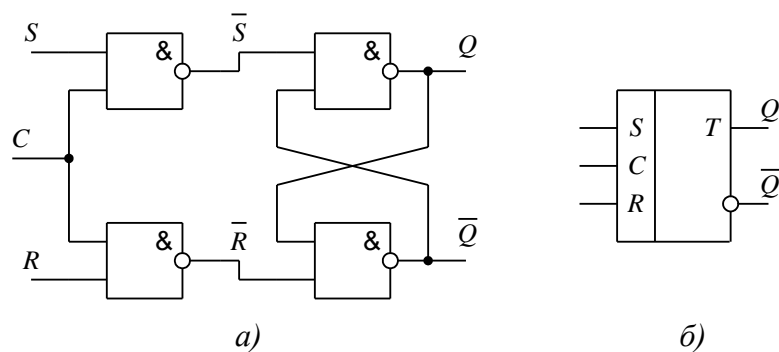


Рис.5.3. Синхронный RS-триггер

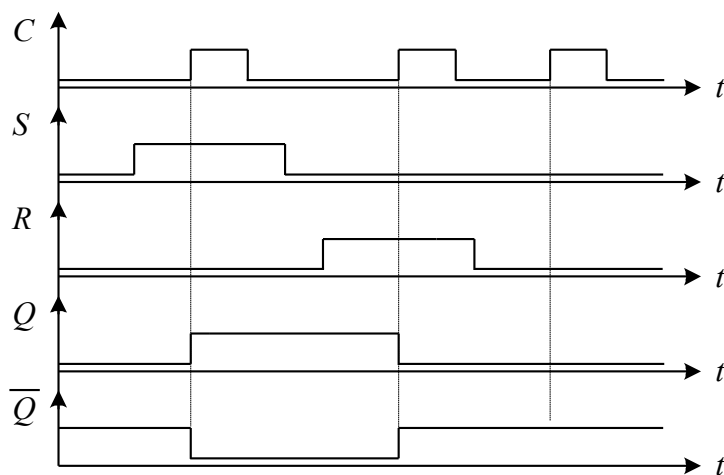


Рис.5.4. Временная диаграмма работы синхронного RS-триггера

D-триггер обычно имеет только один информационный вход D . Информация с этого входа переписывается на выход Q триггера только по сигналу синхронизации C , таким образом, это синхронный триггер. Так как информация на выходе D -триггера остается неизменной вплоть до прихода очередного импульса синхронизации, данный триггер называют триггером с запоминанием информации или триггером-защелкой. Структурная схема и условное обозначение D -триггера показаны на рис. 5.5 *a* и *б* соответственно.

На рис.5.6 показана временная диаграмма работы D -триггера. Если на входе синхронизации C установлена логическая единица (момент времени t_1), то информация с входа D передается на выход Q . В момент времени t_2 на вход C подали логический ноль и на выходе триггера установится то значение, которое присутствовало на входе D , в данном случае логическая единица. В момент времени t_3 подан импульс синхронизации и на выходе Q триггера установится

то значение, которое присутствует на входе D , т.е. логический ноль. С приходом еще одного импульса синхронизации (t_4) состояние триггера не изменилось, так как на входе D по-прежнему логический ноль.

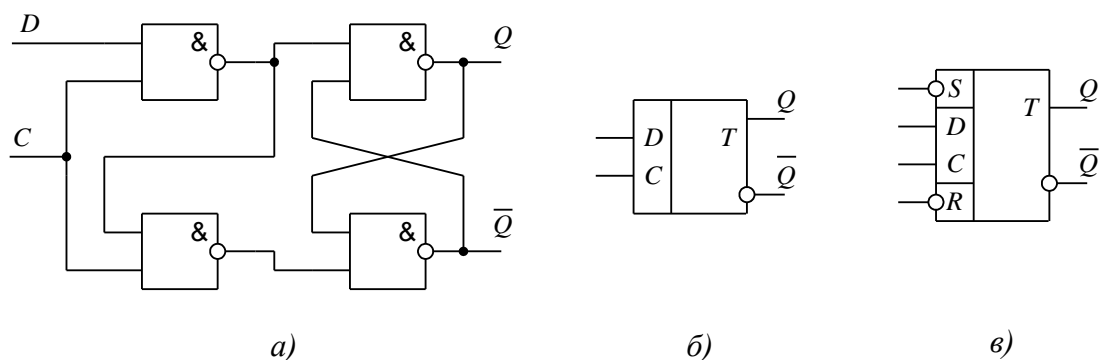


Рис. 5.5. D -триггер

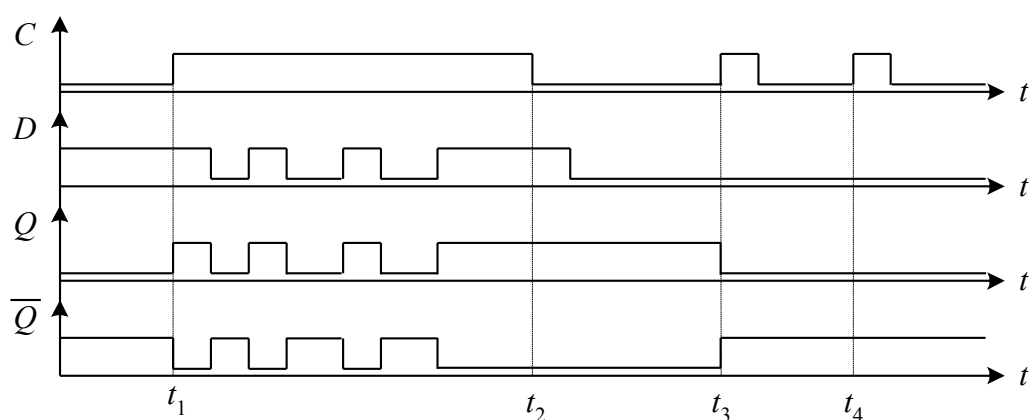


Рис. 5.6. Временная диаграмма работы D -триггера

D -триггер может быть снабжен дополнительными входами асинхронной установки R и S . Подача активных сигналов на эти входы соответственно сбрасывает в ноль и устанавливает в единицу выход триггера независимо от состояния сигналов на входах C и D .

Такую организацию имеет D -триггер К555ТМ2 (см. рис. 5.5. в). В одном корпусе микросхемы содержится два таких триггера. У него входы сброса и установки – инверсные.

Двухступенчатые триггеры

Для надёжной и чёткой работы триггерных ячеек в многоразрядных цифровых устройствах применяют двухступенчатые триггеры, называемые master-slave («мастер» - «помощник»). Структурная схема и временная диаграмма работы синхронного двухступенчатого RS -триггера показана на рис. 5.7.

По переднему фронту тактового импульса C переключается выход триггера-мастера. Этот же импульс через инвертор передается на вход C триггера-помощника, и данные переписываются в него по заднему фронту. Таким образом, триггером управляет полный тактовый импульс (передний и задний фронты).

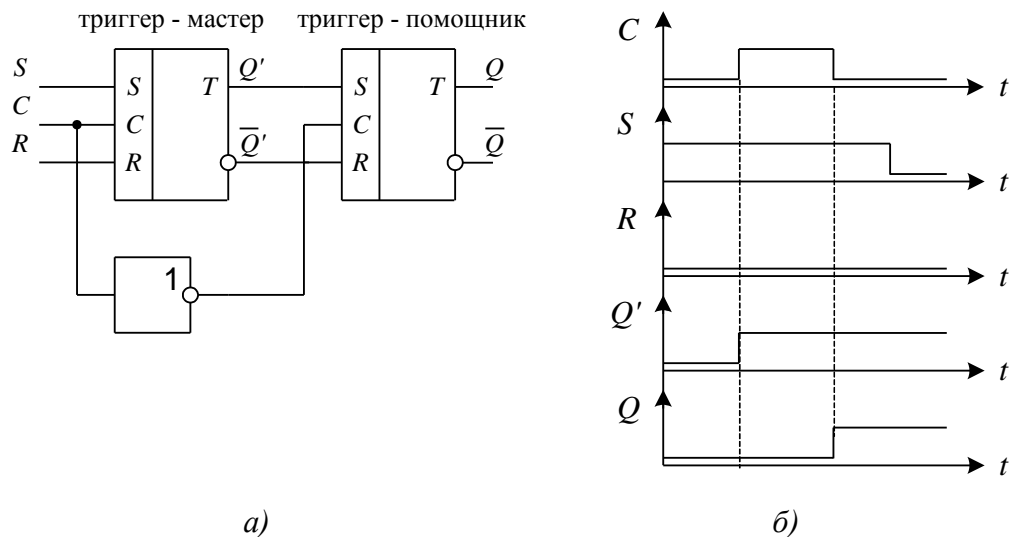


Рис. 5.7. Двухступенчатый RS-триггер

T-триггер или счетный триггер изменяет своё состояние на противоположное с приходом каждого входного импульса. Имеет только один вход T . Основное его назначение это деление частоты тактовой последовательности, подаваемой на вход в два раза. Структурная схема, условное обозначение и временная диаграмма работы T-триггера показаны на рис.5.8.

Использование двухступенчатых триггеров позволяет обеспечить высокую надежность. На схемах двухступенчатые триггеры обозначаются двояной буквой (TT).

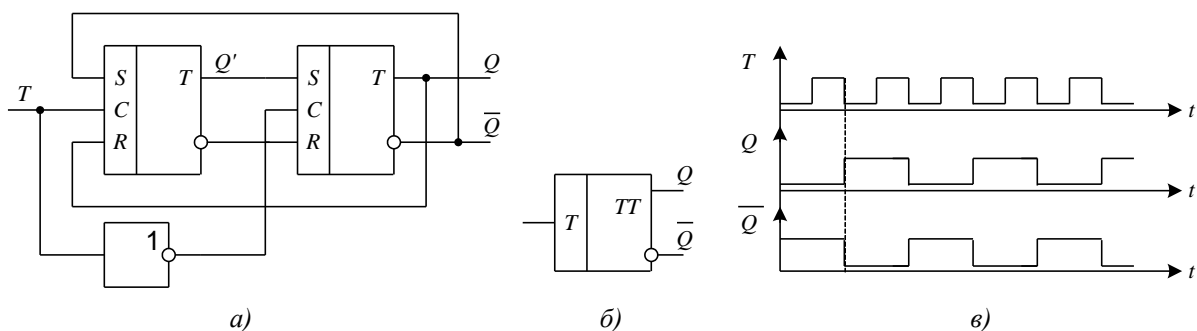


Рис. 5.8. T-триггер

JK-триггеры являются наиболее универсальными, так как на их основе могут быть построены любые из рассмотренных триггеров.

JK-триггер строится по двухступенчатой схеме (рис. 5.9). Вход J – вход установки, вход K – вход сброса. C – вход синхронизации (тактовый вход). Комбинация двух единиц на входах J и K в отличие от RS-триггеров не является запрещенной. При этих сигналах триггер работает как счетный T-триггер, т.е. меняет свое состояние на обратное по каждому импульсу на входе C . Временная диаграмма работы триггера показана на рис. 5.10.

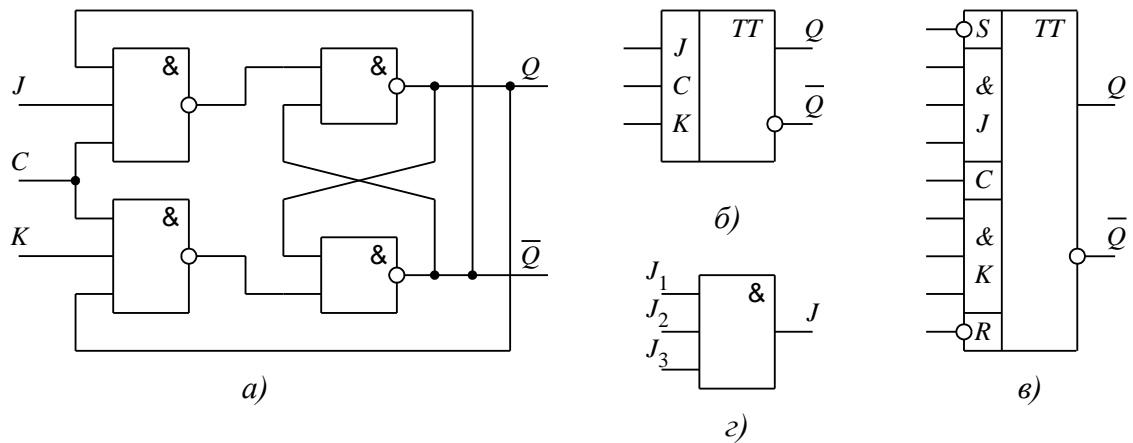


Рис. 5.9. *JK*-триггер

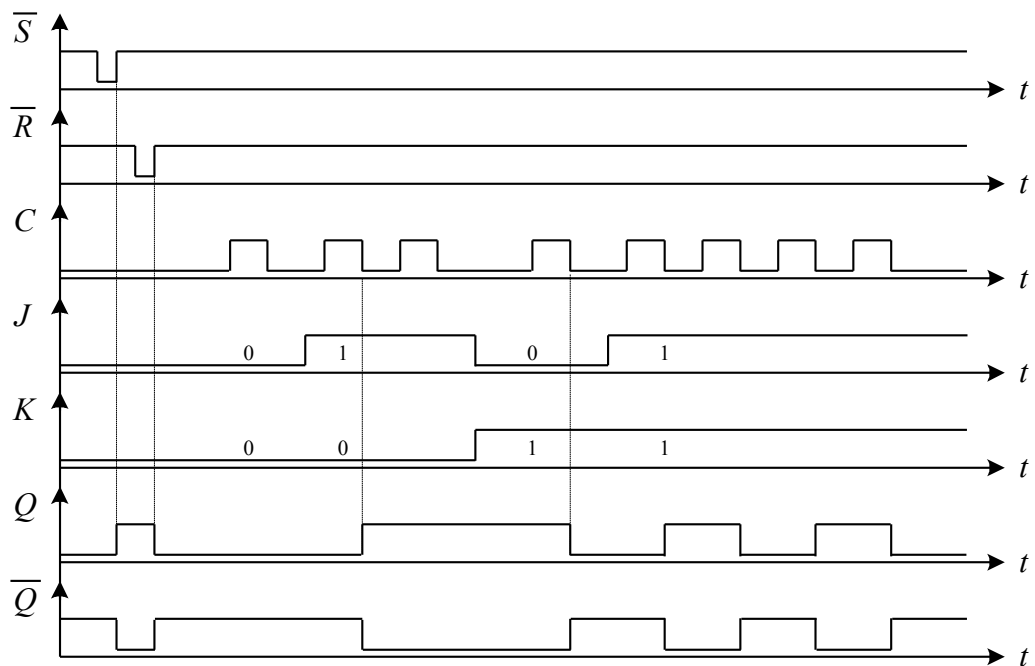


Рис. 5.10. Временная диаграмма работы *JK*-триггера

JK-триггер также, как и любой другой может быть снабжен дополнительными входами асинхронной установки R и S . Например, *JK*-триггер К555ТВ1 (см. рис. 5.9. в) содержит эти входы, которые являются инверсными. Кроме того, этот триггер имеет по три входа J и K , которые объединены через логический элемент «И» (см. рис. 5.9. з).

Триггеры с динамическим управлением

Все рассмотренные типы триггеров являются триггерами со статическим управлением. Это накладывает определенные требования на вид сигнала синхронизации. Так как активным логическим уровнем на входе синхронизации рассмотренных ранее триггеров является сигнал $C = 1$, то на интервале действия этого сигнала они беспрепятственно воспринимают любое изменение сигналов на своих информационных входах. Поэтому для записи определенной информации сигнал на информационных входах триггера должен оставаться неизменным на всем интервале действия активного логического сигнала на

входе синхронизации. На практике такое требование приводит к дополнительным трудностям при проектировании цифровых устройств и их усложнению.

От указанного недостатка свободны триггеры с так называемым динамическим управлением. Суть такого управления заключается в том, что в качестве активного логического сигнала выступает не сам статический уровень, а его изменение. Другими словами, переключение триггера происходит в течение короткого промежутка времени вблизи фронта или среза импульса синхронизации.

Если триггер реагирует на фронт импульса, т. е. на перепад сигнала от логического 0 к логической 1, то считают, что он снабжен прямым динамическим входом. Если же триггер реагирует на срез импульса, т. е. на перепад сигнала от логической 1 к логическому 0, то считают, что он снабжен инверсным динамическим входом. Обозначение на принципиальных электрических схемах таких входов показано на рис. 5.11.

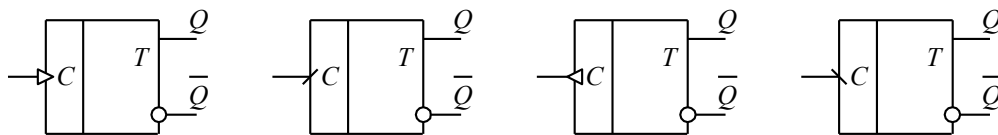
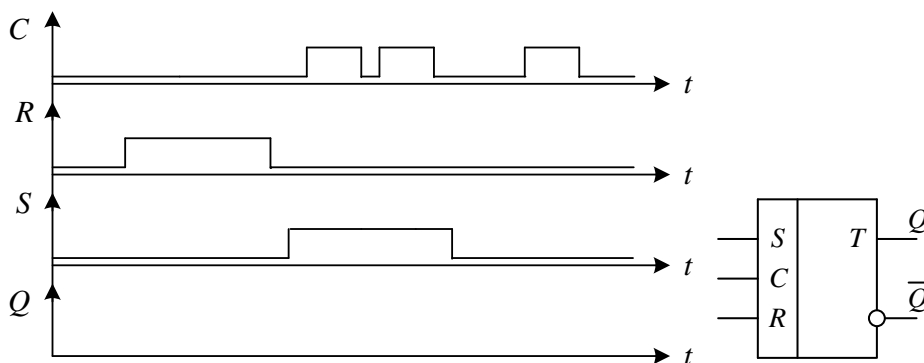


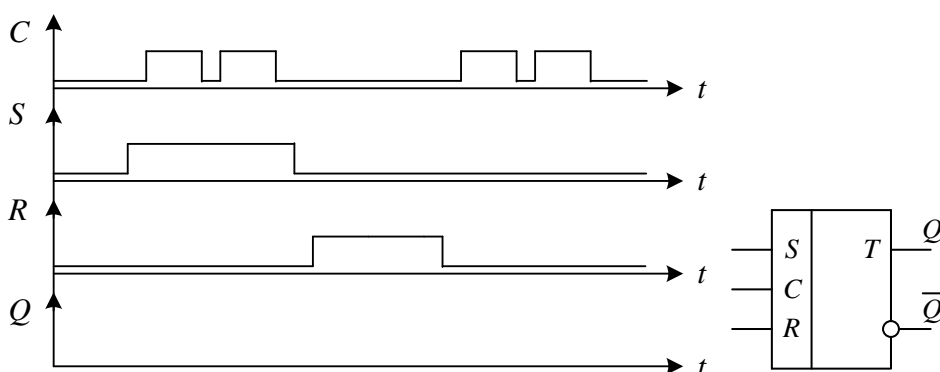
Рис. 5.11. Триггеры с динамическим управлением

Задание. Построить временные диаграммы работы триггеров в соответствии с заданием.

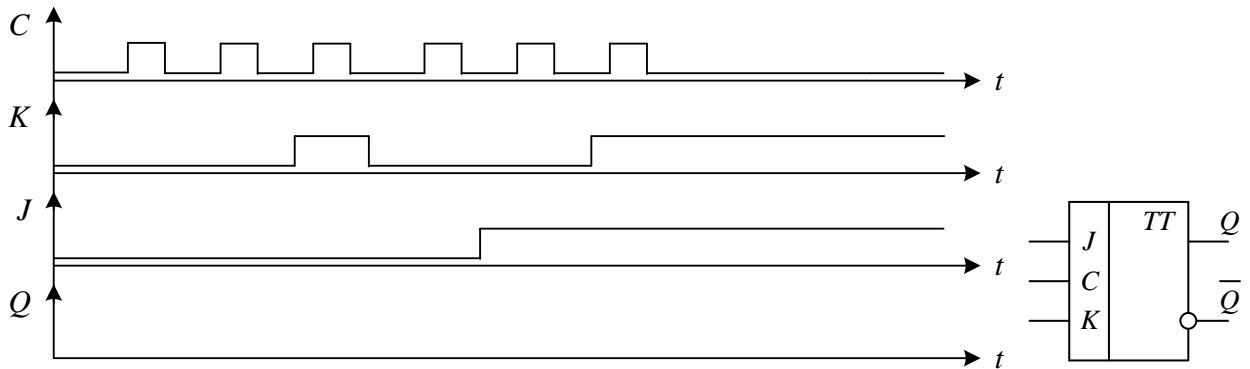
Вариант 1



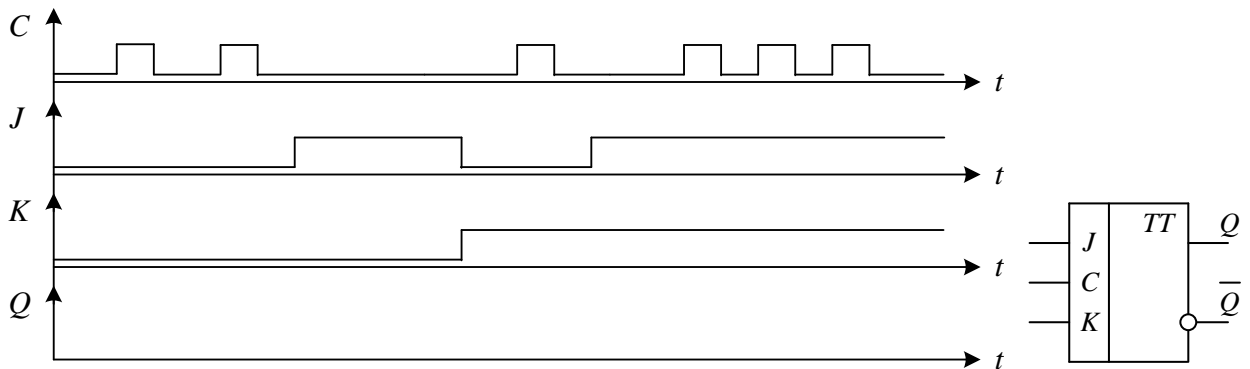
Вариант 2



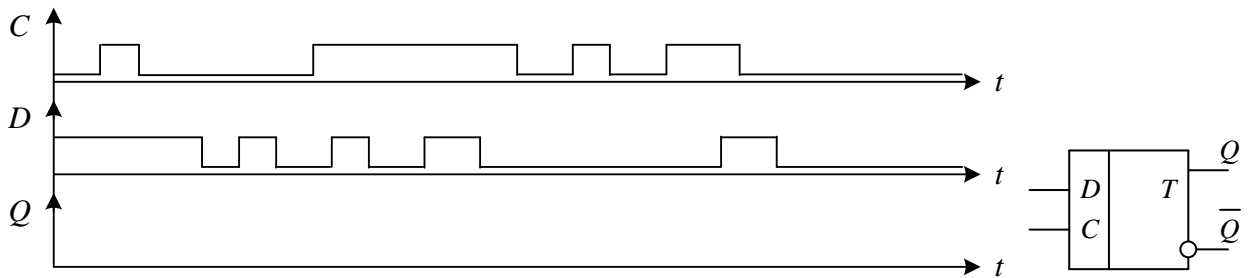
Вариант 3



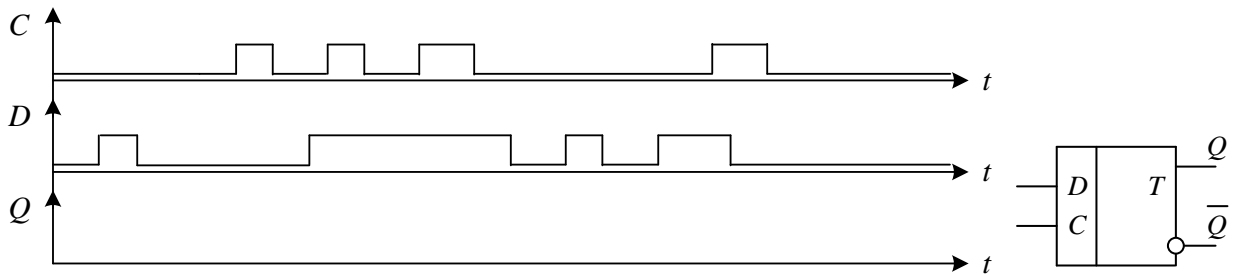
Вариант 4



Вариант 5



Вариант 6



Контрольные вопросы

1. Назовите основные параметры и признаки классификации триггеров.
2. Опишите способы связи между разрядными схемами счетчиков. Чем они различаются между собой?
3. Каким образом повышается быстродействие счетчиков?
4. Как осуществляется предварительная установка счетчиков?

Практическое занятие №6 РЕАЛИЗАЦИЯ СЧЕТЧИКОВ С ЗАДАННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПЕРЕСЧЕТА

Изучение работы регистров и счетчиков

На практике часто используются счетчики как делители частоты с коэффициентом отличным от 2^n . Наиболее часто используются счетчики с модулем счета 10, т.е. двоично-десятичные счетчики. При построении таких счетчиков в основном используется метод управляемого сброса.

При этом методе принудительно формируется сигнал сброса триггеров счетчика при появлении на его выходе кода, совпадающего с требуемым модулем счета.

На рис. 6.1 показана схема преобразования четырехразрядного двоичного счетчика в двоично-десятичный. Для этого на входы дополнительного логического элемента «4И» необходимо подать комбинацию выходных сигналов триггеров, соответствующую коду 1010, т.е. $Q_3\bar{Q}_2Q_1\bar{Q}_0$. В этом случае при появлении на выходе счетчика кода 1010 элемент «4И» сформирует сигнал сброса и на выходе счетчика установится нулевой код. Временные диаграммы на рис. 6.2 поясняют принцип работы двоично-десятичного счетчика.

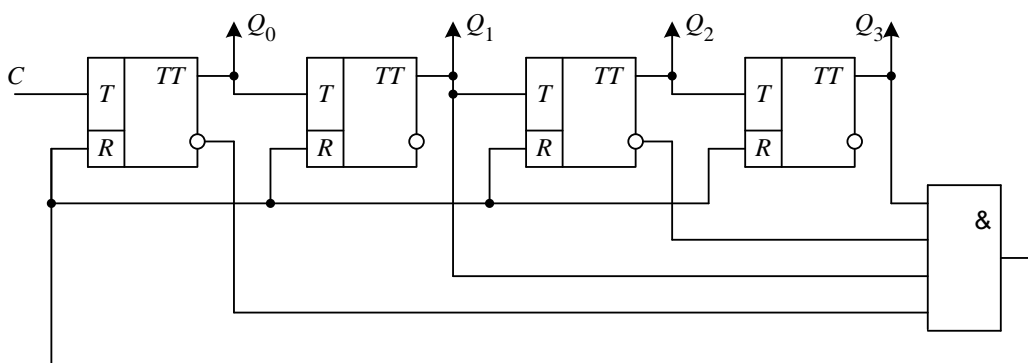


Рис.6.1. Двоично-десятичный счетчик

Решение этой задачи можно упростить. При проектировании на основе двоичного счетчика двоично-десятичного число входов дополнительного элемента может быть уменьшено до двух, на которые достаточно подать значения Q_3 и Q_1 . Например, из двоичного счетчика К555ИЕ5 можно организовать двоично-десятичный счетчик в соответствии со схемой, приведенной на рис. 6.3.

Используя метод управляемого сброса на основе двоичных счетчиков можно реализовать любой модуль счета. Промышленностью выпускается широкая номенклатура двоично-десятичных счетчиков как асинхронных, так и синхронных. Счетчик К555ИЕ2 является двоично-десятичным и по своей структуре аналогичен счетчику ИЕ5. Точно также парой реверсивного асинхронного двоичного счетчика ИЕ7 является двоично-десятичный счетчик ИЕ6, а для синхронного реверсивного двоичного счетчика ИЕ17 выпускается аналогичный двоично-десятичный счетчик ИЕ16.

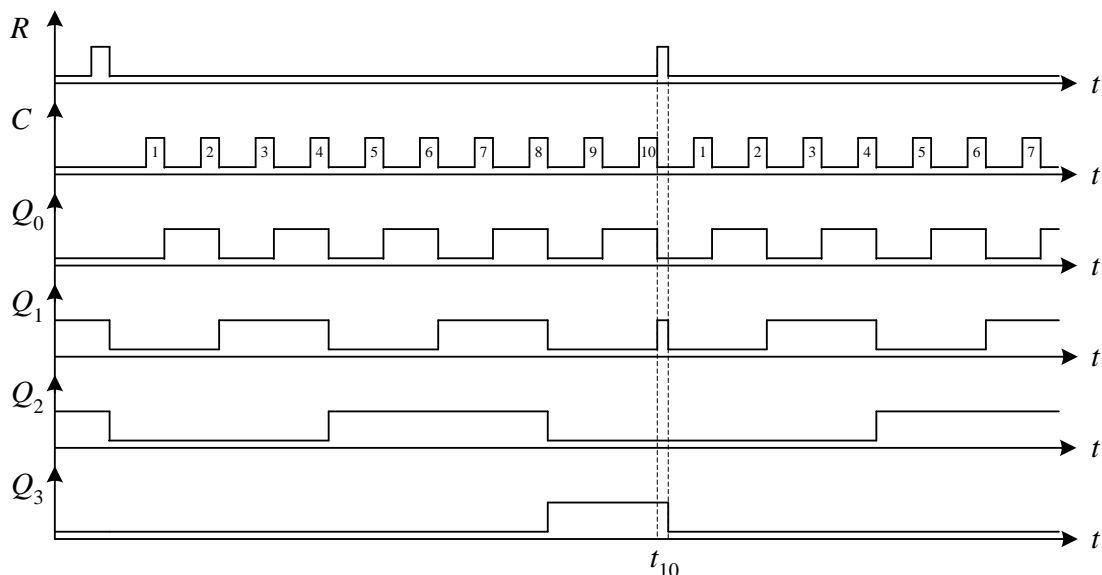


Рис.6.2. Временные диаграммы двоично-десятичного счетчика

В обозначении двоично-десятичного счетчика вместо символа *CT2* ставится символ *CT2/10*.

Задание. Составить функциональную схему счетчика с заданным коэффициентом пересчета. Реализовать данную схему на цифровой микросхеме указанной в таблице (по вариантам). Начертить временные диаграммы, поясняющие принцип работы спроектированного устройства.

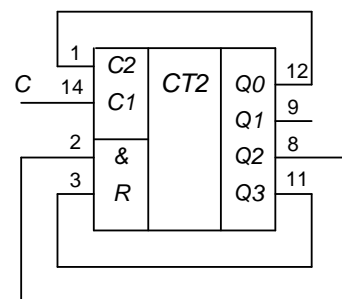


Рис. 6.3. Счетчик К555IE5

Задания к выполнению лабораторной работы

Вар.	Коэффициент пересчета, <i>N</i>	Микросхема	Вар.	Коэффициент пересчета, <i>N</i>	Микросхема
1.	8	К555IE2	12.	12	К1533IE5
2.	9	К555IE5	13.	13	К1533IE17
3.	10	К555IE7	14.	14	К1533IE18
4.	11	К555IE10	15.	8	К1531IE9
5.	12	К555IE18	16.	9	К1531IE7
6.	13	К555IE17	17.	10	К1531IE10
7.	14	К555IE7	18.	11	К1531IE17
8.	8	К555IE6	19.	12	К1531IE18
9.	9	К1533IE10	20.	13	К1531IE5
10.	10	К1533IE18	21.	14	К1531IE18
11.	11	К1533IE7	22.	9	К1531IE16

Контрольные вопросы

5. Назовите основные параметры и признаки классификации счетчиков.
6. Опишите способы связи между разрядными схемами счетчиков. Чем они различаются между собой?
7. Каким образом повышается быстродействие счетчиков?
8. Как осуществляется предварительная установка счетчиков?
9. Как представляется двоичная информация в параллельном и последовательном коде?

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Аналоговая и цифровая электроника (Полный курс): Учебник для вузов / Ю.Ф. Опадчий, О.П. Глудкин, А.И. Гуров; Под ред. О.П. Глудкина. – М.: Горячая линия – Телеком, 2002. – 768 с., ил. ISBN 5-93517-002-7.
2. Прянишников В.А. Электроника: Курс лекций. – 2-е изд. – СПб.: КОРОНА принт, 2000. – 416с., ил. ISBN 5-7931-0018-0.
3. Шило В.Л. Популярные цифровые микросхемы: Справочник. – Челябинск: Металлургия, Челябинское отд., 1989.– 352с. ISBN 5-229-00602-1.
4. Карлащук В.И. Электронная лаборатория на IBM PC. Программа Electronics Workbench и ее применение. М.: «Солон-Р», 2001.
5. Математические методы в приложениях. Дискретная математика [Электронный ресурс] : учебное пособие / О.Н. Зайцева, А.Н. Нуриев, П.В. Малов. - Казань : Издательство КНИТУ, 2014.
6. Конструирование узлов и устройств электронных средств [Электронный ресурс] : учебное пособие / Д. Ю. Муромцев, И. В. Тюрин, О. А. Белоусов. - Ростов н/Д : Феникс, 2013. - (Высшее образование)
7. Основы схемотехники аналого-цифровых устройств [Электронный ресурс] : учебное пособие по курсу "Схемотехника ЭВМ" / Аверченков О.Е. - М. : ДМК Пресс, 2012.
8. Полупроводниковая схемотехника. Том II [Электронный ресурс] / Титце У., Шенк К. ; Пер. с нем. - 12-е изд. - М. : ДМК Пресс, 2009.
9. Электронная техника: в 2 ч. Ч. 2: Схемотехника электронных схем [Электронный ресурс]: учебник / Фролов В.А. - М. : УМЦ ЖДТ, 2013.
10. Мишулин, Юрий Евгеньевич. Цифровая схемотехника: учебное пособие для вузов/ Ю. Е. Мишулин, В. А. Немонтов; Владимирский государственный университет (ВлГУ).— Владимир: Владимирский государственный университет (ВлГУ), 2006 .— 141 с. : схемы— Библиогр.: с. 141. ISBN 5-89368-649-7