

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет имени
Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Теория автоматического управления
конспект лекций
для студентов направления подготовки 151900 – Конструкторско-
технологическое обеспечение машиностроительных производств

Составитель: Н.Г.Рассказчиков

Владимир 2012

УДК 519.068

Рецензент:

кандидат технических наук, доцент
Жданов А.В.

Теория автоматического управления: конспект лекций для студентов направления подготовки 151900 – Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств/сост.Н.Г.Рассказчиков; Владим. гос.ун-т., 2012. – 261с.

Конспект лекций состоит из двух модулей, содержание которых соответствует стандарту направления подготовки 151900 – Конструкторско-технологическое обеспечение машиностроительных производств, обеспечивает изучение дисциплины «Теория автоматического управления».

Рассматриваются вопросы теории и практические примеры для линейных и нелинейных систем управления.

Предназначены для студентов дневного и заочного обучения направления 151900.

УДК 519.068

Модуль 1. Линейные системы автоматического управления

1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

1.1. Основные понятия и определения

Система терминов является азбукой любой науки. Поэтому изучение науки об управлении целесообразно начать с рассмотрения основных понятий [9].

Теория управления - наука, изучающая законы управления, принципы управления, принципы построения систем управления, а также методы анализа и синтеза систем управления.

Автоматика – это отрасль науки и техники, охватывающая теорию и практику автоматического управления.

Автоматизация – это процесс совершенствования производства, характеризующийся, прежде всего, уменьшением потока информации, поступающей от человека к объекту управления. Под производством следует понимать создание не только материальных ценностей, но и духовных - образование и наука, денежных средств - банковская деятельность и торговля, здоровья - медицина и т.д., то есть производство включает в себя любую деятельность человека, связанную с производством продуктов и услуг.

Кибернетика - наука об общих законах получения, хранения, переработки и передачи информации. Основным объектом исследования - кибернетические системы, рассматриваемые абстрактно, вне зависимости от их материальной природы, например, автоматические регуляторы в технике, ЭВМ, человеческий мозг, биологические популяции, человеческое общество и т.д. Основоположником кибернетики считается Норберт Винер, опубликовавший в 50-е годы XX века идеи о проблеме управления как о ведущей стороне материального производства, об общности принципов и законов управления и возможности создания искусственного интеллекта.

Система – это целенаправленное множество взаимосвязанных элементов любой природы.

Внешняя среда – это множество существующих вне системы элементов любой природы, оказывающих влияние на систему или находящихся под ее влиянием.

Функционирование системы - проявление функций системы во времени, означает переход системы из одного состояния в другое, т.е. движение в пространстве состояний.

Состояние системы - минимальный набор переменных величин, способных однозначно определить положение системы в данный момент времени.

Управление – это такая организация того или иного процесса, которая обеспечивает достижение поставленных целей.

Необходимыми условиями управления являются наличие объекта управления и цели управления. Задача управления заключается в формировании требуемого для достижения цели закона управления.

Кроме того, **управление** можно рассматривать как целенаправленное воздействие на объект управления, в результате которого последний переходит в требуемое состояние.

Объект управления – это часть окружающего нас мира, на которую можно воздействовать с определенной целью.

В технике под объектом управления подразумевается техническое устройство или технологический процесс, некоторые физические величины которого подлежат стабилизации или целенаправленным изменениям.

Состояние объекта управления – это набор параметров, характеризующих его в каждый момент времени.

В зависимости от участия человека в процессе управления последнее подразделяется на ручное, автоматическое и автоматизированное.

При ручном управлении закон управления формируется непосредственно человеком. Системы, реализующие ручное управление, называются системами ручного управления.

При автоматическом управлении закон управления формируется без участия человека. Системы, реализующие автоматическое управление, называются системами автоматического управления (САУ).

Автоматизированное управление представляет собой сочетание ручного и автоматического управления. При автоматизированном управлении кроме технических средств в формировании закона управления участвуют люди. При этом роль человека заключается в принятии решения, выборе варианта управления. Системы, реализующие автоматизированное управление, называются автоматизированными системами управления (АСУ).

Все автоматические устройства делятся на два больших класса:

1. **Автоматы** – это технические устройства, которые без участия человека в течение длительного времени выполняют одноразовые или многократные циклические операции на основе заданной жесткой программы.

2. **Автоматические системы** – это технические устройства, которые без участия человека в течение длительного времени поддерживают неизменными или изменяют требуемым образом какие-либо физические величины в том или ином техническом устройстве или технологическом процессе на основе обработки информации о состоянии управляемого объекта.

1.2. Принципы управления, принципы построения систем управления

Существует чрезвычайно большое разнообразие систем, выполняющих те или иные функции по управлению самыми различными процессами во всех областях деятельности человека. Однако принципы построения систем управления, принципы управления как и законы носят всеобщий характер. На сегодня различают четыре принципа управления:

1. Принцип разомкнутого цикла
2. Принцип замкнутого цикла или принцип обратной связи.
3. Комбинированный принцип.
4. Принцип адаптации.

Принцип разомкнутого цикла заключается в том, что требуемый закон управления формируется только на основе цели управления в соответствии с задающим воздействием. Управление, реализующее данный принцип, называется управлением по задающему воздействию. Система, построенная по этому принципу, является разомкнутой или незамкнутой.

Функциональная схема разомкнутой системы изображена на рис.1.1.

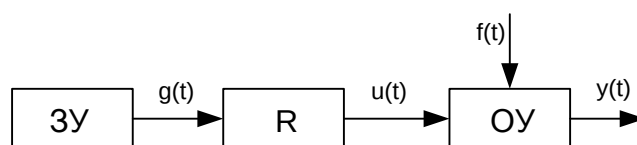


Рис. 1.1. Функциональная схема разомкнутой системы

Элементы системы:

ОУ – объект управления;

ЗУ – задающее устройство;

R – регулятор.

Координаты (переменные) системы:

$g(t)$ – задающее воздействие;

$y(t)$ – управляемая (регулируемая) величина;

$f(t)$ – возмущающее воздействие;

$u(t)$ – управляющее воздействие.

Объект управления - это техническое устройство или технологический процесс, некоторые физические величины которого поддерживаются неизменными или подлежат целенаправленным изменениям. **Задающее устройство** предназначено для формирования цели управления путем выработки задающего воздействия. **Регулятор** служит для формирования закона управления, в соответствии с которым выдает управляющее воздействие, прикладываемое к объекту управления для перевода последнего в требуемое состояние.

Входными величинами системы являются соответственно задающее и возмущающее воздействия. **Задающее воздействие** - это воз-

действие, определяемое целью управления, в соответствии с которым должна изменяться управляемая величина. **Возмущающее воздействие** представляет собой воздействие внешней среды на объект управления и, как правило, оказывает на него негативное влияние. Оно бывает объективно существующим и случайным. Выходной координатой системы является **управляемая или регулируемая величина**. Эта величина характеризует состояние объекта управления и подлежит стабилизации или изменению заданным образом в соответствии с целью управления. Для того чтобы управляемая величина принимала требуемые значения, необходимо к объекту управления приложить воздействие $u(t)$ – управляющее воздействие. **Управляющее воздействие** формируется регулятором и прикладывается к объекту управления для того, чтобы последний перешел в нужное состояние. Следовательно, задача управления и состоит в формировании управляющего воздействия.

В разомкнутой системе, как следует из принципа разомкнутого цикла и функциональной схемы (рис.1.1), регулятор формирует управляющее воздействие только на основе задающего воздействия, т.е.

$$u(t) = F[g(t)]. \quad (1.1)$$

Выражение (1.1) представляет собой закон управления разомкнутой системы.

Закон управления - это алгоритм или функциональная зависимость, в соответствии с которой регулятор формирует управляющее воздействие.

Характерным для разомкнутой системы является то, что процесс работы системы не зависит непосредственно от результата ее воздействия на управляемый объект. Отсюда главный недостаток разомкнутой системы - низкая точность работы.

По разомкнутому принципу работают многие известные всем автоматы, например, часы, банкомат, автомат, выбрасывающий какие-либо определенные предметы (билеты, шоколад) при опускании в него определенной комбинации монет и т.д. Примером такой системы

может служить системы управления стрельбой из ружья или артиллерийского орудия.

Принцип замкнутого цикла (принцип обратной связи) заключается в том, что закон управления формируется на основе отклонения управляемой величины от задающего воздействия. Такое управление называется управлением по отклонению, при котором управляемая величина оказывает влияние на управляющее воздействие. Система, реализующая этот принцип, называется замкнутой или системой управления с обратной связью.

Функциональная схема замкнутой системы изображена на рис. 1.2.

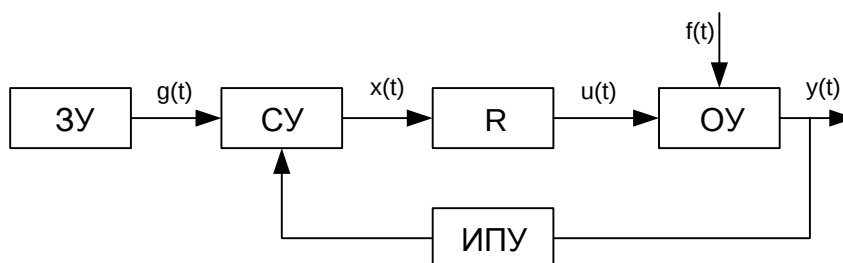


Рис. 1.2. Функциональная схема замкнутой системы

Элементы системы:

ОУ – объект управления;

ЗУ – задающее устройство;

ИПУ - измерительно-преобразовательное устройство;

СУ - сравнивающее устройство;

R – регулятор.

Координаты (переменные) системы:

$g(t)$ – задающее воздействие;

$y(t)$ – управляемая (регулируемая) величина;

$f(t)$ – возмущающее воздействие;

$x(t)$ - рассогласование (ошибка);

$u(t)$ – управляющее воздействие.

Для получения замкнутой системы требуется разомкнутую систему “замкнуть” путем введения в нее дополнительных устройств: измерительно-преобразовательного и сравнивающего. **Измерительно-преобразовательное устройство** служит для измерения (наблюдения) управляемой величины и преобразования к виду, удобному для обработки и передачи. ИПУ реализует обратную связь, то есть связь причины и следствия, которая позволяет формировать управляющее воздействие с учетом результата управления. **Сравнивающее устройство** предназначено для сравнения управляемой величины с задающим воздействием и выдачи результата сравнения в виде сигнала рассогласования

$$x(t) = g(t) - y(t). \quad (1.2)$$

Рассогласование представляет собой отклонение управляемой величины от задающего воздействия, т.е. является ошибкой системы, и служит источником формирования регулятором управляющего воздействия. Следовательно, закон управления в замкнутой системе является функцией рассогласования

$$u(t) = F[x(t)]. \quad (1.3)$$

Управляющее воздействие прикладывается к объекту управления до тех пор пока $x(t) \rightarrow 0$.

Таким образом, замкнутая система работает так, чтобы все время сводить к нулю рассогласование $x(t)$.

Принцип замкнутого цикла (обратной связи) – основной принцип управления. Он лежит в основе подавляющего большинства систем управления, так как решающую роль при управлении играет информация о результатах управления.

Основным достоинством замкнутых систем является их высокая точность, однако быстродействие их ниже, чем у разомкнутых систем.

Примерами замкнутых систем могут служить: система стабилизации температуры в холодильнике, автопилот, система самонаведения снаряда на цель, система обучения в высшей школе и т.д.

Комбинированный принцип заключается в сочетании принципов разомкнутого и замкнутого циклов в одной системе. Такое управление, сочетающее в себе управление по задающему воздействию и отклонению, называется комбинированным управлением. Оно обеспечивает высокую точность и высокое быстродействие. Система, реализующая комбинированный принцип, называется комбинированной.

Функциональная схема комбинированной системы представлена на рис. 1.3.

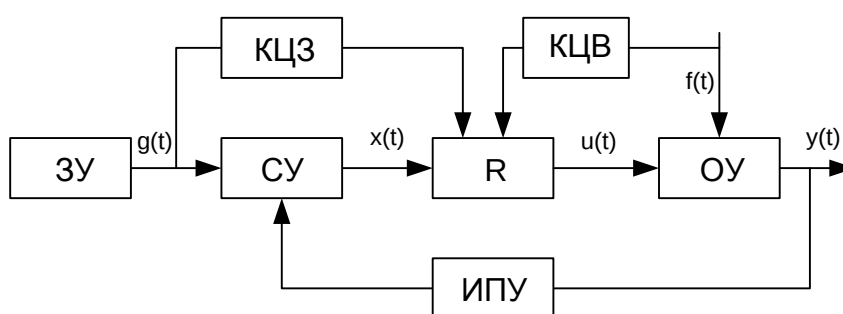


Рис. 1.3. Функциональная схема комбинированной системы

Для реализации комбинированной системы в замкнутую систему требуется включить дополнительные функциональные элементы: КЦЗ и КЦВ.

КЦЗ – компенсирующая цепь по задающему воздействию, позволяет скомпенсировать ошибку работы системы от задающего воздействия.

КЦВ – компенсирующая цепь по возмущающему воздействию, позволяет скомпенсировать негативное влияние возмущающего воздействия на работу системы.

Компенсирующие цепи представляют собой дифференцирующие устройства и служат для прогнозирования входных воздействий системы, что позволяет системе работать с предвидением. Благодаря

этому, комбинированные системы обладают повышенной точностью и быстродействием.

Из функциональной схемы следует, что закон управления комбинированной системы имеет вид:

$$u(t) = F[x(t), g(t), f(t)]. \quad (1.4)$$

В общем случае управляющее воздействие в комбинированной системе является функцией рассогласования, задающего и возмущающего воздействий. Кроме того, можно сделать комбинированную систему только по задающему воздействию, если

$$u(t) = F[x(t), g(t)], \quad (1.5)$$

и только по возмущающему воздействию, если

$$u(t) = F[x(t), f(t)]. \quad (1.6)$$

Комбинированное управление позволяет реализовывать инвариантные к внешним воздействиям системы управления.

Принцип адаптации заключается в том, что системы, реализующие этот принцип, в процессе работы приспособляются, адаптируются к изменяющимся внешним условиям. Такое управление называется адаптивным, а системы, работающие в соответствии с данным принципом, называются адаптивными и являются самыми совершенными. Адаптивные системы имеют в своем составе, как правило, дополнительные блоки и контуры для анализа показателей качества процесса управления или внешних условий, по которым необходима адаптация.

Адаптивные системы разделяются на экстремальные, самонастраивающиеся и самоорганизующиеся.

Экстремальные системы или системы с самонастройкой программы. Это системы, которые сами ищут наивыгоднейшую программу, т.е. то значение управляемой величины, которое нужно в данный момент выдерживать, чтобы режим работы объекта управле-

ния был наилучшим по какому-либо параметру. При этом имеется в виду не выбор закона управления, а автоматическая установка задающего воздействия, такого, при котором обеспечивается наивыгоднейшее значение управляемой величины при изменяющихся внешних условиях работы системы. Таким образом, на экстремальную систему накладывается дополнительная задача автоматического поиска наивыгоднейшего значения требуемой управляемой величины, т.е. самой программы управления.

На рис. 1.4 приведена функциональная схема экстремальной системы.

Для получения экстремальной системы в замкнутую систему дополнительно включают УАПЭ - устройство автоматического поиска экстремума, которое анализирует параметр объекта управления p , определяющий его режим работы, и воздействует на задающее устройство с целью изменения задающего воздействия $g(t)$ для обеспечения наивыгоднейшего режима работы объекта управления. Анализ параметра p и изменение задающего воздействия $g(t)$ осуществляется до тех пор, пока p (параметр объекта управления, который оптимизируется) не примет экстремальное значение.

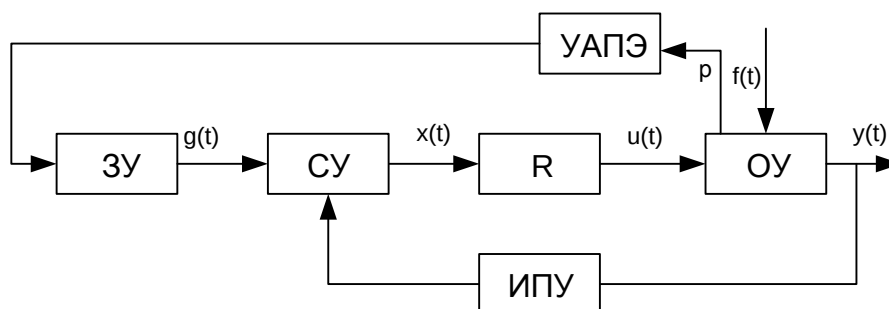


Рис. 1.4. Функциональная схема экстремальной системы

Примерами экстремальных систем могут служить: система автоматического поддержания максимальной скорости проходки скважины турбобуром при меняющихся свойствах грунта; автоматические системы управления различными производственными процессами,

поддерживающие наивыгоднейший режим работы станков; система поддержания наивыгоднейшей скорости движения автомобиля, соответствующей минимуму расхода горючего на единицу длины пути и т.д.

Самонастраивающиеся системы с самонастройкой параметров. Это такие системы, в которых автоматически, не заданным заранее образом, в процессе работы в соответствии с изменением внешних условий изменяются какие-нибудь параметры регулятора таким образом, чтобы заданное качество работы системы сохранялось или обеспечивалось максимальное качество, возможное в данных реальных условиях. Эти системы работают по принципу самообучения. В процессе работы они изучают объект управления и обучаются управлять им наилучшим образом.

Простейшими самонастраивающимися системами являются системы с самонастройкой параметров регулятора по задающему и возмущающему воздействиям (рис.1.5). Эти системы содержат в своем составе анализатор A для анализа задающего и возмущающего воздействий и контур настройки регулятора $КН$ для настройки параметров регулятора в соответствии с заданным критерием.

Примерами самонастраивающихся систем могут служить радиотехнические системы с контурами автоматических регулировок усиления (АРУ) и подстроек частоты (АПЧ).

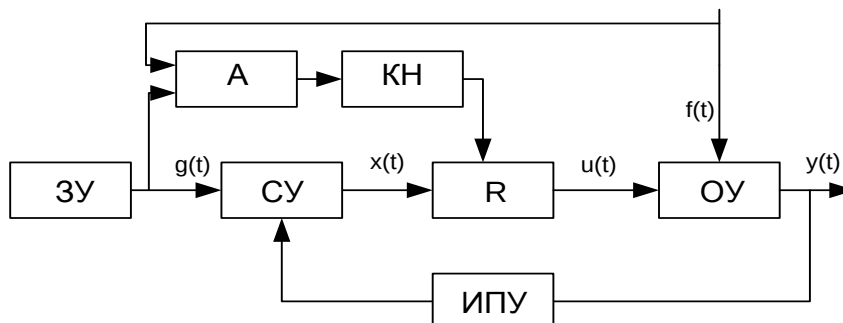


Рис. 1.5. Функциональная схема самонастраивающейся системы

Самоорганизующиеся системы или системы с самонастройкой структуры. Это системы, которые наилучших режимов работы достигают не изменением параметров регулятора, а путем изменения самой структуры регулятора не заданным заранее образом. В самоорганизующуюся систему закладывается лишь тот или иной определенный критерий качества работы системы или комбинация критериев для различных внешних условий работы системы. Система сама путем автоматического поиска выбирает такую структуру (из возможных, имеющихся в ее распоряжении), при которой удовлетворяется заданный критерий качества работы всей системы.

Примером систем с самонастройкой структуры являются двухотсчетные системы, получившие широкое распространение. Эти системы имеют в своем составе два измерительных канала: грубого и точного отсчетов. Нужный измерительный канал выбирается системой в зависимости от величины рассогласования.

Кроме чисто технических автоматических систем аналогичные принципы действия заложены и в биологических системах, экономических системах и т.п., что изучается соответствующими направлениями кибернетики и общей теории систем управления.

1.3. Классификация систем управления

Все системы управления и регулирования делятся по различным признакам на следующие основные классы.

1. По принципу действия:

- а) разомкнутые системы;
- б) замкнутые системы;
- в) комбинированные системы;
- г) адаптивные системы

2. По виду задающего воздействия $g(t)$:

- а) системы стабилизации, если $g(t)=\text{const}$;
- б) системы программного управления, если $g(t)$ – наперед заданная функция времени;
- в) следящие системы, если $g(t)$ – случайная величина.

3. По математическому описанию:

- а) линейные системы;
- б) нелинейные системы.

Линейные системы - это системы, которые описываются линейными уравнениями (алгебраическими и дифференциальными или разностными). Если система описывается обыкновенными линейными дифференциальными уравнениями с постоянными коэффициентами, то систему называют обыкновенной линейной системой. Закон управления линейной системы формируется линейными математическими операциями.

Необходимые и достаточные условия линейности системы:

- 1) в установившемся процессе выходной сигнал должен в некотором масштабе повторять входной сигнал;
- 2) сумме двух входных воздействий должна соответствовать сумма соответствующих выходных переменных.

К линейным системам применим принцип суперпозиции, в соответствии с которым выходной сигнал линейной системы на любое произвольное входное воздействие можно определить через ее реакцию на определенное элементарное воздействие.

Нелинейные системы описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Закон управления в такой системе представляет собой нелинейную функцию.

4. По характеру передачи сигналов:

- а) непрерывные системы, такие, у которых все координаты или переменные являются непрерывными функциями времени;
- б) дискретные системы - это системы, в составе которых имеется хотя бы один квантователь сигналов по времени.

5. По реакции системы на входное воздействие:

а) детерминированные системы - это системы, отвечающие на один и тот же входной сигнал всегда одним и тем же вполне определенным выходным сигналом;

б) стохастические системы - это системы, у которых реакция на входное воздействие представляет собой случайный выходной сигнал в соответствии с некоторым распределением вероятностей;

в) стационарные системы - это системы, реакция которых не зависит от момента времени подачи входного воздействия;

г) нестационарные системы - системы, реакция которых зависит от момента приложения входного воздействия.

6. По виду используемой энергии:

а) электрические системы, обладают удобством и легкостью обработки и передачи информации;

б) пневматические системы, используют энергию сжатого газа и обеспечивают высокое быстродействие;

в) гидравлические системы, используют энергию жидкости и обеспечивают высокую мощность;

г) электропневматические системы;

д) электрогидравлические системы.

7. По числу управляемых величин.

а) одномерные системы, имеют одну управляемую величину;

б) многомерные или многосвязные системы - это системы, имеющие много входов и выходов.

1.4. Структура и основные элементы системы автоматического управления

Система управления представляет собой совокупность объекта управления, регулятора и датчика рассогласования. Типовая автоматическая система может быть представлена в следующем виде (рис.1.6).

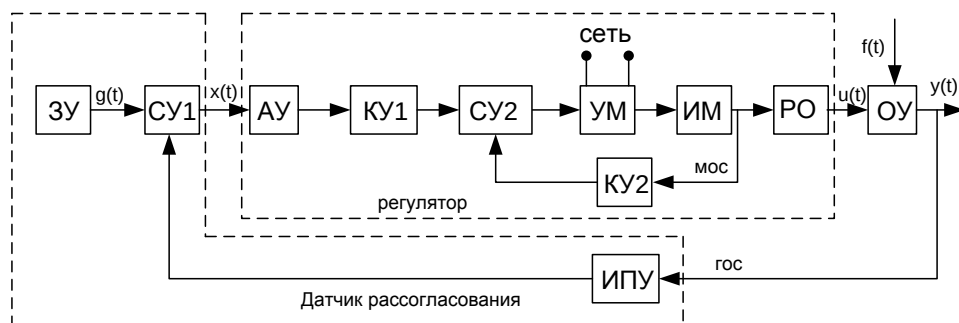


Рис. 1.6. Функциональная схема типовой автоматической системы

Координаты (переменные) системы:

$g(t)$ – задающее воздействие;

$y(t)$ – управляемая величина;

$f(t)$ – возмущающее воздействие;

$x(t) = g(t) - y(t)$ – рассогласование;

$u(t)$ – управляющее воздействие.

Функциональные элементы системы:

ОУ – объект управления;

ЗУ – задающее устройство;

ИПУ – измерительно-преобразовательное устройство;

СУ1, СУ2 – сравнивающие устройства;

РО – регулирующий орган, представляет собой техническое устройство, которое действует на объект управления и непосредственно изменяет управляемую величину $y(t)$;

ИМ – исполнительный механизм, представляет собой техническое устройство, воздействующее на регулирующий орган; в состав исполнительного механизма, как правило, входит какой-либо двигатель;

УМ – усилитель мощности, представляет собой техническое устройство, которое питает энергией исполнительный механизм;

АУ – амплитудный усилитель, устройство, обеспечивающее требуемую чувствительность системы и, в конечном счете, точность ее работы;

КУ1, КУ2 – корректирующие устройства, включаются в систему для того, чтобы сформировать требуемый закон управления для реализации заданного качества управления;

ГОС – главная обратная связь, реализуется измерительно-преобразовательным устройством и обеспечивает передачу информации об управляемой величине на вход системы;

МОС – местная или внутренняя обратная связь.

В настоящее время для управления широко используется вычислительная техника, которая позволяет программно реализовать задающее устройство, амплитудный усилитель, сравнивающие и корректирующие устройства. Остальные функциональные элементы реализуются аппаратно.

ЗУ, ИПУ и СУ1 образуют датчик рассогласования ДР. Все остальные функциональные элементы за исключением объекта управления составляют регулятор R. Регулятор, в котором датчик рассогласования может непосредственно (без дополнительного источника энергии) воздействовать на регулирующий орган, называется регулятором прямого действия.

Таким образом, любую систему управления, рассматриваемую как совокупность объекта управления ОУ, датчика рассогласования ДР и регулятора R, можно изобразить в виде упрощенной функциональной схемы (рис. 1.7).

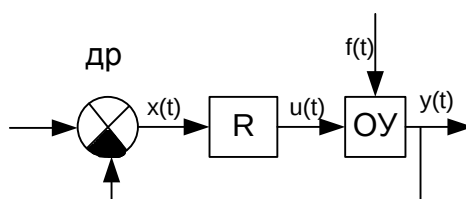


Рис. 1.7. Функциональная схема системы

Элементы системы:

ОУ – объект управления;

ДР - датчик рассогласования;

R – регулятор.

Координаты (переменные) системы:

$g(t)$ – задающее воздействие;
 $y(t)$ – управляемая (регулируемая) величина;
 $f(t)$ – возмущающее воздействие;
 $x(t)$ – рассогласование (ошибка);
 $u(t)$ – управляющее воздействие.

Еще в более общем виде систему управления можно рассматривать как "черный ящик" (рис. 1.8), преобразующий задающее воздействие в управляемую величину.

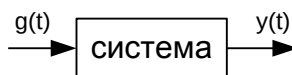


Рис. 1.8. Кибернетическая модель системы управления

При таком представлении система задается оператором A , устанавливающим связь между входом и выходом:

$$y(t) = A\{g(t)\}, \quad (1.7)$$

где A – оператор системы.

ВОПРОСЫ К РАЗДЕЛУ I

1. Что изучает теория управления?
2. Определите понятия управление и объект управления.
3. Назовите виды автоматических устройств.
4. Перечислите принципы управления и поясните их.
5. Что представляет собой закон управления?
6. Каково назначение регулятора в системе?
7. По каким признакам классифицируются системы управления?
8. Дайте классификацию систем по виду задающего воздействия.
9. Назовите необходимые и достаточные условия линейности систем.
10. Что представляет собой система управления? Перечислите основные элементы системы автоматического управления.

2. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Общие понятия

Для анализа и синтеза системы управления требуется ее математическое описание, которое бы связывало поведение координат системы - ее переменных величин в процессе работы, то есть во времени. Поведение координат системы во времени называется динамикой системы. Так как система состоит из взаимосвязанных функциональных элементов, то для получения ее математического описания необходимо получить математические описания отдельных элементов. Математическое описание элемента устанавливает связь во времени между его текущими значениями выходных $y(t)$ и входных $x(t)$ величин.

Динамика элемента, то есть поведение его координат во времени, описывается дифференциальными уравнениями. В динамике связь между координатами, то есть между входными и выходными величинами, меняется во времени. Динамика характеризуется переходным процессом.

При времени, стремящемся к бесконечности $t \rightarrow \infty$, текущие координаты $y(t)$ и $x(t)$ принимают постоянные установившиеся значения и наступает статика элемента, которая описывается алгебраическими уравнениями. В статике входные и выходные величины элемента постоянные: $x(\infty) = x_0 = \text{const}$; $y(\infty) = y_0 = \text{const}$. Эти постоянные величины называются установившимися. А процесс, соответствующий статике, называется установившимся процессом.

Теоретически статика наступает при $t \rightarrow \infty$, однако на практике принято считать, что статика наступает тогда, когда текущие координаты отличаются от своих установившихся значений не более чем на 5%.

Динамическое уравнение отдельного элемента составляется по правилам соответствующей технической науки (элемент может пред-

ставлять собой электрическую машину, механическую передачу, нагревательный прибор, электрическую цепь, электронную схему и т.п.).

2.2. Линеаризация дифференциальных уравнений

Подавляющее большинство реальных элементов имеют нелинейные характеристики и, следовательно, описываются нелинейными дифференциальными уравнениями. Однако, многие нелинейные элементы можно линеаризовать, то есть заменить нелинейные уравнения элемента приближенными линейными. Это позволяет для анализа и синтеза систем управления использовать методы теории линейных систем, которые наиболее просты и хорошо разработаны. В основе линеаризации нелинейных уравнений лежит предположение, что в исследуемом динамическом процессе переменные координаты системы изменяются таким образом, что их отклонения от установившихся значений остаются все время достаточно малыми величинами. Это условие выполняется для замкнутых систем, так как последние работают по принципу ликвидации ошибки.

Геометрическая трактовка линеаризации. Изобразим графически нелинейную зависимость (рис. 2.1)

$$y(t) = F(x(t)) \quad . \quad (2.1)$$

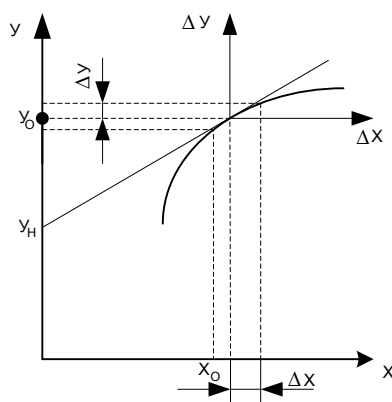


Рис. 2.1. Геометрическая интерпретация линеаризации

Текущие значения координат y и x запишем как

$$y(t) = y_0 + \Delta y(t);$$

$$x(t) = x_0 + \Delta x(t);$$

где y_0, x_0 – установившиеся значения, $\Delta y, \Delta x$ – их отклонения от установившихся значений.

В рабочей точке (x_0, y_0), определяемой установившимися значениями, заменим участок кривой касательной и получим прямую, описываемую линейным уравнением

$$y = y_n + kx ,$$

где y_n – постоянная величина;

$k = \left(\frac{dy}{dx} \right)_0$ – коэффициент, определяемый наклоном касательной к кривой в рабочей точке (x_0, y_0).

Для исключения из уравнения величины y_n перенесем начало координат в рабочую точку. Тогда получим линейное уравнение, связывающее между собой отклонения переменных величин от своих установившихся значений, вида

$$\Delta y(t) = k \Delta x(t) . \quad (2.2)$$

Таким образом, линеаризация уравнения геометрически может трактоваться как замена первоначальной кривой на касательную к ней прямую в точке установившегося режима. Очевидно, что эта замена тем точнее, чем меньше величины отклонений координат элемента от своих установившихся значений в исследуемом динамическом процессе.

В общем случае при составлении уравнения динамики элемента системы (рис. 2.2), имеющего входную величину x , выход-

ную - y и внешнее воздействие f , получается динамическое уравнение произвольного нелинейного вида

$$F(\ddot{y}, \dot{y}, y) = G(\ddot{x}, \dot{x}, x, f). \quad (2.3)$$

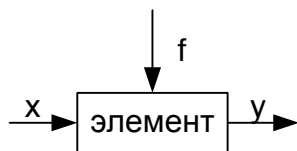


Рис. 2.2. Элемент автоматической системы

Допустим, что установившиеся значения переменных y , x и f являются постоянными величинами y_0 , x_0 , f_0 , характеризующими установившийся режим и определяющими рабочую точку элемента.

Тогда для текущих координат можно записать

$$y(t) = y_0 + \Delta y(t);$$

$$x(t) = x_0 + \Delta x(t);$$

$$f(t) = f_0 + \Delta f(t);$$

где Δy , Δx , Δf – отклонения y , x , f от своих установившихся значений.

Из (2.3) получается уравнение статики

$$F(y_0) = G(x_0, f_0). \quad (2.4)$$

Для линеаризации уравнения (2.3) последнее раскладывают в ряд Тейлора по степеням отклонений всех координат элемента от своих установившихся значений. Тогда уравнение (2.3) примет вид

$$F(y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)_0 \Delta \ddot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0 \Delta \dot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y = G(x_0, f_0) + \left(\frac{\partial G}{\partial \ddot{x}}\right)_0 \Delta \ddot{x} + \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)_0 \Delta \dot{x} + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial G}{\partial f}\right)_0 \Delta f + \quad \text{(члены} \\ \text{высшего порядка малости).} \quad (2.5)$$

Вычитая из последнего уравнения (2.5) уравнение статики (2.4) и

отбросив все последующие члены разложения как малые высшего порядка, приходим к линейному уравнению динамики элемента

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \ddot{y}}\right)_0 \Delta \ddot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial \dot{y}}\right)_0 \Delta \dot{y} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_0 \Delta y = \left(\frac{\partial G}{\partial \dot{x}}\right)_0 \Delta \dot{x} + \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)_0 \Delta x + \left(\frac{\partial G}{\partial f}\right)_0 \Delta f. \quad (2.6)$$

Здесь нижний индекс “0” обозначает, что значения частных производных должны быть определены в точке установившегося режима элемента.

Это дифференциальное уравнение, так же как и (2.3), описывает тот же динамический процесс в том же элементе автоматической системы. Сравним (2.3) и (2.6):

уравнение (2.3) - точное, а уравнение (2.6) - приближенное, ибо в процессе его получения были отброшены малые высшего порядка;

уравнение (2.3) записано относительно переменных величин элемента, а уравнение (2.6) - относительно отклонений переменных от своих установившихся значений;

уравнение (2.3) - нелинейное, уравнение (2.6) - линейное относительно отклонений, коэффициенты которого определяются рабочей точкой элемента, то есть его установившимися значениями; при смене рабочей точки эти коэффициенты изменяются.

Таким образом, цель получения линейного дифференциального уравнения взамен прежнего нелинейного достигнута. Уравнение (2.6) называется дифференциальным уравнением элемента в отклонениях.

Ограничение метода. Данным методом могут быть линеаризованы уравнения элементов, статические характеристики которых в окрестности точки установившегося режима гладкие, то есть их производные непрерывны и однозначны. Не могут быть линеаризованы уравнения элементов с негладкими, неоднозначными и имеющими разрывы в окрестности точки установившегося режима статическими характеристиками.

Замечание: в дальнейшем будем использовать только линеаризованные уравнения, записанные относительно отклонений от установившихся значений переменных, однако для сокращения записи знак “Δ” будем опускать.

Пример. Электромагнитный момент M электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением определяется нелинейным уравнением

$$M = c I_{\text{я}} I_{\text{в}},$$

где c - постоянный коэффициент;

$I_{\text{я}}$, $I_{\text{в}}$ - токи, протекающие в цепях якоря и возбуждения.

Решение. Линеаризуем выражение для M разложением в ряд Тэйлора и учетом лишь линейных составляющих ряда. В результате получим соотношение для малых приращений

$$(\partial M / \partial M)_0 \Delta M = (\partial (c I_{\text{я}} I_{\text{в}}) / \partial I_{\text{я}})_0 \Delta I_{\text{я}} + (\partial (c I_{\text{я}} I_{\text{в}}) / \partial I_{\text{в}})_0 \Delta I_{\text{в}}.$$

Откуда следует

$$\Delta M = c I_{\text{в}0} \Delta I_{\text{я}} + c I_{\text{я}0} \Delta I_{\text{в}}.$$

Здесь нижним индексом “0” обозначены установившиеся значения переменных, относительно которых изменяются их приращения.

2.3. Формы записи линеаризованных уравнений

В теории управления принято записывать дифференциальные уравнения в двух стандартных формах.

В общем виде линеаризованное дифференциальное уравнение, описывающее элемент, можно записать следующим образом

$$\begin{aligned} a_0 \frac{d^n y(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} y(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dy(t)}{dt} + a_n y(t) = \\ = b_0 \frac{d^m x(t)}{dt^m} + \dots + b_m x(t) + c_0 \frac{d^k f(t)}{dt^k} + \dots + c_k f(t), \end{aligned} \quad (2.7)$$

где $y(t)$, $x(t)$, $f(t)$ - выходная и входная величины элемента и внешнее воздействие;

a_i , b_i , c_i - постоянные коэффициенты;

n - порядок уравнения, причем ($n \geq m, k$); это условие физической реализуемости элемента, показывающее, что сигнал на

выходе реального элемента не может возникнуть раньше подачи воздействия на его вход, т.е.

$$y(t) = 0 \text{ при } t < 0, \quad \int_0^{\infty} |y(t)| dt < \infty.$$

Уравнение (2.7) удобнее записывать в символическом виде, введя алгебраизированный символ дифференцирования $p = \frac{d}{dt}$. В результате уравнение примет вид

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) y(t) = (b_0 p^m + b_1 p^{m-1} + \dots + b_m) x(t) + (c_0 p^k + c_1 p^{k-1} + \dots + c_k) f(t). \quad (2.8)$$

Коэффициенты уравнения имеют размерности:

$$a_i [c^{n-i}]; \quad b_i \left[c^{m-i} \frac{\text{разм. } Y}{\text{разм. } X} \right]; \quad c_i \left[c^{k-i} \frac{\text{разм. } Y}{\text{разм. } F} \right].$$

В общем случае в соответствии с (2.8) уравнение элемента можно представить в форме

$$D(p) y(t) = N(p) x(t) + M(p) f(t). \quad (2.9)$$

При этом

$$D(p) = \sum_{i=0}^n a_i p^{n-i}; \quad N(p) = \sum_{i=0}^m b_i p^{m-i}; \quad M(p) = \sum_{i=0}^k c_i p^{k-i} -$$

полиномы степени n, m, k от символа дифференцирования p .

Первая стандартная форма записи. Дифференциальное уравнение записывают так, чтобы выходная величина и ее производные находились в левой части уравнения, а входные величины и все остальные члены - в правой. Кроме того, принято, чтобы сама выходная величина входила в уравнение с коэффициентом единица. Чтобы привести уравнение (2.8) к такому виду, разделим левую и правую его части на a_n и получим

$$\begin{aligned} & (T_n p^n + T_{n-1} p^{n-1} + \dots + T_1 p + 1) y(t) = \\ & = (k_1 + k_2 p + \dots + k_{m+1} p^m) x(t) + (k_{m+2} + \dots + k_{m+k+2} p^k) f(t). \end{aligned} \quad (2.10)$$

При записи уравнения в первой стандартной форме (2.10) получившиеся коэффициенты:

$T_n, T_{n-1}, \dots, T_1$ называются постоянными времени, они имеют размерность времени [с] и характеризуют инерционные свойства элемента; а

$$k_1 \left[\frac{\text{раз } M.Y}{\text{раз } M.X} \right], \dots, k_{m+1} \left[c^m \frac{\text{раз } M.Y}{\text{раз } M.X} \right], k_{m+2} \left[\frac{\text{раз } M.Y}{\text{раз } M.F} \right], \dots, k_{m+k+2} \left[c^k \frac{\text{раз } M.Y}{\text{раз } M.F} \right]$$

называются коэффициентами передачи. Они представляют собой весовые коэффициенты, показывающие какой вклад в формирование выходной величины элемента вносит каждое слагаемое правой части уравнения.

Вторая стандартная форма записи. Для решения дифференциальных уравнений широкое распространение получил операторный метод, при использовании которого задача нахождения решения дифференциального уравнения сводится к алгебраическим действиям. Чтобы перейти от исходного дифференциального уравнения элемента при нулевых начальных условиях к операторному, необходимо в дифференциальном уравнении вместо реальных функций времени записать их изображения по Лапласу, а в полиномах символ дифференцирования p заменить на оператор Лапласа s .

Применив к дифференциальному уравнению (2.9) преобразование Лапласа, получим

$$D(s)Y(s) = N(s)X(s) + M(s)F(s), \quad (2.11)$$

где s – оператор Лапласа;

$Y(s), X(s), F(s)$ – изображения по Лапласу выходной и входной величин элемента и внешнего воздействия;

$$D(s) = \sum_{i=0}^n a_i s^{n-i}; \quad N(s) = \sum_{i=0}^m b_i s^{m-i}; \quad M(s) = \sum_{i=0}^k c_i s^{k-i}$$

полиномы степени n, m, k от оператора Лапласа s .

Оператор Лапласа s представляет собой комплексную величину, причем $s=c+j\omega$, где:

$c=\text{Re } s$ – абсцисса абсолютной сходимости;

$\omega=\text{Im } s$ – угловая частота, имеющая размерность [рад/с];

Для перехода от реальных функций времени – оригиналов к их изображениям по Лапласу и наоборот введены прямое и обратное ин-

тегральные преобразования вида:

$$X(s) = L[x(t)] = \int_0^{\infty} x(t) e^{-st} dt ,$$

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s) e^{st} ds .$$

На практике для этих целей используют специальные таблицы [1,7].

Уравнения (2.9) и (2.11) формально совпадают между собой. Однако уравнение (2.9) является дифференциальным, куда входят реальные функции времени, а уравнение (2.11) - алгебраическим относительно изображений функций времени по Лапласу.

После ввода следующих обозначений:

$$W_x(s) = \frac{N(s)}{D(s)} ; \quad W_f(s) = \frac{M(s)}{D(s)}$$

уравнение (2.11) примет вид, являющийся второй стандартной формой записи

$$Y(s) = W_x(s) X(s) + W_f(s) F(s) . \quad (2.12)$$

Выражения $W_x(s)$ и $W_f(s)$ в теории управления называются передаточными функциями.

Если $f(t) = 0$, то $F(s) = 0$ и тогда $w_x(s) = \frac{Y(s)}{X(s)}$ - передаточная функция элемента по входу X .

Если $x(t)=0$, то $X(s)=0$ и тогда $w_f(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$ - передаточная функция элемента по входу F .

Передаточная функция элемента по заданному входу есть отношение изображений по Лапласу его выходной и входной величин при нулевых начальных условиях и равных нулю воздействиях на остальных входах элемента.

Передаточная функция имеет важное основополагающее значение в классической теории управления. Она устанавливает связь в динамическом режиме между выходной и входной величинами элемента и полностью характеризует его динамические свойства.

Понятие передаточной функции весьма удобно при анализе так

называемых структурных схем. Так, например, элемент, изображенный на рис. 2.2, после линеаризации можно представить в виде структурной схемы, показанной на рис. 2.3.

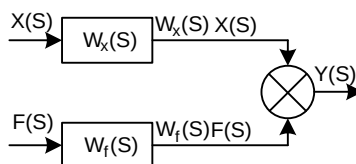


Рис. 2.3. Структурная схема элемента

Передаточные функции элементов или отдельных участков схемы позволяют легко получить общее уравнение всей системы, а в случае необходимости перейти к дифференциальному уравнению.

Замечание: в литературе часто оператор Лапласа обозначается буквой p .

ВОПРОСЫ К РАЗДЕЛУ 2

1. Каково назначение математического описания систем?
2. Что такое динамика системы? Чем отличается математическое описание динамики системы от описания ее статики?
3. Что представляет собой условие физической реализуемости системы?
4. В чем смысл линеаризации нелинейных элементов?
5. Каким образом линеаризуются дифференциальные уравнения?
6. Назовите формы записи линеаризованных уравнений.
7. Каким образом перейти к первой форме записи дифференциального уравнения звена? Как в этом случае называются коэффициенты?
8. Как перейти от дифференциального уравнения к операторному?
9. Дайте определение передаточной функции.
10. Как по дифференциальному уравнению звена найти его передаточную функцию?

3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

3.1. Характеристики линейных звеньев

Под динамическим звеном понимается устройство любого физического вида и конструктивного оформления, но имеющее определенное математическое описание.

Характеристика звена - это его реакция на определенное входное воздействие. Для линейных звеньев и линейных систем в целом характеристика полностью определяет их динамические свойства, так как к линейным звеньям и системам применим принцип суперпозиции, позволяющий по реакции линейного элемента на какое-либо известное воздействие найти его реакцию на воздействие произвольного вида.

В качестве входных воздействий, на которые ищется реакция звена, приняты воздействия, описываемые элементарными математическими функциями, то есть такими, на которые можно разложить любые произвольные функции. В теории управления в качестве элементарных функций используются:

- 1) единичная импульсная или дельта-функция $\delta(t)$;
- 2) единичная ступенчатая функция $1(t)$;
- 3) гармоническая функция $X_0 \sin(\omega t)$.

Существуют временные (импульсная и переходная функции) и частотные характеристики.

Импульсная или весовая функция звена $w(t)$. Импульсная или весовая функция представляет собой реакцию звена на единичную импульсную функцию.

Единичной импульсной функцией или δ -функцией называется функция, равная нулю всюду, кроме начала координат, но притом так, что интеграл от нее по любому интервалу, содержащему нуль, равен единице, т.е.

$$\delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \neq 0, \\ \infty & \text{при } t = 0. \end{cases}$$

Кроме того, $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \delta(t) dt = 1$ при любом $\varepsilon > 0$.

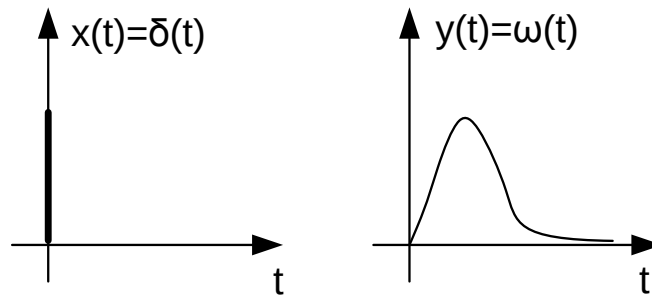


Рис. 3.1. Временные диаграммы входного и выходного сигналов звена

Иначе говоря, весовая функция $w(t)$ представляет собой переходный процесс на выходе звена (рис. 3.1) при подаче на его вход единичного импульса.

Весовой функцией звена $w(t)$ называется оригинал (т.е. обратное преобразование Лапласа) передаточной функции, а именно:

$$w(t) = L^{-1}[W(s)] = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} W(s)e^{st} ds = \sum_{i=1}^n \text{Res}[W(s)e^{st}]_{s=s_i}, \quad (3.1)$$

где s_i - все полюса (корни знаменателя) передаточной функции $W(s)$. В этой формуле Res обозначает вычеты.

Зная импульсную функцию $w(t)$, можно найти реакцию звена на любое входное воздействие $x(t)$, разложение которого на δ -функции имеет вид:

$$x(t) = \int_0^{\infty} x(\tau) \delta(t - \tau) d\tau. \quad (3.2)$$

При этом сигнал на выходе линейного звена определяется как

$$y(t) = \int_0^t x(\tau) w(t - \tau) d\tau = \int_0^t x(t - \tau) w(\tau) d\tau, \quad (3.3)$$

где τ - вспомогательное время интегрирования.

Имея весовую функцию звена $w(t)$, можно определить его передаточную функцию:

$$W(s) = L[w(t)] = \int_0^{\infty} w(t) e^{-st} dt \quad (3.4)$$

Переходная функция звена $h(t)$. Переходная функция представляет собой реакцию звена на единичную ступенчатую функцию, удовлетворяющую условию

$$1(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{при } t \geq 0. \end{cases}$$

Как видим (рис. 3.2), переходная функция является переходным процессом на выходе звена при единичном скачке на его входе.

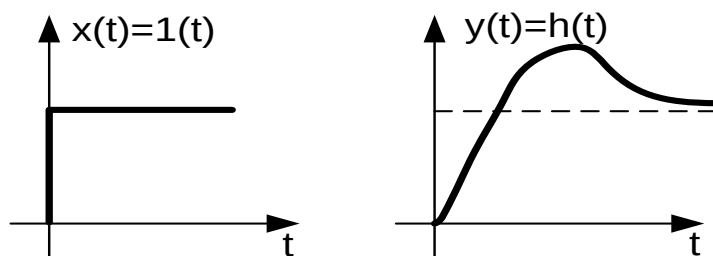


Рис. 3.2. Временные диаграммы входного и выходного сигналов звена

Из рассмотренного выше для линейных звеньев очевидны следующие соотношения между импульсной и переходной функциями. Поскольку

$$1(t) = \int_0^{\infty} \delta(t) dt, \text{ то } h(t) = \int_0^{\infty} w(t) dt,$$

и, наоборот,

$$\delta(t) = 1'(t), \text{ то } w(t) = h'(t).$$

Переходная функция звена связана с передаточной функцией преобразованием Карсона, т.е. имеется следующее интегральное преобразование:

$$W(s) = sL[h(t)] = s \int_0^{\infty} h(t)e^{-st} dt. \quad (3.5)$$

Весовая и переходная характеристики являются функциями времени и поэтому относятся к временным характеристикам.

Частотные характеристики звена. Частотными характеристиками называются формулы и графики, характеризующие реакцию звена на гармоническое входное воздействие в установившемся режиме, т.е. вынужденные синусоидальные колебания звена.

Если на вход линейного звена подать гармоническое воздействие

$$x(t) = X_0 \sin(\omega t),$$

где X_0 - амплитуда,

ω - угловая частота, имеющая размерность [рад/с] или [с⁻¹],

то, как следует из необходимых и достаточных условий линейности, на выходе звена в установившемся режиме будет также гармоническая функция той же частоты, но, в общем случае, другой амплитуды Y_0 и сдвинутая по фазе относительно входной величины на угол ψ

$$y(t) = Y_0 \sin(\omega t + \psi).$$

Связь между выходной гармоникой и входной устанавливается с помощью частотной передаточной функции звена $W(j\omega)$.

Частотная передаточная функция является важнейшей динамической характеристикой звена и представляет собой отношение изображений по Фурье выходного и входного сигналов при нулевых начальных условиях и равных нулю воздействиях на остальных входах:

$$W(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{X(j\omega)}. \quad (3.6)$$

Из сравнения преобразований Фурье и Лапласа следует, что ча-

стотную передаточную функцию звена легко получить из его передаточной функции путем замены s на $j\omega$, т.е.

$$W(j\omega) = W(s) \Big|_{s = j\omega} \quad (3.7)$$

Частотная передаточная функция $W(j\omega)$, как видно, представляет собой комплексное число, которое можно записать как в полярной, так и декартовой системах координат:

$$W(j\omega) = A(\omega) e^{j\psi(\omega)} = U(\omega) + jV(\omega), \quad (3.8)$$

где $A(\omega)$ - модуль или амплитуда частотной передаточной функции, представляющий собой отношение амплитуды выходной величины к амплитуде входной, т.е. коэффициент усиления звена k на частоте ω

$$A(\omega) = |W(j\omega)| = \text{mod } W(j\omega) = \left. \frac{y_0}{x_0} \right|_{\omega} = k; \quad (3.9)$$

$\psi(\omega)$ - аргумент или фаза частотной передаточной функции, показывает фазовый сдвиг выходной гармоники по отношению к входной на частоте ω

$$\psi(\omega) = \arg W(j\omega); \quad (3.10)$$

$U(\omega)$ - вещественная составляющая частотной передаточной функции

$$U(\omega) = \text{Re } W(j\omega); \quad (3.11)$$

$V(\omega)$ - мнимая составляющая частотной передаточной функции

$$V(\omega) = \text{Im } W(j\omega). \quad (3.12)$$

Соотношения

$$A(\omega) = \sqrt{U^2(\omega) + V^2(\omega)} \quad \text{и} \quad \psi(\omega) = \text{arctg} \frac{V(\omega)}{U(\omega)}$$

связывают между собой составляющие частотной передаточной функции.

Таким образом, частотная передаточная функция, определяющая реакцию звена на гармонические колебания всех возможных частот, позволяет, пользуясь принципом суперпозиции, найти реакцию линейного звена на произвольное воздействие.

Выражение (3.8) представляет амплитудно-фазовую частотную характеристику звена. Выражения (3.9) и (3.10) называются соответственно амплитудной частотной характеристикой звена и фазовой частотной характеристикой звена, а выражения (3.11) и (3.12) - вещественной частотной характеристикой и мнимой частотной характеристикой звена.

Для наглядного представления частотных свойств звена частотные характеристики отображают графически.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика (АФЧХ). Строится на комплексной плоскости и представляет собой геометрическое место концов векторов (годографов), соответствующих частотной передаточной функции $W(j\omega)$ при изменении частоты от нуля до бесконечности (рис.3.3). Для каждой частоты ω на комплексной плоскости наносится точка, полученные точки соединяются затем плавной кривой. АФЧХ можно строить как в декартовых координатах (U, V), так и в полярных (A, ψ).

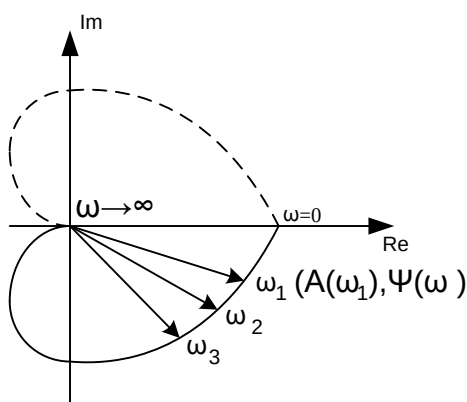


Рис. 3.3. Амплитудно-фазовая частотная характеристика

АФЧХ строится как для положительных, так и для отрицатель-

ных частот. При замене в $W(j\omega)$ ω на $-\omega$ получается сопряженная комплексная величина. Поэтому АФЧХ для отрицательных частот является зеркальным отображением относительно вещественной оси АФЧХ для положительных частот. На рис.3.3 АФЧХ для отрицательных частот показана пунктирной линией. Длина вектора, проведенного из начала координат в точку АФЧХ, соответствующую выбранной частоте ω , равна $A(\omega)$, а угол между вектором и положительным направлением вещественной оси равен $\psi(\omega)$.

Амплитудная частотная характеристика (АЧХ). Показывает, как пропускает звено сигнал различной частоты, иначе, представляет собой коэффициент изменения амплитуды гармонических колебаний при прохождении через звено (рис. 3.4).

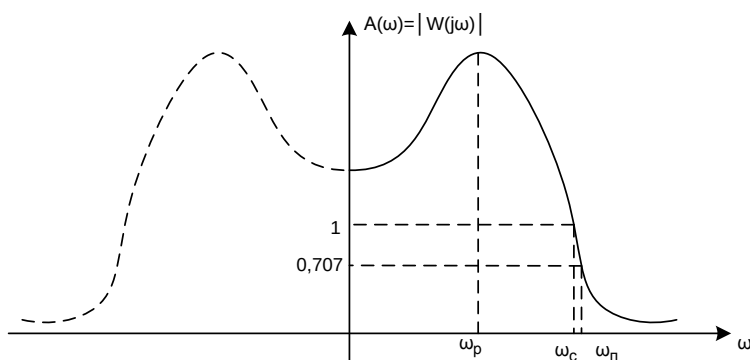


Рис. 3.4. Амплитудная частотная характеристика

где ω_p - резонансная частота, т.е. частота, на которой амплитудная частотная характеристика достигает максимума, иначе, на этой частоте звено имеет максимальный коэффициент усиления;

ω_c - частота среза, частота, на которой амплитудная частотная характеристика, уменьшаясь, принимает значение, равное единице, и при дальнейшем повышении частоты остается меньше единицы;

ω_n - частота пропускания, частота, на которой амплитудная частотная характеристика, уменьшаясь, принимает значение, равное 0,707, и при дальнейшем повышении частоты не увеличивается;

$\Delta\omega_n = 2\omega_n$ - полоса пропускания, диапазон частот гармонических колебаний, пропускаемых звеном без заметного ослабления.

Фазовая частотная характеристика (ФЧХ). Показывает фазовые сдвиги, вносимые звеном на различных частотах (рис.3.5).

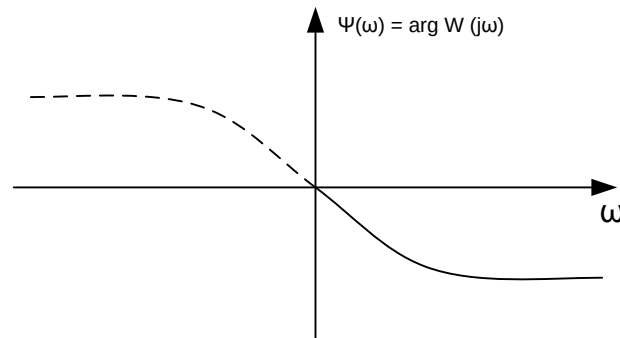


Рис. 3.5. Фазовая частотная характеристика

Вещественная частотная характеристика (ВЧХ). Представляет собой зависимость вещественной составляющей частотной передаточной функции от частоты (рис. 3.6).

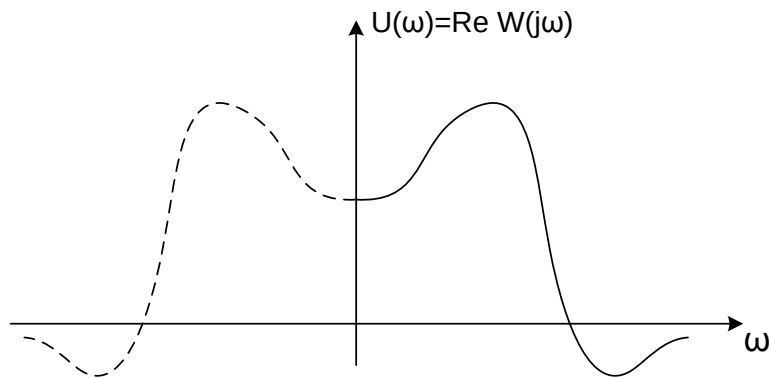


Рис. 3.6. Вещественная частотная характеристика

Мнимая частотная характеристика (МЧХ). Представляет собой зависимость мнимой составляющей частотной передаточной функции от частоты (рис.3.7).

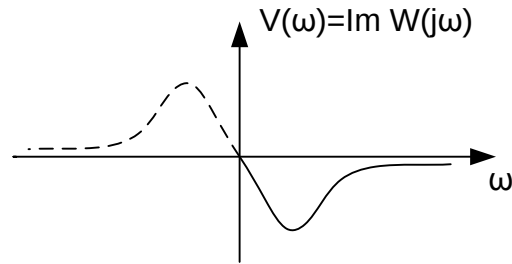


Рис. 3.7. Мнимая частотная характеристика

Логарифмические частотные характеристики (ЛЧХ). На практике чаще всего амплитудную и фазовую частотные характеристики изображают в логарифмическом масштабе (рис. 3.8).

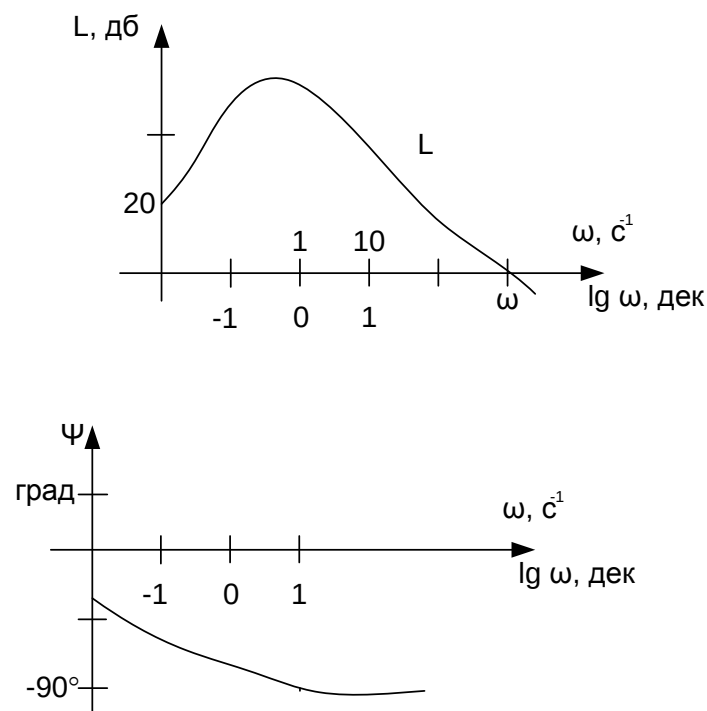


Рис. 3.8. Логарифмические частотные характеристики

При построении логарифмической амплитудной частотной характеристики (ЛАХ) по оси ординат откладывают величину

$$L(\omega) = 20 \lg A(\omega) = 20 \lg |W(j\omega)|. \quad (3.13)$$

Эта величина выражается в децибелах [дБ]. Бел представляет собой логарифмическую единицу, соответствующую десятикратному

увеличению мощности. Один бел соответствует увеличению мощности в 10 раз, 2 бела - в 100 раз и т.д. Децибел равен одной десятой части бела. Так как $A(\omega)$ представляет собой отношение не мощностей, а амплитуд, то увеличение этого отношения в десять раз соответствует двум белам или двадцати децибелам. Поэтому в правой части (3.13) стоит множитель 20. По оси абсцисс откладывается частота ω в логарифмическом масштабе $\lg(\omega)$. Равномерной единицей на оси абсцисс является декада [дек] - любой отрезок, на котором значение частоты ω увеличивается в десять раз. Точка пересечения ЛАХ с осью абсцисс соответствует частоте среза ω_c . Верхняя полуплоскость ЛАХ соответствует значениям $A > 1$ (усиление амплитуды), а нижняя полуплоскость - значениям $A < 1$ (ослабление амплитуды).

При построении логарифмической фазовой частотной характеристики (ЛФХ) отсчет углов $\psi(\omega) = \arg W(j\omega)$ идет по оси ординат в обычном масштабе в угловых градусах.

Главным достоинством логарифмических частотных характеристик является возможность построения их во многих случаях практически без вычислительной работы.

Все рассмотренные виды динамических характеристик звеньев (передаточная функция, дифференциальное уравнение, весовая функция, переходная функция, амплитудно-фазовая частотная характеристика) связаны между собой. Поэтому все они эквивалентны друг другу в определении динамических свойств звена системы управления.

3.2. Типовые динамические звенья и их характеристики

Типовые динамические звенья - это минимально необходимый набор звеньев для описания системы управления произвольного вида.

Типы звеньев систем управления различаются по виду их передаточной функции (или дифференциального уравнения), определяю-

щей все их динамические свойства и характеристики. Классификация основных типов динамических звеньев приведена на рис.3.9.

Основные типы звеньев делятся на четыре группы: позиционные, интегрирующие, дифференцирующие и неминимально-фазовые [1,2]. Позиционные, интегрирующие и дифференцирующие звенья относятся к минимально-фазовым. Важным свойством минимально-фазовых звеньев является однозначное соответствие амплитудной и фазовой частотных характеристик. Другими словами, по заданной амплитудной характеристике всегда можно определить фазовую и наоборот.

Позиционные звенья

В звеньях позиционного, или статического типа, линейной зависимостью $y = kx$ связаны выходная и входная величины в установившемся режиме. Коэффициент пропорциональности k между выходной и входной величинами представляет собой коэффициент передачи звена. Позиционные звенья обладают свойством самовыравнивания, то есть способностью самостоятельно переходить в новое установившееся состояние при ограниченном изменении входного воздействия.

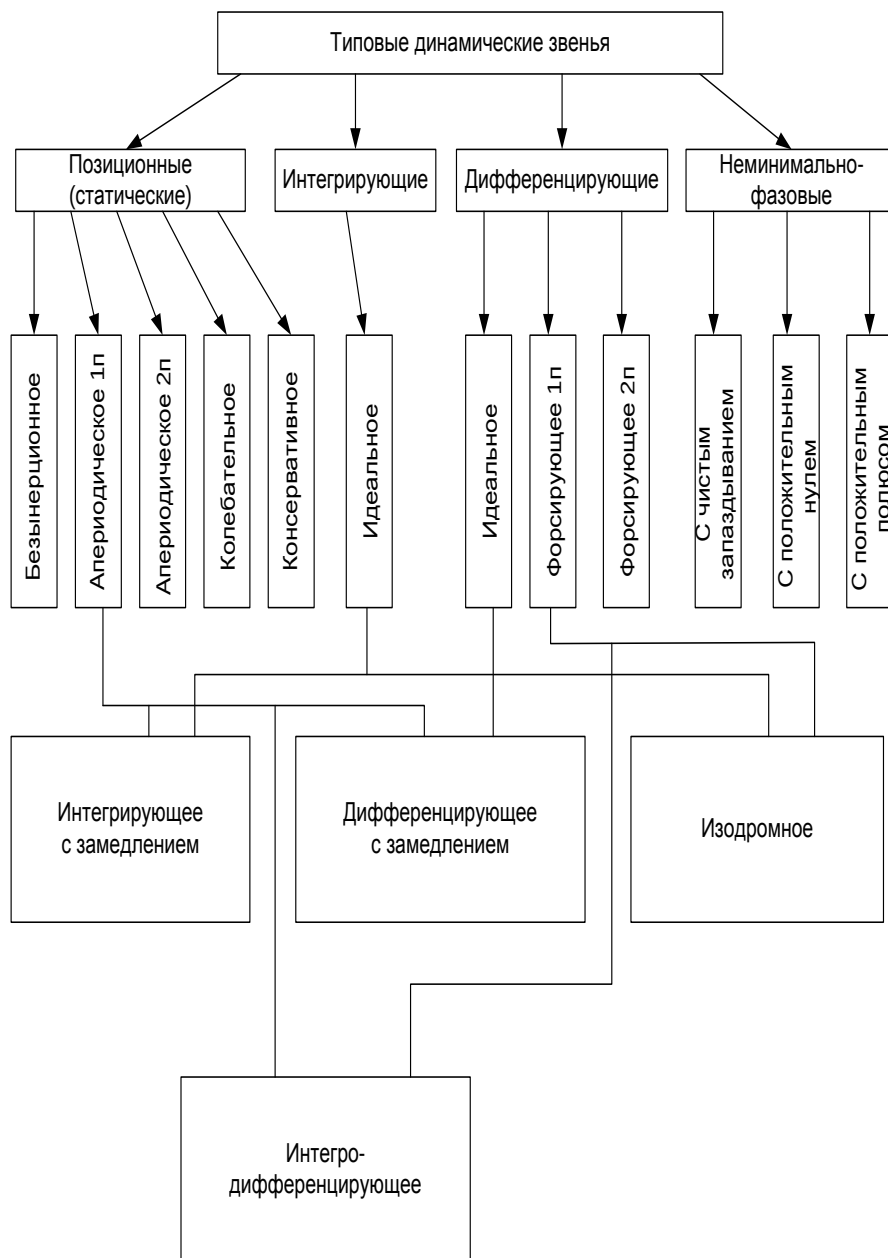


Рис. 3.9. Классификация типовых динамических звеньев

Безынерционное (идеальное усилительное) звено. Это звено не только в статике, но и в динамике описывается алгебраическим уравнением

$$y(t) = kx(t). \quad (3.14)$$

Передаточная функция:

$$W(s) = k. \quad (3.15)$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(j\omega) = k, \quad A(\omega) = k, \quad \psi(\omega) = 0. \quad (3.16)$$

Переходная и импульсная функции:

$$h(t) = k1(t), \quad w(t) = k\delta(t). \quad (3.17)$$

Безынерционное звено является некоторой идеализацией реальных звеньев. В действительности ни одно звено не в состоянии равномерно пропускать все частоты от 0 до ∞ .

Примерами таких безынерционных звеньев могут служить жесткая механическая передача, часовой редуктор, электронный усилитель сигналов на низких частотах и др.

Апериодическое (инерционное) звено первого порядка.
Уравнение и передаточная функция звена:

$$(T_p + 1) y(t) = x(t), \quad W(s) = \frac{1}{Ts + 1}, \quad (3.18)$$

где T - постоянная времени, характеризует степень инерционности звена, т.е. длительность переходного процесса.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega + 1}, \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}, \quad \psi(\omega) = -\arctg T\omega. \quad (3.19)$$

Таким образом, апериодическое звено первого порядка является фильтром низких частот.

Переходная и импульсная функции:

$$h(t) = (1 - e^{-\frac{t}{T}}), \quad w(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}. \quad (3.20)$$

Примерами апериодического звена первого порядка могут служить RC цепочка, нагревательный элемент и др.

Апериодическое (инерционное) звено второго порядка. Дифференциальное уравнение звена имеет вид

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) y(t) = x(t), \quad (3.21)$$

причем предполагается, что $2T_2 \leq T_1$.

В этом случае корни характеристического уравнения вещественные и уравнение (3.21) можно переписать в виде:

$$(T_3 p + 1)(T_4 p + 1) y(t) = x(t), \quad (3.22)$$

где $T_3, T_4 = \frac{T_1}{2} \pm \sqrt{\frac{T_1^2}{4} - T_2^2}$ - новые постоянные времени.

Передаточная функция звена

$$W(s) = \frac{1}{(T_3 s + 1)(T_4 s + 1)} = \frac{1}{(T_3 s + 1)} \frac{1}{(T_4 s + 1)}. \quad (3.23)$$

Из выражения (3.23) следует, что апериодическое звено второго порядка можно рассматривать как комбинацию двух апериодических звеньев первого порядка.

Примерами апериодического звена второго порядка могут служить двойная RC цепочка, электродвигатель постоянного тока и др.

Колебательное звено. Описывается дифференциальным уравнением

$$(T_2^2 p^2 + T_1 p + 1) y(t) = x(t), \quad (3.24)$$

при $T_1 < 2T_2$ корни характеристического уравнения комплексные и уравнение (3.24) переписывают в виде

$$(T^2 p^2 + 2\xi T p + 1) y(t) = x(t), \quad (3.25)$$

где T - постоянная времени, определяющая угловую частоту свободных колебаний $\lambda = 1/T$;

ξ - параметр затухания, лежащий в пределах $0 < \xi < 1$.

Общепринятая запись передаточной функции колебательного звена имеет вид

$$W(s) = \frac{1}{T^2 s^2 + 2\xi Ts + 1}. \quad (3.26)$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика звена:

$$W(j\omega) = \frac{1}{T^2 (j\omega)^2 + 2\xi Tj\omega + 1},$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 - T^2 \omega^2)^2 + 4\xi^2 T^2 \omega^2}}, \quad \psi(\omega) = -\arctg \frac{2\xi T\omega}{1 - T^2 \omega^2}. \quad (3.27)$$

Временные характеристики представляют собой затухающие периодические процессы.

Примерами колебательного звена могут служить электрический колебательный контур, электродвигатель постоянного тока, маятник и др.

Консервативное звено. Консервативное звено является частным случаем колебательного при $\xi=0$. Оно представляет собой идеализированный случай, когда можно пренебречь влиянием рассеяния энергии в звене.

Амплитудно-фазовая характеристика совпадает с вещественной осью. При $0 < \omega < 1/T$ характеристика совпадает с положительной полуосью, а при $\omega > 1/T$ - с отрицательной полуосью.

Временные характеристики соответствуют незатухающим колебаниям с угловой частотой $1/T$.

Интегрирующие звенья

В звеньях интегрирующего типа линейной зависимостью $\frac{dy}{dt} = x$ связаны в установившемся режиме производная выходной величины и входная величина. В этом случае для установившегося режима будет справедливым равенство $y = \int_0^t x(t)dt$, откуда и произошло название этого типа звеньев.

Идеальное интегрирующее звено. Уравнение и передаточная функция имеют вид

$$py(t) = x(t), \quad W(s) = \frac{1}{s}. \quad (3.28)$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(j\omega) = -j\frac{1}{\omega}, \quad A(\omega) = \frac{1}{\omega}, \quad \psi(\omega) = -90^0. \quad (3.29)$$

Переходная и импульсная функции:

$$h(t) = t, \quad w(t) = 1(t). \quad (3.30)$$

Такое звено является идеализацией реальных интегрирующих звеньев.

Примерами идеальных интегрирующих звеньев могут служить операционный усилитель в режиме интегрирования, гидравлический двигатель, емкость и др.

Дифференцирующие звенья

В звеньях дифференцирующего типа линейной зависимостью $y = \frac{dx}{dt}$ связаны в установившемся режиме выходная величина и производная входной, откуда и произошло название этого типа звеньев.

Идеальное дифференцирующее звено. Уравнение и передаточная функция имеют вид

$$y(t) = px(t), \quad W(s) = s. \quad (3.31)$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(j\omega) = j\omega, \quad A(\omega) = \omega, \quad \psi(\omega) = +90^0. \quad (3.32)$$

Переходная и импульсная функции:

$$h(t) = \delta(t), \quad w(t) = \frac{d\delta}{dt}. \quad (3.33)$$

Такое звено является идеализацией реальных дифференцирующих звеньев.

Примерами идеальных дифференцирующих звеньев могут служить операционный усилитель в режиме дифференцирования, тахо-

генератор и др.

Форсирующее (дифференцирующее) звено первого порядка.

Дифференциальное уравнение и передаточная функция

$$y(t) = (\tau p + 1) x(t), \quad W(s) = \tau s + 1, \quad (3.34)$$

где τ - постоянная времени дифференцирования.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(j\omega) = (j\omega\tau + 1), \quad A(\omega) = \sqrt{1 + \tau^2 \omega^2}, \quad \psi(\omega) = \operatorname{arctg} \omega\tau. \quad (3.35)$$

Переходная и импульсная функции:

$$h(t) = 1(t) + \tau\delta(t), \quad w(t) = \delta(t) + \tau \frac{d\delta}{dt}. \quad (3.36)$$

Форсирующее (дифференцирующее) звено второго порядка.

Уравнение и передаточная функция звена:

$$y(t) = (\tau^2 p^2 + 2\xi\tau p + 1)x(t), \quad W(s) = \tau^2 s^2 + 2\xi\tau s + 1. \quad (3.37)$$

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(j\omega) = (1 - \omega^2\tau^2) + j2\xi\omega\tau, \\ A(\omega) = \sqrt{(1 - \tau^2\omega^2)^2 + 4\xi^2\tau^2\omega^2}, \quad \psi(\omega) = \operatorname{arctg} \frac{2\xi\tau\omega}{1 - \tau^2\omega^2}. \quad (3.38)$$

Переходная и импульсная функции:

$$h(t) = \tau^2 \frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\xi\tau\delta(t) + 1(t), \quad w(t) = \tau^2 \frac{d^2\delta}{dt^2} + 2\xi\tau \frac{d\delta}{dt} + \delta(t). \quad (3.39)$$

Важные комбинации типовых звеньев

Дифференцирующее звено с замедлением или инерционное

дифференцирующее звено представляет собой комбинацию идеального дифференцирующего и апериодического звена первого порядка. Уравнение и передаточная функция звена:

$$(T_p + 1) y(t) = p x(t), \quad W(s) = \frac{s}{T_s + 1}. \quad (3.40)$$

$$p(T_p + 1) y(t) = x(t), \quad W(s) = \frac{1}{s(T_s + 1)}. \quad (3.41)$$

Изодромное звено представляет собой комбинацию идеального интегрирующего и форсирующего звена первого порядка. Уравнение и передаточная функция звена:

$$p y(t) = (\tau_p + 1) x(t), \quad W(s) = \frac{\tau s + 1}{s}. \quad (3.42)$$

Интегро-дифференцирующее звено представляет собой комбинацию форсирующего звена первого порядка и апериодического звена первого порядка. Уравнение и передаточная функция звена:

$$(T_p + 1) y(t) = (\tau_p + 1) x(t), \quad W(s) = \frac{\tau s + 1}{T_s + 1}. \quad (3.43)$$

Неминимально-фазовые звенья

Неминимально-фазовые звенья - это такие звенья, которые, в отличие от обычных типовых звеньев, при равенстве амплитудных частотных характеристик имеют большие по абсолютному значению фазовые сдвиги. Одной амплитудной частотной характеристике неминимально-фазовых звеньев может соответствовать несколько различных фазовых частотных характеристик.

Звено с чистым запаздыванием. Это такое звено, у которого выходная величина повторяет входную с некоторой задержкой во времени. Уравнение и передаточная функция звена:

$$y(t) = x(t - \tau), \quad W(s) = e^{-\tau s} \cong 1 - \tau s + \frac{(\tau s)^2}{2!} - \frac{(\tau s)^3}{3!} + \dots, \quad (3.44)$$

где τ - время чистого запаздывания.

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(j\omega) = e^{-j\omega\tau}, A(\omega) = 1, \psi(\omega) = -\tau\omega \text{ [рад]} = \frac{-180}{\pi}\tau\omega \text{ [угл.град]}. \quad (3.45)$$

Переходная и весовая функции:

$$h(t) = 1(t-\tau), \quad w(t) = \delta(t-\tau). \quad (3.46)$$

Разница между этим звеном и безынерционным, как видим, в величине фазы. Амплитудные же характеристики одинаковы.

Примерами таких звеньев могут служить линия связи, трубопровод, транспортер, конвейер и др.

Звено с положительным полюсом. Передаточная функция звена имеет вид

$$W(s) = \frac{1}{Ts - 1}. \quad (3.47)$$

Здесь имеется положительный полюс (корень знаменателя) $s_1 = 1/T$. В полюсе передаточная функция стремится к бесконечности ($W(s) \rightarrow \infty$). Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(j\omega) = \frac{1}{Tj\omega - 1}, \quad A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{T^2\omega^2 + 1}}, \quad \psi(\omega) = -\pi + \arctg \omega T. \quad (3.48)$$

Разница между этим звеном и апериодическим первого порядка, как видим, в величине фазы. Амплитудные же характеристики одинаковы.

Звено с положительным нулем. Передаточная функция звена имеет вид

$$W(s) = (1 - \tau s). \quad (3.49)$$

Здесь имеется положительный нуль (корень числителя) $s_1 = 1/\tau$. В нуле передаточная функция равна нулю ($W(s) = 0$).

Амплитудно-фазовая частотная характеристика:

$$W(j\omega) = (1 - j\omega\tau), \quad A(\omega) = \sqrt{1 + \tau^2\omega^2}, \quad \psi(\omega) = -\arctg \omega\tau. \quad (3.50)$$

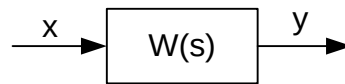
Разница между этим звеном и форсирующим первого порядка только в величине фазы. Амплитудные же характеристики одинаковы.

3.3. Структурные схемы. Способы соединения звеньев

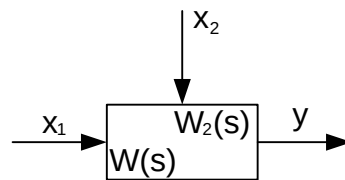
Систему автоматического управления можно рассматривать как комбинацию типовых динамических звеньев. Изображение системы управления в виде совокупности типовых и нетиповых динамических звеньев с указанием связей между ними носит название структурной схемы системы. Звено в этом случае выступает как элементарная структурная единица, преобразователь информации.

Структурные схемы состоят из отдельных структурных элементов. Основными элементами структурных схем являются следующие.

1. Звено с одним входом и одним выходом: $Y(s)=W(s)X(s)$.



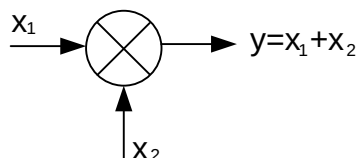
2. Звено с двумя входами и одним выходом (около каждого входа записывается своя передаточная функция): $Y(s)=W_1(s)X_1(s)+W_2(s)X_2(s)$



3. Линия связи и узел (разветвление), стрелка показывает направление передачи информации.



4. Сумматор.



5. Элемент сравнения.



В системах управления встречаются три вида соединений звеньев: **последовательное, параллельное и соединение по схеме с обратной связью.**

Последовательное соединение звеньев изображено на рис.3.10, такое соединение характеризуется тем, что выход предыдущего звена подается на вход последующего.

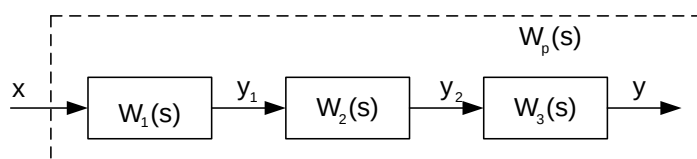


Рис. 3.10. Последовательное соединение звеньев

Выходная величина последовательно соединенных звеньев определяется $Y(s) = W_3(s)Y_2(s) = \dots = W_1(s)W_2(s)W_3(s)X(s)$.

Откуда результирующая передаточная функция равняется

$$W_p(s) = W_1(s)W_2(s)W_3(s).$$

Следовательно, в общем случае можно записать

$$W_p(s) = \prod_{i=1}^n W_i(s), \quad (3.51)$$

где n - число включенных последовательно звеньев.

Таким образом, результирующая передаточная функция последовательно соединенных звеньев равна произведению передаточных функций составляющих звеньев.

Параллельное соединение звеньев изображено на рис.3.11, такое соединение характеризуется тем, что на входы всех звеньев подается одно и то же входное воздействие, а выходная величина определяется суммой выходных величин отдельных звеньев.

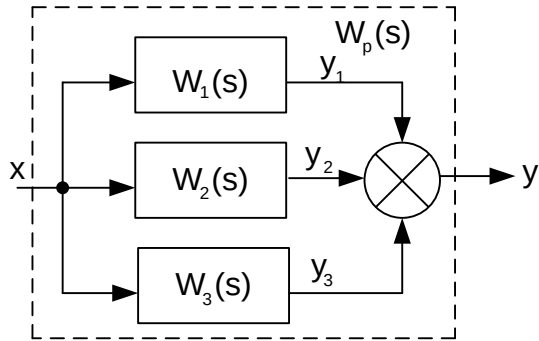


Рис. 3.11. Параллельное соединение звеньев

Выходная величина параллельно соединенных звеньев определяется $y=y_1+y_2+y_3$, т.е.

$$Y(s) = W_1(s)X(s) + W_2(s)X(s) + W_3(s)X(s) .$$

Тогда $W_p(s) = W_1(s) + W_2(s) + W_3(s) .$

В общем случае

$$W_p(s) = \sum_{i=1}^n W_i(s), \quad (3.52)$$

где n - число включенных параллельно звеньев.

Таким образом, результирующая передаточная функция параллельно соединенных звеньев равна сумме передаточных функций составляющих звеньев.

Обратная связь. Такое соединение звеньев изображено на рис.3.12, оно характеризуется тем, что выходной сигнал звена подается на его вход.

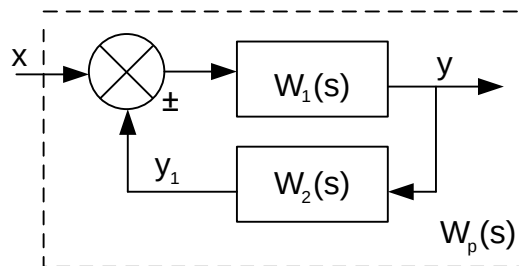


Рис. 3.12. Соединение звеньев по схеме с обратной связью

Обратная связь может быть положительной (ПОС), если сигнал y_1 , снимаемый с выхода второго звена, суммируется с сигналом x на

входе, и отрицательной (ООС), если y_1 вычитается. Кроме того, обратные связи могут быть жесткими и гибкими. Связь называется гибкой, если передаточная функция $W_2(s)$ в установившемся режиме равна нулю.

Для определения результирующей передаточной функции такой комбинации звеньев запишем очевидные соотношения:

$$\begin{cases} Y(s) = W_1(s) \cdot [X(s) \pm Y_1(s)] \\ Y_1(s) = W_2(s)Y(s) \end{cases},$$

где знак “+” относится к положительной, а знак “-” - к отрицательной обратной связи.

Откуда результирующая передаточная функция обратной связи имеет вид

$$W_p(s) = \frac{W_1(s)}{1 \pm W_2(s)W_1(s)}, \quad (3.53)$$

где знак “+” соответствует ООС, знак “-” - ПОС.

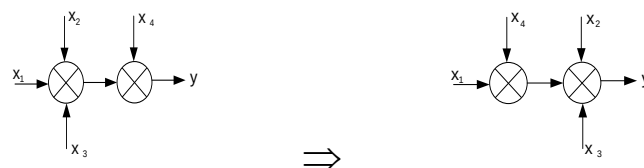
В общем случае, сложная цепь динамических звеньев, образующих систему управления, включает в себя комбинации всех трех рассмотренных случаев, т.е. представляет собой смешанное соединение звеньев. Пользуясь выражениями (3.51), (3.52) и (3.53), можно найти общую результирующую передаточную функцию смешанного соединения звеньев.

В тех случаях, когда структурная схема системы оказывается сложной и содержит перекрестные связи, ее упрощают и сводят к простейшему эквивалентному виду, пользуясь правилами преобразования структурных схем [1,2,7].

Основные правила эквивалентного преобразования структурных схем.

1. Перенос сумматора:

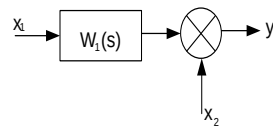
а)



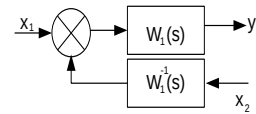
$$y = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$$

$$y = x_1 + x_4 + x_2 + x_3$$

б)



$\Rightarrow$



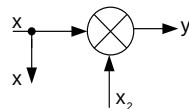
$$y = x_1 W_1(s) + x_2$$

$$y = [x_1 + x_2 W_1^{-1}(s)] W_1(s) =$$

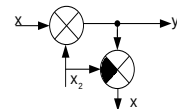
$$x_1 W_1(s) + x_2$$

2. Перенос узла:

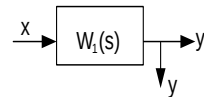
а)



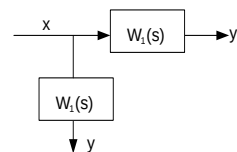
$\Rightarrow$



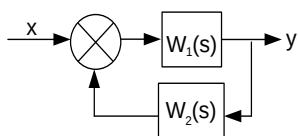
б)



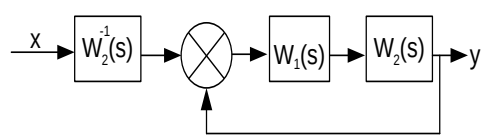
$\Rightarrow$



3. Преобразование к единичной обратной связи.



$\Rightarrow$



$$W_p(s) = \frac{W_1(s)}{1 \pm W_2(s)W_1(s)}$$

$$W_p(s) = \frac{W_1(s)W_2(s)}{1 \pm W_1(s)W_2(s)} \cdot \frac{1}{W_2(s)}$$

3.4. Построение логарифмических частотных характеристик разомкнутой цепи звеньев

Логарифмические частотные характеристики имеют большое

практическое значение. Поэтому рассмотрим их построение. В общем случае частотные характеристики строят по методике, изложенной в разделе 3.1. Однако часто результирующую передаточную функцию смешанного соединения звеньев можно свести к виду

$$W(s) = \frac{k \prod_{j=1}^m W_{Tj}(s)}{s^r \prod_{i=1}^n W_{Ti}(s)}, \quad (3.54)$$

где $W_T(s)$ - передаточная функция типового звена.

В этом случае построение ЛАХ производится по выражению

$$\begin{aligned} L(\omega) &= 20\lg A(\omega) = 20\lg |W(j\omega)| = \\ &= 20\lg k - r \times 20\lg \omega + \sum_{j=1}^m 20\lg |W_{Tj}(j\omega)| - \sum_{i=1}^n 20\lg |W_{Ti}(j\omega)|. \end{aligned}$$

Построение ЛФХ производится по выражению

$$\psi(\omega) = \arg W(j\omega) = -r \times 90^\circ + \sum_{j=1}^m \psi_{Tj}(\omega) - \sum_{i=1}^n \psi_{Ti}(\omega).$$

Таким образом, результирующая ЛАХ определяется суммированием ЛАХ составляющих типовых звеньев, а результирующая ЛФХ - соответственно суммированием ЛФХ составляющих типовых звеньев. Таблицы характеристик типовых звеньев имеются в литературе [1,7].

Асимптотические ЛАХ можно построить непосредственно по виду передаточной функции (3.54) по следующему правилу, состоящему из четырех пунктов.

1. Частотная область разбивается на диапазоны, границы которых определяются сопрягающими частотами, соответствующими по-

стоянным времени передаточной функции:

$$\omega_{\text{сопр}i} = \frac{1}{T_i}.$$

Число сопрягающих частот равняется числу постоянных времени в передаточной функции, а число частотных диапазонов на единицу больше.

2. Первая низкочастотная асимптота ЛАХ, которая проводится в крайнем левом низкочастотном диапазоне, имеет наклон $-(20 \times r)$ дБ/дек и проходит через точку с координатами: $\omega=1 \text{ с}^{-1}$, $L(1)=20 \lg k$ дБ, где r - показатель степени оператора Лапласа s , записанного в знаменателе передаточной функции (3.54).

3. На сопрягающих частотах ЛАХ претерпевает изломы.

3.1. Если сопрягающая частота соответствует постоянной времени T_i , находящейся в знаменателе передаточной функции, то ЛАХ делает излом вниз на $-(20 \times v)$ дБ/дек, где v - порядок типового динамического звена, в которое входит эта постоянная времени T_i .

3.2. Если сопрягающая частота соответствует постоянной времени T_i , находящейся в числителе передаточной функции, то ЛАХ делает излом вверх на $+(20 \times v)$ дБ/дек, где v - порядок типового динамического звена, в которое входит эта постоянная времени T_i .

4. Вторая асимптота проводится до следующей сопрягающей частоты и так далее.

Пример. Построить ЛАХ звена, имеющего следующую передаточную функцию:
$$W(s) = \frac{k(T_3 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

где $k = 100 \text{ с}^{-1}$; $T_1 = 5 \text{ с}$; $T_2 = 0.01 \text{ с}$; $T_3 = 0.5 \text{ с}$.

Решение.

1. Представим передаточную функцию, как комбинацию типовых звеньев:

$$W(s) = \frac{k(T_3 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} = k \frac{1}{s} \cdot \frac{1}{(T_1 s + 1)} \cdot \frac{1}{(T_2 s + 1)} \cdot (T_3 s + 1).$$

2. Находим сопрягающие частоты:

1.

$$\omega_{\text{сопр1}} = 1/T_1 = 0.2 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{\text{сопр2}} = 1/T_2 = 100 \text{ с}^{-1}; \quad \omega_{\text{сопр3}} = 1/T_3 = 2 \text{ с}^{-1}$$

3. Строим ЛАХ.

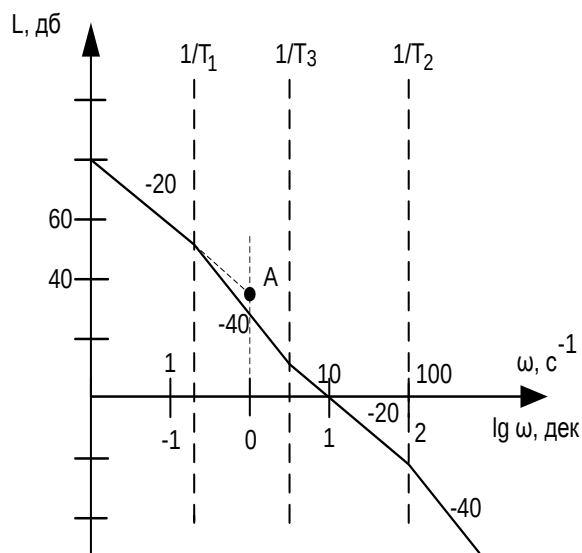


Рис. 3.13. Логарифмическая частотная характеристика звена

3.1. Частотную область разбиваем на четыре диапазона.

3.2. Низкочастотный участок ЛАХ имеет наклон

$-(20 \times r) = -(20 \times 1) = -20 \text{ дБ/дек}$ и проходит через точку с координатами: $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$, $L(1) = 20 \lg k = 40 \text{ дБ}$ (точка A[1,40]).

3.3. На частоте $1/T_1$ ЛАХ делает излом вниз на

$-(20 \times v) = -(20 \times 1) = -20 \text{ дБ/дек}$.

3.4. На частоте $1/T_3$ ЛАХ делает излом вверх на

$(20 \times v) = (20 \times 1) = 20 \text{ дБ/дек}$.

3.5. На частоте $1/T_2$ ЛАХ делает излом вниз на

$-(20 \times v) = -(20 \times 1) = -20 \text{ дБ/дек}$.

Вид полученной ЛАХ приведен на рис. 3.13.

Используя то же правило, по ЛАХ звена можно однозначно определить передаточную функцию.

Пример. Определить передаточную функцию звена, ЛАХ которого имеет вид, представленный на рис. 3.14.

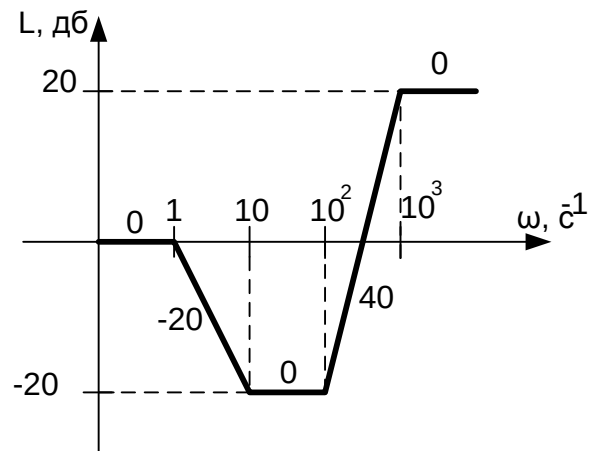


Рис. 3.14. ЛАХ звена

Решение. Передаточная функция имеет вид

$$W(s) = \frac{k(T_2 s + 1)(T_3 s + 1)^2}{s^0 (T_1 s + 1)(T_4 s + 1)^2},$$

где $k = 10^{L(1)/20} = 10^0 = 1 \text{ с}^{-1}$;

$T_1 = 1 \text{ с}$; $T_2 = 0.1 \text{ с}$; $T_3 = 0.01 \text{ с}$; $T_4 = 0.001 \text{ с}$.

При более сложных формах передаточной функции $W(s)$, например, при наличии внутренних обратных связей, построение ЛАХ усложняется. Однако часто можно и сложные выражения приводить к аналогичному виду (3.54), разложив на множители многочлены числителя и знаменателя.

ВОПРОСЫ К РАЗДЕЛУ 3

1. Что такое динамическое звено и его характеристика?

2. Дайте определение основных характеристик.
3. Какие частотные характеристики используются для исследования систем?
4. Почему ЛЧХ нашли большое применение в инженерной практике?
5. По каким признакам классифицируются типовые динамические звенья?
6. Перечислите группы основных типов звеньев.
7. Что представляет собой структурная схема системы управления?
8. Какие способы соединений звеньев используются в системах?
9. Как находятся передаточные функции смешанных соединений звеньев?
10. Каким образом строятся логарифмические частотные характеристики разомкнутой цепи звеньев? Постройте ЛЧХ типовых звеньев.

4. СОСТАВЛЕНИЕ ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

4.1. Дифференциальные уравнения и передаточные функции замкнутых систем управления

Система автоматического управления представляет собой совокупность объекта управления, регулятора и датчика рассогласования. Обобщенная функциональная схема системы управления представлена на рис.4.1.

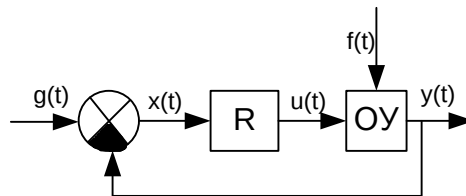


Рис. 4.1. Функциональная схема системы управления

Для того, чтобы получить математическое описание системы управления, необходимо составить по рассмотренной ранее методике линеаризованные уравнения всех элементов, из которых состоит датчик рассогласования, регулятор и объект управления. Таким образом получим систему дифференциальных уравнений, описывающую исследуемую систему управления. Полученная система дифференциальных уравнений путем исключения промежуточных переменных может быть разрешена относительно любой координаты системы управления. Обычно она решается либо относительно рассогласования $x(t)$, т.е. ошибки, либо относительно управляемой величины $y(t)$.

Первый случай встречается чаще, так как исследование изменения ошибки, как правило, является более важным. В этом случае получается дифференциальное уравнение

$$D(p)x(t) = Q(p)g(t) + N(p)f(t). \quad (4.1)$$

Полином $D(p)$ степени n от символа дифференцирования p характеризует свободное движение системы. Он называется **характеристическим полиномом** и может быть представлен в виде

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n, \quad (4.2)$$

где $a_0, \dots, a_n$ в линеаризованной системе представляют собой постоянные коэффициенты.

Полином $Q(p)$ степени m ($m \leq n$) от символа дифференцирования p определяет влияние задающего воздействия $g(t)$ на характер изменения ошибки.

Полином $N(p)$ степени k ($k \leq n$) от символа дифференцирования p определяет влияние возмущающего воздействия $f(t)$ на характер изменения ошибки. В принципе таких возмущений может быть несколько. Однако вследствие линейности действует принцип суперпозиции и достаточно рассмотреть методику учета только одного воздействия; при наличии нескольких возмущений необходимо лишь просуммировать результат.

Из (4.1) вытекает, что ошибка может быть представлена в виде суммы двух составляющих: первая составляющая определяется влиянием задающего воздействия, вторая - возмущающего воздействия.

При решении системы дифференциальных уравнений относительно управляемой величины получается уравнение движения объекта управления при наличии регулятора. Это уравнение получается в результате подстановки выражения для ошибки $x(t) = g(t) - y(t)$ в уравнение (4.1):

$$D(p)y(t) = R(p)g(t) - N(p)f(t), \quad (4.3)$$

где

$$R(p) = D(p) - Q(p).$$

Полином $R(p)$ определяет влияние задающего воздействия $g(t)$ на управляемую величину.

Уравнения (4.1) и (4.3) являются исходными дифференциальными уравнениями замкнутой системы управления. При известных

функциях времени в правых частях уравнений (4.1) и (4.3) они могут быть решены относительно искомых функций времени, т.е. может быть найдено изменение ошибки управления во времени и движение объекта управления.

Таким образом, четверка полиномов $D(p)$, $Q(p)$, $N(p)$, $R(p)$ полностью определяет замкнутую систему управления.

Уравнения, описывающие динамику системы, также как и звена, могут быть представлены в другой форме. Для этого перепишем уравнения (4.1) и (4.3) в операторном виде, перейдя от функций времени к их изображениям по Лапласу.

В результате получим:

$$X(s) = \Phi_{xg}(s)G(s) + \Phi_{xf}(s)F(s), \quad (4.4)$$

$$\text{где } \Phi_{xg}(s) = \frac{Q(s)}{D(s)}; \quad \Phi_{xf}(s) = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

При $f(t)=0$ $\Phi_{xg}(s) = \frac{X(s)}{G(s)}$ - передаточная функция замкнутой системы по ошибке относительно задающего воздействия.

При $g(t)=0$ $\Phi_{xf}(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$ - передаточная функция замкнутой системы по ошибке относительно возмущающего воздействия.

Аналогично:

$$Y(s) = \Phi_g(s)G(s) - \Phi_f(s)F(s), \quad (4.5)$$

$$\text{где } \Phi_g(s) = \frac{R(s)}{D(s)}; \quad \Phi_f(s) = \frac{N(s)}{D(s)}.$$

При $f(t)=0$ $\Phi_g(s) = \frac{Y(s)}{G(s)}$ - передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию, главный оператор системы $\Phi(s)$.

При $g(t)=0$ $\Phi_f(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$ - передаточная функция замкнутой системы по возмущающему воздействию.

Сравнивая уравнения (4.4) и (4.5) видно, что $|\Phi_f(s)| = |\Phi_{xf}(s)|$.

Таким образом, четверка передаточных функций $\Phi_g(s)$, $\Phi_f(s)$, $\Phi_{xg}(s)$, $\Phi_{xf}(s)$ полностью определяет замкнутую систему управления.

Выразим передаточные функции замкнутой системы через передаточные функции ее отдельных элементов. Для этого на основании функциональной схемы системы (рис.4.1) и уравнения (4.3) изобразим структурную схему системы (рис.4.2).

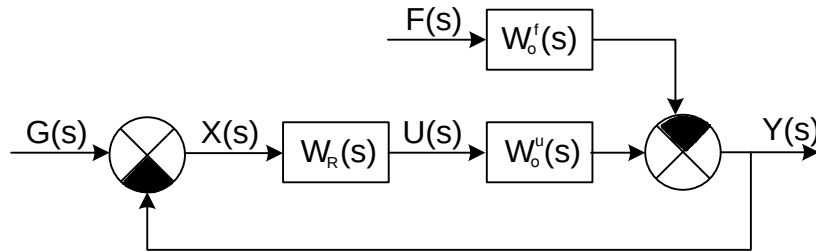


Рис. 4.2. Структурная схема системы управления

$W_R(s)$ - передаточная функция регулятора;

$W_o^u(s)$ - передаточная функция объекта управления по управляющему воздействию;

$W_o^f(s)$ - передаточная функция объекта управления по возмущающему воздействию;

$G(s)$, $F(s)$, $U(s)$, $X(s)$, $Y(s)$ - изображения по Лапласу задающего, возмущающего и управляющего воздействий, рассогласования и управляемой величины.

Если в системе ликвидировать обратную связь, то система из замкнутой превратится в разомкнутую. Звенья, расположенные между выходом сравнивающего устройства и его инверсным входом, образуют разомкнутую систему, передаточная функция которой имеет вид:

$$W(s) = W_R(s) \cdot W_o^u(s). \quad (4.6)$$

Передаточная функция разомкнутой системы $W(s)$ имеет большое значение в классической теории управления, так как методы анализа и синтеза систем основаны на ее использовании.

Найдем передаточные функции замкнутой системы.

1. По задающему воздействию при $f(t)=0$. В этом случае исходная структурная схема системы (рис.4.2) может быть приведена к ви-

ду, изображенному на рис. 4.3.

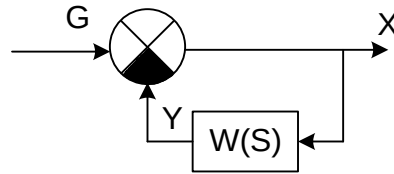


Рис. 4.3. Приведенная структурная схема системы управления

По определению $\Phi_g(s) = \frac{Y(s)}{G(s)}$; $\Phi_{xg}(s) = \frac{X(s)}{G(s)}$, тогда из рис.4.3 следует:

$$\Phi_g(s) = \frac{W(s)}{1 + W(s)}; \quad \Phi_{xg}(s) = \frac{1}{1 + W(s)}. \quad (4.7)$$

2. По возмущающему воздействию при $g(t)=0$. В этом случае исходная структурная схема системы (рис.4.2) может быть приведена к виду, изображенному на рис. 4.4.

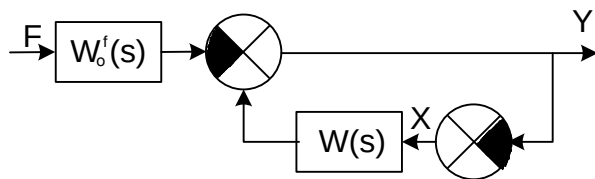


Рис. 4.4. Приведенная структурная схема

По определению $\Phi_f(s) = \frac{Y(s)}{F(s)}$; $\Phi_{xf}(s) = \frac{X(s)}{F(s)}$, тогда из рис.4.4 следует:

$$\Phi_f(s) = \frac{-W_o^f(s)}{1 + W(s)}; \quad \Phi_{xf}(s) = \frac{W_o^f(s)}{1 + W(s)}. \quad (4.8)$$

Таким образом, передаточные функции замкнутой системы определяются передаточной функцией разомкнутой системы.

Важные соотношения, вытекающие из вышеприведенного:

1. $D(p) = 1 + W(s) \Big|_{s=p}$;
2. $\Phi_{xg}(s) = 1 - \Phi_g(s) = 1 - \frac{W(s)}{1 + W(s)} = \frac{1}{1 + W(s)}$;

$$3. W(s) = \frac{\Phi_g(s)}{1 - \Phi_g(s)} ; \quad 4. W(s) = \frac{1 - \Phi_{xg}(s)}{\Phi_{xg}(s)} .$$

Пример. Определить передаточные функции системы, структурная схема которой имеет вид, представленный на рис. 4.5.

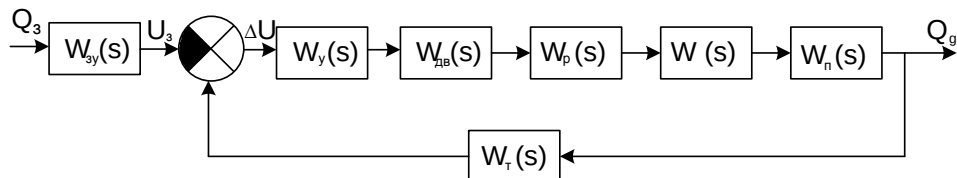


Рис. 4.5. Структурная схема системы управления

Решение: Запишем передаточную функцию разомкнутой системы:

$$W(s) = W_y(s) \cdot W_{дв}(s) \cdot W_p(s) \cdot W_3(s) \cdot W_{п}(s) \cdot W_{т}(s) ,$$

тогда передаточные функции замкнутой системы будут:

$$\Phi_g(s) = \frac{W_{3y}(s) \frac{W(s)}{W_{т}(s)}}{1 + W(s)} ; \quad \Phi_{xg}(s) = \frac{W_{3y}(s)}{1 + W(s)} .$$

4.2. Многомерные системы управления

Многомерные или многосвязные системы - это системы, имеющие несколько управляемых величин, а также несколько задающих и возмущающих воздействий. Многомерная система предполагает наличие многомерного объекта управления (рис.4.6), который характеризуется существованием нескольких входов (точек приложения управляющих и возмущающих воздействий) и нескольких выходов, определяемых управляемыми величинами.

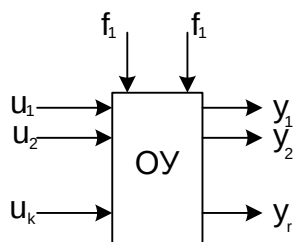


Рис.4.6. Многомерный объект управления

Многомерный объект описывается системой уравнений, которую удобно представлять в матричной форме. В этом случае координатами системы управления являются вектор задающего воздействия $G(t)$, вектор управляемой величины $Y(t)$, вектор управления $U(t)$ и вектор возмущения $F(t)$. При этом

$$G(t) = [g_1(t), g_2(t), \dots, g_m(t)]^T;$$

$$Y(t) = [y_1(t), y_2(t), \dots, y_r(t)]^T;$$

$$U(t) = [u_1(t), u_2(t), \dots, u_k(t)]^T;$$

$$F(t) = [f_1(t), f_2(t), \dots, f_l(t)]^T.$$

Функциональная схема многомерной системы имеет вид, приведенный на рис.4.7.

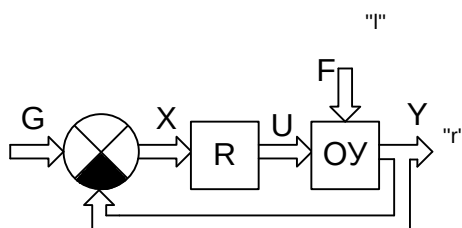


Рис. 4.7. Функциональная схема многомерной системы

Структурная схема изображена на рис.4.8.

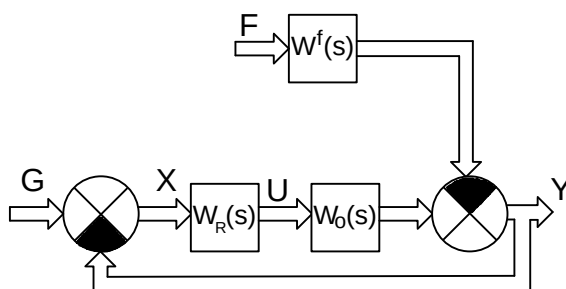


Рис. 4.8. Структурная схема многомерной системы

Здесь $W_R(s)$, $W_0(s)$, $W^f(s)$ - матрицы передаточных функций регулятора и объекта управления системы.

Матричное дифференциальное уравнение линейной многомерной системы, разрешенное относительно управляемой величины имеет вид:

$$D(p)Y(t) = R(p)G(t) - N(p)F(t), \quad (4.9)$$

где

$$D(p) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2r} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{r1} & a_{r2} & \dots & a_{rr} \end{bmatrix}_{r \times r} -$$

квадратная матрица коэффициентов системы (размерность $r \times r$, где r - число управляемых величин), характеризующая свободное поведение системы;

$$R(p) = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{r1} & b_{r2} & \dots & b_{rm} \end{bmatrix}_{r \times m} -$$

прямоугольная матрица коэффициентов системы (размерность $r \times m$, где m - число задающих воздействий), связывающая задающее воздействие с управляемой величиной;

$$N(p) = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1l} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rl} \end{bmatrix}_{r \times l} -$$

прямоугольная матрица коэффициентов системы (размерность

$r \times l$, где l - число возмущающих воздействий), связывающая возмущающее воздействие с управляемой величиной.

Подвергнув уравнение (4.9) преобразованию по Лапласу, получим матричное операторное уравнение, решение которого определяет изображение управляемой величины

$$Y(s) = \Phi(s)G(s) - \Phi_f(s)F(s), \quad (4.10)$$

где

$$\Phi(s) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}(s) & \Phi_{12}(s) & \dots & \Phi_{1m}(s) \\ \Phi_{21}(s) & \Phi_{22}(s) & \dots & \Phi_{2m}(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{r1}(s) & \Phi_{r2}(s) & \dots & \Phi_{rm}(s) \end{bmatrix}_{r \times m} -$$

матрица передаточных функций замкнутой системы;

$$\Phi^f(s) = \begin{bmatrix} \Phi_{11}^f(s) & \Phi_{12}^f(s) & \dots & \Phi_{1l}^f(s) \\ \Phi_{21}^f(s) & \Phi_{22}^f(s) & \dots & \Phi_{2l}^f(s) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \Phi_{r1}^f(s) & \Phi_{r2}^f(s) & \dots & \Phi_{rl}^f(s) \end{bmatrix}_{r \times l} -$$

матрица передаточных функций замкнутой системы по возмущающему воздействию.

Здесь $\Phi_{ij}(s)$ - передаточная функция замкнутой системы, связывающая i -ый выход с j -тым входом системы.

Аналогичным образом составляется матричное дифференциальное уравнение, разрешенное относительно ошибки, и определяется изображение рассогласования.

ВОПРОСЫ К РАЗДЕЛУ 4

1. Как получить математическое описание замкнутой системы управления?
2. Напишите в общем виде исходные дифференциальные

уравнения замкнутой системы управления.

- 3. Что такое характеристический полином системы?*
- 4. Перечислите передаточные функции замкнутой системы.*
- 5. Что представляет собой передаточная функция разомкнутой системы?*
- 6. Выразите передаточные функции замкнутой системы через передаточную функцию разомкнутой системы.*
- 7. Каким образом по передаточной функции разомкнутой системы можно определить ее характеристический полином?*
- 8. Дайте определение многомерной системы управления и многомерного объекта управления.*

5. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

5.1. Понятие устойчивости систем

Любая система должна быть прежде всего работоспособной. Это значит, что она должна нормально функционировать при действии на нее различных внешних возмущений. Иными словами, система должна работать устойчиво.

Понятие устойчивости системы управления связано со способностью возвращаться в состояние равновесия после исчезновения внешних воздействий, которые вывели ее из этого состояния. Данное определение является физическим определением понятия устойчивости. Наглядно устойчивость равновесия иллюстрируется на рис.5.1. Здесь положение шарика определяется координатой y . Выведем шарик из положения равновесия в точку y_0 и отпустим его.

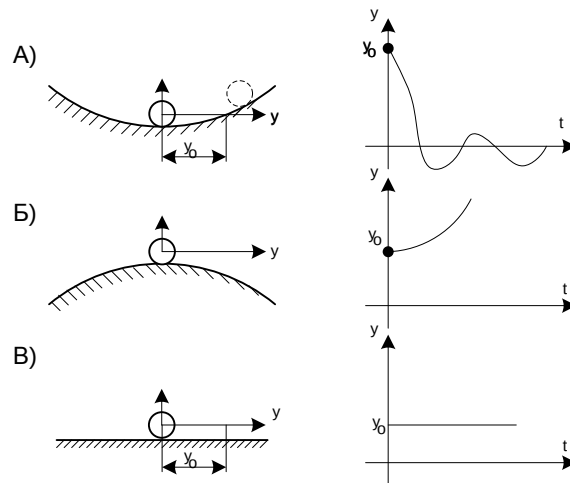


Рис. 5.1. Иллюстрация понятия устойчивости

Из анализа изменения координаты $y(t)$ следует:

- а) $y(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, устойчивое положение шарика;
- б) $y(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, неустойчивое положение шарика;
- в) $y(t) = y_0 = \text{const}$ при $t \geq 0$, нейтральное или безразличное положение

ние шарика.

Таким образом, устойчивость характеризуется свободным поведением системы.

Общая теория устойчивости разработана А.М. Ляпуновым. Сформулируем математическое определение устойчивости, используя следующее геометрическое представление (рис.5.2).

Система управления n -ого порядка описывается дифференциальным уравнением в форме Коши:

$$\frac{dX}{dt} = F(X, t) \quad , \quad \text{где} \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (5.1)$$

Состояние системы можно изобразить точкой в пространстве, координатами которого являются переменные системы $(x_1, x_2, \dots, x_n)$. Начало координат этого пространства соответствует равновесному состоянию системы. Тогда решение уравнения (5.1) можно рассматривать как некоторую траекторию $X(t)$ в пространстве переменных $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

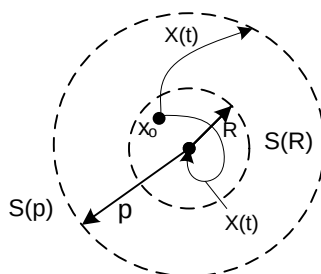


Рис.5.2. Траектории движения, соответствующие устойчивой и неустойчивой системам

Положение равновесия в начале координат может быть, по Ляпунову, устойчиво, асимптотически устойчиво и неустойчиво.

Положение устойчиво, если для любого $R < r$ существует такое $r \leq R$, что траектория $X(t)$, начинающаяся в точке x_0 сферической области $S(r)$, все время остается в сферической области $S(R)$. Иначе говоря, траектория $X(t)$, начинающаяся внутри области $S(r)$, никогда не достигает сферы $S(R)$.

Положение асимптотически устойчиво, если оно устойчиво и, сверх того, существует такое $R < \rho$, что траектория $X(t)$, начинающаяся в сферической области $S(R)$, стремится к началу координат при неограниченном росте времени.

Положение неустойчиво, если для некоторого (хотя бы одного) $R < \rho$ и любого r , каким бы малым r не выбиралось, всегда найдется внутри сферической области $S(r)$ такая точка x_0 , что траектория $X(t)$, начинающаяся в этой точке, достигает за конечное время сферы $S(R)$.

Таким образом, чтобы решить вопрос об устойчивости системы, необходимо определить траекторию ее движения в пространстве состояний, то есть найти решение дифференциального уравнения, которое описывает исследуемую систему.

5.2. Устойчивость линейных систем

Устойчивость линейной системы можно исследовать по характеру изменения только одной любой ее переменной. Линейная система называется устойчивой, если ее выходная координата остается ограниченной при любых ограниченных по абсолютной величине входных воздействиях. Устойчивая линейная система должна переходить от одного установившегося состояния к другому при изменении задающего воздействия. Устойчивость линейной системы определяется ее характеристиками и не зависит от действующих воздействий.

Таким образом, для определения устойчивости линейной системы требуется найти изменение ее управляемой величины. Структурная схема линейной системы приведена на рис.5.3, где $W(s)$ - передаточная функция разомкнутой системы.

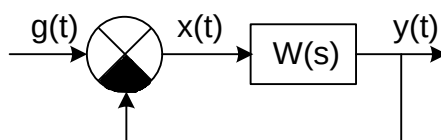


Рис. 5.3. Структурная схема линейной системы

Процессы в системе (рис.5.3), как следует из (4.3), описываются дифференциальным уравнением вида

$$D(p)y(t) = R(p)g(t). \quad (5.2)$$

Решение уравнения (5.2) состоит из двух составляющих:

$$y(t) = y_{\text{в}}(t) + y_{\text{н}}(t), \quad (5.3)$$

где $y_{\text{в}}(t)$ - вынужденное решение;

$y_{\text{н}}(t)$ - переходная составляющая.

Система устойчива, если переходная составляющая решения стремится к нулю при времени, стремящемся к бесконечности. Это означает, что если система выведена из состояния равновесия каким-либо возмущением, то она возвращается в исходное состояние после устранения этого возмущения, т.е. устойчивость системы определяется ее свободным движением. На рис.5.4 изображены возможные виды изменения переходной составляющей решения уравнения (5.2) при скачкообразном задающем воздействии.

Если $y_{\text{н}}(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$, то система устойчивая;

если $y_{\text{н}}(t) \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$, то система неустойчивая;

если $y_{\text{н}}(t) = \text{const}$ при $t \rightarrow \infty$, то система нейтральная.

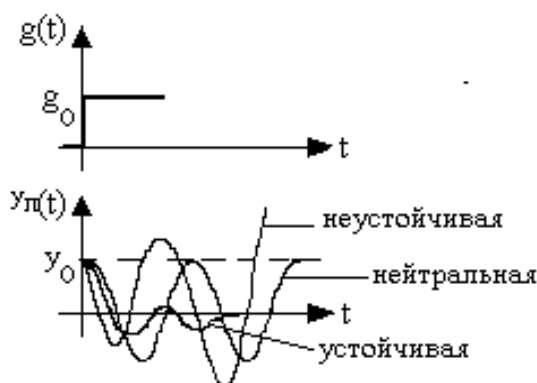


Рис. 5.4. Возможные виды переходной составляющей

Переходная составляющая решения уравнения (5.2) зависит от корней характеристического уравнения, которое получается путем приравнивания характеристического полинома к нулю:

$$D(p) = 0, \quad (5.4)$$

где $D(p) = 1 + W(s) \Big|_{s=p}$.

Переходная составляющая решения

$$y_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}, \quad (5.5)$$

где p_i - корни характеристического уравнения (полюсы системы);

c_i - постоянные интегрирования.

Действительному корню характеристического уравнения p_i в выражении (5.5) соответствует слагаемое

$$y_{ni}(t) = c_i e^{p_i t}.$$

Если $p_i < 0$, то переходная составляющая с ростом времени стремится к нулю, если $p_i > 0$, то эта составляющая неограниченно возрастает.

Паре комплексно-сопряженных корней уравнения (5.4) соответствует слагаемое

$$y_{ni}(t) = A_i e^{\alpha_i t} \sin(\beta_i t + \varphi_i),$$

где $\alpha_i \pm j\beta_i$ - корни характеристического уравнения;

A_i, φ_i - постоянные интегрирования.

При этом переходная составляющая с ростом времени стремится к нулю, если вещественные части корней отрицательны, в противном случае амплитуда колебаний переходной составляющей возрастает.

Пара мнимых корней характеристического уравнения позволяет получить переходную составляющую в виде колебаний с постоянной амплитудой:

$$y_{ni}(t) = A_i \sin(\beta_i t + \varphi_i).$$

Таким образом, для устойчивости системы необходимо и достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения имели отри-

цательные вещественные части, или эти корни на плоскости комплексного переменного были расположены слева от мнимой оси (рис.5.5).

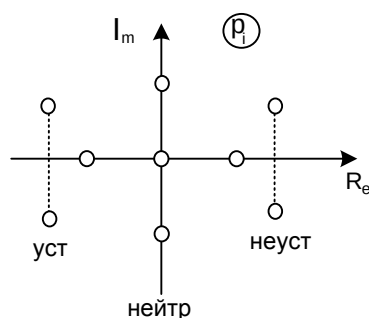


Рис. 5.5. Комплексная плоскость корней характеристического уравнения

Если корни характеристического уравнения расположены на мнимой оси, то система находится на границе устойчивости. При этом возможны два случая: корень в начале координат и пара мнимых корней. Нулевой корень появляется, когда свободный член характеристического уравнения равен нулю. В этом случае границу устойчивости называют апериодической. Если остальные корни этого уравнения имеют отрицательные вещественные части, то система устойчива не относительно выходного сигнала, а относительно его производной, выходной сигнал в установившемся режиме имеет произвольное значение. Такие системы называют нейтрально устойчивыми. В том случае, когда характеристическое уравнение имеет пару мнимых корней, границу устойчивости называют колебательной.

Если хотя бы один из корней лежит в правой полуплоскости комплексной плоскости корней характеристического уравнения, то система неустойчивая.

Вычисление корней характеристического уравнения высокого порядка затруднительно. Поэтому для исследования устойчивости систем разработаны критерии (правила), позволяющие судить о расположении корней на комплексной плоскости без их расчета. Прежде чем воспользоваться для оценки устойчивости тем или иным крите-

рием, следует проверить выполнение необходимого условия устойчивости.

Необходимым, но недостаточным условием устойчивости системы является положительность (отрицательность) всех коэффициентов характеристического уравнения системы

$$a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n = 0, \quad (5.6)$$

т.е. соблюдение условия $a_i > 0$ для всех i от 0 до n , где n - порядок системы.

5.3. Алгебраические критерии устойчивости

Алгебраические критерии позволяют непосредственно по коэффициентам характеристического уравнения судить об устойчивости систем. Различные формы таких критериев рассматриваются в курсе высшей алгебры. В теории управления наибольшее применение из алгебраических критериев устойчивости получили критерий Рауса и критерий Гурвица.

Критерий Рауса.

Линейная система, характеристический полином которой равен

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n,$$

где $a_0 > 0$, устойчива, если положительны все элементы первого столбца следующей таблицы

a_0	a_2	a_4	a_6	...
a_1	a_3	a_5	a_7	...
c_{31}	c_{32}	c_{33}	c_{34}	...
c_{41}	c_{42}	c_{43}	c_{44}	...
c_{51}	c_{52}	c_{53}	c_{54}	...
...	...	...	...	...

(5.7)

В первой строке таблицы Рауса расположены четные коэффициенты характеристического полинома, во второй - нечетные. Если степень характеристического полинома - четное число, то последний элемент второй строки равен нулю. Третья и последующие строки определяются следующим образом:

$$c_{ij} = c_{i-1,1} \times c_{i-2,j+1} - c_{i-2,1} \times c_{i-1,j+1}; \quad c_{i,L} = 0;$$

$$i = 3, 4, \dots, n+1; \quad j = 1, 2, \dots, L-1; \quad L = [0.5 \times n] + 1.$$

Знак $[]$ означает целую часть числа.

Критерий Гурвица.

Линейная система, характеристический полином которой равен

$$D(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n,$$

где $a_0 > 0$, устойчива, если положительны n главных определителей матрицы Гурвица:

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & a_7 & \dots \\ a_0 & a_2 & a_4 & a_6 & \dots \\ 0 & a_1 & a_3 & a_5 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & a_n \end{bmatrix} \quad (5.8)$$

Порядок составления матрицы Гурвица следующий. На главной диагонали записываются все коэффициенты, начиная с первого. Далее заполняются строки: четными коэффициентами по порядку, если на главной диагонали стоит четный коэффициент, и нечетными, если на главной диагонали стоит нечетный коэффициент. Если какой-либо коэффициент отсутствует, то вместо него заносится нуль.

Для оценки устойчивости системы необходимо вычислить определители Гурвица Δ_i ($i = 1, 2, \dots, n$), которые получают из матрицы (5.8) путем отчеркивания равного числа строк и столбцов в левом верхнем углу матрицы.

Система устойчива, если $\Delta_i > 0$ для всех $i = 1, 2, \dots, n$.

Последний определитель Гурвица, как видно из приведенной выше матрицы, равен

$$\Delta_n = a_n \times \Delta_{n-1}.$$

Поэтому его положительность сводится при $\Delta_{n-1} > 0$ к условию $a_n > 0$,

Для систем первого и второго порядка критерий Гурвица сводится просто к положительности коэффициентов a_i .

Если определитель $\Delta_n=0$, то система находится на границе устойчивости. Возможны два случая: апериодическая граница устойчивости, если свободный член характеристического уравнения равен нулю, что соответствует нейтрально устойчивой системе; колебательная граница устойчивости, если определитель $\Delta_{n-1}=0$. Из условия $\Delta_{n-1}=0$ можно определить параметры, при которых система находится на границе устойчивости.

Пример. Передаточная функция разомкнутой системы задана в виде: $W(s) = \frac{k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$. Исследовать устойчивость системы.

Решение. Характеристическое уравнение замкнутой системы

$$D(p)=0, \text{ где } D(p)=1+W(s)\big|_{s=p}.$$

Откуда следует

$$p(T_1p+1)(T_2p+1)+k=0.$$

Раскрыв скобки, получим

$$T_1T_2p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p + k = 0.$$

Тогда имеем: $a_0 = T_1 T_2$; $a_1 = (T_1 + T_2)$; $a_2 = 1$; $a_3 = k$.

Коэффициенты характеристического уравнения положительны.

Составляем матрицу Гурвица

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_3 & 0 \\ a_0 & a_2 & 0 \\ 0 & a_1 & a_3 \end{bmatrix}$$

и найдем определители этой матрицы. Для устойчивости системы все они должны быть положительными:

$$\Delta_1 = a_1, \text{ откуда } (T_1 + T_2) > 0;$$

$$\Delta_2 = a_1 \times a_2 - a_0 \times a_3, \text{ откуда } (T_1 + T_2) - kT_1T_2 > 0;$$

$$\Delta_3 = a_1 \times a_2 \times a_3 - a_0 \times a_3^2 = a_3(a_1 \times a_2 - a_0 \times a_3), \text{ откуда } a_3 > 0, \text{ то есть } k > 0.$$

Условие устойчивости по критерию Гурвица получает вид

$$(T_1 + T_2) > kT_1T_2 \quad \text{или} \quad k < \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right).$$

Границы устойчивости:

1) $a_n = 0, \quad k = 0;$

2) $\Delta_{n-1} = 0, \quad k_{\text{гр}} = \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right);$

3) $a_0 = 0, \quad T_1T_2 = 0.$

Эти три границы устойчивости можно изобразить графически в пространстве параметров k, T_1, T_2 и найти области устойчивости системы.

Найдем сначала область устойчивости системы по одному параметру k (общий коэффициент передачи разомкнутой системы). Пространство параметров здесь одна прямая линия, а границы устойчивости - точки на ней: $k = 0$ и $k = k_{\text{гр}}$ (рис.5.6). Область устойчивости лежит между этими точками.

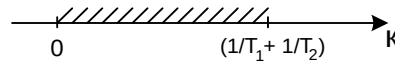


Рис. 5.6. Область устойчивости по одному параметру

Те же границы устойчивости системы можно построить на плоскости двух параметров, например: k и T_1 (рис.5.7). Первая граница $k = 0$ лежит на оси T_1 . Вторая граница $\frac{1}{T_1} = k - \frac{1}{T_2}$ имеет вид гиперболы с асимптотами $k = 0$ и $k = \frac{1}{T_2}$. Третья граница $T_1 = 0$ совпадает с осью k . Штриховка границ сделана в сторону области устойчивости.

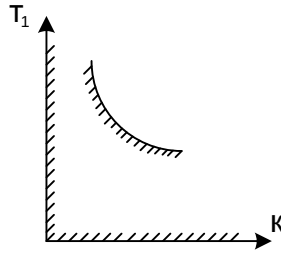


Рис. 5.7. Область устойчивости по двум параметрам

Как видно, при увеличении постоянных времени T_1 и T_2 область устойчивости сужается. Отрицательно влияет на устойчивость также и увеличение общего коэффициента передачи разомкнутой системы k . При любых заданных T_1 и T_2 существует свое граничное значение общего коэффициента передачи $k_{гр}$, после чего система становится неустойчивой.

Далее можно построить область устойчивости и в пространстве трех параметров k , T_1 , T_2 . Границами устойчивости здесь будут являться три координатные плоскости и криволинейная поверхность, сечениями которой как в вертикальных так и в горизонтальных плоскостях будут гиперболы.

5.4. Частотные критерии устойчивости

Частотные критерии устойчивости базируются на принципе аргумента. Рассмотрим этот принцип, для чего запишем выражение для характеристического вектора, которое получим из характеристического полинома системы (4.2), предварительно разложенного на множители, путем замены p на $j\omega$:

$$D(j\omega) = a_n(j\omega - p_1)(j\omega - p_2)...(j\omega - p_n), \quad (5.9)$$

где p_i - корни характеристического уравнения (полюсы системы).

Определим изменение аргумента вектора $D(j\omega)$ при изменении частоты ω от $-\infty$ до $+\infty$

$$\Delta \arg D(j\omega) = \sum_{i=1}^n \arg(j\omega - p_i) \text{ при } -\infty \leq \omega \leq +\infty.$$

Если корень характеристического уравнения p_i расположен на комплексной плоскости слева от мнимой оси, то вектор $(j\omega - p_i)$ поворачивается на угол π , если этот корень находится на комплексной плоскости справа от мнимой оси, то вектор $(j\omega - p_i)$ поворачивается на угол $-\pi$. Допустим, что m корней характеристического уравнения расположены справа от мнимой оси, а остальные $n-m$ корней - слева. Тогда изменение аргумента характеристического вектора равно

$$\Delta \arg D(j\omega) = (n-m)\pi \text{ при } -\infty \leq \omega \leq +\infty.$$

В устойчивой системе $m=0$, и изменение аргумента характеристического вектора получается следующим:

$$\Delta \arg D(j\omega) = n \frac{\pi}{2} \text{ при } 0 \leq \omega \leq +\infty. \quad (5.10)$$

Критерий устойчивости Михайлова.

Из выражения (5.10) следует критерий устойчивости Михайлова, согласно которому изменение аргумента характеристического вектора определяется по годографу вектора, записанному в виде

$$D(j\omega) = X(\omega) + jY(\omega) = D(\omega)e^{j\psi(\omega)}, \quad (5.11)$$

где $X(\omega)$ и $Y(\omega)$ действительная и мнимая части характеристического вектора, а $D(\omega)$ и $\psi(\omega)$ его модуль и аргумент.

Формулировка критерия. Для устойчивости линейной системы n -го порядка необходимо и достаточно, чтобы изменение аргумента функции $D(j\omega)$ при изменении ω от 0 до ∞ равнялось бы $n \frac{\pi}{2}$.

Другими словами, система устойчива, если годограф характеристического вектора (кривая Михайлова), начинаясь на положительной

части действительной оси, обходит последовательно в положительном направлении (против часовой стрелки) n квадрантов, где n - порядок характеристического уравнения системы.

На рис.5.8 приведены примеры годографов для устойчивой и неустойчивой систем.

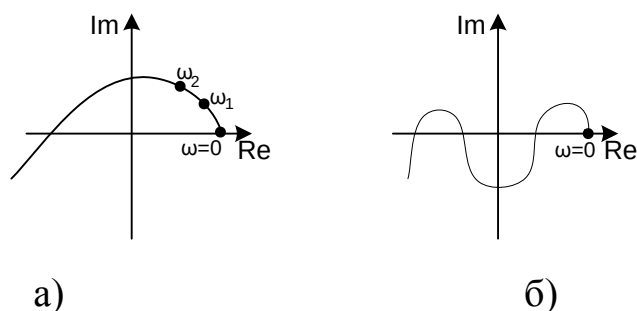


Рис. 5.8. Кривая Михайлова:

а - устойчивой системы 3-го порядка; б - неустойчивой системы

Если годограф проходит через начало координат, то система находится на границе устойчивости. В этом случае

$$X(\omega) = 0 \text{ и } Y(\omega) = 0. \quad (5.12)$$

Из этих уравнений можно определить значения параметров, при которых система находится на границе устойчивости.

Пример. Исследуем на устойчивость систему, рассмотренную в предыдущем примере, характеристический полином которой имеет вид: $D(p) = T_1 T_2 p^3 + (T_1 + T_2)p^2 + p + k$.

Решение. Найдем годограф характеристического вектора

$$D(j\omega) = T_1 T_2 (j\omega)^3 + (T_1 + T_2)(j\omega)^2 + j\omega + k.$$

Откуда

$$\operatorname{Re} D(j\omega) = X(\omega) = k - (T_1 + T_2)\omega^2;$$

$$\operatorname{Im} D(j\omega) = Y(\omega) = \omega - T_1 T_2 \omega^3.$$

Для того, чтобы система 3-го порядка была устойчива, кривая

Михайлова должна последовательно проходить три квадранта (рис.5.9).

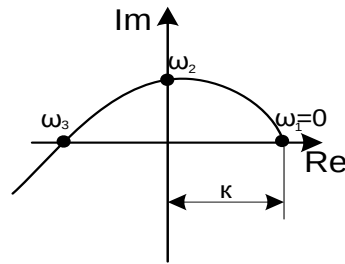


Рис. 5.9. Кривая Михайлова

Найдем условие устойчивости из требования чередования корней

$$0 = \omega_1 < \omega_2 < \omega_3.$$

Корень ω_2 находится из уравнения $X(\omega)=0$, откуда

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{T_1 + T_2}}.$$

Отсюда первое условие устойчивости: $k > 0$.

Корень ω_3 находится из уравнения $Y(\omega)=0$, откуда

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{1}{T_1 T_2}}.$$

Подставляя эти значения в требуемое условие $\omega_2 < \omega_3$, получаем второе условие устойчивости системы

$$k < \left(\frac{1}{T_1} + \frac{1}{T_2} \right),$$

которое, конечно, совпадает с полученным ранее условием устойчивости по критерию Гурвица.

Критерий устойчивости Найквиста.

На практике более широкое по сравнению с критерием Михайлова применение нашел частотный критерий Найквиста, который позволяет судить об устойчивости системы по частотным характеристикам разомкнутой системы. Рассмотрим случай, когда разомкнутая система устойчива и не содержит интегрирующих звеньев. Введем

вектор

$$F(j\omega) = 1 + W(j\omega) = \frac{L(j\omega) + N(j\omega)}{L(j\omega)}, \quad (5.13)$$

где $W(j\omega) = \frac{N(j\omega)}{L(j\omega)}$ - частотная передаточная функция разомкнутой системы.

Числитель (5.13) является характеристическим вектором замкнутой системы, а знаменатель - характеристическим вектором разомкнутой системы. Определим изменение аргумента вектора $F(j\omega)$ при изменении частоты ω от 0 до $+\infty$ для случая, когда замкнутая система устойчива:

$$\Delta \arg F(j\omega) = \Delta \arg [L(j\omega) + N(j\omega)] - \Delta \arg L(j\omega) = 0 \quad \text{при } 0 \leq \omega \leq +\infty.$$

Таким образом, если разомкнутая и замкнутая системы устойчивы, то изменение аргумента вектора $F(j\omega)$ равно нулю, следовательно, его годограф не охватывает начала координат. В противном случае, когда годограф $F(j\omega)$ охватывает начало координат, изменение его аргумента не равно нулю и система в замкнутом состоянии неустойчива. Очевидно, что об изменении аргумента вектора $F(j\omega)$ удобнее судить по годографу частотной характеристики разомкнутой системы, т.е. по ее амплитудно-фазовой частотной характеристике. Действительно, изменение аргумента вектора $F(j\omega)$ будет равно нулю, если АФЧХ разомкнутой системы не охватывает точку с координатами $(-1, j0)$.

Если система содержит r интегрирующих звеньев, число r которых определяет степень астатизма системы, то начальное значение фазовой частотной характеристики равно $-r\frac{\pi}{2}$, а амплитудной частотной — бесконечности, система в разомкнутом состоянии нейтральна. В таких астатических системах для удобства оценки устойчивости АФЧХ разомкнутой системы дополняют дугой бесконечного радиуса, начинающейся на положительной вещественной полуоси комплексной плоскости. Формулировка критерия устойчивости при этом не изменяется.

Если АФЧХ разомкнутой системы проходит через точку с коор-

динатами $(-1, j0)$, то система в замкнутом состоянии находится на границе устойчивости.

Аналогичным образом доказывается критерий Найквиста и для случая, когда разомкнутая система неустойчива.

Формулировка критерия.

1. Если разомкнутая система устойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы не охватывала точку с координатами $(-1, j0)$.

2. Если разомкнутая система неустойчива, то для устойчивости замкнутой системы необходимо и достаточно, чтобы амплитудно-фазовая частотная характеристика разомкнутой системы охватывала точку с координатами $(-1, j0)$ и при изменении частоты от 0 до ∞ обворачивалась вокруг нее против часовой стрелки m раз, где m - число полюсов разомкнутой системы с положительной вещественной частью.

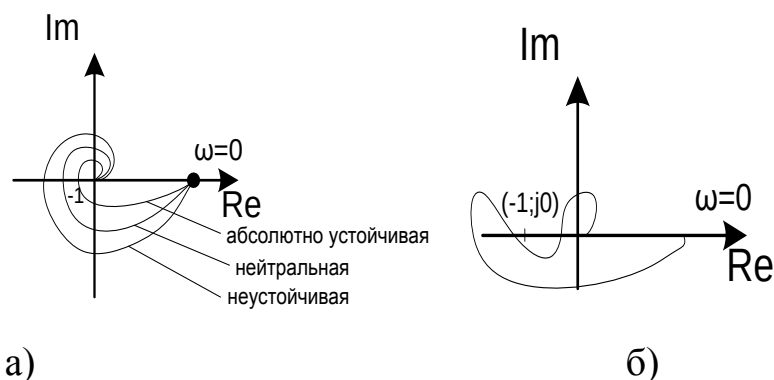


Рис.5.10. АФЧХ статических разомкнутых систем

Графики на рис.5.10,а соответствуют абсолютно устойчивой, нейтральной и неустойчивой системам. Система, АФЧХ разомкнутой цепи которой пересекает вещественную ось только справа от точки с координатами $(-1, j0)$, называется абсолютно устойчивой. В таких системах неустойчивость может наступить только при увеличении общего коэффициента передачи разомкнутой цепи.

Если АФЧХ разомкнутой системы (рис.5.10,б) пересекает вещественную ось и слева от точки с координатами $(-1, j0)$, но при этом

число положительных (сверху вниз) переходов характеристики через ось абсцисс левее точки (-1) равняется числу отрицательных переходов (снизу вверх), то систему называют условно устойчивой. Неустойчивой такая система может быть как при увеличении, так и при уменьшении общего коэффициента передачи разомкнутой цепи.

Если передаточная функция разомкнутой системы содержит в своем составе интегрирующие звенья, то АФЧХ начинается в бесконечности (рис.5.11).

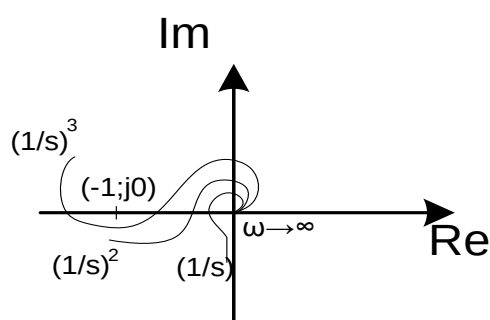


Рис.5.11. АФЧХ астатических разомкнутых систем

Графики на рис.5.11 соответствуют устойчивым системам с первой, второй и третьей степенями астатизма.

5.5. Запасы устойчивости

В процессе работы системы ее параметры (коэффициенты передачи и постоянные времени) из-за изменений внешних условий, колебаний напряжений источников энергии и других причин отличаются от расчетных значений. Если не принять определенных мер, то система может стать неустойчивой. Для исключения этого явления при проектировании следует обеспечить определенные запасы устойчивости системы, которые характеризуют близость амплитудно-фазовой частотной характеристики разомкнутой системы к точке с координатами $(-1, j0)$.

Запасы устойчивости определяют на двух частотах: частоте среза ω_c и критической частоте $\omega_{кр}$. На частоте среза АЧХ разомкнутой системы равна единице, на критической частоте ФЧХ принимает зна-

чение, равное $-\pi$.

Различают запас устойчивости по амплитуде (модулю) и запас устойчивости по фазе.

Запас устойчивости по амплитуде задается некоторой величиной h (рис.5.12,а), на которую должен отличаться модуль АФЧХ разомкнутой системы от единицы на частоте, при которой фаза равняется -180^0 , т.е.

$$h = \left| 1 - A(\omega) \right|_{\psi(\omega) = -180^0}. \quad (5.14)$$

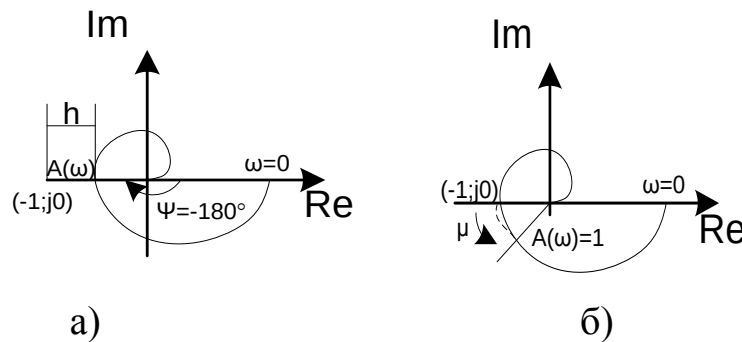


Рис. 5.12. АФЧХ разомкнутой системы

Запас устойчивости по фазе задается некоторым углом μ (рис.5.12,б), на который должна отличаться фаза АФЧХ разомкнутой системы от -180^0 на частоте, при которой модуль равняется единице, т.е.

$$\mu = \left| -180^0 - \psi(\omega) \right|_{A(\omega)=1}. \quad (5.15)$$

В хорошо демпфированных системах запас устойчивости по амплитуде составляет примерно $6 \div 20$ дБ, что составляет $2 \div 10$ в линейном масштабе, а запас по фазе – $30 \div 60^0$.

Чтобы спроектировать систему с заданными запасами устойчивости по модулю h_z и фазе μ_z , строят запретную область вокруг точки с координатами $(-1, j0)$, в которую не должна заходить АФЧХ разомкнутой системы (рис.5.13).

В условно устойчивых системах (кривая 3 на рис.5.14) для оценки устойчивости следует в диапазоне частот, где ЛАХ больше нуля, подсчитать число переходов ЛФХ через прямую -180° . Если число положительных (сверху вниз) переходов через эту прямую равняется числу отрицательных (снизу вверх), то система в замкнутом состоянии устойчива.

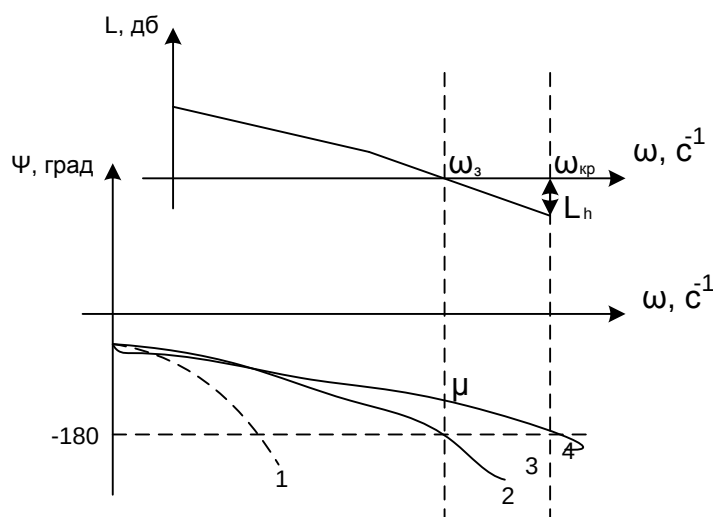


Рис. 5.14. ЛЧХ разомкнутой системы:

- 1 - система неустойчива;
- 2 - система нейтральная;
- 3 - система условно устойчивая;
- 4 - система абсолютно устойчивая

По ЛЧХ разомкнутой системы можно определить запасы устойчивости: запас по фазе μ отсчитывается по ЛФХ на частоте среза ω_c , а запас по амплитуде L_h соответствует значению ЛАХ на критической частоте $\omega_{кр}$, взятому с обратным знаком (кривая 4 на рис.5.14).

Если $\omega_c = \omega_{кр}$, то система находится на границе устойчивости.

Граничное значение общего коэффициента передачи разомкнутой системы $k_{гр}$ определяется из выражения

$$20 \lg k_{гр} = 20 \lg k + L_h, \quad (5.16)$$

где k - общий коэффициент передачи разомкнутой системы.

В заключение дадим некоторые рекомендации, которые следуют из практики проектирования систем. Во-первых, для того чтобы в

системе были обеспечены необходимые запасы устойчивости, наклон ЛАХ в диапазоне частот, в котором расположена частота среза, должен быть равным -20дБ/дек . При наклоне характеристики, равном -40дБ/дек , трудно обеспечить необходимый запас устойчивости по фазе. При наклоне характеристики, равном 0 дБ/дек , получают излишне большие запасы устойчивости по фазе, система становится передемпфированной с длительным переходным процессом. Во-вторых, запас устойчивости по фазе в системе зависит от диапазона частот, в котором ЛАХ разомкнутой системы на частоте среза имеет наклон -20дБ/дек . Чем больше этот диапазон частот, тем выше запас устойчивости по фазе и наоборот.

ВОПРОСЫ К РАЗДЕЛУ 5

- 1. Дайте определение устойчивости системы с физической и математической точек зрения.*
- 2. Какой характер имеет переходный процесс в устойчивой и неустойчивой системах?*
- 3. Сформулируйте необходимое условие устойчивости.*
- 4. Что такое критерии устойчивости?*
- 5. Что такое граница устойчивости? Каким образом при этом расположены корни характеристического уравнения системы на плоскости комплексного переменного?*
- 6. Сформулируйте критерий устойчивости Гурвица.*
- 7. Каким образом по критерию Гурвица определяются границы устойчивости?*
- 8. Сформулируйте критерий устойчивости Найквиста.*
- 9. Что такое запасы устойчивости? Каким образом они определяются по АФЧХ разомкнутой системы?*
- 10. Как определяются запасы устойчивости по ЛЧХ?*

6. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ

6.1. Общие понятия

Качество представляет собой комплексную оценку работы системы управления, включающую устойчивость, точность, быстродействие и зависящую от назначения системы.

Устойчивость системы обеспечивает затухание переходных процессов с течением времени, т.е. обеспечивает принципиальную возможность прихода системы в некоторое установившееся состояние при любом внешнем воздействии. Однако далее требуется, во-первых, чтобы это установившееся состояние было достаточно близко к заданному и, во-вторых, чтобы затухание переходного процесса было достаточно быстрым, а отклонения при этом были бы невелики.

Качество работы любой системы управления в конечном счете определяется величиной ошибки, равной разности между требуемым и действительным значениями управляемой величины: $x(t)=g(t)-y(t)$.

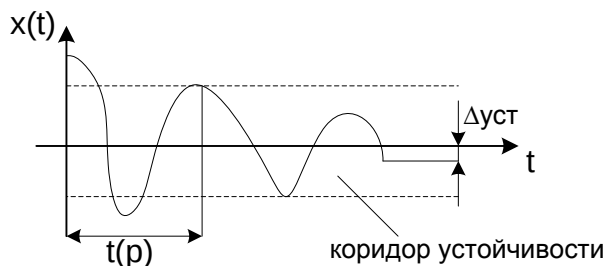


Рис. 6.1. Временная диаграмма изменения ошибки

Характер процесса изменения ошибки, представленного на рис.6.1, позволяет сделать вывод об устойчивости системы, так как процесс сходится, оценить точность работы системы по величине установившейся ошибки $\Delta_{уст} = x(\infty)$ и оценить быстродействие системы по времени регулирования t_p , то есть времени, за которое ошибка системы достигает допустимое значение и при дальнейшем росте времени не превышает его.

Процесс изменения ошибки во времени определяется решением

дифференциального уравнения (4.1) динамики замкнутой системы

$$D(p)x(t) = Q(p)g(t) + N(p)f(t). \quad (6.1)$$

Это решение включает в себя две составляющие

$$x(t) = x_n(t) + x_v(t), \quad (6.2)$$

где $x_n(t)$ - общее решение однородного уравнения $D(p)x(t)=0$, представляющее собой переходный процесс в системе и имеющее вид

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^n c_i e^{p_i t}, \quad (6.3)$$

причем c_i - постоянные коэффициенты, определяемые из начальных условий процесса, а p_i - корни характеристического уравнения $D(p)=0$;

$x_v(t)$ - частное или вынужденное решение определяется правой частью дифференциального уравнения динамики замкнутой системы (6.1) и представляет собой установившуюся часть процесса управления.

Таким образом, полное решение (6.2), описывающее процесс в линейной системе, представляет собой собственное движение системы $x_n(t)$, наложенное на установившуюся составляющую $x_v(t)$.

Знание мгновенного значения ошибки в течение всего времени работы системы дает возможность наиболее полно судить о ее свойствах.

Однако ошибка системы зависит не только от характеристик самой системы (полиномов $D(p)$, $Q(p)$, $N(p)$), но и от свойств, действующих на нее воздействий. Вследствие случайности задающего $g(t)$ и возмущающего $f(t)$ воздействий такой подход не может быть реализован. Поэтому приходится оценивать качество системы управления по некоторым ее свойствам, проявляющимся при различных типовых воздействиях. Для определения качественных показателей системы управления в этом случае используются так называемые

критерии качества.

В настоящее время разработано большое число различных критериев качества, с помощью которых оценивается либо точность системы в установившемся состоянии, либо качество переходного процесса.

Точность системы задается и определяется в установившихся режимах величиной установившейся ошибки. Для анализа качества переходного процесса существует три основных вида приближенных оценок: частотные, корневые, интегральные.

6.2. Оценка точности работы систем

Определение установившихся ошибок. Одно из основных требований, которым должна удовлетворять система управления, заключается в обеспечении необходимой точности воспроизведения задающего воздействия в установившемся режиме. Для оценки точности системы определяется установившаяся ошибка, которая может быть получена из выражения (4.4) с помощью теоремы операционного исчисления о конечном значении функции:

$$\begin{aligned} x(\infty) &= \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_{xg}(s) \cdot G(s) + \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_{xf}(s) \cdot F(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+W(s)} G(s) + \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{W_o^f(s)}{1+W(s)} F(s) = x_g(\infty) + x_f(\infty) \end{aligned} \quad (6.4)$$

где $x_g(\infty)$ - установившаяся ошибка от задающего воздействия;

$x_f(\infty)$ - установившаяся ошибка от возмущающего воздействия.

Если задающее воздействие $g(t)$ имеет произвольный характер, то ошибка системы может быть найдена с помощью **коэффициентов ошибок**. Изображение ошибки по задающему воздействию имеет вид

$$X_g(s) = \Phi_{xg}(s)G(s),$$

где $\Phi_{xg}(s)$ - передаточная функция замкнутой системы по ошибке относительно задающего воздействия.

Для получения коэффициентов ошибок передаточная функция

$\Phi_{xg}(s)$ раскладывается в степенной ряд

$$\Phi_{xg}(s) = c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \dots,$$

сходящийся при малых s , что соответствует установившемуся режиму или достаточно большим значениям времени t .

Коэффициенты c_i этого ряда называются коэффициентами ошибок и определяются из выражения

$$c_i = \frac{1}{i!} \left[\frac{d^i \Phi_{xg}(s)}{ds^i} \right]_{s=0} \quad \text{при } i = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (6.5)$$

Коэффициенты c_0 , c_1 и c_2 называются соответственно коэффициентами позиционной ошибки, скоростной ошибки и ошибки от ускорения.

Выражение для изображения ошибки по задающему воздействию примет вид

$$X_g(s) = (c_0 + c_1 s + c_2 s^2 + c_3 s^3 + \dots) G(s).$$

Перейдя к оригиналу, выразим установившуюся ошибку через коэффициенты ошибок, задающее воздействие и его производные:

$$x_g(t) = c_0 g(t) + c_1 \frac{dg(t)}{dt} + c_2 \frac{d^2 g(t)}{dt^2} + \dots \quad (6.6)$$

Аналогично можно ввести понятие коэффициентов ошибок по возмущающему воздействию.

Точность в типовых режимах. Для оценки точности системы управления используется величина ошибки в различных типовых режимах, близких к реальным или наиболее трудным. В качестве типовых входных воздействий выбираются воздействия, изменяющиеся по закону $g(t) = g_n \times t^n$ (где $n=0,1,2$), и гармоническое воздействие $g(t) = g_m \times \sin \omega t$.

Рассмотрим установившийся режим системы при постоянных задающем $g(t) = g_0 = \text{const}$ и возмущающем $f(t) = f_0 = \text{const}$ воздействиях. В этом случае ошибка системы называется статической и находится с помощью выражения (6.7):

$$x(\infty) = x_g(\infty) + x_f(\infty) = \frac{1}{1+W(0)} g_0 + \frac{W_o^f(0)}{1+W(0)} f_0. \quad (6.7)$$

В статических системах управления значение $W(0)=k$, где k - общий коэффициент передачи разомкнутой системы. При этом составляющая статической ошибки от задающего воздействия

$$x_g(\infty) = g_0/(1+k). \quad (6.8)$$

Составляющая статической ошибки от возмущающего воздействия

$$x_f(\infty) = k_f \times f_0/(1+k), \quad (6.9)$$

где k_f - коэффициент передачи разомкнутой системы по возмущающему воздействию.

Из выражений (6.8) и (6.9) следует, что для повышения точности управления необходимо увеличивать общий коэффициент передачи разомкнутой системы k . Тут выявляется противоречие между требованием точности (увеличение k) и устойчивости (ограничение k).

В астатических системах $W(0) \rightarrow \infty$, поэтому составляющая ошибки $x_g(\infty) = 0$. Вторая составляющая ошибки $x_f(\infty)$ при $W(0) \rightarrow \infty$ не всегда обращается в нуль, так как возможен случай, когда и $W_o^f(0) \rightarrow \infty$.

Режим работы при постоянных задающих и возмущающих воздействиях наиболее характерен для систем стабилизации.

Рассмотрим теперь установившееся состояние при изменении задающего воздействия с постоянной скоростью $g(t)=g_1 \times t$ (где $g_1 = \text{const}$) и постоянном значении возмущающего воздействия $f(t)=f_0 = \text{const}$. По (6.4) найдем установившуюся ошибку:

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_1}{s[1+W(s)]} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W_o^f(s) f_0}{1+W(s)} \quad (6.10)$$

Первый член этого выражения в статической системе при $W(0)=k$ стремится к бесконечности, поэтому система, работающая в режиме слежения с постоянной скоростью, должна быть астатической относительно задающего воздействия. Второе слагаемое определяет статическую ошибку системы от возмущающего воздействия.

Для систем с астатизмом первого порядка установившаяся ошибка от задающего воздействия

$$x_g(\infty) = g_1/k_v, \quad (6.11)$$

$$k_v = \lim_{s \rightarrow 0} sW(s)$$

где k_v - коэффициент передачи (добротность) системы по скорости.

Ошибка $x_g(\infty)$ называется скоростью ошибкой от задающего воздействия.

В системах с астатизмом второго порядка и выше скорость ошибка равна нулю (так как $k_v \rightarrow \infty$), поэтому режим с задающим воздействием, изменяющимся с постоянной скоростью, используется только для оценки точности следящих систем с астатизмом первого порядка.

Рассмотрим установившийся режим в системе при изменении задающего воздействия с постоянным ускорением $g(t)=g_2 \times t^2/2$ (где $g_2=\text{const}$) и постоянным значением возмущающего воздействия $f(t)=f_0=\text{const}$.

Аналогично определяется установившаяся ошибка по (6.4):

$$x(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{g_2}{s^2[1+W(s)]} + \lim_{s \rightarrow 0} \frac{W_o^f(s)f_0}{1+W(s)} \quad (6.12)$$

В статических и астатических системах первого порядка первая составляющая ошибки стремится к бесконечности, поэтому этот режим имеет смысл только для следящих систем с астатизмом второго порядка, для которых ошибка по задающему воздействию

$$x_g(\infty) = g_2/k_a, \quad (6.13)$$

$$k_a = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 W(s)$$

где k_a - коэффициент передачи (добротность) системы по ускорению.

Ошибка $x_g(\infty)$ называется установившейся ошибкой системы от ускорения. Этот режим работы обычно применяется для оценки точности следящих систем с астатизмом второго порядка.

Второе слагаемое, как и в предыдущем случае, определяет статическую ошибку системы от возмущающего воздействия.

Рассмотрим теперь установившийся режим системы управления при изменении задающего воздействия по гармоническому закону

$$g(t) = g_m \sin \omega t.$$

Для упрощения предположим, что возмущающее воздействие равно нулю.

В линейной системе ошибка в установившемся режиме также изменяется по гармоническому закону с той же частотой:

$$x(t) = x_m \sin(\omega t + \psi).$$

Точность системы в этом режиме оценивается по величине амплитуды ошибки. Амплитудные значения связаны между собой модулем частотной передаточной функции замкнутой системы, то есть можно записать

$$x_m = |\Phi_{xg}(j\omega)| \cdot g_m \quad \text{или} \quad x_m = \frac{1}{|1 + W(j\omega)|} \cdot g_m \quad (6.14)$$

Систему всегда проектируют таким образом, чтобы величина ошибки была меньше задающего воздействия, т.е. выполняется условие $|W(j\omega)| \gg 1$. В связи с этим единицей в знаменателе приведенной выше формулы можно пренебречь. Таким образом, амплитуда ошибки определяется как

$$x_m \cong \frac{g_m}{A(\omega)}, \quad (6.15)$$

где $A(\omega)$ - модуль частотной передаточной функции разомкнутой системы.

Пример. Определить установившиеся ошибки в системе управления, заданной передаточными функциями:

$$W(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad \text{и} \quad W^f(s) = \frac{k^f}{s(T_3 s + 1)}.$$

Решение. Найдем установившиеся ошибки системы при различных внешних воздействиях.

1. $g(t) = g_0 \times 1(t)$, $f(t) = f_0 \times 1(t)$. Тогда $G(s) = g_0/s$, $F(s) = f_0/s$.

Установившаяся ошибка от задающего воздействия:

$$x_g(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + W(s)} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k} \cdot \frac{g_0}{s} = 0$$

Установившаяся ошибка от возмущающего воздействия:

$$x_f(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{W^f(s)}{1 + W(s)} F(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{k^f (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k)(T_3 s + 1)} \cdot \frac{f_0}{s} = \frac{k^f f_0}{k}$$

2. $g(t) = g_1 \times t$, $f(t) = f_0 \times 1(t)$. Тогда $G(s) = g_1/s^2$, $F(s) = f_0/s$.

Установившаяся ошибка от задающего воздействия:

$$x_g(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + W(s)} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k} \cdot \frac{g_1}{s^2} = \frac{g_1}{k}$$

3. $g(t) = g_2 \times t^2$, $f(t) = f_0 \times 1(t)$. Тогда $G(s) = 2g_2/s^3$, $F(s) = f_0/s$.

Установившаяся ошибка от задающего воздействия:

$$x_g(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1 + W(s)} G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k} \cdot \frac{2g_2}{s^3} = \infty$$

4. $g(t) = g_m \sin \omega t$, $f(t) = 0$.

При $k = 40 \text{ с}^{-1}$, $T_1 = 0.05 \text{ с}$, $T_2 = 0.01 \text{ с}$, $\omega = 1 \text{ с}^{-1}$, $g_m = 30^0$.

Амплитуда ошибки

$$x_m = \frac{g_m}{A(\omega)} = \frac{30^0}{\frac{40}{\sqrt{0.05^2 + 1} \cdot \sqrt{0.01^2 + 1}}} = 0.75^0$$

$$5. g(t) = g_0 + g_1 \times t + g_2 \times t^2 / 2, \quad f(t) = f_0 \times 1(t).$$

Определим коэффициенты ошибок c_0, c_1, c_2 . Остальные коэффициенты ошибок находить нет необходимости, так как степень полинома задающего воздействия равняется двум.

Передаточная функция замкнутой системы по ошибке относительно задающего воздействия

$$\Phi_{xg}(s) = \frac{1}{1 + W(s)} = \frac{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k}, \quad \text{откуда}$$

$$c_0 = [\Phi_{xg}(s)]_{s=0} = 0,$$

$$c_1 = \left[\frac{d\Phi_{xg}(s)}{ds} \right]_{s=0} = \frac{1}{k},$$

$$c_2 = \frac{1}{2!} \left[\frac{d^2 \Phi_{xg}(s)}{ds^2} \right]_{s=0} = \frac{1}{k} (T_1 + T_2 - \frac{1}{k}).$$

Установившаяся ошибка от задающего воздействия:

$$x_g(t) = c_1(g_1 + g_2 t) + c_2 g_2 = \frac{1}{k}(g_1 + g_2 t) + \frac{1}{k}(T_1 + T_2 - \frac{1}{k})g_2 = x_0 + \frac{g_2}{k}t,$$

$$\text{где } x_0 = \frac{1}{k}g_1 + \frac{1}{k}(T_1 + T_2 - \frac{1}{k})g_2.$$

6.3. Показатели качества переходного процесса

На переходные процессы в системах управления накладываются определенные ограничения, связанные с особенностями их работы.

Рассмотрим основные показатели качества систем управления, пользуясь характеристикой переходного процесса отработки единичного задающего воздействия $g(t)=1(t)$, показанной на рис.6.2.

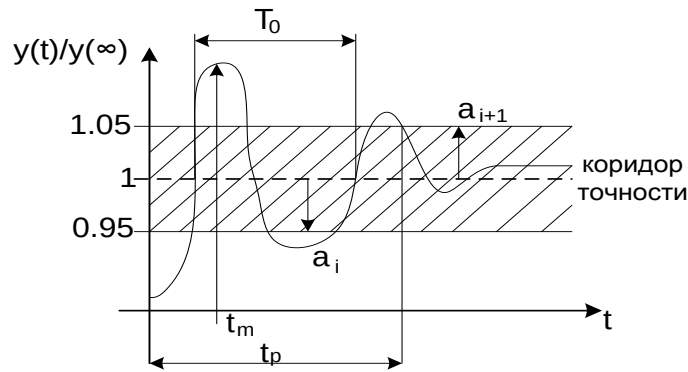


Рис. 6.2. Характеристики переходного процесса при типовом единичном воздействии

Для оценки качества работы системы введены следующие показатели.

1. Максимальное отклонение управляемой величины, соответствующее времени t_m , от установившегося значения:

$$\left| y(t_m) - y(\infty) \right| = \Delta_{\text{дин}}, \quad (6.16)$$

где t_m — время установления первого максимума управляемой величины, характеризующее скорость изменения ее в переходном процессе.

Представляет собой динамическую ошибку $\Delta_{\text{дин}}$, определяющую точность системы в переходном процессе.

2. Перерегулирование, равное отношению максимального значения управляемой величины в переходном процессе к установившемуся значению:

$$\sigma = \frac{\left| y(t_m) - y(\infty) \right|}{y(\infty)} \cdot 100\% . \quad (6.17)$$

Перерегулирование характеризует склонность системы к колебаниям, то есть близость системы к колебательной границе устойчивости. В конечном итоге характеризует запасы устойчивости. Считается, что запас устойчивости достаточен, если σ лежит в пределах от 10 до 30%.

3. Время регулирования (протекания переходного процесса) t_p . Позволяет оценить быстродействие системы управления.

Учитывая, что полное затухание в системе происходит лишь при $t \rightarrow \infty$, длительность переходного процесса ограничивают тем моментом времени, когда

$$|y(t) - y(\infty)| \leq \Delta, \quad (6.18)$$

где Δ - допустимое значение установившейся ошибки, обычно составляющее $\pm 5\%$ от $y(\infty)$.

4. Число колебаний управляемой величины $y(t)$ за время регулирования t_p . Это число составляет обычно $2 \div 3$.

5. Собственная частота колебаний системы $\omega_0 = 2\pi/T_0$, где T_0 - период собственных колебаний системы.

6. Логарифмический декремент затухания системы d_c , характеризующий быстроту затухания колебательного процесса,

$$d_c = \ln \frac{a_i}{a_{i+1}}, \quad (6.19)$$

где a_i и a_{i+1} - две амплитуды для рядом расположенных экстремумов кривой переходного процесса.

7. Максимальная скорость отработки управляемой величины

$$\left[\frac{dy}{dt} \right]_{\max} = \text{tg} v.$$

Для каждой системы управления, имеющей колебательный переходный процесс, на основе указанных критериев качества можно установить область допустимых отклонений управляемой величины.

В системах автоматического управления возможны переходные процессы, характер протекания которых отличен от указанного на рис.6.2. Все многообразие переходных процессов в системах автоматического управления можно разделить на четыре группы:

колебательный процесс, характеризуемый несколькими значениями колебаний управляемой величины за время регулирования;

малоколебательный процесс, т.е. переходный процесс с одним колебанием;

монотонный процесс, когда скорость изменения управляемой величины не меняет знака в течение всего времени регулирования

($dy/dt \geq 0$ при $0 \leq t \leq t_p$);

апериодический процесс (без перерегулирования), когда $y(t) < y(\infty)$ с точностью до Δ при всех t .

Таким образом, чтобы оценить качество работы системы управления, необходимо иметь ее переходную характеристику, для нахождения которой применяются различные способы:

а) классическое математическое решение дифференциального уравнения $D(p)y(t) = Q(p)l(t)$;

б) операционный метод: $y(t) = L^{-1}[Y(s)] = L^{-1}\left[\Phi_g(s) \frac{1}{s}\right]$;

в) численные и графические способы;

г) моделирование системы;

д) экспериментальная запись.

Если задающее воздействие на входе линейной системы отличается от единицы, то в переходном процессе изменяется только масштаб управляемой величины.

6.4. Частотные оценки качества

В инженерной практике для оценки показателей качества и построения переходных процессов в системах автоматического управления получили распространение частотные методы, разработанные В.В.Солодовниковым [7].

Математической основой частотных методов, устанавливающих связь между частотными характеристиками системы и качеством переходного процесса, является обратное преобразование Лапласа. Как известно, переходный процесс в системе определяется по формуле обратного преобразования Лапласа:

$$y(t) = L^{-1}[Y(s)] = \frac{1}{j2\pi} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} Y(s)e^{st} ds. \quad (6.20)$$

Установлено, что если на систему действует единичное задающее воздействие, т.е. $g(t)=1(t)$, а начальные условия являются нулевыми, то реакцию системы, которая представляет собой переходную

характеристику, в этом случае можно определить как

$$y(t) = h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} P(\omega) \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega, \quad (6.21)$$

$$y(t) = h(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} Q(\omega) \frac{\cos \omega t}{\omega} d\omega, \quad (6.22)$$

где $P(\omega)$ - вещественная частотная характеристика замкнутой системы;

$Q(\omega)$ - мнимая частотная характеристика замкнутой системы, т.е.

$$\Phi_g(j\omega) = P(\omega) + jQ(\omega).$$

Выражения (6.21) и (6.22) и используются для оценок качества переходного процесса. Существует приближенный способ построения кривой переходного процесса в замкнутой системе по этим формулам с использованием h -функций.

Простейшими из частотных оценок качества переходного процесса являются запасы устойчивости, рассмотренные в разделе 5.5. Они определяют только степень близости замкнутой системы к границе устойчивости по виду частотных характеристик разомкнутой цепи.

Время регулирования и перерегулирование можно приблизительно оценить по виду вещественной частотной характеристики замкнутой системы (Рис.6.3). На основании зависимости (6.21) выведены следующие оценки. В переходном процессе получится перерегулирование $\sigma > 18\%$, если $P(\omega)$ имеет “горб”. При отсутствии “горба” будет $\sigma < 18\%$. Процесс окажется наверняка монотонным ($\sigma = 0$), если $dP/d\omega < 0$ и монотонно убывает по абсолютному значению. Время регулирования t_p оценивается приблизительно по величине интервала существенных частот ω_{cy} , причем

$$\frac{\pi}{\omega_{cy}} < t_p < \frac{4\pi}{\omega_{cy}}. \quad (6.23)$$

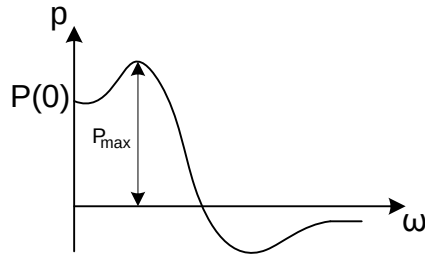


Рис.6.3. Вещественная частотная характеристика замкнутой системы

Интервал частот $0 \leq \omega \leq \omega_p$, в котором $P(\omega) \geq 0$, называется интервалом положительности. Интервал частот $0 \leq \omega \leq \omega_{cy}$ называется интервалом существенных частот, если при $\omega = \omega_{cy}$ и далее при $\omega > \omega_{cy}$ величина $|P(\omega)|$ становится и остается меньше $0,05P(0)$. Влиянием остальной части вещественной частотной характеристики (при $\omega \geq \omega_{cy}$) на качество переходного процесса можно пренебречь. Если же при $\omega > \omega_p$ оказывается, что $|P(\omega)| < 0,2P(0)$, то при оценке качества переходного процесса можно принимать во внимание только интервал положительности $0 \leq \omega \leq \omega_p$.

Важно отметить, что время t_p обратно пропорционально величине ω_{cy} , т.е. чем более растянута частотная характеристика, тем короче переходный процесс. Физически это связано с тем, что чем более высокие частоты “пропускает” система, тем она менее инерционна в своих реакциях на внешние воздействия.

Это же свойство позволяет связать время t_p с частотой среза ω_c частотной характеристики разомкнутой системы. Длительность переходного процесса t_p тем меньше, чем больше частота среза ω_c .

На основании расчетов переходных процессов по (6.21) В.В.Солодовников предложил оценивать величину перерегулирования $\sigma\%$ и время регулирования t_p в зависимости от величины максимума вещественной частотная характеристика замкнутой системы P_{max} , построив для этой цели номограммы (рис.6.4).

Кроме того, свойство частотных характеристик таково, что начальная их часть влияет в основном на очертание конца переходного

го процесса $y(t)$, причем $P(0)=y(\infty)$. Основное же влияние на качество переходного процесса оказывает форма средней части частотной характеристики.

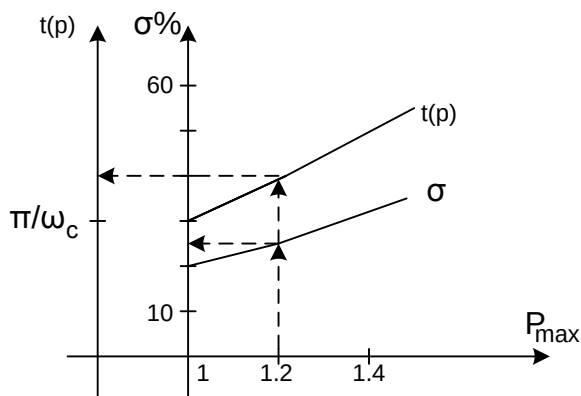


Рис. 6.4. Номограмма В.В.Солодовникова

В связи с этим логарифмическую частотную характеристику разомкнутой цепи системы делят на три области, причем область низких частот в основном определяет точность в установившемся режиме. Область средних частот в основном определяет качество переходного процесса. В частности, частота среза ω_c , как уже говорилось, определяет полосу пропускания и длительность переходного процесса. Наклон ЛАХ вблизи частоты среза характеризует колебательность переходного процесса. Так, наклон -20 дБ/дек при $\omega=\omega_c$ соответствует свойствам апериодического звена, обеспечивает наименьшую колебательность переходного процесса в замкнутой системе.

Следующей частотной оценкой качества является показатель колебательности – максимальное значение M_{max} амплитудной частотной характеристики замкнутой системы

$$M_{max} = |\Phi(j\omega)|_{max} = \left| \frac{W(j\omega)}{1 + W(j\omega)} \right|_{max}. \quad (6.24)$$

Чем меньше запас устойчивости, тем больше склонность системы к колебаниям и тем выше резонансный пик. Считается, что в хорошо демпфированных системах показатель колебательности не должен превосходить значений $1,1 \div 1,5$.

6.5. Корневые оценки качества

Корневые критерии качества основываются на исследовании расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы, то есть полюсов передаточной функции системы, а также и нулей этой передаточной функции.

Вид корней характеристического уравнения определяет характер переходных процессов в системе автоматического управления. Поэтому можно сформулировать требования по запасу устойчивости и быстродействию системы, не рассматривая самих переходных процессов, а накладывая ограничения на корни характеристического уравнения.

Для оценки быстродействия системы используется понятие степени устойчивости, являющейся простейшей корневой оценкой качества.

Под степенью устойчивости α понимается абсолютное значение вещественной части ближайшего к мнимой оси корня (рис.6.5).

Если ближайшим является вещественный корень, то такая степень устойчивости называется аperiодической, так как ей соответствует аperiодическая составляющая переходного процесса $c_1 e^{-\alpha t}$. Время ее затухания характеризует общую длительность переходного процесса, так как все члены решения, соответствующие остальным корням, затухают быстрее, т.е.

$$t_p \cong 3/\alpha. \quad (6.25)$$

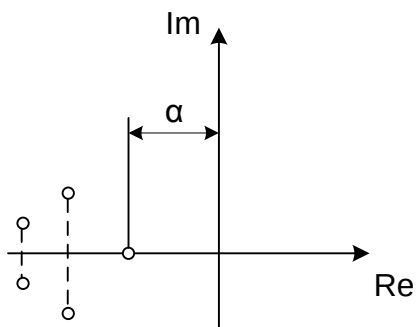


Рис. 6.5. Комплексная плоскость корней

Если ближайшем к мнимой оси окажется пара комплексных

корней, то ей соответствует колебательная составляющая переходного процесса $c_1 e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \beta_1)$, при этом оценка длительности переходного процесса остается прежней. Такая степень устойчивости называется колебательной.

Для оценки запаса устойчивости системы введено понятие колебательности переходного процесса.

Колебательность определяется величиной

$$\mu = \left| \frac{\beta}{\alpha} \right|, \quad (6.26)$$

где α и β – вещественная и мнимая части корней характеристического уравнения. Именно эта величина характеризует быстроту затухания колебаний за каждый период $T=2\pi/\beta$. Чем выше колебательность, тем слабее затухание колебаний в переходном процессе.

Суммарное требование определенных значений степени устойчивости α и колебательности μ приводит к области, изображенной на рис.6.6, внутри которой должны располагаться все корни характеристического уравнения замкнутой системы.

Далее необходимо иметь в виду, что для определения качества переходного процесса при единичном скачке задающего воздействия существенны не только корни характеристического уравнения, т.е. полюса, но также и нули передаточной функции замкнутой системы.

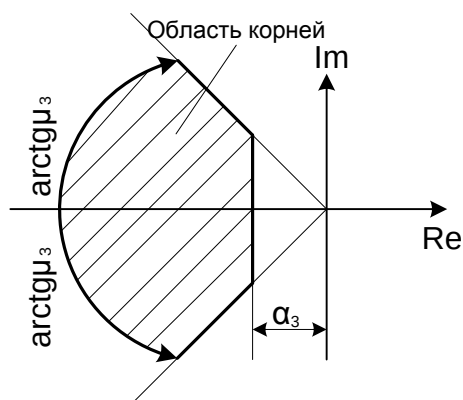


Рис. 6.6. Область расположения корней:

где α_3 и μ_3 – заданные значения степени устойчивости и колебательности

Для уменьшения амплитуд отклонений выходной величины системы в переходном процессе желательно, чтобы нули передаточной функции замкнутой системы располагались вблизи ее полюсов.

Примером корневых оценок качества переходного процесса в системах третьего порядка является диаграмма Вышнеградского (дана в его работе 1876 г., положившей начало развития теории управления) [1,2].

Задание области расположения полюсов и нулей позволяет более полно оценить вид переходного процесса. При выборе расположения полюсов и нулей передаточной функции необходимо придерживаться общих рекомендаций [1].

1. Желательно располагать нули вблизи области расположения полюсов. Удаление нулей от полюсов ведет к увеличению амплитуд собственных колебаний в переходном процессе.

2. Для уменьшения отклонений в переходном процессе выгодно удалять полюсы друг от друга.

3. Приближение друг к другу не представляет опасности для тех полюсов, которые расположены далеко от мнимой оси.

Кроме этих рекомендаций сохраняют свою силу ограничения на область расположения полюсов, накладываемые в связи с требованием обеспечения определенного запаса устойчивости и быстродействия.

6.6. Интегральные оценки качества

Интегральные критерии качества дают общую оценку времени регулирования и степени отклонения управляемой величины от установившегося значения в переходном процессе в совокупности, без нахождения того и другого в отдельности.

Простейшей интегральной оценкой может служить величина

$$J_1 = \int_0^{\infty} x(t) dt, \quad (6.27)$$

где $x(t)$ - отклонение управляемой величины от нового устано-

вившегося значения, которое она будет иметь после завершения переходного процесса.

В устойчивой системе $x \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$ и этот интеграл имеет конечную величину. Геометрически это площадь под кривой переходного процесса, построенного для отклонения (рис.6.7).

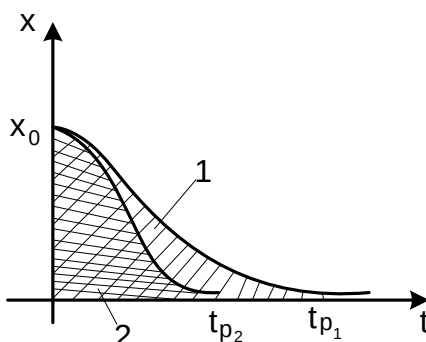


Рис. 6.7. Переходный процесс для отклонения

Площадь будет тем меньше, чем быстрее затухает переходный процесс и чем меньше величина отклонения. Поэтому параметры системы рекомендуется выбирать таким образом, чтобы добиться минимума этой интегральной оценки.

Неудобством интегральной оценки (6.27) является то, что она годится только для монотонных процессов, когда не меняется знак отклонения x . Так как форма переходного процесса при расчете системы управления неизвестна, то применять эту оценку практически нецелесообразно. Поэтому предлагается другая интегральная оценка:

$$J_2 = \int_0^{\infty} |x(t)| dt, \quad (6.28)$$

т.е. сумма абсолютных величин всех площадей под кривой переходного процесса. Но вычисление ее по коэффициентам уравнения затруднительно.

В связи с этим в общем случае применяют квадратичную интегральную оценку качества:

$$J_3 = \int_0^{\infty} x^2(t) dt. \quad (6.29)$$

В литературе [1] имеются формулы, выражающие величину J_3

непосредственно через коэффициенты дифференциального уравнения замкнутой системы.

Стремление оценки J_3 к нулю приближает кривую процесса к $1(t)$, что, в свою очередь, вызывает значительное увеличение скорости в начальный момент времени. Чтобы получить быстро затухающий и достаточно плавный процесс, вводят улучшенную квадратичную интегральную оценку качества

$$J_4 = \int_0^{\infty} [x^2 + T^2(\dot{x})^2] dt, \quad (6.30)$$

где T назначается в соответствии с заданием желаемых свойств переходного процесса.

Наименьшее возможное значение J_4 будет при $x + T\dot{x} = 0$. Решение этого дифференциального уравнения $x = x_0 e^{-t/T}$ и будет той экспонентой, к которой приближается переходный процесс при стремлении уменьшить значение интегральной оценки J_4 .

В качестве интегральных критериев используются и функционалы более общего вида. Иногда в выражение интегральной оценки вводится время в явном виде.

Удобство интегральных оценок состоит в том, что они дают единый числовой критерий качества. Недостатком является то, что одному и тому же значению интегральной оценки могут отвечать разные формы переходного процесса, что создает недостаточную определенность решения задачи.

Интегральные критерии применяются в теории оптимальных систем управления.

6.7. Моделирование систем управления

Моделирование систем управления - это эффективный инструмент исследования сложных систем.

Модель представляет собой изображение оригинала на основе принятых гипотез и аналогий, а моделирование - представление объекта моделью для получения информации об этом объекте путем про-

ведения экспериментов с его моделью.

Основное требование, которому должна удовлетворять модель, является ее адекватность объекту. Адекватность зависит от цели моделирования и принятых критериев. Модель адекватна объекту, если результаты моделирования подтверждаются на практике и могут служить основой для прогнозирования процессов, протекающих в исследуемых объектах.

Моделирование решает задачи изучения и исследования объектов, предсказания их функционирования, синтеза структуры, параметров и алгоритмов поведения.

Модели бывают математические и физические. Физические модели сохраняют физические свойства объекта, а математические модели представляют собой математические конструкции. В основе математического моделирования лежит подобие дифференциальных уравнений, которыми описываются процессы, происходящие в реальной системе и в модели. В настоящее время универсальным инструментом реализации математических моделей является ЭВМ. Цифровое моделирование систем управления основывается на численном решении уравнений, описывающих систему.

Рассмотрим систему с одним входом $g(t)$ и одним выходом $y(t)$. Передаточная функция замкнутой системы в общем случае имеет вид

$$\Phi(s) = \frac{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_n}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n}, \quad (6.31)$$

где n - порядок системы.

Если порядок числителя передаточной функции (6.31) окажется меньше порядка знаменателя, т.е. $m < n$, то $b_0, \dots, b_{n-(m+1)} = 0$.

Передаточной функции замкнутой системы соответствует дифференциальное уравнение

$$(a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n)y(t) = (b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n)g(t). \quad (6.32)$$

Для получения обобщенной модели системы это уравнение раз-

решают относительно старшей производной выходной величины:

$$p^n y(t) = \frac{1}{a_0} [-(a_1 p^{n-1} + \dots + a_n) y(t) + (b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n) g(t)] \quad (6.33)$$

или

$$p^n y(t) = \frac{1}{a_0} \left[- \sum_{i=1}^n a_i p^{n-i} y(t) + \sum_{i=0}^n b_i p^{n-i} g(t) \right]. \quad (6.34)$$

Таким образом, чтобы найти выходную величину $y(t)$ необходимо $p^n y(t)$ проинтегрировать n раз.

Уравнению (6.34) соответствует структурная схема модели, представленная на рис.6.8.

Для программной реализации полученной схемы решения исходного дифференциального уравнения (6.32) последнее переписывают в форме Коши. Для этого вводятся промежуточные переменные $x_1, \dots, x_n$, соответствующие выходным величинам интеграторов. В результате получим следующую систему уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} p x_1 = x_2 + \beta_1 g \\ p x_2 = x_3 + \beta_2 g \\ \dots \\ p x_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} g \\ p x_n = \left(-\frac{a_n}{a_0} x_1 - \frac{a_{n-1}}{a_0} x_2 - \dots - \frac{a_1}{a_0} x_n \right) + \beta_n g \end{array} \right. \quad (6.35)$$

и уравнение связи

$$y(t) = x_1 + \beta_0 g(t). \quad (6.36)$$

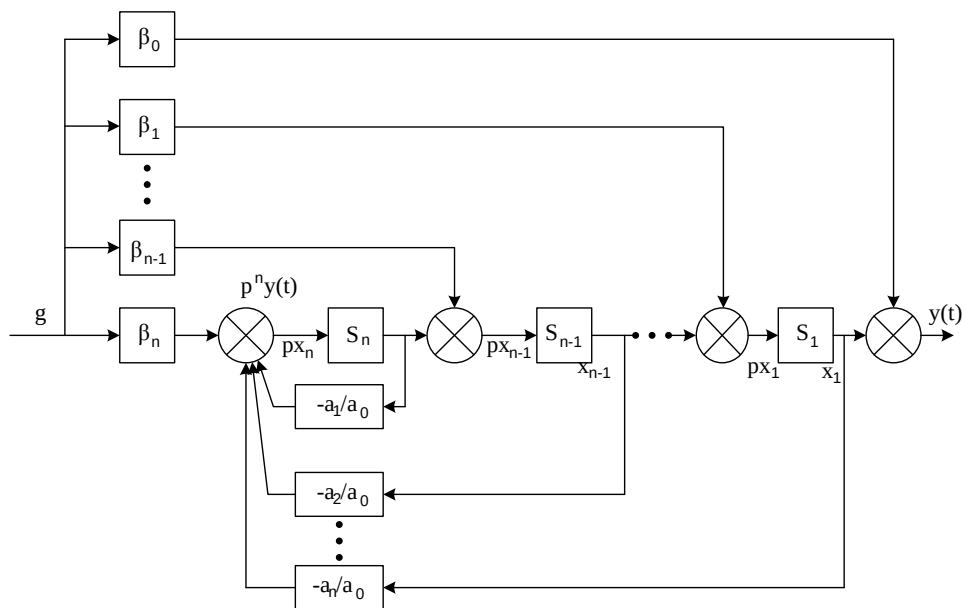


Рис. 6.8. Структурная схема модели системы

Коэффициенты β_i (где $i=0, 1, 2, \dots, n$) определяются из условия эквивалентности системы уравнений (6.35), (6.36) исходному дифференциальному уравнению (6.32) и вычисляются последовательно следующим образом:

$$\beta_i = (b_i - \sum_{j=0}^i a_j \beta_{i-j}) / a_0. \quad (6.37)$$

В настоящее время разработано большое количество систем моделирования, например, Continuous System Simulation Environment (CSSE).

ВОПРОСЫ К РАЗДЕЛУ 6

1. Дайте понятие качества работы системы управления. Чем оно определяется?
2. Что представляют собой критерии качества?
3. Как производится оценка точности работы систем?
4. Чему равны первые два коэффициента ошибок в системах с астатизмом первого и второго порядков?

5. Определите показатели качества переходного процесса и частотные показатели, поясните их физический смысл.

6. Поясните связь частотных показателей качества работы системы с частотными характеристиками разомкнутой цепи.

7. Что представляют собой корневые оценки качества?

8. В чем удобство и недостатки интегральных критериев качества?

9. Каким образом экспериментальным путем можно оценить качество работы системы?

10. Какова роль моделирования систем управления?

7. ТОЧНОСТЬ И ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ

7.1. Общие методы повышения точности систем управления

К числу общих методов повышения точности работы систем управления относятся:

- 1) увеличение общего коэффициента передачи разомкнутой системы;
- 2) применение управления по производным от ошибки;
- 3) повышение степени астатизма.

Увеличение общего коэффициента передачи k разомкнутой цепи является универсальным и эффективным методом повышения точности и быстродействия системы. При этом, что следует из раздела 6.2, уменьшаются все виды установившихся ошибок системы. Увеличение k осуществляется последовательным введением усилительного звена в прямую цепь системы. Иногда это достигается путем повышения коэффициентов передачи отдельных звеньев.

Однако увеличение общего коэффициента передачи ограничивается, как видно из раздела 5, устойчивостью системы. В этом сказывается противоречие между требованиями к точности и устойчивости системы. Поэтому увеличение общего коэффициента передачи до значения, при котором обеспечивается требование к точности системы, может производиться при одновременном повышении запаса устойчивости с помощью введения корректирующих устройств.

Введение управления по производным от ошибок. Это простейший метод улучшения качества работы системы. Структурно введение производной показано на рис.7.1. Технически это реализуется различными дифференцирующими звеньями.

Передаточная функция разомкнутой системы в этом случае будет

$$W(s) = (T_d s + 1)W_R(s)W_{Oy}(s), \quad (7.1)$$

где $W_{Oy}(s)$ - передаточная функция объекта управления;

$W_R(s)$ - передаточная функция регулятора;

T_d - постоянная времени дифференцирующего звена.

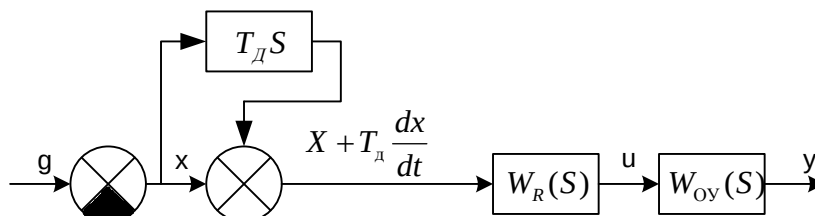


Рис.7.1. Структурная схема системы управления при введении производных от ошибок

Введение дифференцирующих звеньев в систему добавляет положительную фазу и, следовательно, повышает запас устойчивости системы, что дает возможность увеличить общий коэффициент передачи k и тем самым улучшить точность управления.

Кроме того, введение управления по производным позволяет системе чувствовать не только наличие ошибки, но и тенденцию к изменению ее величины, то есть делает работу системы с “предвидением”, что обеспечивает повышение быстродействия и снижение динамической ошибки системы, тем самым улучшая качество переходного процесса.

Так как дифференцирование эквивалентно дополнительному усилению высоких частот, то использование более двух дифференцирующих звеньев затруднительно вследствие возрастания влияния высокочастотных помех.

Введение интеграла от ошибки является методом создания или повышения степени астатизма системы управления, а значит, и увеличения ее точности. При астатическом управлении $W(0) \rightarrow \infty$. В связи с этим передаточную функцию разомкнутой системы можно представить в виде

$$W(s) = \frac{W_1(s)}{s^r}, \quad (7.2)$$

где $W_1(0) = k$;

k – коэффициент передачи разомкнутой системы;

r – степень астатизма системы.

При $r=0$ система называется статической, при $r=1$ – астатической первого порядка и т.д.

Физически повышение степени астатизма достигается за счет введения в систему управления интегрирующих звеньев.

Введение интегралов от ошибки используется для устранения установившихся ошибок в различных типовых режимах: в неподвижном положении, при движении с постоянной скоростью, при движении с постоянным ускорением и т.д. Формально это сводится к тому, чтобы сделать равными нулю первые коэффициенты ошибок системы, например, $c_0=0$ при $r=1$, $c_0=c_1=0$ при $r=2$, $c_0=c_1=c_2=0$ при $r=3$ и т.д.

Однако включение каждого интегратора в прямую цепь системы вносит отрицательный фазовый сдвиг -90° , ухудшая тем самым устойчивость и качество переходного процесса. В случае введения двойного интеграла система становится структурно неустойчивой (неустойчивой при любых значениях параметров).

Таким образом, повышение степени астатизма неблагоприятно сказывается на устойчивости и качестве переходного процесса системы. Поэтому одновременно с повышением степени астатизма в системе приходится использовать корректирующие устройства.

Пример. Определить установившиеся ошибки от задающего воздействия $g(t)=g_1 \times t$ системы, передаточная функция разомкнутой цепи которой имеет вид

$$W(s) = \frac{k}{s^r \cdot (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}.$$

Решение. Изображение по Лапласу задающего воздействия $G(s)=g_1/s^2$.

Установившаяся ошибка от задающего воздействия для статиче-

ской системы при $r=0$:

$$\begin{aligned} x_g(\infty) &= \lim_{s \rightarrow 0} sX(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s\Phi_{xg}(s) \cdot G(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{1}{1+W(s)} G(s) = \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k} \cdot \frac{g_1}{s^2} = \infty; \end{aligned}$$

для астатической системы первого порядка при $r=1$:

$$x_g(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s \cdot (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s \cdot (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k} \cdot \frac{g_1}{s^2} = \frac{g_1}{k};$$

для астатической системы второго порядка при $r=2$:

$$x_g(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s^2 \cdot (T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s^2 \cdot (T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k} \cdot \frac{g_1}{s^2} = 0.$$

Включение в систему изодромных устройств. Изодромное звено, представляющее собой комбинацию интегрирующего звена и форсирующего звена первого порядка, имеет передаточную функцию вида

$$W_{\text{и}}(s) = \frac{T_{\text{и}} s + 1}{T_{\text{и}} s} = \frac{k_{\text{и}}(T_{\text{и}} s + 1)}{s} = 1 + \frac{1}{T_{\text{и}} s}, \quad (7.3)$$

где $T_{\text{и}}$ – постоянная времени;

$k_{\text{и}} = \frac{1}{T_{\text{и}}}$ – коэффициент передачи изодромного устройства.

Изодромное устройство, объединяя в себе введение интеграла и производной, лишено недостатков предыдущего звена и позволяет получить необходимую степень астатизма системы, сохраняя устойчивость и качество. Это устройство изменяет лишь низкочастотную часть амплитудной частотной характеристики, влияющую на точность системы (повышает ее), а отрицательный сдвиг фазы на частоте среза, существенный для условия устойчивости, невелик при соответствующем выборе постоянной времени $T_{\text{и}}$.

Структурная схема системы управления при введении изодромного устройства представлена на рис.7.2.

Из структурной схемы следует, что если в случае простого вве-

дения интеграла управление в системе производится только по интегралу от ошибки, то при изодромном устройстве получаем управление как по ошибке, так и по интегралу от ошибки.

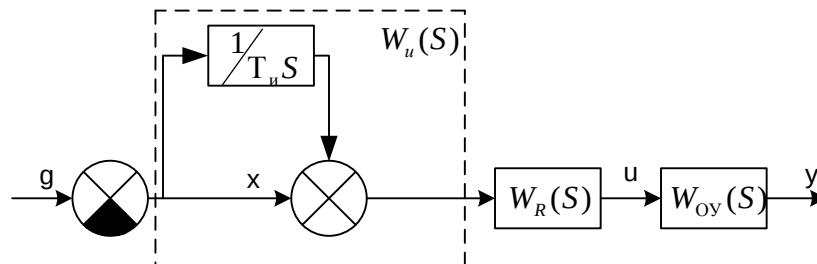


Рис. 7.2. Структурная схема системы с изодромным устройством

Для дальнейшего повышения степени астатизма системы можно использовать не одно, а два, три и т.д. изодромных устройств.

7.2. Теория инвариантности и комбинированное управление

Одним из эффективных способов, позволяющих получить высокую точность в системах управления, является использование методов теории инвариантности. Система управления является инвариантной по отношению к внешним воздействиям, если после завершения переходного процесса, определяемого начальными условиями, ошибка системы не зависит от внешних воздействий.

Основной принцип управления состоит в формировании управляющего воздействия по величине ошибки. Если же вводятся компенсирующие цепи по внешним воздействиям, то получается комбинированное управление - по ошибке и по внешним воздействиям.

При введении компенсаций по внешним воздействиям теоретически при определенных условиях удастся сводить величину ошибки к нулю для любых внешних воздействий. Это свойство инвариантности системы по отношению к внешним воздействиям.

Внешние воздействия делятся на задающие, которые система должна воспроизводить, и возмущающие, действие которых требуется нейтрализовать.

Комбинированная система по задающему воздействию.

Здесь, наряду с отклонением, во внутреннюю цепь системы вводится сигнал от задающего воздействия с помощью компенсирующего устройства по задающему воздействию с передаточной функцией $W_{кз}(s)$ (рис.7.3).

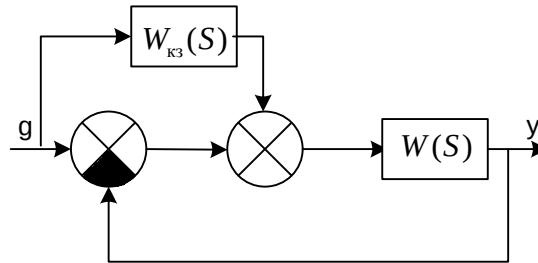


Рис. 7.3. Структурная схема комбинированной системы по задающему воздействию

Эквивалентная передаточная функция замкнутой системы с учетом управления по задающему воздействию будет равняться

$$\Phi_{\vartheta}(s) = \frac{[1 + W_{кз}(s)] W(s)}{1 + W(s)}, \quad (7.4)$$

а для ошибки –

$$\Phi_{х\vartheta}(s) = 1 - \Phi_{\vartheta}(s) = \frac{1 - W_{кз}(s) W(s)}{1 + W(s)}. \quad (7.5)$$

Установившаяся ошибка будет равняться нулю для любого задающего воздействия при $\Phi_{х\vartheta}(s) = 0$, то есть если

$$W_{кз}(s) = \frac{1}{W(s)}. \quad (7.6)$$

Разложив последнее выражение в ряд по возрастающим степеням оператора s , получим необходимый вид функции, определяющей компенсирующий сигнал от задающего воздействия:

$$W_{кз}(s) = b_0 + b_1s + b_2s^2 + b_3s^3 + \dots \quad (7.7)$$

Таким образом, в комбинированной системе по задающему воздействию для получения полной инвариантности необходимо вводить первую и высшие производные от задающего воздействия.

Полностью инвариантную систему реализовать сложно, но всегда можно сделать систему инвариантную до ε , где ε - допустимая ошибка работы системы.

Комбинированная система по возмущающему воздействию.
В этом случае наряду с управлением по отклонению используется управление по возмущающему воздействию $f(t)$. Передаточная функция компенсирующего устройства по возмущающему воздействию $W_{KB}(s)$ для системы инвариантной к возмущающему воздействию определяется аналогично рассмотренному выше случаю.

Передаточная функция замкнутой системы для управляемой величины по возмущающему воздействию имеет вид [1]:

$$\Phi_f(s) = \frac{W^f(s) - W_{KB}(s)W(s)}{1 + W(s)}, \quad (7.8)$$

где $W(s)$ – передаточная функция разомкнутой системы;

$W^f(s)$ – передаточная функция по возмущающему воздействию в разомкнутой системе.

Условие полной инвариантности может быть получено, если положить $\Phi_f(s)=0$. Тогда

$$W_{KB}(s) = \frac{W^f(s)}{W(s)}. \quad (7.9)$$

Эта функция может быть представлена в виде ряда, аналогично (7.7). Здесь также можно ограничиться неполной инвариантностью, если точное удовлетворение условию (7.9) вызывает технические трудности.

Особая трудность заключается в том, что возмущающие воздействия $f(t)$, в отличие от задающих $g(t)$, далеко не всегда можно подать на входы компенсирующих цепей.

Положительной особенностью комбинированных систем является то, что введение компенсирующих устройств по внешним воздействиям, как следует из выражений для передаточных функций (7.4) и (7.8), не меняет характеристическое уравнения системы, работающей по отклонению. Это означает, что не будут нарушаться не только условия устойчивости, но сохраняются и оценки качества пе-

переходного процесса.

Следовательно, этот способ существенно повышает точность системы без заметного ухудшения качества переходного процесса.

7.3. Неединичные обратные связи

Неединичные главные обратные связи применяются для уменьшения ошибки от задающего воздействия. Введем в главную обратную связь, которая обычно равняется единице, устройство с передаточной функцией $W_o(s)$ (рис.7.4).

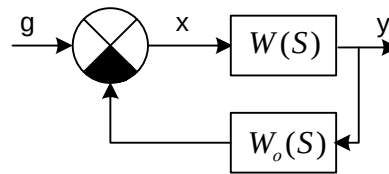


Рис.7.4. Структурная схема системы с неединичной главной обратной связью

В этом случае передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию примет вид

$$\Phi_g(s) = \frac{W(s)}{1 + W_o(s)W(s)}. \quad (7.10)$$

Для получения полной инвариантности необходимо выполнить условие $Y=G$, иначе $\Phi_g(s)=1$. Отсюда требуемая передаточная функция главной обратной связи должна быть

$$W_o(s) = \frac{W(s)-1}{W(s)}. \quad (7.11)$$

При разложении этого выражения в степенной ряд получим

$$W_o(s) = k_o - [\tau_1 s + (\tau_2 s)^2 + (\tau_3 s)^3 + \dots]. \quad (7.12)$$

Отсюда видно, что для получения полной инвариантности необходимо использовать главную обратную связь с коэффициентом передачи k_o , в общем случае отличным от единицы, и дополнительно ввести положительные обратные связи по производным от управляемой величины. Это условие можно выполнить практически только

приближенно. Однако при таком способе, как видно из передаточной функции замкнутой системы, существенно меняется ее характеристическое уравнение. Поэтому одновременно требуется принимать дополнительные меры для того, чтобы получить желаемое качество переходного процесса.

В установившемся режиме ($s=0$) из (7.11) в системе без астатизма имеем

$$k_0 = 1 - \frac{1}{k}, \quad (7.12)$$

где $k = W(0)$.

Следовательно, если ввести в главную обратную связь системы коэффициент передачи k_0 согласно (7.12), то система будет иметь нулевую установившуюся ошибку от задающего воздействия без введения интегрирующего звена.

7.4. Чувствительность систем автоматического управления

Чувствительность систем автоматического управления - это степень влияния разброса параметров и их изменений в процессе работы на статические и динамические свойства системы управления, то есть на точность, показатели качества, на частотные свойства и др.

Параметры системы управления (коэффициенты передачи и постоянные времени) определяются физическими параметрами составляющих ее элементов (резисторов, конденсаторов, катушек индуктивностей и т.п.). Величины физических параметров элементов, во-первых, имеют технологический разброс, обусловленный допусками на изготовление элементов, во-вторых, подвержены эксплуатационным изменениям с течением времени, что обусловлено их старением.

Поэтому встает задача оценки работы системы при изменении и разбросе параметров составляющих ее элементов.

Эта задача решается путем количественной оценки чувствительности системы. Для этого требуется описать систему управления уравнениями в нормальной форме [2], т.е.

$$\frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{in}x_n + f_i \quad \text{при } i=1, 2, \dots, n, \quad (7.13)$$

где n - порядок системы;

X_i - координаты состояния системы;

f_i - внешние воздействия, прикладываемое к системе;

a_{ik} - коэффициенты уравнения, определяемые величинами физических параметров составляющих систему элементов.

Изменяющиеся со временем параметры элементов системы в процессе эксплуатации и от разброса при изготовлении обозначим через α_j ($j=1, 2, \dots, m$).

Тогда уравнение системы (7.13) можно записать в виде

$$\frac{dx_i}{dt} = \psi_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, f_i) \text{ при } i=1, 2, \dots, n. \quad (7.14)$$

Решение уравнений (7.14) определяет координаты системы: $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$, образующие исходное движение системы.

Пусть параметры α_j изменяются на малые величины $\Delta\alpha_j$, тогда имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= \alpha_1 + \Delta\alpha_1; \\ . &. \\ \tilde{\alpha}_m &= \alpha_m + \Delta\alpha_m. \end{aligned}$$

Рассматривая малые изменения параметров α_j ($j=1, 2, \dots, m$), получим новые уравнения

$$\frac{d\tilde{x}_i}{dt} = \psi_i(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n, \alpha_1 + \Delta\alpha_1, \alpha_2 + \Delta\alpha_2, \dots, \alpha_m + \Delta\alpha_m, f_i) \quad (7.15)$$

при $i=1, 2, \dots, n$.

Процесс в той же системе, но с измененными параметрами, определяемый решением уравнений (7.15), т.е. $\tilde{x}_1(t), \tilde{x}_2(t), \dots, \tilde{x}_n(t)$, называется варьированным движением.

Возникшее различие в протекании процессов в системе за счет изменения параметров

$$\Delta x_i(t) = x_i(t) - \tilde{x}_i(t) \quad \text{при } i=1, 2, \dots, n$$

называется дополнительным движением.

При малых отклонениях $\Delta\alpha_j$ эта разность может быть опреде-

лена следующим образом:

$$\Delta x_i(t) = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_1} \Delta \alpha_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_2} \Delta \alpha_2 + \dots + \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_m} \Delta \alpha_m \quad \text{при } i=1, 2, \dots, n. \quad (7.16)$$

Обозначим

$$u_{ij}(t) = \frac{\partial x_i}{\partial \alpha_j} \quad (j=1, 2, \dots, m). \quad (7.17)$$

Тогда дополнительное движение будет

$$\Delta x_i(t) = u_{i1} \Delta \alpha_1 + u_{i2} \Delta \alpha_2 + \dots + u_{im} \Delta \alpha_m \quad \text{при } i=1, 2, \dots, n. \quad (7.18)$$

Величины $u_{ij}(t)$, определяемые выражением (7.17), представляют собой функции чувствительности i -ой координаты системы по j -ому параметру.

Таким образом, чтобы оценить степень влияния разброса и изменения параметров на координаты системы необходимо определить функции чувствительности по каждой координате от каждого изменяющегося параметра.

В рассматриваемом случае $x_i(t)$ являются координатами состояния системы. Вообще же аналогичные характеристики чувствительности вводятся так же для различных показателей качества системы. Тогда в формуле (7.17) вместо x_i будет стоять соответствующий показатель качества, а в формуле (7.18) - вместо Δx_i - изменение этого показателя качества. Функции чувствительности для частотных характеристик будут функциями не времени, а частоты. Если показатели качества выражаются не функциями, а числами, то u_{ij} называются коэффициентами чувствительности.

Если в качестве изменяющихся параметров α_j выбрать внешние воздействия, то можно получить функции чувствительности системы по отношению к внешним воздействиям.

Определение функций чувствительности производится следующим образом.

Продифференцируем исходное уравнение (7.14) по изменяю-

щимся параметрам α_j . Тогда получим

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_j} \left(\frac{dx_i}{dt} \right) = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial \alpha_j} + \dots + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} \frac{\partial x_n}{\partial \alpha_j} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_j}.$$

Меняя в левой части порядок дифференцирования и учитывая (7.17), получим выражения

$$\frac{du_{ij}}{dt} = \frac{\partial \psi_i}{\partial x_1} u_{1j} + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_2} u_{2j} + \dots + \frac{\partial \psi_i}{\partial x_n} u_{nj} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \alpha_j} \text{ при } i=1, \dots, n; j=1, \dots, m; \quad (7.19)$$

которые называются уравнениями чувствительности. Решение этих уравнений определяет функции чувствительности $u_{ij}(t)$.

Рассмотрим функции чувствительности для частотных характеристик. Передаточную функцию разомкнутой системы запишем в виде

$$W(s) = W(s, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m), \quad (7.20)$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ - параметры системы, имеющие технологический разброс или эксплуатационные изменения.

Тогда амплитудная и фазовая частотные характеристики тоже зависят от этих параметров

$$A(\omega) = A(\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_m);$$

$$\psi(\omega) = \psi(\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_m).$$

Функции чувствительности для амплитудной и фазовой частотных характеристик будут

$$u_{A\alpha_j}(\omega) = \frac{\partial A(\omega)}{\partial \alpha_j}, \quad u_{\psi\alpha_j}(\omega) = \frac{\partial \psi(\omega)}{\partial \alpha_j}, \quad j=1, 2, \dots, m. \quad (7.21)$$

В результате получим как функции частоты выражения для отклонения частотных характеристик за счет разброса и изменения параметров системы:

$$\Delta A(\omega) = \sum_{j=1}^m u_{A\alpha_j}(\omega) \Delta \alpha_j, \quad \Delta \psi(\omega) = \sum_{j=1}^m u_{\psi\alpha_j}(\omega) \Delta \alpha_j. \quad (7.22)$$

Определение функций чувствительности производится при проектировании систем с наименьшими изменениями качественных показателей при отклонении значений параметров системы от расчетных.

Пример. Определить функции чувствительности для системы, заданной следующим уравнением $(T\dot{x}+1)x(t)=kg(t)$, где T, k - изменяющиеся параметры.

Решение. Уравнение системы в нормальной форме имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{T}x(t) + \frac{k}{T}g(t).$$

Введем функции чувствительности

$$u_{xk} = \frac{\partial x}{\partial k}, \quad u_{xT} = \frac{\partial x}{\partial T}.$$

Уравнение чувствительности получим исходя из (7.19)

$$\begin{aligned} \frac{du_{xk}}{dt} &= -\frac{1}{T}u_{xk} + \frac{1}{T}g(t); \\ \frac{du_{xT}}{dt} &= -\frac{1}{T}u_{xT} + \frac{1}{T^2}x(t) - \frac{k}{T^2}g(t). \end{aligned}$$

Найдя отсюда u_{xk} и u_{xT} , вычислим изменение хода процесса управляемой величины $x(t)$ за счет изменения параметров k и T по формуле

$$\Delta x(t) = u_{xk} \Delta k + u_{xT} \Delta T.$$

Передаточная функция системы: $\Phi(s) = \frac{k}{Ts+1}$.

Частотные характеристики: $A(\omega) = \frac{k}{\sqrt{T^2\omega^2+1}}$, $\psi(\omega) = -\arctg T\omega$.

Найдем функции чувствительности частотных характеристик по параметру T

$$u_{AT} = \frac{\partial A(\omega)}{\partial T} = \frac{-kT\omega^2}{(1+T^2\omega^2)^{3/2}},$$

$$u_{\psi T} = \frac{\partial \psi(\omega)}{\partial T} = \frac{\omega}{1 + T^2 \omega^2}.$$

Отклонения частотных характеристик

$$\Delta A(\omega) = u_{AT}(\omega)\Delta T, \quad \Delta \psi(\omega) = u_{\psi T}(\omega)\Delta T.$$

ВОПРОСЫ К РАЗДЕЛУ 7

1. Перечислите общие методы повышения точности систем управления. Поясните их.
2. Дайте понятие астатических системы управления. Каким образом определяется степень астатизма?
3. В чем преимущество повышения степени астатизма системы с помощью изодромных устройств?
4. Какая система является инвариантной по отношению к внешним воздействиям?
5. Что понимается под комбинированным управлением?
6. Как определяются передаточные функции компенсирующих устройств в комбинированных системах?
7. Для каких целей используются неединичные главные обратные связи?
8. Сформулируйте понятие чувствительности систем управления.
9. Каким образом можно получить уравнения чувствительности?
10. Что представляют собой функции чувствительности и коэффициенты чувствительности?

8. УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ

8.1. Постановка задачи

Под улучшением качества процесса управления понимается изменение динамических свойств системы с целью обеспечения требуемых показателей качества, главными из которых являются устойчивость, точность и быстродействие. Это достигается двумя путями.

Во-первых, настройкой регулятора. Настройка регулятора заключается в рациональном изменении его параметров, то есть коэффициентов передачи и постоянных времени так, чтобы удовлетворить поставленным требованиям качества управления, которые определяются критериями качества.

Во-вторых, введением корректирующих устройств. При невозможности решить задачу получения требуемого качества процесса управления в рамках имеющейся системы путем изменения ее параметров изменяют структуру системы. Для этой цели в систему вводят корректирующие средства, которые должны изменить динамику системы в нужном направлении. Корректирующие средства представляют собой динамические звенья с определенными передаточными функциями. Корректирующие звенья изменяют передаточную функцию регулятора системы, и таким образом обеспечивается формирование необходимого закона управления для удовлетворения поставленных требований к системе.

8.2. Законы управления. Типовые регуляторы

Закон управления - это алгоритм или функциональная зависимость, в соответствии с которыми регулятор формирует управляющее воздействие $u(t)$. Эта зависимость может быть представлена в виде

$$u(t) = F(x, g, f), \quad (8.1)$$

где F - некоторый оператор от отклонения x , задающего воздействия g и возмущающего воздействия f , а также от их производных и интегралов по времени.

Обычно выражение (8.1) может быть записано следующим образом:

$$u(t) = F_1(x) + F_2(g) + F_3(f). \quad (8.2)$$

Здесь первое слагаемое соответствует управлению по отклонению, второе и третье - управлению по внешнему воздействию.

В зависимости от вида оператора F законы управления делятся на стандартные и специальные.

Стандартные законы управления - это универсальные законы, с помощью которых можно решать задачи автоматизации разнообразных технологических процессов и объектов.

Специальные законы управления - это законы, формируемые для решения конкретных задач.

Если для формирования управляющего воздействия $u(t)$ используются только линейные математические операции, то такой закон управления называется линейным, в противном случае - нелинейным.

Линейный стандартный закон управления имеет следующий вид:

$$u(t) = k_{\Pi} x(t) + k_{\text{и}} \int_0^t x(t) dt + k_{\text{д}} \frac{dx(t)}{dt}, \quad (8.3)$$

где первое слагаемое является пропорциональной, второе - интегральной, третье - дифференциальной составляющими закона, а коэффициенты k_{Π} , $k_{\text{и}}$ и $k_{\text{д}}$ определяют вклад каждой из составляющих в формируемое управляющее воздействие.

Интегральная составляющая закона управления вводится для повышения точности, а дифференциальная - для повышения быстродействия работы системы.

Регулятор, формирующий управляющее воздействие в соответствии с (8.3), имеет передаточную функцию

$$W_R(s) = k_{\Pi} + \frac{k_I}{s} + k_D s. \quad (8.4)$$

Структурная схема линейного стандартного регулятора приведена на рис.8.1.

Настройка такого регулятора заключается в задании значений коэффициентов k_{Π} , k_I , k_D таким образом, чтобы удовлетворить требованиям качества управления в соответствии с выбранными критериями качества.

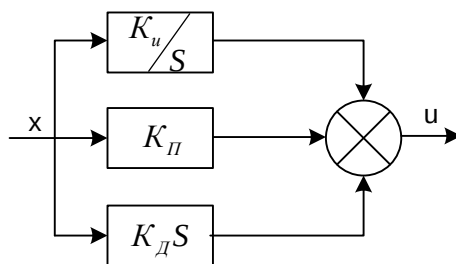


Рис. 8.1. Структура линейного стандартного регулятора

На практике широкое распространение получили типовые или промышленные регуляторы, представляющие собой универсальные автоматические устройства, легко приспособляемые для автоматизации разнообразных технологических процессов и объектов. При этом объект управления, как правило, является звеном статического типа, т.е. $W_{0y}(0) = k_{0y}$, где k_{0y} - коэффициент передачи объекта управления. Типовые регуляторы реализуют типовые законы управления, являющиеся частными случаями линейного стандартного закона управления, и классифицируются следующим образом.

П-регуляторы. Реализуют П-закон или пропорциональный закон управления

$$u(t) = k_{\Pi} x(t).$$

Передаточная функция П-регулятора

$$W_R(s) = k_{\Pi}.$$

Пропорциональное управление позволяет уменьшить устано-

вившуюся ошибку в объекте в $(1+k)$ раз, где $k = k_{\Pi} \times k_{\text{оу}}$ – коэффициент передачи разомкнутой системы. Регулирование в этом случае получается статическим, так как при любом конечном значении коэффициента передачи разомкнутой системы установившаяся ошибка будет отличной от нуля.

И-регуляторы. Реализуют И-закон или интегральный закон управления

$$u(t) = k_{\text{и}} \int_0^t x(t) dt .$$

Передаточная функция И-регулятора

$$W_R(s) = \frac{k_{\text{и}}}{s} .$$

При интегральном управлении получается система, астатическая по отношению к задающему воздействию. Повышение степени астатизма приводит к увеличению установившейся точности системы, но одновременно снижает ее быстродействие, а также приводит к ухудшению устойчивости. Снижение быстродействия объясняется тем, что в первый момент времени при появлении ошибки управляющее воздействие равняется нулю и только затем начинается его рост. В системе пропорционального управления рост управляющего воздействия в первые моменты времени происходит более интенсивно, так как наличие ошибки сразу дает появление управляющего воздействия, в то время как в системе интегрального управления должно пройти некоторое время.

ПИ-регуляторы. Реализуют ПИ-закон или пропорционально-интегральный закон управления

$$u(t) = k_{\Pi} x(t) + k_{\text{и}} \int_0^t x(t) dt .$$

Передаточная функция ПИ-регулятора

$$W_R(s) = k_{\Pi} + \frac{k_{\text{и}}}{s} = \frac{k_{\text{и}} (T_{\text{и}} s + 1)}{s} ,$$

где $T_{\text{и}} = k_{\Pi} / k_{\text{и}}$.

Пропорционально-интегральное (изодромное) управление сочетает в себе высокую точность интегрального управления (астатизм) с большим быстродействием пропорционального управления. В первые моменты времени при появлении ошибки система с ПИ-регулятором работает как система пропорционального регулирования, а в дальнейшем начинает работать как система интегрального управления.

ПД-регуляторы. Реализуют ПД-закон или пропорционально-дифференциальный закон управления

$$u(t) = k_{\text{п}} x(t) + k_{\text{д}} \frac{dx(t)}{dt}.$$

Передаточная функция ПД-регулятора

$$W_{\text{Р}}(s) = k_{\text{п}} + k_{\text{д}} s = k_{\text{п}}(T_{\text{д}}s + 1),$$

где $T_{\text{д}} = k_{\text{д}} / k_{\text{п}}$.

Пропорционально-дифференциальное управление применяется для повышения быстродействия работы системы.

Регулирование по производной не имеет самостоятельного значения, так как в установившемся состоянии производная от ошибки равна нулю и управление прекращается. Однако она играет большую роль в переходных процессах, потому что позволяет учитывать тенденцию к росту или уменьшению ошибки. В результате увеличивается скорость реакции системы, повышается быстродействие, снижается ошибка в динамике.

ПИД-регуляторы. Реализуют ПИД-закон или пропорционально-интегрально-дифференциальный закон управления, соответствующий линейному стандартному закону вида (8.3).

ПИД-регулятор, представляющий собой астатический изодромный регулятор с предвидением, обеспечивает повышенную точность и повышенное быстродействие системы.

В общем случае закон управления может иметь сложный вид.

8.3. Корректирующие устройства

Основная задача корректирующих устройств состоит в улучшении точности системы и качества переходных процессов. Однако наряду с этим путем дополнительного введения в систему корректирующих устройств решается более общая задача - обеспечение устойчивости системы, если она была неустойчивой, а затем и желаемого качества процесса управления.

Различают три вида основных корректирующих устройств.

Последовательные корректирующие устройства. Они вводятся в цепь регулятора последовательно с другими звеньями. На рис.8.2 представлена структурная схема системы с последовательным корректирующим устройством.

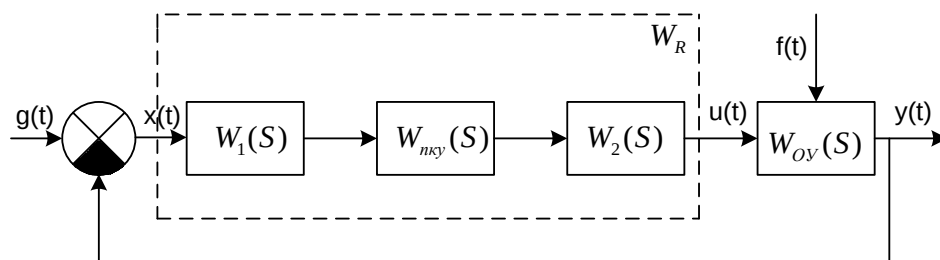


Рис. 8.2. Структурная схема системы с последовательным корректирующим устройством

Здесь $W_1(s)$, $W_2(s)$ представляют собой передаточные функции заданных частей регулятора, $W_{пкy}(s)$ - передаточная функция последовательного корректирующего звена, $W_{oy}(s)$ - передаточная функция объекта управления.

Передаточная функция регулятора с последовательным корректирующим устройством

$$W_{R1}(s) = W_1(s) W_2(s) W_{пкy}(s). \quad (8.5)$$

Способ коррекции с помощью последовательного корректирующего устройства не требует сложных расчетов и прост в практическом исполнении. Поэтому он нашел широкое применение, особенно при коррекции систем, в которых используется электрический сигнал

в виде напряжения постоянного тока, величина которого функционально связана с сигналом рассогласования. Однако, последовательные корректирующие устройства не ослабляют влияния изменений параметров элементом системы на ее показатели качества. Поэтому последовательные корректирующие устройства рекомендуется применять в системах, в которых элементы имеют достаточно стабильные параметры.

Параллельные корректирующие устройства. Они вводятся в цепь регулятора параллельно с другими звеньями. На рис.8.3 представлена структурная схема системы с параллельным корректирующим устройством.

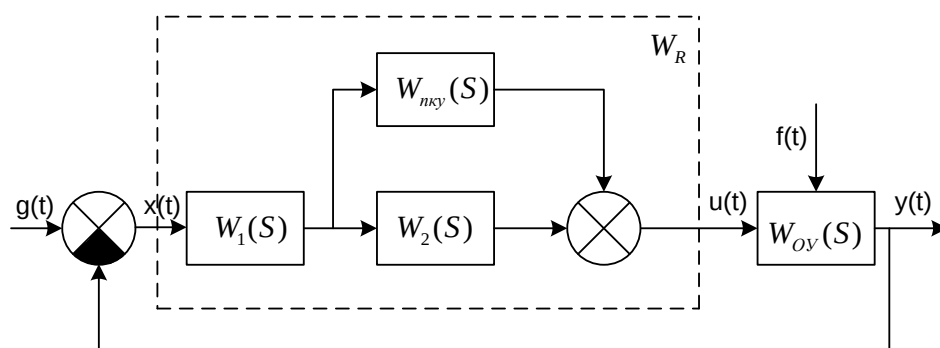


Рис.8.3. Структурная схема системы с параллельным корректирующим устройством

Здесь $W_1(s)$, $W_2(s)$ представляют собой передаточные функции заданных частей регулятора, $W_{||кy}(s)$ - передаточная функция параллельного корректирующего звена, $W_{oy}(s)$ - передаточная функция объекта управления.

Передаточная функция регулятора с параллельным корректирующим устройством

$$W_{R2}(s) = W_1(s)[W_2(s) + W_{||кy}(s)]. \quad (8.6)$$

Коррекция систем управления с помощью параллельного корректирующего устройства эффективна, когда требуется формировать сложные законы управления с введением производных и интегралов от сигнала ошибки. Примером этому могут служить рассмотренные ранее типовые регуляторы.

Обратные связи. Они вводятся в цепь регулятора и охватывают какие-либо его звенья. Как отмечалось в разделе 3.3, обратные связи могут быть положительными (ПОС) и отрицательными (ООС), кроме того - жесткими и гибкими.

На рис.8.4 представлена структурная схема системы с корректирующей обратной связью. Здесь $W_1(s)$, $W_2(s)$ представляют собой передаточные функции заданных частей регулятора, $W_{oc}(s)$ - передаточная функция корректирующей обратной связи, $W_{oy}(s)$ - передаточная функция объекта управления.

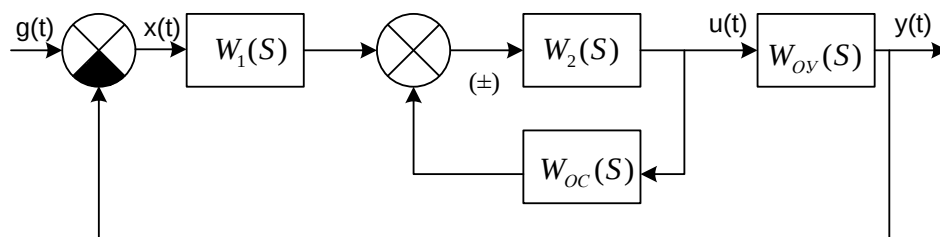


Рис.8.4. Структурная схема системы с корректирующей обратной связью

Передаточная функция регулятора с корректирующей обратной связью

$$W_{R3}(s) = W_1(s) \cdot \frac{W_2(s)}{1 \mp W_2(s)W_{oc}(s)}, \quad (8.7)$$

где знак “+” соответствует ООС, знак “-” - ПОС.

Коррекция местной обратной связью используется в системах автоматического управления наиболее часто. Корректирующая обратная связь образует в системе внутренний контур помимо контура, образуемого главной обратной связью. В подавляющем большинстве случаев используются отрицательные корректирующие обратные связи, однако могут применяться также и положительные обратные связи, например в комбинированных системах с компенсацией динамических ошибок.

Отрицательная корректирующая обратная связь позволяет существенно ослаблять влияние изменения параметров элементов и их нелинейностей, входящих в местный контур. Поэтому местной обрат-

ной связью желательно охватывать те элементы корректируемой системы, которые в процессе работы могут изменять свои параметры и имеют высокие значения коэффициентов передачи.

Основными видами корректирующих обратных связей являются:

а) жесткая обратная связь $W_{oc}(s) = k_{oc}$;

б) инерционная жесткая обратная связь $W_{oc}(s) = \frac{k_{oc}}{T_{oc}s+1}$;

в) гибкая обратная связь $W_{oc}(s) = k_{oc}s$;

г) инерционная гибкая обратная связь $W_{oc}(s) = \frac{k_{oc}s}{T_{oc}s+1}$.

Возможны и более сложные передаточные функции корректирующих обратных связей.

В динамическом отношении обратные связи оказывают самое различное действие.

Проиллюстрируем на примерах основные свойства обратных связей $W_{oc}(s)$ при охвате ими различных типов звеньев $W_{оxb}(s)$ (рис.8.5).

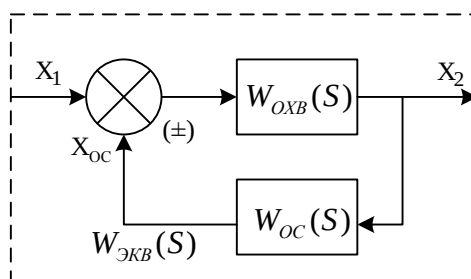


Рис. 8.5. Структурная схема обратной связи

Жесткая обратная связь $W_{oc}(s) = k_{oc}$.

1. Охватывает безынерционное звено $W_{оxb}(s)=k$.

Тогда эквивалентная передаточная функция будет

$$W_{эkb}(s) = \frac{k}{1 \mp k k_{oc}} = k_{э},$$

где $k_{э}$ - эквивалентный коэффициент передачи.

При ООС $k_{э} < k$; при ПОС $k_{э} > k$.

Если при ПОС $kk_{oc}=1$, то $k_{\varepsilon} \rightarrow \infty$, такой элемент представляет собой реле.

Следовательно, положительная обратная связь может служить для увеличения коэффициента передачи.

2. Охватывает апериодическое звено первого порядка

$$W_{охв}(s) = \frac{k}{Ts + 1}.$$

Тогда эквивалентная передаточная функция будет

$$W_{\varepsilon_{KB}}(s) = \frac{k/(Ts + 1)}{1 \mp kk_{oc}/(Ts + 1)} = \frac{k}{(Ts + 1) \mp kk_{oc}} = \frac{k_{\varepsilon}}{T_{\varepsilon}s + 1},$$

где k_{ε} - эквивалентный коэффициент передачи;

T_{ε} - эквивалентная постоянная времени.

При ООС $k_{\varepsilon} = \frac{k}{1 + kk_{oc}}$ и $T_{\varepsilon} = \frac{T}{1 + kk_{oc}}$.

Следовательно, отрицательная жесткая обратная связь уменьшает инерционность звена. Тем самым она оказывает стабилизирующее действие и улучшает качество переходного процесса в системе. Уменьшение же коэффициента передачи может быть компенсировано за счет других звеньев системы.

При ПОС $k_{\varepsilon} = \frac{k}{1 - kk_{oc}}$ и $T_{\varepsilon} = \frac{T}{1 - kk_{oc}}$.

Следовательно, положительная жесткая обратная связь может служить для увеличения коэффициента передачи. Но одновременно с этим увеличивается и постоянная времени, т.е. инерционность звена, а при $kk_{oc} > 1$ звено становится неустойчивым.

3. Охватывает интегрирующее звено $W_{охв}(s) = \frac{k}{s}$.

Тогда эквивалентная передаточная функция будет

$$W_{\varepsilon_{KB}}(s) = \frac{k/s}{1 \mp kk_{oc}/s} = \frac{k}{s \mp kk_{oc}} = \frac{k_{\varepsilon}}{T_{\varepsilon}s \mp 1},$$

где k_{ε} - эквивалентный коэффициент передачи;

T_{ε} - эквивалентная постоянная времени.

При ООС $k_{\text{э}} = \frac{1}{k_{\text{ос}}}$ и $T_{\text{э}} = \frac{1}{kk_{\text{ос}}}$.

Следовательно, под действием отрицательной жесткой обратной связи интегрирующее звено превращается в апериодическое с коэффициентом передачи целиком определяемым обратной связью. Такую связь необходимо использовать в тех случаях, когда требуется понизить степень астатизма, т.е. исключить в системе влияние интегрирующего звена. При ПОС звено теряет устойчивость.

Инерционная жесткая обратная связь $W_{\text{ос}}(s) = \frac{k_{\text{ос}}}{T_{\text{ос}} s + 1}$.

При охвате ею безынерционного звена $W_{\text{охв}}(s) = k$ получаем

$$W_{\text{экр}}(s) = \frac{k}{1 \mp kk_{\text{ос}}/(T_{\text{ос}} s + 1)} = \frac{k(T_{\text{ос}} s + 1)}{(T_{\text{ос}} s + 1) \mp kk_{\text{ос}}} = \frac{k_{\text{э}}(T_{\text{ос}} s + 1)}{T_{\text{э}} s + 1},$$

где $k_{\text{э}}$ - эквивалентный коэффициент передачи;

$T_{\text{э}}$ - эквивалентная постоянная времени.

При ООС $k_{\text{э}} = \frac{k}{1 + kk_{\text{ос}}}$ и $T_{\text{э}} = \frac{T_{\text{ос}}}{1 + kk_{\text{ос}}}$.

Следовательно, в этом случае безынерционное звено превращается в интегро-дифференцирующее звено. Инерционное запаздывание в обратной связи (в отличие от такового в прямой цепи) целесообразно использовать для улучшения качества переходных процессов, получая эффект, аналогичный введению производной в прямой цепи. Отсюда вытекает и хорошее влияние инерционной жесткой обратной связи на качество переходного процесса в системе в целом.

Положительная инерционная жесткая обратная связь обычно не используется.

Гибкая обратная связь $W_{\text{ос}}(s) = k_{\text{ос}} s$.

При охвате ею апериодического звена первого порядка

$W_{\text{охв}}(s) = \frac{k}{T_s s + 1}$ получаем

$$W_{\text{экр}}(s) = \frac{k/(T_s s + 1)}{1 \mp kk_{\text{ос}} s/(T_s s + 1)} = \frac{k}{(T_s s + 1) \mp kk_{\text{ос}} s} = \frac{k_{\text{э}}}{T_{\text{э}} s + 1},$$

где $k_{\text{э}}$ - эквивалентный коэффициент передачи;

$T_{\text{э}}$ - эквивалентная постоянная времени.

При ООС $k_{\text{э}}=k$ и $T_{\text{э}}=T+kk_{\text{ос}}$, если ПОС, то $k_{\text{э}}=k$ и $T_{\text{э}}=T-kk_{\text{ос}}$.

Таким образом, гибкая обратная связь изменяет только инерционность звена, причем для ООС эквивалентная постоянная времени увеличивается.

Инерционная гибкая обратная связь $W_{\text{ос}}(s) = \frac{k_{\text{ос}} s}{T_{\text{ос}} s + 1}$.

При охвате ею интегрирующего звена $w_{\text{охв}}(s) = \frac{k}{s}$ получаем

$$W_{\text{экр}}(s) = \frac{k/s}{1 \mp kk_{\text{ос}}/(T_{\text{ос}} s + 1)} = \frac{k(T_{\text{ос}} s + 1)}{s[(T_{\text{ос}} s + 1) \mp kk_{\text{ос}}]} = \frac{k_{\text{э}}(T_{\text{ос}} s + 1)}{s(T_{\text{э}} s + 1)},$$

где $k_{\text{э}}$ - эквивалентный коэффициент передачи;

$T_{\text{э}}$ - эквивалентная постоянная времени.

При ООС $k_{\text{э}} = \frac{k}{1 + kk_{\text{ос}}}$ и $T_{\text{э}} = \frac{T_{\text{ос}}}{1 + kk_{\text{ос}}}$,

при ПОС $k_{\text{э}} = \frac{k}{1 - kk_{\text{ос}}}$ и $T_{\text{э}} = \frac{T_{\text{ос}}}{1 - kk_{\text{ос}}}$.

Следовательно, охват интегрирующего звена инерционной гибкой обратной связью эквивалентен последовательному включению интегро-дифференцирующего звена. При отрицательной инерционной гибкой обратной связи и большом коэффициенте передачи k интегрирующее звено приближенно становится изодромным.

Способ коррекции местной обратной связью позволяет наилучшим образом скорректировать динамические свойства системы по сравнению со способами коррекции с помощью последовательных и параллельных корректирующих устройств.

Динамические свойства линейных систем при введении корректирующих устройств различного вида могут быть сделаны одинаковыми. Следовательно, включение любого типа корректирующего устройства может обеспечить требуемое качество работы системы. В этом случае передаточные функции регуляторов с последовательной коррекцией (8.5), параллельной коррекцией (8.6) и местной обратной

связью (8.7) должны быть одинаковыми, т.е.

$$W_{R1}(s) = W_{R2}(s) = W_{R3}(s). \quad (8.8)$$

Отсюда следует формула перехода от передаточной функции корректирующего устройства одного вида к передаточной функции эквивалентного корректирующего устройства другого вида

$$W_2(s)W_{ПКУ}(s) = W_2(s) + W_{||\text{КУ}}(s) = \frac{W_2(s)}{1 \mp W_2(s)W_{\text{ос}}(s)}. \quad (8.9)$$

Использование того или иного вида корректирующих устройств, т.е. последовательных звеньев, параллельных звеньев или обратных связей, определяется удобством технической реализации.

8.4. Синтез систем автоматического управления

Синтез системы управления представляет собой направленный расчет системы, имеющий конечной целью, во-первых, отыскание рациональной структуры системы и, во-вторых, определение оптимальных значений параметров ее отдельных звеньев из условия обеспечения ряда требований, которые следуют из назначения проектируемой системы и обеспечения ее характеристик.

Синтез можно трактовать как задачу оптимизации и рассматривать такое построение системы управления, при котором для заданных условий работы обеспечивается оптимум выбранного критерия качества работы системы.

Если характеристики задающих и возмущающих воздействий известны, то систему можно спроектировать как оптимальную, обеспечив минимальное значение суммарной среднеквадратической ошибки. Решить эту задачу позволяет теория оптимальных фильтров Н.Винера и Р.Калмана.

Наиболее общей является постановка задачи достижения минимума функционала

$$J = \int_0^T [v_x(t) + v_u(t)] dt, \quad (8.10)$$

где $v_x(t)$ - квадратичная форма относительно ошибки системы;
 $v_u(t)$ - квадратичная форма относительно управляющего воздействия;

T - время работы системы.

Первая квадратичная форма в (8.10) выбирается из требований к точности проектируемой системы, а вторая учитывает ограничения на управляющее воздействие $u(t)$. При этом из допустимого множества $u(t)$ необходимо выбрать и технически реализовать такое управляющее воздействие, которое переводит объект управления из начального состояния в конечное и минимизирует функционал (8.10). Для решения таких задач используются методы вариационного исчисления, принцип максимума Л.С.Понтрягина, метод динамического программирования Р.Белмана. Здесь возможны два случая, во-первых, полностью известна информация о состоянии объекта управления, во-вторых, информация об объекте управления неполная или вообще неизвестна. Во втором случае при синтезе системы возникает дополнительная задача оценки состояния объекта управления, на основании которой формируется оптимальное управляющее воздействие.

Синтез можно трактовать как инженерную задачу, сводящуюся к такому построению системы управления, при котором обеспечивается выполнение технических требований к ней. Один из возможных способов описания требований к проектируемой системе - задание показателей качества работы системы, рассмотренных в разделе 6. Это может быть сделано, если известны характеристики задающих и возмущающих воздействий. Детерминированные воздействия должны быть заданы как функции времени или их производные. Для случайных воздействий должны быть известны их корреляционные функции или спектральные плотности. При такой постановке синтез системы сводится к выбору структурной схемы, с помощью которой можно обеспечить показатели качества работы системы не хуже заданных.

Иногда в понятие инженерного синтеза вкладывается еще более узкий смысл и рассматривается синтез, имеющий целью определение вида и параметров корректирующих средств, которые необходимо добавить к неизменной части системы - объекту управления с регулятором, чтобы обеспечить требуемые динамические качества. Обеспечение необходимого качества управления достигается выработкой вполне определенного закона управления $u(t)$. Для этого необходимо, чтобы при известной передаточной функции объекта управления $W_{0y}(s)$ регулятор имел определенную передаточную функцию $W_R(s)$ и, соответственно, передаточная функция разомкнутой системы должна быть $W(s) = W_R(s)W_{0y}(s)$.

При инженерном синтезе системы управления необходимо обеспечить, во-первых, требуемую точность, во-вторых, приемлемый характер переходных процессов.

Частотный метод синтеза корректирующих устройств. Наиболее распространен частотный метод синтеза с помощью логарифмических частотных характеристик. Логарифмическая амплитудная частотная характеристика разомкнутой системы управления однозначно определяется ее передаточной функцией и соответственно наоборот, логарифмической амплитудной частотной характеристике однозначно соответствует передаточная функция разомкнутой системы. Следовательно, на основе требований, предъявляемых к системе можно сформировать желаемый вид ЛАХ, которой будет соответствовать требуемая передаточная функция системы и закон управления. На основе этой взаимосвязи и построен метод синтеза систем автоматического управления по логарифмическим частотным характеристикам.

Процесс синтеза системы управления включает в себя следующие пункты.

1. Построение располагаемой ЛАХ $L_P(\omega)$. Под располагаемой ЛАХ понимается характеристика исходной системы, состоящей из объекта управления и регулятора и не снабженной корректирующими средствами, обеспечивающими требуемое качество работы. Распола-

гаемая ЛАХ $L_p(\omega)$ строится по виду располагаемой передаточной функции $W_p(s)$ исходной разомкнутой системы.

Замечание: при построении располагаемой ЛАХ обычно значение общего коэффициента передачи разомкнутой системы $k_{\text{общ}}$ выбирается на основании требований, предъявляемых к точности системы управления (см. п.2).

2. Построение желаемой ЛАХ $L_{\text{ж}}(\omega)$. Желаемая логарифмическая амплитудная частотная характеристика формируется исходя из заданных требований к системе по точности и качеству переходного процесса. Точность задается значениями установившихся ошибок, а качество переходного процесса - величиной перерегулирования и временем регулирования.

Построение желаемой ЛАХ производится по частям.

Низкочастотная часть желаемой ЛАХ формируется из условия обеспечения требуемой точности работы системы управления в установившемся режиме, то есть из условия того, что установившаяся ошибка системы $x(\infty)$ не должна превышать заданное значение Δ_3 ($x(\infty) \leq \Delta_3$).

Требования точности системы формулируются по разному. В системах управления величина установившейся ошибки зависит от общего коэффициента передачи разомкнутой системы и вида задающего воздействия.

Для систем стабилизации при постоянном задающем воздействии $g(t)=g_0=\text{const}$ установившаяся ошибка $x_g(\infty) = g_0/(1 + k_{\text{общ}})$.

Откуда желаемое значение общего коэффициента передачи разомкнутой системы

$$k_{\text{общ}} \geq \frac{g_0}{\Delta_3} - 1. \quad (8.11)$$

Таким образом, низкочастотная часть желаемой ЛАХ должна иметь наклон 0 дБ/дек и проходить не ниже точки с координатами: $\omega=1 \text{ с}^{-1}$, $L(1)=20\lg k_{\text{общ}}$ [дБ].

Если требуется обеспечить слежение за задающим воздействием $g(t)=g_1 t$ при $g_1=\text{const}$, то установившаяся ошибка $x_g(\infty) = g_1/k_{\text{общ}}$.

Отсюда находим желаемое значение

$$k_{\text{общ}} \geq \frac{g_1}{\Delta_3}. \quad (8.12)$$

Таким образом, низкочастотная часть желаемой ЛАХ должна иметь наклон -20 дБ/дек и проходить не ниже точки с координатами: $\omega=1 \text{ с}^{-1}$, $L(1)=20\lg k_{\text{общ}}$ [дБ].

При отработке гармонического задающего воздействия $g(t)=g_m \sin \omega_k t$ точность оценивается по величине амплитуды ошибки, вычисляемой по выражению (6.15).

В этом случае модуль желаемой частотной передаточной функции разомкнутой системы на частоте качки ω_k должен удовлетворять условию

$$A(\omega_k) \geq \frac{g_m}{\Delta_3}. \quad (8.13)$$

Таким образом, низкочастотная часть желаемой ЛАХ должна иметь наклон -20 дБ/дек и проходить не ниже точки A_k (рис.8.6) с координатами: $\omega_k [\text{с}^{-1}]$, $L_k=L(\omega_k) = 20\lg A(\omega_k)$ [дБ].

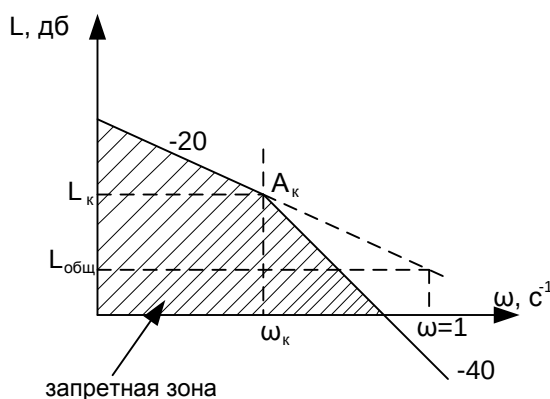


Рис. 8.6. Запретная область для желаемой ЛАХ

Для определения общего коэффициента передачи разомкнутой системы $k_{\text{общ}}$ по низкочастотной части желаемой ЛАХ находят амплитуду $L_{\text{общ}}$ на частоте $\omega=1 \text{ с}^{-1}$, тогда

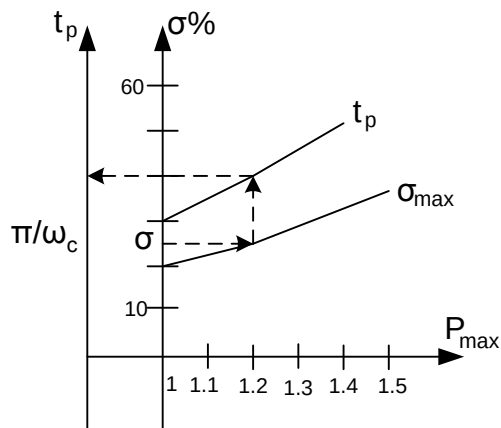
$$k_{\text{общ}} = 10^{\frac{L_{\text{общ}}}{20}}. \quad (8.14)$$

Часто точный закон изменения задающего воздействия неизвестен, а заданы только максимальная скорость $\dot{g}_m$ и максимальное ускорение $\ddot{g}_m$ задающего воздействия. В этом случае при расчете используют эквивалентное гармоническое воздействие, наибольшее значение первой производной которого равно заданному максимальному значению скорости, а наибольшее значение второй производной – максимальному значению ускорения. Тогда частота качки ω_k и амплитуда эквивалентного гармонического воздействия определяются по формулам:

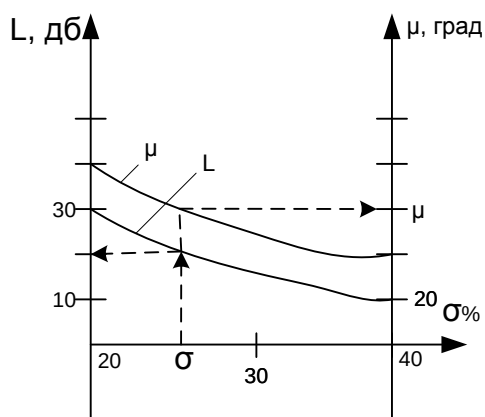
$$\omega_k = \frac{\ddot{g}_m}{\dot{g}_m}; \quad g_m = \frac{\dot{g}_m}{\omega_k}. \quad (8.15)$$

Если скорость задающего воздействия максимальная, а ускорение убывает, то точка A_k (рис.8.6) будет двигаться по прямой с наклоном -20дБ/дек в диапазоне частот $\omega < \omega_k$. Если же ускорение равно максимальному, а скорость убывает, то точка A_k двигается по прямой с наклоном -40дБ/дек в диапазоне частот $\omega > \omega_k$. Область, расположенная ниже точки A_k и двух прямых с наклоном -20дБ/дек и -40дБ/дек , представляет собой запретную область для желаемой логарифмической амплитудной частотной характеристики системы.

Среднечастотный участок желаемой ЛАХ строится из условия обеспечения основных показателей качества переходного процесса - перерегулирования и времени регулирования. Это достигается тем, что среднечастотный участок желаемой ЛАХ (рис.8.8) имеет наклон -20 дБ/дек (см. раздел 5.6) и пересекает ось частот на частоте среза ω_c , которая определяется по номограмме В.В.Солодовникова (см. раздел 6.4), исходя из заданных значений величины перерегулирования σ и времени регулирования t_p .



а)



б)

Рис. 8.7. Номограммы В.В.Солодовникова

По номограмме (рис.8.7,а), отложив заданную величину σ (например, 25%), определяем величину t_p (как показано стрелками), например,

$$t_p = \frac{2,8\pi}{\omega_c}.$$

Поскольку требуемое значение t_p задается, можно вычислить необходимую частоту среза

$$\omega_c = \frac{2,8\pi}{t_p}. \quad (8.16)$$

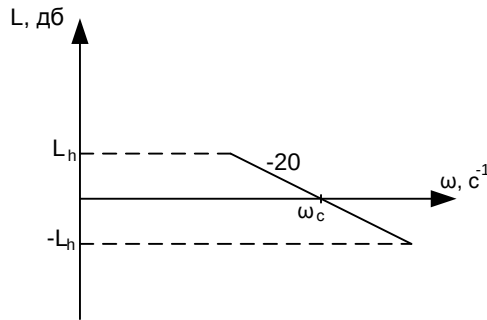


Рис. 8.8. Среднечастотный участок желаемой ЛАХ

Протяженность среднечастотного участка определяется номограммой (рис.8.7,б), устанавливающей связь между показателями качества и запасами устойчивости. Так, например, для обеспечения $\sigma=25\%$ требуется запас устойчивости по модулю $L_h=20$ дБ и по фазе $\mu=58^\circ$. Среднечастотный участок проводится с наклоном -20 дБ/дек влево и вправо от частоты среза ω_c до достижения модулей, равных L_h и $-L_h$. После этого участки средних и низких частот сопрягаются прямой с наклоном -40 или -60 дБ/дек, как удобнее.

Высокочастотный участок желаемой ЛАХ проводится параллельно высокочастотному участку располагаемой ЛАХ. Область высоких частот содержит те сопрягающие частоты, пренебрежение которыми не изменяет существенного вида ЛЧХ системы в области средних частот. Можно считать, что “малыми” параметрами, не влияющими существенно на динамику системы, являются постоянные времени, удовлетворяющие условиям

$$T \leq \frac{1}{(5 \div 10)\omega_c}. \quad (8.17)$$

3. Определение передаточных функций $W_{\text{ж}}(s)$ желаемой разомкнутой системы и $\Phi_{\text{ж}}(s)$ желаемой замкнутой системы. Желаемая передаточная функция разомкнутой системы $W_{\text{ж}}(s)$ находится по виду желаемой ЛАХ $L_{\text{ж}}(\omega)$, а желаемая передаточная функция замкнутой системы $\Phi_{\text{ж}}(s)$ определяется по методике, изложенной в разделе 4.1. Затем строятся фазовая частотная характеристика желаемой разомкнутой системы и переходная характеристика желаемой замкнутой

системы и оцениваются фактически получающиеся величины запасов устойчивости и качественные показатели системы. Если полученные при этом показатели качества не превышают требуемых значений, определенных заданием, то построение желаемой ЛАХ считается законченным, иначе построенную желаемую ЛАХ необходимо скорректировать.

Если получившаяся величина перерегулирования превышает заданное значение, то требуется расширение среднечастотного участка желаемой ЛАХ.

Если время регулирования получается больше заданного, то необходимо увеличить частоту среза.

На рис.8.9, в качестве примера, приведены ЛАХ располагаемой $L_p(\omega)$ и ЛАХ желаемой $L_{\text{ж}}(\omega)$ разомкнутой системы.

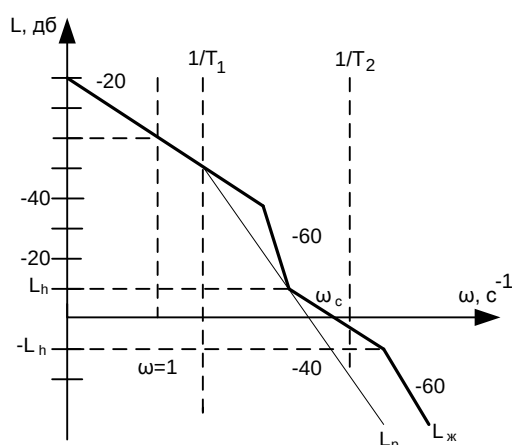


Рис. 8.9. ЛАХ располагаемой и желаемой разомкнутой системы

Здесь располагаемая передаточная функция разомкнутой системы

$$W_p(s) = \frac{k_{\text{общ}}}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)} \quad (8.18)$$

и желаемая

$$W_{\text{ж}}(s) = \frac{k_{\text{общ}} (T'' s + 1)^2}{s(T' s + 1)^2 (T''' s + 1)^2}, \quad (8.19)$$

где $k_{\text{общ}}=1000 \text{ с}^{-1}$.

4. Определение вида и параметров корректирующего устройства.

Расчет последовательных корректирующих устройств.

В случае выбора последовательного корректирующего устройства желаемая передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_{\text{ж}}(s) = W_{\text{ПКУ}}(s)W_{\text{р}}(s), \quad (8.20)$$

где $W_{\text{ПКУ}}(s)$ - передаточная функция последовательного корректирующего устройства;

$W_{\text{р}}(s)$ - передаточная функция располагаемой системы.

Тогда логарифмическая амплитудная частотная характеристика желаемой системы

$$L_{\text{ж}}(\omega) = L_{\text{р}}(\omega) + L_{\text{ПКУ}}(\omega). \quad (8.21)$$

Следовательно, логарифмическая амплитудная частотная характеристика последовательного корректирующего устройства

$$L_{\text{ПКУ}}(\omega) = L_{\text{ж}}(\omega) - L_{\text{р}}(\omega). \quad (8.22)$$

Выражение (8.22) показывает, что для определения последовательного корректирующего устройства необходимо:

а) по располагаемой передаточной функции $W_{\text{р}}(s)$ построить ЛАХ располагаемой системы $L_{\text{р}}(\omega)$;

б) по заданным показателям качества построить ЛАХ желаемой системы $L_{\text{ж}}(\omega)$;

в) вычесть из желаемой ЛАХ располагаемую ЛАХ, что позволит найти требуемую ЛАХ последовательного корректирующего устройства $L_{\text{ПКУ}}(\omega)$;

г) по виду ЛАХ последовательного корректирующего устройства $L_{\text{ПКУ}}(\omega)$ определить его передаточную функцию $W_{\text{ПКУ}}(s)$ и схему.

На рис.8.10, в качестве примера, представлены ЛАХ располага-

емой $L_p(\omega)$, ЛАХ желаемой $L_{\text{ж}}(\omega)$ разомкнутой системы и ЛАХ последовательного корректирующего устройства $L_{\text{пк}}(\omega)$.

В результате получаем

$$W_{\text{пк}}(s) = \frac{(T''s+1)^2 (T_1s+1)(T_2s+1)}{(T's+1)^2 (T'''s+1)^2}.$$

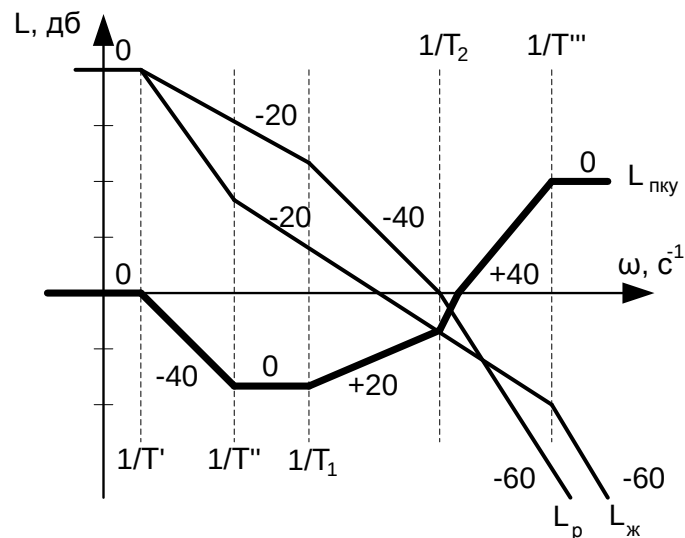


Рис.8.10. ЛАХ располагаемой и желаемой разомкнутой системы и последовательного корректирующего устройства

Расчет корректирующих обратных связей.

В случае выбора корректирующего устройства типа обратной связи желаемая передаточная функция разомкнутой системы имеет вид

$$W_{\text{ж}}(s) = W_{\text{неохв}}(s) \cdot \frac{W_{\text{охв}}(s)}{1 + W_{\text{охв}}(s)W_{\text{ос}}(s)}, \quad (8.23)$$

где $W_{\text{неохв}}(s)$ - передаточная функция звеньев располагаемой системы, неохваченных обратной связью;

$W_{\text{охв}}(s)$ - передаточная функция звеньев располагаемой системы, охватываемых обратной связью;

$W_{\text{ос}}(s)$ - передаточная функция корректирующей обратной связи.

Выбор обратных связей выполняется для тех диапазонов частот, для которых справедливо неравенство

$$|W_{\text{ОХВ}}(j\omega) W_{\text{ОС}}(j\omega)| \gg 1. \quad (8.24)$$

В этом случае логарифмическая амплитудная частотная характеристика желаемой системы будет

$$L_{\text{Ж}}(\omega) = L_{\text{НЕОХВ}}(\omega) - L_{\text{ОС}}(\omega). \quad (8.25)$$

Следовательно, логарифмическая амплитудная частотная характеристика корректирующей обратной связи

$$L_{\text{ОС}}(\omega) = L_{\text{НЕОХВ}}(\omega) - L_{\text{Ж}}(\omega). \quad (8.26)$$

Выражение (8.26) показывает, что для определения корректирующей обратной связи необходимо:

а) по передаточной функции $W_{\text{НЕОХВ}}(s)$ звеньев располагаемой системы, не охваченных обратной связью, построить ЛАХ неохваченных звеньев $L_{\text{НЕОХВ}}(\omega)$;

б) по заданным показателям качества построить ЛАХ желаемой системы $L_{\text{Ж}}(\omega)$;

в) вычесть из ЛАХ неохваченных звеньев $L_{\text{НЕОХВ}}(\omega)$ желаемую ЛАХ $L_{\text{Ж}}(\omega)$, что позволит найти требуемую ЛАХ корректирующей обратной связи $L_{\text{ОС}}(\omega)$;

г) по виду ЛАХ корректирующей обратной связи $L_{\text{ОС}}(\omega)$ определить ее передаточную функцию $W_{\text{ОС}}(s)$ и схему.

В случае необходимости последовательное корректирующее устройство или корректирующая обратная связь могут быть пересчитаны на эквивалентное параллельное корректирующее звено согласно выражению (8.9).

5. Техническая реализация корректирующих средств. По полученной передаточной функции необходимо создать реальное корректирующее устройство, которое реализуется аппаратно или программно. В случае аппаратной реализации требуется подобрать схему и па-

раметры корректирующего звена. В литературе [7,10,12] имеются таблицы типовых корректирующих устройств как пассивных, так и активных.

На рис.8.11 приведена блок-схема алгоритма синтеза систем управления.

ВОПРОСЫ К РАЗДЕЛУ 8

- 1. Что понимается под улучшением качества процесса управления и как это достигается?*
- 2. Назовите линейный стандартный закон управления.*
- 3. Расскажите о типовых законах управления и типовых регуляторах.*
- 4. Каково назначение корректирующих устройств? Укажите способы их включения и особенности.*
- 5. Сформулируйте свойства основных видов корректирующих обратных связей.*
- 6. Поясните постановку задачи синтеза систем.*
- 7. Перечислите этапы синтеза систем.*
- 8. Объясните построение желаемой ЛАХ проектируемой системы.*
- 9. Каким образом формируется передаточная функция разомкнутой проектируемой системы?*
- 10. Как определяются передаточные функции корректирующих устройств?*

9. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ

9.1. Введение в статистическую динамику систем управления

Во многих случаях внешние воздействия, прикладываемые к системе, носят случайный характер, поэтому можно оценить только вероятность появления той или иной формы воздействий в тот или иной момент времени.

Примерами таких систем могут служить система автоматического регулирования напряжения электрического генератора, нагрузка которого определяется потребителями электрической энергии, автопилот, радиолокационная станция и т.д.

Поведение автоматических систем под влиянием случайных воздействий исследуется методами статистической динамики, базирующимися на теории вероятности.

Статистическая динамика системы управления - это поведение системы при случайных воздействиях. При этом рассматривается модель системы, представленная на рис. 9.1.

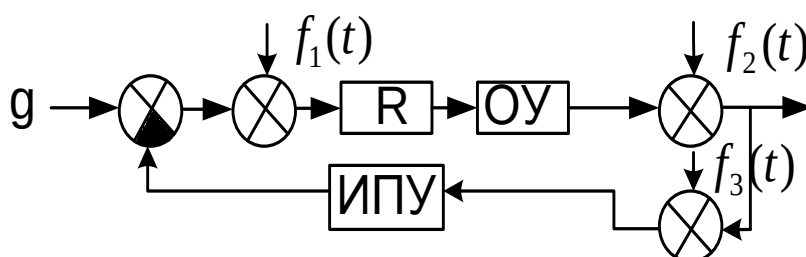


Рис. 9.1. Базовая структура модели системы:

ОУ - объект управления; R - регулятор;

ИПУ - измерительно-преобразовательное устройство;

$g(t)=m(t)+n(t)$ - задающее воздействие;

$m(t)$ - полезный сигнал;

$n(t)$ - помеха; $y(t)$ - управляемая величина;
 $f_1(t)$ - внутренние шумы системы, приведенные к входу;
 $f_2(t)$ - внешнее возмущение на объект управления, приведенное к его выходу;
 $f_3(t)$ - помехи канала обратной связи, приведенные к входу измерительного устройства.

Задачей анализа системы, работающей в условиях помех, является исследование ее точности и определение ошибок, вызванных этими случайными помехами. Задачей синтеза системы в этом случае является минимизация ошибок, обусловленных полезным сигналом и помехами. С точки зрения наилучшего воспроизведения полезного сигнала система должна иметь возможно большую полосу пропускания, а с точки зрения наилучшего подавления помехи система, наоборот, должна иметь возможно меньшую полосу пропускания. Критерием получения оптимального решения здесь будет минимальное значение результирующей ошибки системы, определяемой полезным сигналом и помехой [1,6,8].

Для случайных величин наиболее просто определить среднеквадратичную ошибку, поэтому ее и используют для оценки точности автоматической системы.

Задачей синтеза оптимальной системы является нахождение ее передаточной функции, при которой суммарная средняя квадратическая ошибка минимальна.

Задача синтеза системы при заданной структурной схеме заключается в том, что при известных характеристиках полезного сигнала и помехи необходимо определить оптимальные значения параметров системы, при которых суммарная средняя квадратическая ошибка минимальна.

9.2. Общие сведения о случайных процессах

Случайная функция, зарегистрированная в той или иной форме по результатам опыта, называется реализацией случайной функции.

Случайная функция x , для которой независимой переменной является время t , называется случайным или стохастическим процессом. Этот процесс можно отобразить в виде реализаций случайной функции (рис.9.2).

Случайный процесс не есть определенная кривая $x(t)$, а является множеством кривых $x(t)$, так же как случайная величина не имеет определенного значения, а является совокупностью (множеством) возможных значений.

Можно сказать, что случайный процесс есть такая функция времени, значение которой в каждый момент времени является случайной величиной.

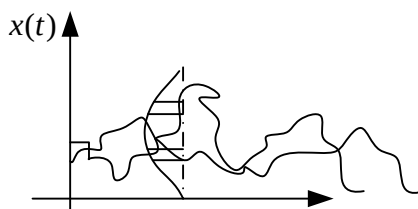


Рис. 9.2. Реализации случайного процесса

В случайном процессе нет определенной зависимости $x(t)$. Каждая кривая множества (рис.9.2) является лишь отдельной реализацией случайного процесса. Никогда нельзя сказать заранее, по какой кривой пойдет процесс.

Чтобы судить о возможном характере протекания случайного процесса, введены вероятностные характеристики, основной из которых является закон распределения.

Закон распределения для непрерывных случайных функций задается в виде плотности вероятности $\omega(x)$, называемой дифференциальным законом распределения (рис.9.3).

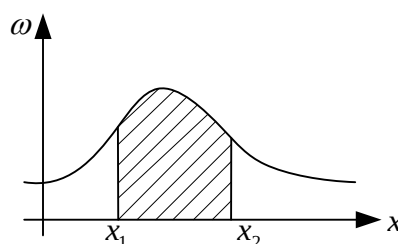


Рис. 9.3. Дифференциальный закон распределения

Выражение $\omega(x)dx$ означает вероятность того, что случайная величина содержится между x и $x+dx$:

$$\omega(x) dx = P(x < \xi < x + dx) . \quad (9.1)$$

Вероятность того, что случайная величина содержится между значениями x_1 и x_2 , определяется формулой

$$\int_{x_1}^{x_2} \omega(x) dx = P(x_1 < \xi < x_2), \quad (9.2)$$

что геометрически выражается заштрихованной площадью на рис.9.3.

Вся площадь под кривой $\omega(x)$ равна единице:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \omega(x) dx = 1 . \quad (9.3)$$

Случайные процессы подразделяются на стационарные и нестационарные. Если закон распределения $\omega(x,t)$ не зависит от времени, то такой случайный процесс называется стационарным, в противном случае - нестационарным. В стационарном случайном процессе закон распределения один и тот же для каждого момента времени, т.е. $\omega(x,t)=\omega(x)$.

Хотя закон распределения полностью определяет случайную величину, на практике используются более простые усредненные статистические характеристики случайной величины, выражающиеся в виде обыкновенных неслучайных чисел.

Статистический метод изучает не отдельную реализацию случайного процесса, а свойство всего множества в целом путем их усреднения. При этом используются следующие статистические характеристики.

Среднее по множеству значение случайной величины (математическое ожидание)

$$\tilde{x}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \omega(x, t) dx . \quad (9.4)$$

Среднее по множеству значение квадрата случайной величины

$$\tilde{x}^2(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x^2(t) \omega(x, t) dx . \quad (9.5)$$

Дисперсия

$$D_{\tilde{x}} = \sigma_{\tilde{x}}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x(t) - \tilde{x}(t))^2 \omega(x, t) dx = \tilde{x}^2(t) - (\tilde{x}(t))^2 , \quad (9.6)$$

где $\sigma_{\tilde{x}}$ - среднеквадратичное отклонение.

Для стационарных случайных процессов эти характеристики не зависят от времени t , в отличие от нестационарных случайных процессов.

Среднее значение случайного процесса представляет собой некоторую среднюю кривую, около которой группируются все возможные отдельные реализации этого процесса, а дисперсия или среднеквадратичное отклонение характеризуют рассеяние отдельных возможных реализаций процесса около этой средней кривой.

Кроме средних по множеству значений случайной величины определяют средние по времени значения для отдельной реализации случайного процесса.

Среднее значение по времени случайной величины x определяется на интервале времени T (рис.9.4)

$$\bar{x}(t) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt . \quad (9.7)$$

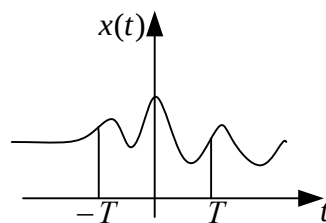


Рис. 9.4. Реализации случайного процесса

Среднее значение по времени квадрата случайной функции x

$$\overline{x^2(t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt. \quad (9.8)$$

Дисперсия

$$D_{\bar{x}} = \sigma_{\bar{x}}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) - \bar{x}(t))^2 dt = \overline{x^2(t)} - (\bar{x}(t))^2, \quad (9.9)$$

где $\sigma_{\bar{x}}$ - среднеквадратичное отклонение.

Стационарные случайные процессы обладают свойством эргодической гипотезы, в соответствии с которой для стационарного случайного процесса с вероятностью, равной единице, всякое среднее по множеству равно соответствующему среднему по времени, в частности

$$\begin{aligned} \tilde{x}(t) &= \bar{x}(t); \\ \tilde{x}^2 &= \overline{x^2}; \\ D_{\tilde{x}} &= D_{\bar{x}} \end{aligned} \quad (9.10)$$

и т.д.

Эргодическая гипотеза позволяет значительно упростить все расчеты и эксперименты. Она позволяет для определения статистических характеристик, вместо параллельного испытания многих однотипных систем в один и тот же момент времени, пользоваться одной кривой $x(t)$, полученной при испытании одной системы в течение длительного времени.

Таким образом, важное свойство стационарного случайного процесса состоит в том, что отдельная его реализация на бесконечном промежутке времени полностью определяет собой весь случайный процесс со всеми бесчисленными возможными его реализациями.

Корреляционная функция. Начальный корреляционный момент двух значений случайной функции $x(t)$ и $x(t_1)$, взятых в моменты времени t и t_1 , носит название корреляционной (автокорреляционной) функции. Корреляционная функция является универсальной характеристикой для случайного процесса. Она определяет зависимость слу-

чайной величины в последующий момент времени $x(t_1)$ от предыдущего значения $x(t)$ в момент времени t . Это есть мера связи между ними.

В случае стационарного случайного процесса (рис.9.5) корреляционная функция $R(\tau)$ представляет собой среднее во времени значение за промежуток времени $T \rightarrow \infty$ от произведения случайных величин $x(t)$ и $x(t+\tau)$, взятых в случайном процессе в любые два момента времени, отличающихся друг от друга на определенный промежуток времени τ

$$R_x(\tau) = \overline{x(t) \cdot x(t + \tau)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T (x(t) \cdot x(t + \tau)) dt. \quad (9.11)$$

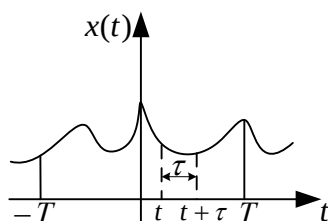


Рис. 9.5. Реализации случайного процесса

Для стационарного случайного процесса корреляционная функция определяет зависимость случайной величины x в последующий момент времени $t+\tau$ от предыдущего значения в момент t . Корреляционная функция имеет вид, представленный на рис.9.6. Чем менее инерционен объект наблюдения, тем быстрее убывает $R(\tau)$ с увеличением τ . Она постоянна для всех случайных процессов, подчиненных одинаковому закону распределения.

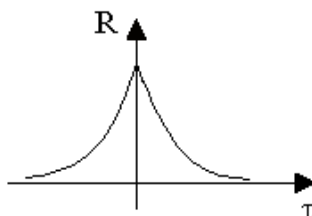


Рис. 9.6. Корреляционная функция случайного процесса

Основные свойства корреляционной функции стационарного случайного процесса [1].

Корреляционная функция является четной функцией, т.е. $R(\tau)=R(-\tau)$.

При $\tau=0$ корреляционная функция дает средний квадрат случайной величины:

$$R_x(0) = \overline{x^2}. \quad (9.12)$$

При $\tau \rightarrow \infty$ имеем

$$R(\infty) = (\bar{x})^2 = (\bar{y})^2. \quad (9.13)$$

Корреляционная функция суммы двух стационарных случайных процессов $z(t)=x(t)+y(t)$ определяется как

$$R_z(\tau) = \overline{(x(t)+y(t))(x(t+\tau)+y(t+\tau))} = R_x(\tau) + R_y(\tau) + R_{xy}(\tau) + R_{yx}(\tau), \quad (9.14)$$

где $R_{xy}(\tau)$, $R_{yx}(\tau)$ - взаимные корреляционные функции.

Они характеризуют взаимную связь двух случайных процессов между собой в разные моменты времени, отстоящие друг от друга на промежуток времени τ . При $\tau=0$ будет $R_{xy}(0) = R_{yx}(0)$.

Для не связанных друг с другом случайных процессов для всех τ справедливы равенства $R_{xy}(\tau)=0$ и $R_{yx}(\tau)=0$.

Спектральная плотность стационарного случайного процесса.

Представляет собой прямое преобразование Фурье от корреляционной функции

$$S_x(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_x(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (9.15)$$

Чтобы определить корреляционную функцию $R_x(\tau)$ по известной спектральной плотности $S_x(\omega)$ используется обратное преобразование Фурье

$$R_x(\tau) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega. \quad (9.16)$$

Для $\tau=0$ имеем

$$R_x(0) = \overline{x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (9.17)$$

Последнее выражение представляет собой важное свойство спектральной плотности, заключающееся в том, что интегрирование ее по всем частотам от $-\infty$ до $+\infty$ дает средний квадрат исходной функции времени $x(t)$.

По своему физическому смыслу спектральная плотность есть величина, которая пропорциональна средней мощности процесса в интервале частот от ω до $\omega+d\omega$.

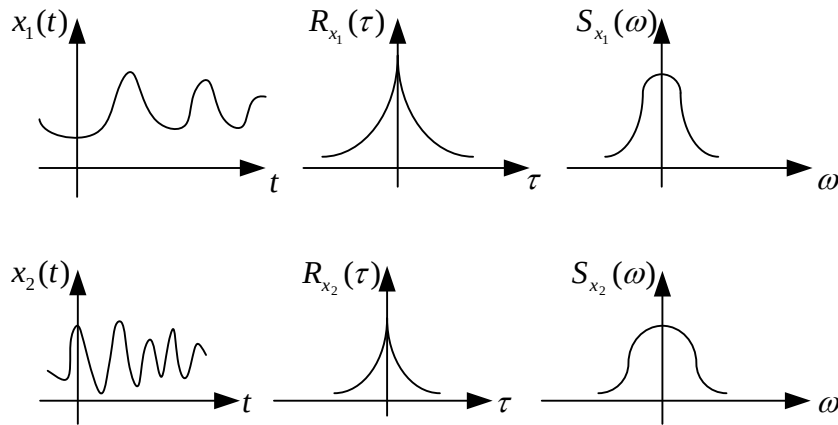


Рис. 9.7. Взаимосвязь между случайной функцией и ее характеристиками

Аналогично взаимным корреляционным функциям введено понятие взаимных спектральных плотностей:

$$S_{xy}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{xy}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau; \quad (9.18)$$

$$S_{yx}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{yx}(\tau) \cdot e^{-j\omega\tau} d\tau. \quad (9.19)$$

Связь между случайной функцией, ее корреляционной функцией и спектральной плотностью приведена на рис.9.7.

9.3. Оценка работы линейных автоматических систем при случайных стационарных воздействиях

Оценить работу автоматических систем при сигналах внешних воздействий в виде стационарных случайных процессов можно с помощью корреляционных функций и спектральных плотностей.

Если задающее воздействие $g(t)$ является случайным процессом, то выходная координата системы $y(t)$ и ошибка воспроизведения $x(t)=g(t)-y(t)$ представляют собой также случайные процессы.

Следовательно, при случайных воздействиях речь может идти об определении не мгновенных, а лишь некоторых средних значений выходной переменной системы и ошибки.

Таковыми средними значениями являются среднее значение квадрата выходной переменной системы

$$\overline{y^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T y^2(t) dt \quad (9.20)$$

и квадрата ошибки

$$\overline{x^2} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x^2(t) dt. \quad (9.21)$$

Эти величины можно найти через их корреляционные функции и спектральные плотности

$$\overline{y^2} = R_y(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_y(\omega) d\omega; \quad (9.22)$$

$$\overline{x^2} = R_x(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} S_x(\omega) d\omega. \quad (9.23)$$

Следовательно, для исследования статистической точности автоматических систем необходимо вычисление корреляционных функций $R_y(\tau)$, $R_x(\tau)$ и спектральных плотностей $S_y(\omega)$, $S_x(\omega)$ переменной на выходе системы y и ошибки x по известной корреляционной функции $R_g(\tau)$ и спектральной плотности $S_g(\omega)$ случайного входного воздействия.

Для установления взаимосвязи между корреляционными функ-

циями переменных входа и выхода системы, а также взаимосвязи между их спектральными плотностями используется известное интегральное уравнение (интеграл Дюамеля), на основании которого

$$y(t) = \int_0^t g(\lambda) \cdot w_y(t-\lambda) d\lambda = \int_0^t g(t-\lambda) \cdot w_y(\lambda) d\lambda, \quad (9.24)$$

где $w_y(t)$ - весовая или импульсная функция замкнутой системы по задающему воздействию $g(t)$;

λ - вспомогательное время интегрирования.

Тогда корреляционная функция выходной величины

$$R_y(\tau) = \overline{y(t) \cdot y(t+\tau)}, \quad (9.25)$$

а спектральная плотность, определяемая как прямое преобразование Фурье от корреляционной функции, имеет вид

$$S_y(\omega) = F[R_y(\tau)]. \quad (9.26)$$

Выполнив необходимые преобразования получаем [1]

$$S_y(\omega) = |\Phi_g(j\omega)|^2 \cdot S_g(\omega), \quad (9.27)$$

где $\Phi_g(j\omega)$ - частотная передаточная функция замкнутой системы по задающему воздействию.

Таким образом, спектральная плотность выходной координаты системы может быть получена умножением спектральной плотности входной величины на квадрат модуля частотной передаточной функции замкнутой системы по задающему воздействию.

Аналогично получается выражение для спектральной плотности ошибки

$$S_x(\omega) = F[R_x(\tau)] = |\Phi_{xg}(j\omega)|^2 \cdot S_g(\omega), \quad (9.28)$$

где $\Phi_{xg}(j\omega)$ - частотная передаточная функция замкнутой системы по ошибке относительно задающего воздействия.

Выражения (9.27) и (9.28) устанавливают связь между спектральными плотностями $S_y(\omega)$, $S_x(\omega)$ переменной на выходе системы у

и ошибки x со спектральной плотности $S_g(\omega)$ случайного входного воздействия.

Тогда средние значения квадрата выходной величины системы и ошибки определяются как

$$\overline{y^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_g(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega; \quad (9.29)$$

$$\overline{x^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\Phi_{xg}(j\omega)|^2 S_g(\omega) d\omega. \quad (9.30)$$

При действии на систему независимых друг от друга задающего и возмущающего воздействий $g(t)$ и $f(t)$ спектральная плотность ошибки системы будет

$$S_x(\omega) = |\Phi_{xg}(j\omega)|^2 S_g(\omega) + |\Phi_{xf}(j\omega)|^2 S_f(\omega), \quad (9.31)$$

где $\Phi_{xf}(j\omega)$ - частотная передаточная функция замкнутой системы относительно точек входа помехи $f(t)$ и ошибки $x(t)$;

$S_f(\omega)$ - спектральная плотность сигнала помехи $f(t)$.

Суммарная ошибка системы в этом случае будет характеризоваться выражением

$$\overline{x_{\Sigma}^2} = \overline{x_g^2} + \overline{x_f^2}. \quad (9.32)$$

Таким образом оценивается работа линейных автоматических систем при случайных стационарных воздействиях.

Пример. Передаточная функция разомкнутой системы автоматического управления имеет вид

$$W(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

где k - общий коэффициент передачи разомкнутой цепи;

T_1 и T_2 - постоянные времени.

На входе системы действует полезный регулярный сигнал $m(t) = m_1 \cdot t$ и помеха $n(t)$, представляющая собой белый шум со спектральной плотностью $S_n(\omega) = c^2 = \text{const}$.

Оценить ошибку системы.

Решение. Установившееся значение ошибки от полезного сигнала

$$X_m = x_m(\infty) = \lim_{s \rightarrow 0} s X_m(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s \frac{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1) + k} \cdot \frac{m_1}{s^2} = \frac{m_1}{k}.$$

Средний квадрат случайной ошибки, вызванной помехой на входе, равен среднему квадрату выходной величины системы от помехи и определяется

$$\overline{x_n^2} = \overline{y_n^2} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \Phi_g(j\omega) \right|^2 S_n(\omega) d\omega = \frac{c^2 k^2 (T_1 + T_2)}{2(T_1 + T_2 - T_1 T_2 k)}.$$

Из полученных выражений следует, что увеличение общего коэффициента передачи разомкнутой цепи системы k с одной стороны ведет к уменьшению установившегося значения ошибки системы от полезного сигнала, однако, с другой стороны для уменьшения среднего квадрата случайной ошибки, вызванной помехой на входе, необходимо, чтобы значение общего коэффициента передачи разомкнутой цепи системы k было минимально.

Оптимальное значение общего коэффициента передачи системы k определяется путем минимизации среднего квадрата суммарной ошибки

$$(\overline{x_m^2} + \overline{x_n^2}) \rightarrow \min_k.$$

ВОПРОСЫ К РАЗДЕЛУ 9

1. Дайте определение статистической динамики систем управления.
2. Изобразите базовую структуру модели системы при случайных воздействиях.
3. Перечислите и определите статистические характеристики

случайных процессов.

- 4. Каково свойство эргодической гипотезы?*
- 5. Поясните физический смысл корреляционной функции и спектральной плотности случайного процесса.*
- 6. Каким образом производится оценка работы линейных систем при случайных стационарных сигналах?*
- 7. Как определяется спектральная плотность выходной величины и ошибки системы?*
- 8. Дайте определение средней квадратической ошибки системы и укажите способы ее вычислений.*
- 9. Поясните постановку задачи синтеза оптимальных систем.*
- 10. Каким образом вычисляются значения оптимальных параметров систем из условия минимума средней квадратической ошибки?*

10. АНАЛИЗ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

10.1. Описание систем в пространстве состояний

Развитие высококачественных систем управления потребовало разработки новых методов их анализа и синтеза.

Современная теория управления, основу которой заложили известные работы Л.С.Понтрягина, Р.Беллмана и Р.Калмана, базируется на описании систем в пространстве состояний. Описание в пространстве состояний представляет собой общий взгляд на любые системы и пригодно для исследования и проектирования сложных систем с многими входами и выходами, то есть многомерных и многосвязных систем. С математической точки зрения анализ систем в пространстве состояний означает использование методов матричного исчисления и векторного анализа.

Понятие состояния является определяющим в современной теории управления.

Под **состоянием** системы понимается минимально-необходимый набор переменных величин системы $x_1, x_2, \dots, x_n$, способных однозначно и единственным образом определить положение системы в любой момент времени t . Совокупность переменных величин $x_1, x_2, \dots, x_n$ образует n -мерное **пространство состояний** R^n . Вектор с компонентами $x_1, x_2, \dots, x_n$ называется **вектором состояния**.

Рассмотрим систему (рис.10.1) с m входами ($u_1, u_2, \dots, u_m$), r выходами ($y_1, y_2, \dots, y_r$) и n переменными координатами ($x_1, x_2, \dots, x_n$).

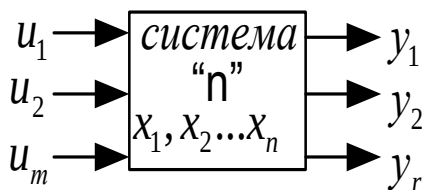


Рис. 10.1. Модель системы

Поведение системы во времени можно характеризовать не только выходными величинами, но и промежуточными переменными координатами в цепи системы - переменными состояниями x_i , число которых равно порядку системы n . Таким образом, получается n -мерный вектор состояния X , множество возможных положений которого образует векторное пространство, называемое пространством состояний системы R^n . Величина и положение вектора состояния системы с течением времени t изменяются, в результате чего вектор $X(t)$ описывает кривую, называемую траекторией движения системы в пространстве состояний.

В общем случае обыкновенных линейных систем, описываемых системой дифференциальных уравнений в нормальной форме, рассматриваемая система может быть определена следующей векторно-матричной формой

$$\begin{cases} \dot{X} = AX + BU \\ Y = CX + DU \end{cases}, \quad (10.1)$$

где X - вектор состояния системы, Y - вектор выходных управляемых величин, U - вектор внешних воздействий (задающих и возмущающих), а именно:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \dots \\ y_r \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dots \\ u_m \end{bmatrix};$$

A, B, C, D - матрицы системы.

Система уравнений (10.1) является стандартным описанием систем управления в пространстве состояний.

Уравнения (10.1) несут большой объем информации о динамических свойствах системы с m входами и r выходами при $t_0 \leq t \leq T$.

Первое уравнение из (10.1) определяет динамические характеристики системы и представляет собой компактную запись системы n

линейных дифференциальных уравнений, разрешенных относительно производных первого порядка (нормальная форма Коши)

$$\frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + \sum_{j=1}^m b_{ij} u_j \quad \text{при } i=1,2, \dots, n, \quad (10.2)$$

где a_{ij} и b_{ij} - постоянные коэффициенты.

Второе уравнение из (10.1) является уравнением выхода системы и представляет собой компактную запись системы r линейных алгебраических уравнений

$$y_i = \sum_{j=1}^n c_{ij} x_j + \sum_{j=1}^m d_{ij} u_j \quad \text{при } i=1,2, \dots, r, \quad (10.3)$$

где c_{ij} и d_{ij} - постоянные коэффициенты.

В стандартной форме описания (10.1)

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad - \text{ матрица системы;}$$

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1m} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nm} \end{bmatrix}_{n \times m} \quad - \text{ матрица управления;}$$

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots & c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{r1} & c_{r2} & \dots & c_{rn} \end{bmatrix}_{r \times n} \quad - \text{ матрица наблюдения;}$$

$$D = \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} & \dots & d_{1m} \\ d_{21} & d_{22} & \dots & d_{2m} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ d_{r1} & d_{r2} & \dots & d_{rm} \end{bmatrix}_{r \times m} \quad - \text{ матрица связи.}$$

Матрица системы A , элементы которой определяются структур-

ной схемой системы и значениями ее параметров, характеризует динамические свойства системы, ее свободное движение. Матрица управления B характеризует влияние внешних воздействий на переменные состояния системы, т.е. определяет чувствительность системы к внешним воздействиям (задающим и возмущающим). Матрица наблюдения C характеризует связь выходной величины системы с вектором состояния. Обычно не все составляющие вектора состояния являются наблюдаемыми сигналами, т.е. могут быть измерены с помощью каких-либо датчиков, в то время как выходной сигнал всегда наблюдаем. Матрица связи D устанавливает связь выходной величины системы с внешним воздействием.

Таким образом, четверка матриц A , B , C , D полностью определяет систему управления.

Матричные методы дают возможность обращаться с n уравнениями подобно тому, как это делается с одним уравнением.

На рис.10.2 показана структурная схема системы управления, соответствующая стандартной форме описания систем в пространстве состояний; двойные линии на рисунке характеризуют векторные связи. Следует иметь в виду, что выбор переменных состояния это неоднозначная операция.

Значение начального состояния $X(t_0)$ и входного воздействия $U(t)$ достаточны для того, чтобы однозначно и единственным образом найти выходную величину $Y(t)$ на интервале времени $t_0 \leq t \leq T$, т.е. определить значения $Y(t)$ в текущий момент и предсказать поведение ее в будущем.

Таким образом, стандартное описание систем управления в пространстве состояний позволяет однозначно определить выходную величину системы по известному внешнему воздействию и начальному состоянию системы.

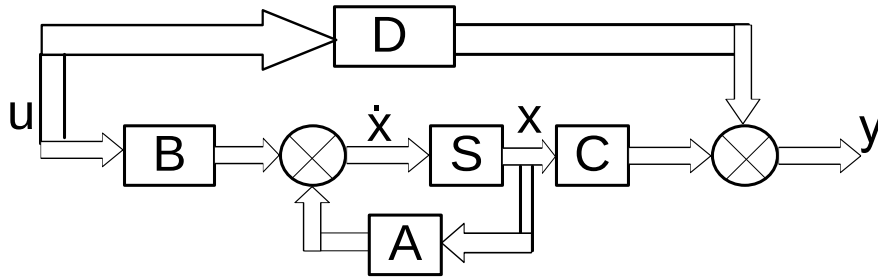


Рис. 10.2. Структурная схема системы в векторной форме:
 $\int$ - блок интеграторов; A, B, C, D - блоки матричных усилителей

Уравнения переменных состояния представляют собой наиболее полное математическое описание динамики системы с несколькими входами и выходами и позволяют выработать подход для решения различных классов задач теории управления с единых позиций.

Рассмотрим методику составления векторно-матричных дифференциальных уравнений для систем с одним входом и одним выходом, передаточная функция которых задается выражением (6.31) (см. Раздел 6). Получение уравнений, описывающих скалярную систему в общем виде, изложено в разделе 6.7. Для перехода к описанию в пространстве состояний переменные x_i в системе уравнений (6.35) и (6.36) можно рассматривать как составляющие вектора состояния X , а задающее воздействие g принять за внешнее u . В этом случае система уравнений (6.35) и (6.36) соответствует стандартной форме описания систем управления в пространстве состояний (10.1). При этом матрицы A, B, C, D имеют следующий вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{\ddot{a}_n}{a_0} & -\frac{\ddot{a}_{n-1}}{a_0} & -\frac{\ddot{a}_{n-2}}{a_0} & \dots & -\frac{\ddot{a}_1}{a_0} \end{bmatrix}_{n \times n} \quad \text{- матрица системы, (10.4)}$$

имеющая такую структуру называется сопровождающей или матрицей Фробениуса;

$$B = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \dots \\ \beta_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad \text{- матрица управления; (10.5)}$$

$$C = [1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0]_{1 \times n} \text{ - матрица наблюдения;} \quad (10.6)$$

$$D = [\beta_0]_{1 \times 1} \text{ - матрица связи.} \quad (10.7)$$

В реальных системах управления степень полинома числителя передаточной функции меньше степени полинома ее знаменателя, поэтому $\beta_0=0$ и ряд коэффициентов β_i оказывается равным нулю. Единица в первом элементе матрицы C соответствует тому, какая из переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, попадает на выход. В данном случае с выхода системы снимается одна переменная x_1 .

10.2. Структура решения уравнений переменных состояния

Рассмотрим линейную однородную систему с постоянными коэффициентами [14]

$$\dot{X} = AX. \quad (10.8)$$

Решение ее $X(t)$ характеризует свободное поведение системы. Пусть вектор начальных условий имеет вид

$$X|_{t=0} = X_0. \quad (10.9)$$

Разложим искомый вектор $X(t)$ в степенной ряд по t :

$$X(t) = X_0 + \dot{X}_0 t + \ddot{X}_0 \frac{t^2}{2!} + \ddot{\ddot{X}}_0 \frac{t^3}{3!} + \dots. \quad (10.10)$$

Дифференцируя (10.8), найдем

$$\ddot{X} = A\dot{X} = A^2X; \quad \ddot{\ddot{X}} = A\ddot{X} = A^3X \text{ и т.д.} \quad (10.11)$$

Тогда при $t=0$ получим

$$\dot{X}_0 = AX_0; \quad \ddot{X}_0 = A^2X_0; \quad \ddot{\ddot{X}}_0 = A^3X_0 \text{ и т.д.} \quad (10.12)$$

В итоге ряд (10.10) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}
X(t) &= X_0 + AX_0 t + A^2 X_0 \frac{t^2}{2!} + A^3 X_0 \frac{t^3}{3!} + \dots = \\
&= \left(E + At + \frac{A^2 t^2}{2!} + \frac{A^3 t^3}{3!} + \dots \right) \cdot X_0 = e^{At} X_0
\end{aligned}
\tag{10.13}$$

Подставляя $e^{At}X_0$ в исходное уравнение (10.8), легко убедиться, что (10.13) представляет собой решение. Полагая в (10.13) $t=0$, получим X_0 .

Таким образом, интегрирование однородной системы (10.8) сводится к вычислению матрицы e^{At} и умножению ее на вектор начальных условий X_0 . Матрица e^{At} называется матричным экспоненциалом или матричной экспонентой. В теории управления она часто называется переходной матрицей состояния.

Решение однородного уравнения (10.8) имеет вид

$$X(t) = e^{At} X_0. \tag{10.14}$$

Если движение начинается в момент времени $t=t_0$, то решение принимает форму

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X_0. \tag{10.15}$$

Матрица $e^{A(t-t_0)}$ может быть представлена в виде разложения в матричный степенной ряд

$$e^{A(t-t_0)} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{A^m (t-t_0)^m}{m!}, \tag{10.16}$$

который сходится абсолютно и равномерно при любом значении t .

Основные свойства матрицы e^{At} :

1. Матрицы e^{At_1} и e^{At_2} коммутируют, то есть

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} \cdot e^{At_2} = e^{At_2} \cdot e^{At_1}. \tag{10.17}$$

2. Матрица e^{At} - всегда неособенная, ее обратная матрица

$$(e^{At})^{-1} = e^{-At}. \tag{10.18}$$

3. Если $AB=BA$, то

$$e^{(A+B)} = e^A e^B = e^B e^A. \quad (10.19)$$

4. Производная e^{At}

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} = e^{At} \cdot A. \quad (10.20)$$

Это означает, что матрица e^{At} коммутирует с A .

5. Интеграл e^{At}

$$\int_0^t e^{At} dt = Et + A \frac{t^2}{2!} + A^2 \frac{t^3}{3!} + \dots, \quad (10.21)$$

откуда $A \int_0^t e^{At} dt = e^{At} - E.$

Если матрица A - неособенная, получим

$$\int_0^t e^{At} dt = (e^{At} - E) \cdot A^{-1} = A^{-1}(e^{At} - E). \quad (10.22)$$

Для решения неоднородного уравнения преобразуем его к виду

$$\dot{X} - AX = BU$$

и умножим слева на e^{-At}

$$e^{-At}(\dot{X} - AX) = e^{-At}BU.$$

Левая часть уравнения

$$e^{-At}(\dot{X} - AX) = e^{-At}\dot{X} - e^{-At}AX = \frac{d}{dt}(e^{-At}X),$$

поскольку $Ae^{-At} = e^{-At} \cdot A.$

Тогда

$$\frac{d}{dt}(e^{-At}X) = e^{-At}BU.$$

Интегрирование последнего выражения дает

$$e^{-At}X(t) = e^{-At}X_0 + \int_{t_0}^t e^{-A\tau}BU(\tau) d\tau.$$

Умножая полученное уравнение слева на e^{At} и учитывая свойство (10.18), получим окончательно

$$X(t) = e^{A(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} B U(\tau) d\tau. \quad (10.23)$$

Первое слагаемое в (10.23) представляет собой решение однородного дифференциального матричного уравнения и описывает свободное движение системы, вызванное начальными условиями, второе слагаемое - вынужденное движение под влиянием внешнего воздействия $U(t)$.

Тогда полное решение системы (10.1) имеет вид

$$Y(t) = C e^{A(t-t_0)} X_0 + \int_{t_0}^t C e^{A(t-\tau)} B U(\tau) d\tau + D U(t). \quad (10.24)$$

10.3. Характеристики систем в пространстве состояний

Характеристики системы показывают ее принципиальные возможности. Эти возможности в значительной степени выявляются при изучении свойств системы, которые принято называть устойчивостью, наблюдаемостью, идентифицируемостью, управляемостью и адаптируемостью. Часто между наблюдаемостью и идентифицируемостью не делают различий, а адаптируемость рассматривается как частный случай управляемости.

Управляемость и наблюдаемость, так же как и устойчивость, относятся к числу важнейших характеристик динамических систем. Если устойчивость характеризует свойство системы возвращаться после возмущения в положение равновесия, то управляемость характеризует возможность изменения состояния системы с помощью входных сигналов, а наблюдаемость – возможность определения состояния системы по наблюдениям за ее выходными сигналами.

Устойчивость системы. Необходимым и достаточным условием устойчивости системы является отрицательность вещественных частей собственных чисел λ_i матрицы A

$$\operatorname{Re} \lambda_i < 0; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10.25)$$

где λ_i - корни характеристического уравнения $|A - \lambda E| = 0$;
 n - порядок системы.

Для того чтобы оценить расположение спектра матрицы A относительно мнимой оси, необходимо раскрыть характеристический определитель $|A - \lambda E|$ и получить характеристическое уравнение n -ой степени относительно λ

$$|A - \lambda E| = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + a_2 \lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0. \quad (10.26)$$

После получения характеристического уравнения в виде (10.26) обычно применяется тот или иной из известных критериев устойчивости, например, Рауса, Гурвица или Михайлова либо производится непосредственное вычисление всей совокупности корней, что в случае высокого порядка n матрицы A сопряжено со значительными трудностями и возможно лишь с помощью ЭВМ.

Кроме того, разработаны матричные критерии, позволяющие оценить устойчивость системы непосредственно по матрице A без нахождения характеристического полинома [14].

Для того чтобы система была асимптотически устойчива, необходимо и достаточно, чтобы для матрицы

$$G = E - 2(E - A)^{-1}$$

выполнялось условие

$$G^k \rightarrow 0, \text{ при } k \rightarrow \infty. \quad (10.27)$$

Выполнимость необходимого и достаточного условия устойчивости можно установить по факту абсолютного убывания элементов матрицы G^k . Возведение матрицы в степень рекомендуется выполнять так, чтобы каждая последующая матрица являлась квадратом предыдущей.

Управляемость системы. Система называется управляемой, если для любого начального состояния $X(0) \in R^n$ существует управление $U(t)$, переводящее ее за конечное время T в нулевое состояние

$X(T)=0$ или система управляема, если существует управляющее воздействие $U(t)$, позволяющее перевести ее за конечное время T в любое наперед заданное состояние из пространства состояний $X(T) \in R^n$.

Наблюдаемость системы. Система называется наблюдаемой, если по наблюдениям за выходным сигналом $Y(t)$ в течение конечного времени T можно определить ее начальное состояние $X(0)$.

Простые критерии проверки управляемости и наблюдаемости системы основаны на анализе матрицы управляемости

$$K=[B \ AB \ A^2B \ \dots \ A^{n-1}B] \quad (10.28)$$

и матрицы наблюдаемости

$$L=[C^T \ (CA)^T \ (CA^2)^T \ \dots \ (CA^{n-1})^T]. \quad (10.29)$$

Необходимым и достаточным условием управляемости системы является невырожденность матрицы управляемости

$$\det K \neq 0, \quad (10.30)$$

что эквивалентно условию равенства ранга матрицы K порядку n системы, то есть $\text{rank } K = n$. Если $\text{rank } K < n$, то система не полностью управляемая; если $\text{rank } K = 0$ - система полностью неуправляемая.

Необходимым и достаточным условием наблюдаемости системы является невырожденность матрицы наблюдаемости

$$\det L \neq 0. \quad (10.31)$$

что эквивалентно условию равенства ранга матрицы L порядку n системы, то есть $\text{rank } L = n$. Если $\text{rank } L < n$, то система не полностью наблюдаема.

Таким образом, управляемость системы определяется свойствами пары матриц A и B , а наблюдаемость – свойствами пары матриц A и C . Устойчивость системы определяется свойствами только одной матрицы A .

Пример. Оценить принципиальные возможности системы автоматического управления, заданной матрицами:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad C = [0 \ 0 \ 1], \quad D = [0].$$

Решение. Характеристический определитель матрицы A

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 1 + 1 + \lambda + \lambda + \lambda = -\lambda^3 + 3\lambda + 2.$$

Решая уравнение $-\lambda^3 + 3\lambda + 2 = 0$, находим собственные числа матрицы A: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -1$.

Система неустойчива, так как $\lambda_1 = 2 > 0$.

Матрица управляемости

$$K = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \det K = 1 - 1 = 0, \text{ следовательно, система неуправляема.}$$

Матрица наблюдаемости

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \det L = 1 - 1 = 0, \text{ следовательно, система ненаблюдаема.}$$

10.4. Нормальная форма уравнений в пространстве состояний

Нормальная форма уравнений в пространстве состояний получается из стандартной формы (10.1) посредством преобразования подобия. При этом предполагается, что собственные числа матрицы A различные.

Введем линейное преобразование

$$X=MQ, \quad (10.32)$$

где M - модальная матрица матрицы A .

Уравнения (10.1) перепишем

$$\begin{cases} M\dot{Q} = AMQ + BU \\ Y = CMQ + DU \end{cases} \quad (10.33)$$

Умножив первое уравнение из (10.33) слева на M^{-1} , получим

$$\begin{cases} \dot{Q} = M^{-1}AMQ + M^{-1}BU \\ Y = CMQ + DU \end{cases} \quad (10.34)$$

Так как M - модальная матрица, то

$$M^{-1}AM = \Lambda = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} - \text{диагональная матрица;}$$

где λ_i (при $i = 1, 2, \dots, n$) - собственные числа матрицы A .

Следовательно, можно записать

$$\begin{cases} \dot{Q} = \Lambda Q + B_n U \\ Y = C_n Q + D_n U \end{cases} \quad (10.35)$$

где $\Lambda = M^{-1}AM$, $B_n = M^{-1}B$, $C_n = CM$, $D_n = D$ – матрицы;

$Q = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ - вектор состояния системы, элементами которого являются новые переменные состояния q_i (при $i=1, 2, \dots, n$).

Система (10.35) представляет собой нормальную форму уравнений описания систем управления в пространстве состояний.

Нормальная форма уравнений состояния позволяет декомпозировать многосвязную систему n -го порядка на n взаимонесвязанных

систем, при этом дифференциальные уравнения становятся развязанными относительно переменных состояния $q_1, q_2, \dots, q_n$, т.е. они имеют вид

$$\dot{q}_i = \lambda_i q_i + f_i, \quad (10.36)$$

где f_i - внешнее воздействие на i -ю переменную состояния.

Таким образом, переход к нормальной форме существенно упрощает исследование многосвязных систем.

В случае кратных собственных чисел матрицы A диагональная матрица Λ заменяется матрицей J , которая строится из клеток Жордана, например,

$$J = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (10.37)$$

Таким образом, из сравнения уравнений (10.1) и (10.35) следует, что при математическом описании одного и того же динамического процесса различному выбору переменных состояния соответствуют различные матрицы системы, управления, наблюдения, связи и различные векторные дифференциальные уравнения, каждое из которых полностью определяет выходную величину системы.

Пример. Написать уравнения состояний в нормальной форме для динамической системы, представленной на рис.10.3.

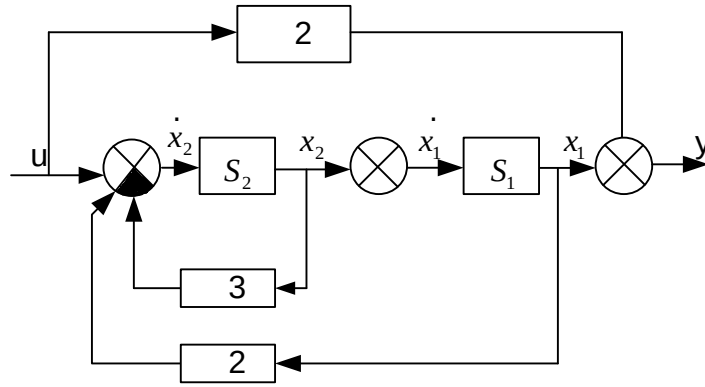


Рис. 10.3. Структурная схема системы в переменных состояния

Решение. Выберем в качестве переменных состояния системы сигналы на выходах интеграторов x_1 и x_2 . В этом случае структурной схеме (рис.10.3) соответствует следующая система уравнений (стандартная форма)

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + 2U \\ \dot{x}_2 = -2x_1 - 3x_2 + 1U \\ y = 1x_1 + 2U \end{cases}$$

Откуда матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad C = [1 \ 0], \quad D = [2].$$

Собственные числа матрицы A: $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = -2$.

$$\text{Модальная матрица } M = \begin{bmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ и } M^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Тогда диагональная матрица системы, матрица управления, матрица наблюдения и матрица связи будут

$$\Lambda = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad B_n = M^{-1}B = \begin{bmatrix} -5 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad C_n = CM = [-1 \ -1], \quad D_n = D = [2].$$

Отсюда получаем уравнения состояний системы в нормальной форме

$$\begin{cases} \dot{q}_1 = -q_1 - 5U \\ \dot{q}_2 = -2q_2 + 3U \\ y = -q_1 - q_2 + 2U \end{cases},$$

которым соответствует структурная схема системы, приведенная на рис.10.4.

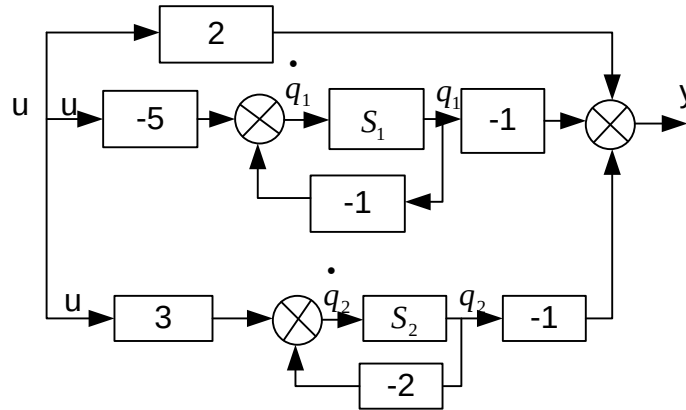


Рис. 10.4. Структурная схема системы в переменных состояния по полюсам

10.5. Управление по состоянию. Системы управления состоянием

Подключение дополнительных контуров обратной связи в многоконтурных системах обеспечивает повышение качества управления. Наиболее полная информация об управляемом объекте содержится в переменных состояния. Управление по состоянию предусматривает введение в структуру системы контуров прямых и обратных связей по переменным состояния объекта управления. При этом задача стабилизации и слежения формулируется как задача поддержания постоянного $X^* = \text{const}$ или изменяющегося по заданному закону $X^*(t)$ состояния объекта управления $X^* = X^*(t)$.

Изменяющиеся во времени или фиксированные сигналы x_i^* , определяющие требуемый характер изменения переменных состояния x_i , составляют расширенный вектор задания $X^* = \{ x_i^* \}$, а ошибка движения объекта управления по состоянию определяется вектором

отклонения $e = X^* - X$.

Управление по состоянию, как и управление по выходу объекта управления, может быть разомкнутым: $U = F[X^*]$, замкнутым $U = F[e]$, или комбинированным: $U = F[e, X^*]$.

Системы с регуляторами состояния относятся к многоконтурным системам и, следовательно, обладают лучшими точностными и динамическими свойствами, чем одноконтурные. Они проектируются для управления как одномерными, так и многомерными объектами управления.

Проанализируем использование линейных регуляторов состояния для решения задач стабилизации и слежения [15].

Рассмотрим задачу стабилизации объекта управления (ОУ) в точке $Y^* = 0$, полагая, что при этом вектор состояния также принимает нулевое значение: $X^* = 0$ (к такому виду задача почти всегда может быть приведена преобразованием координат векторов X и Y).

Простейший регулятор состояния - пропорциональный или *модальный регулятор* вводит обратные связи по всем переменным x_i (рис. 10.5).

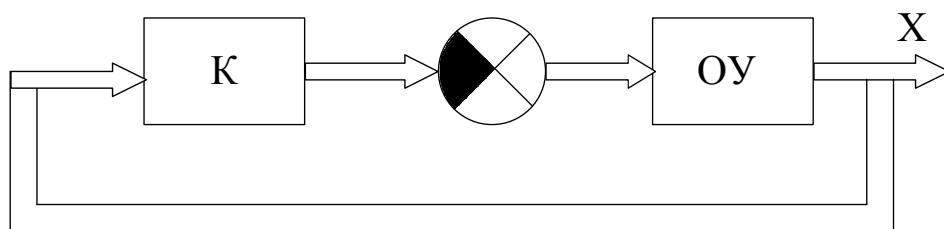


Рис. 10.5. Структурная схема системы с П-регулятором

Модальный регулятор реализует пропорциональный закон управления

$$U = -K \times X, \quad (10.38)$$

где K - матрица коэффициентов обратной связи по состоянию.

Для одномерного объекта управления в качестве координат x_i вектора X можно выбрать, например, фазовые переменные $y, \dot{y}, \dots, y^{(n-1)}$, то есть

$$X = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^T = [y \ \dot{y} \ \dots \ y^{(n-1)}]^T, \quad (10.39)$$

где $y^{(i)} = \frac{d^i y}{dt^i}$; n - порядок системы.

Тогда $K = [k_1 \ k_2 \ \dots \ k_n]$. Выражение (10.38) можно записать в скалярной форме

$$u = - \sum_{i=1}^n k_i x_i. \quad (10.40)$$

Первые члены закона управления (10.40) соответствуют описанию ПД-регулятора выхода при $y^* = 0$.

Таким образом, регуляторы состояния являются обобщением ПД-регуляторов, хотя и не содержат в явном виде дифференцирующих звеньев. Выбор коэффициентов k матрицы обратной связи K обеспечивает получение заданных динамических свойств системы.

В условиях действия на объект управления внешних возмущений F точностные показатели качества системы с пропорциональным регулятором состояния ограничены. Снижение установившихся ошибок достигается введением в состав регулятора контуров интегральных обратных связей (рис. 10.6).

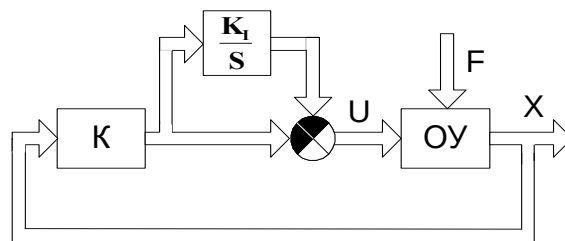


Рис. 10.6. Структурная схема системы с ПИ-регулятором

ПИ-регулятор реализует пропорционально-интегральный закон управления

$$U = -K \times X \left(1 + \frac{K_I}{s}\right), \quad (10.41)$$

где K_I - матрица обратных связей по интегралу от вектора со-

стояния.

Комбинированный регулятор позволяет обеспечить компенсацию возмущения за счет прямых связей по возмущающему воздействию F (рис. 10.7).

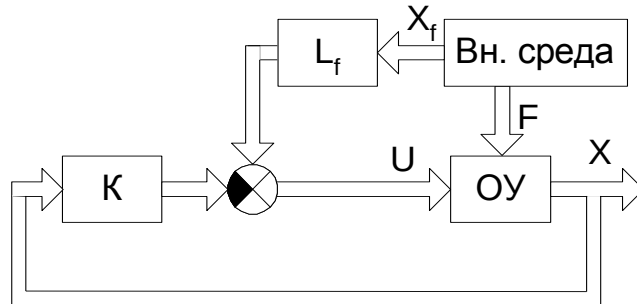


Рис. 10.7. Структурная схема комбинированной системы по возмущающему воздействию

В этом случае закон управления принимает вид

$$U = -K \times X + L_F \times X_F, \quad (10.42)$$

где L_F - матрица коэффициентов контура связей по F ;

X_F - вектор, составленный из возмущения F и его производных.

Задача слежения рассматривается как задача отработки расширенного вектора задания $X^* = X^*(t)$. П-регулятор состояния в следящей системе вырабатывает управляющее воздействие, пропорциональное вектору отклонения $e = X^* - X$, то есть реализует закон управления

$$U = K \times e. \quad (10.43)$$

Для одномерного объекта управления с вектором состояния (10.39) выражение (10.43) можно переписать в скалярной форме

$$u = \sum_{i=1}^n k_i (x_i^* - x_i), \quad (10.44)$$

где $x_i^* = (y^{(i-1)})^*$.

ПИ-регулятор дополняет структуру системы интегральными связями:

$$U = K \times e \left(1 + \frac{K}{s}\right). \quad (10.45)$$

Эффективная компенсация ошибок, вызванных возмущающим воздействием F и изменениями задания X^* достигается использованием комбинированного управления (рис. 10.8)

$$U = K \times e + L_X \times X^* + L_F \times X_F, \quad (10.46)$$

где L_X - матрица коэффициентов контура прямых связей по X^* ;
 X^* - расширенный вектор задания;
 L_F - матрица коэффициентов контура связей по F ;
 X_F - вектор, составленный из возмущения F и его производных.

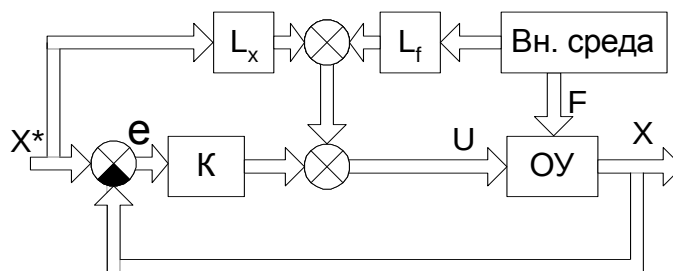


Рис. 10.8. Структурная схема комбинированной системы

Параметры регуляторов (коэффициенты прямых и обратных связей) определяются как функции параметров χ математической модели объекта управления. Поэтому при управлении нестационарным объектом возникает необходимость изменения параметров регулятора в процессе работы системы. Задача настройки регулятора осложняется, когда параметры объекта управления неизвестны или неконтролируемо изменяются. Для управления такими объектами используются адаптивные регуляторы, параметры которых настраиваются с помощью блока адаптации (БА, рис. 10.9).

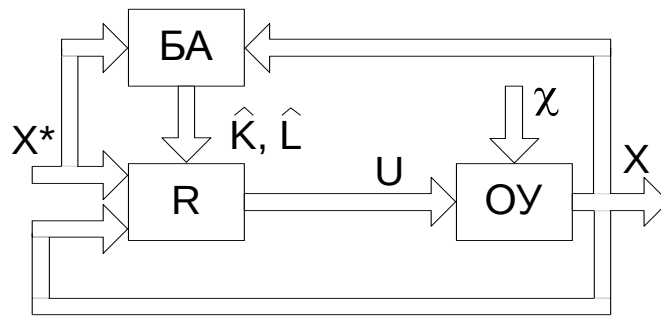


Рис. 10.9. Структурная схема адаптивной системы

Адаптивный регулятор состояния комбинированного типа содержит настраиваемые контуры обратных связей по состоянию X и прямых связей по расширенному вектору задания X^* . Закон управления такого регулятора

$$U = \hat{K} \times e + \hat{L} \times X^*, \quad (10.47)$$

где $\hat{L}$, $\hat{K}$ - матрицы прямых и обратных связей с переменными коэффициентами (параметрами).

Функции блока адаптации заключаются в автоматической настройке параметров регулятора (10.47).

В практике адаптивных систем получили распространение два подхода к настройке параметров.

Первый из них предусматривает включение в состав системы блока *идентификатора*, осуществляющего вычисление неизвестных параметров объекта управления. Тогда после определения вектора χ значения $\hat{K}$ и $\hat{L}$ могут быть найдены по известным, подготовленным заранее, зависимостям

$$\hat{K} = \hat{K}(\chi), \quad \hat{L} = \hat{L}(\chi). \quad (10.48)$$

Второй подход (безидентификационный) позволяет осуществить настройку контура прямых связей части регулятора (10.47). При этом матрица обратных связей рассчитывается по номинальному значению

вектора χ и остается неизменной $\hat{K} = K_0$. В качестве источника информации о параметрических ошибках регулятора в блоке адаптации используется сигнал обратной связи по отклонению:

$$U_e = K_0 \times e. \quad (10.49)$$

Блок адаптации осуществляет изменение параметров регулятора до тех пор, пока в системе не установится нулевое значение сигнала обратной связи U_e и, следовательно, значение e будет равняться нулю.

10.6. Оценивание координат состояния систем

Оценивание координат состояния систем требуется в случае необходимости введения в систему автоматического управления корректирующего сигнала от какой-либо координаты состояния x_i , которая не измеряется как физическая.

Для этого служит косвенная оценка неизмеряемых координат состояния системы путем введения так называемого “наблюдателя” по Калману [2]. Метод оценки вектора состояния дает возможность “восстановить” неизмеряемые координаты вектора состояния в виде $\hat{X} \approx X$ и использовать “восстановленный” вектор состояния системы для решения задачи, например, модального синтеза в пространстве состояний.

Схема оценивания координат состояния реализуется в виде дополнительной динамической аналоговой модели - *наблюдателя*.

Для получения алгоритма наблюдателя Калмана запишем в векторно-матричной форме уравнения объекта управления

$$\dot{X} = AX + BU \quad (10.50)$$

и управляющее воздействие

$$U = -M \hat{X} + FG, \quad (10.51)$$

где G - задающее воздействие;

A, B, M, F - матрицы коэффициентов.

Выходные координаты системы задаются в виде

$$Y = CX.$$

Оценка координат состояния системы наблюдателем формируется следующим образом:

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} - BM\hat{X} + P(Y - C\hat{X}) + BFG, \quad (10.52)$$

где P - тоже матрица коэффициентов.

Рассматривая совместно уравнения (10.50), (10.51) и (10.52), получим

$$\dot{X} = AX - BM\hat{X} + BFG, \quad (10.53)$$

$$\dot{\hat{X}} = PCX + (A - BM - PC)\hat{X} + BFG, \quad (10.54)$$

или в векторно-матричной форме

$$\begin{bmatrix} \dot{X} \\ \dot{\hat{X}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & -BM \\ PC & A - BM - PC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ \hat{X} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} BF \\ BF \end{bmatrix} G.$$

Из полученных уравнений видно, что при использовании наблюдателя порядок всей системы увеличивается до $2n$, тогда как n - число координат, которые можно использовать для управления системой, сохраняется.

Характеристическое уравнение системы с наблюдателем имеет вид

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda E - A & -BM \\ PC & \lambda E - A + BM + PC \end{vmatrix} = 0. \quad (10.55)$$

Для оценки точности работы наблюдателя перейдем к новым координатам в виде $\Delta X = X - \hat{X}$. Вычитая (10.54) из (10.53), получаем

$$\Delta \dot{X} = AX - PCX - (A - PC)\hat{X} = A[X - \hat{X}] - PC[X - \hat{X}].$$

Следовательно,

$$\Delta \dot{X} = (A - PC) \Delta X. \quad (10.56)$$

Из уравнения (10.53), заменяя $\hat{X} = X - \Delta X$, при отсутствии задающего воздействия G имеем

$$\dot{\hat{X}} = A\hat{X} - BM[X - \Delta X]$$

или

$$\dot{\hat{X}} = (A - BM)\hat{X} + BM\Delta X. \quad (10.57)$$

Уравнения (10.57) и (10.56) в векторно-матричной форме имеют вид

$$\begin{bmatrix} \dot{\hat{X}} \\ \Delta \dot{X} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A - BM & BM \\ 0 & A - PC \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{X} \\ \Delta X \end{bmatrix}. \quad (10.58)$$

Характеристическое уравнение для этой системы будет

$$D(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda E - (A - BM) & BM \\ 0 & \lambda E - (A - PC) \end{vmatrix} = 0.$$

Оно принимает вид

$$D(\lambda) = |\lambda E - A + BM| \times |\lambda E - A + PC| = 0,$$

т. е. распадается на два уравнения

$$|\lambda E - A + BM| = 0, \quad (10.59)$$

$$|\lambda E - A + PC| = 0. \quad (10.60)$$

Последнее обстоятельство дает возможность независимого модального синтеза как основной системы с координатами вектора X по

уравнению (10.59), так и системы определения погрешности ΔX по уравнению (10.60). Требуется, чтобы погрешность наблюдения $\Delta X(t)$ быстро затухала во времени.

Существуют и другие схемы наблюдателей, каждый из которых обладает своими особенностями.

10.7. Прямой корневой метод синтеза систем управления

Качество процесса управления, как отмечалось в разделе 6.5, определяется расположением корней характеристического уравнения замкнутой системы. В связи с этим разработаны различные корневые методы расчета систем управления. Одним из них является прямой корневой метод синтеза, называемый модальным методом синтеза системы по заданному качеству процесса управления [2]. Вводится целевая функция, которая является функциональным выражением поставленной цели при синтезе системы. Обычно целевую функцию представляют как ограниченную скалярную действительную непрерывно дифференцируемую функцию $F = F(q_1, q_2, \dots, q_n)$ искомых параметров q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) регулятора системы.

При этом общую задачу рассматривают как выбор вектора параметров $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$, оптимизирующего в допустимых пределах значение целевой функции на допустимом множестве Q^n .

Однако часто при проектировании системы не проводят подобную оптимизацию, а исходят из удовлетворения заданным требованиям.

В этом случае задача синтеза состоит в том, чтобы, опираясь на ряд качественных показателей системы, найти соответствующее расположение корней характеристического уравнения замкнутой системы $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ на комплексной плоскости, а затем найти параметры регулятора, обеспечивающие заданное расположение указанных корней. При этом исходными качественными показателями могут быть, например, вид переходного процесса, время регулирования, колеба-

тельность, интегральная квадратичная ошибка и так далее. Указанные требования на одновременное выполнение различных качественных показателей создаваемой системы приводят к задаче выделения на комплексной плоскости соответствующих областей допустимого расположения корней характеристического уравнения замкнутой системы.

Характеристическое уравнение системы $D(\lambda) = 0$ (10.26) переписывается в виде

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \dots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0. \quad (10.61)$$

Каждый коэффициент a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) является функцией от параметров объекта управления и регулятора, то есть

$$a_i = a_i(\mathbf{q}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (10.62)$$

где $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$ - искомый параметрический вектор.

Для решения задачи модального синтеза ставится в соответствии с (10.61) и (10.62) желаемый характеристический многочлен

$$D^*(\lambda) = (\lambda - \lambda_1^*) \times (\lambda - \lambda_2^*) \dots (\lambda - \lambda_n^*);$$

после раскрытия скобок получаем

$$D^*(\lambda) = \lambda^n + b_1\lambda^{n-1} + b_2\lambda^{n-2} + \dots + b_{n-1}\lambda + b_n, \quad (10.63)$$

где λ_i^* - желаемые значения корней характеристического полинома, лежащие в заданных пределах:

$$\begin{aligned} \lambda_i' \leq \lambda_i^* \leq \lambda_i'', \quad i = 1, 2, \dots, n, \\ b_i = b_i(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*). \end{aligned} \quad (10.64)$$

Приравнивая соответствующие коэффициенты (10.62) и (10.64),

получаем

$$a_i(\mathbf{q}) = b_i(\lambda_1^*, \lambda_2^*, \dots, \lambda_n^*), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (10.65)$$

Таким образом, имеем систему n уравнений с n неизвестными, решая которую непосредственно или численными методами, можно определить все n значений параметров вектора $\mathbf{q} = [q_1, q_2, \dots, q_n]^T$.

Очевидно, что независимое назначение всех коэффициентов характеристического уравнения a_i ($i = 1, 2, \dots, n$) возможно лишь при числе корректирующих параметров не менее n . Это обстоятельство делает возможным предписанное назначение желаемых корней λ_i ($i = 1, 2, \dots, n$).

В настоящее время для синтеза систем имеются разнообразные программные средства. Примером может служить **CLASSiC** (Complex Linear Analysis and Structure Synthesis in Control) - программа для персональных компьютеров класса IBM PC, позволяющая строить математические модели, анализировать и синтезировать системы управления со сложной структурой [16].

ВОПРОСЫ К РАЗДЕЛУ 10

1. Что такое состояние, пространство состояний, вектор состояния?
2. Запишите стандартную форму уравнений в пространстве состояний. Поясните физический смысл уравнений.
3. Как получить сопровождающую матрицу или матрицу Фробениуса?
4. От каких параметров передаточной функции зависят элементы матрицы системы управления?
5. Перечислите свойства матричной экспоненты.
6. Какова структура решения уравнений переменных состояния?

7. Перечислите характеристики систем в пространстве состояний. Дайте понятие управляемости и наблюдаемости систем и критерии их проверки.
8. Запишите характеристический определитель матрицы А.
9. Что представляет собой нормальная форма уравнений в пространстве состояний? Как ее получить?
10. Дайте понятие управления по состоянию. Расскажите о системах управления состоянием. Что представляет собой модальный регулятор?
11. Каким образом можно оценить координаты состояния систем?
12. Поясните постановку задачи модального метода синтеза систем по заданному качеству процесса управления.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК К МОДУЛЮ 1

1. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. - М.: Наука, 1975. - 768с.
2. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. - М.: Наука, 1989. - 304с.
3. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. - М.: Наука, 1979. - 256с.
4. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. - М.: Наука, 1986. - 616с.
5. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Особые линейные и нелинейные системы. - М.: Энергоиздат, 1981. - 304 с.
6. Коновалов Г.Ф. Радиоавтоматика. - М.: Высшая школа, 1990. - 335с.
7. Топчеев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. - М.: Машиностроение, 1989. - 752 с.
8. Куропаткин П.В. Теория автоматического управления. - М.: Высшая школа, 1973. - 507 с.
9. Теория управления. Терминология / Под ред. Б.Г.Волика. - М.: Наука, 1988. - 56 с.
10. Расчет автоматических систем / Под ред. А.В.Фатеева. - М.: Высшая школа, 1973. - 336 с.
11. Сборник задач по теории автоматического регулирования и управления / Под ред. В.А.Бесекерского. - М.: Наука, 1978. - 512 с.
12. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. М.: Машиностроение, 1978. - 609 с.
13. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. - Л.: Машиностроение, 1980. - 412 с.
14. Дидук Г.А. Методы теории матриц и их применение для исследования и проектирования систем управления. - Л.: СЗПИ, 1986. - 83 с.

15.Мирошник И.В., Болтунов Г.И. Системы и устройства управления технологическим оборудованием. - Л., 1990. - 38 с.

16.Имаев Д.Х. и др. Анализ и синтез систем управления. Теория. Методы. Примеры решения типовых задач с использованием персонального компьютера. - Санкт-Петербург, Гданьск, Сургут, Томск, 1998. - 172 с.

Модуль 2

НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ

2.1. Общие понятия и особенности нелинейных систем

Строго говоря, линейных систем в природе не существует, так как характеристики реальных устройств нелинейные и некоторые из них не могут быть линеаризованы, например, характеристика логического элемента. Кроме того, есть системы, например, релейные, адаптивные, в которых принципиально необходимо учитывать нелинейности.

Нелинейной системой называется такая система, в состав которой входит хотя бы одно звено, описываемое нелинейным уравнением. Такое звено называется нелинейным звеном или нелинейным элементом.

Уравнение является нелинейным, если некоторые координаты или их производные по времени входят в уравнение в виде произведений или степени, отличной от первой, а также если коэффициенты уравнения являются функциями некоторых координат или их производных.

При составлении дифференциальных уравнений нелинейных систем сначала составляют дифференциальные уравнения для каждого устройства системы. При этом характеристики устройств, допускающих линеаризацию, линеаризуются. В результате получают систему дифференциальных уравнений, в которой одно или несколько уравнений нелинейные. Устройства, допускающие линеаризацию, образуют линейную часть системы, а устройства, которые не могут быть линеаризованы, составляют нелинейную часть.

Путем эквивалентного преобразования структурных схем и нелинейных звеньев большое число нелинейных систем можно представить в виде замкнутого контура с последовательным включением не-

линейного элемента (НЭ) и линейной части (ЛЧ), как показано на рис. 2.1.

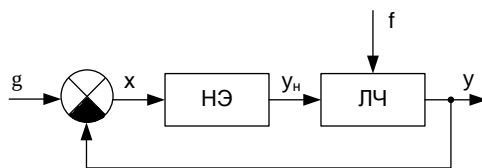


Рис. 2.1. Функциональная схема нелинейной системы:
НЭ - нелинейный элемент; ЛЧ - линейная часть

Классификация нелинейных элементов и систем. Нелинейные звенья классифицируются по различным признакам. Наибольшее распространение получила классификация по статическим и динамическим характеристикам, так как в системах чаще всего нелинейности приходится учитывать в виде характеристик. Эти характеристики могут быть как однозначными, так и двузначными (петлевыми), симметричными и несимметричными относительно начала координат.

Различают следующие основные типы нелинейных звеньев.

Нелинейные звенья с гладкими криволинейными характеристиками. Примеры таких характеристик приведены на рис. 2.2.

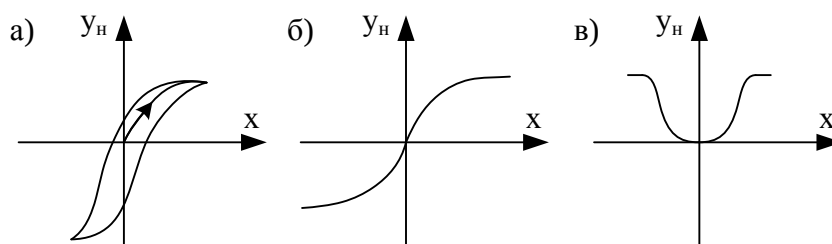


Рис. 2.2. Гладкие криволинейные характеристики:
а - гистерезисная; б, в - усилительные

На рис. 2.2,а изображена двузначная гистерезисная (запаздывающая) характеристика. Характеристика (рис. 2.2,б) отображает насыщение или ограничение и соответствует реальному амплитудному усилителю, а характеристика (рис. 2.2,в) - реальному усилителю

мощности. Характеристики (рис. 2.2,а и б) – нечетно-симметричные, а характеристика (рис. 2.2,в) – четно-симметричная.

Нелинейные звенья с кусочно-линейными характеристиками. Некоторые из таких характеристик представлены на рис. 2.3.

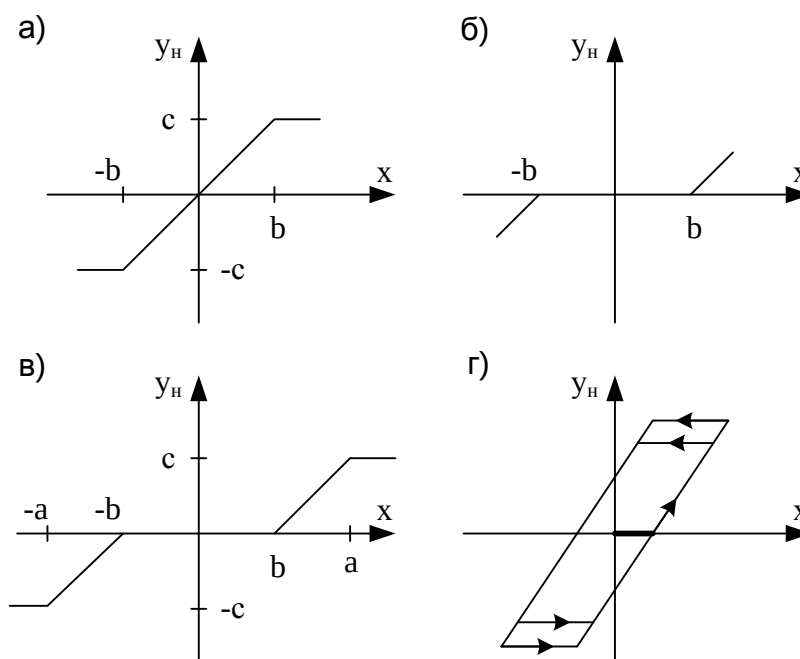


Рис. 2.3. Кусочно-линейные характеристики:
а - с насыщением; б - с зоной нечувствительности;
в - с насыщением и зоной нечувствительности; г - люфт

Характеристика (рис. 2.3,а) отображает насыщение, характеристика (рис. 2.3,б) – зону нечувствительности, а характеристика (рис. 2.3,в) соответствует звену, обладающему одновременно зоной нечувствительности и насыщением. Характеристика (рис. 2.3,г) позволяет учесть люфт или зазор кинематической передачи.

Релейные звенья – это элементы, которые на своем выходе выдают конечное число фиксированных значений. Три наиболее типовые релейные характеристики изображены на рис. 2.4.

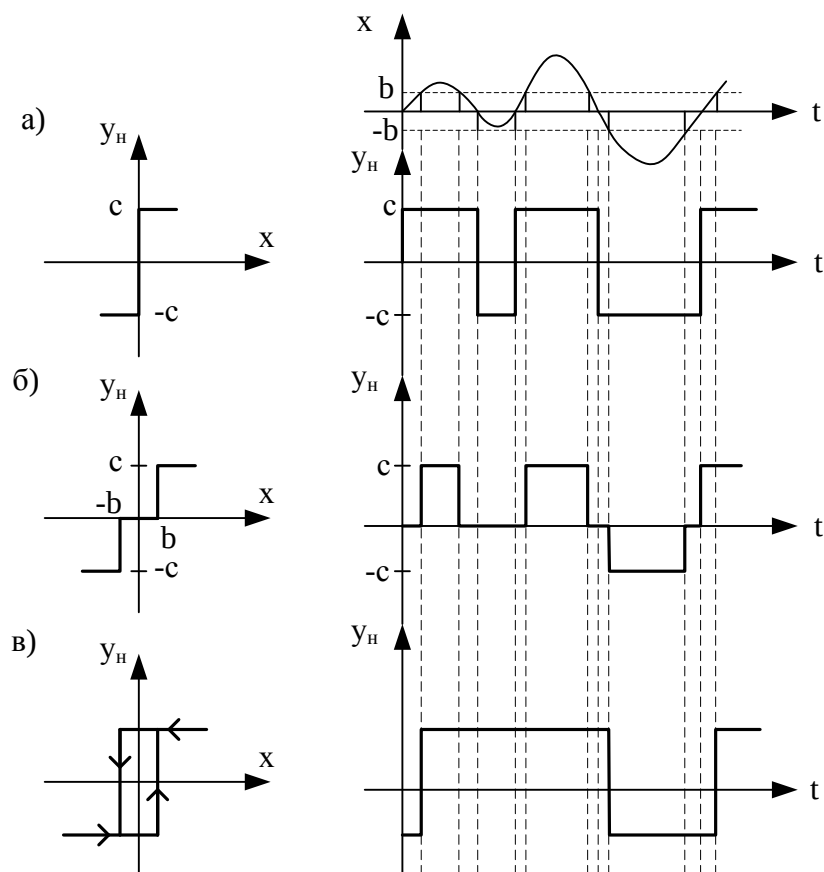


Рис. 2.4. Релейные характеристики:

а - идеальная; б - с зоной нечувствительности; в - гистерезисная

Характеристика (рис. 2.4,а) соответствует идеальному двухпозиционному реле, характеристика (рис. 2.3,б) – трехпозиционному реле с зоной нечувствительности, а характеристика (рис. 2.3,в) – двухпозиционному поляризованному реле.

Кроме того, на рис. 2.4 показано прохождение непрерывного сигнала через соответствующие типы реле. Откуда следует, что коэффициент передачи реле зависит от величины входного воздействия.

Для улучшения динамических свойств систем специально созданы нелинейные звенья с опережающими двузначными статическими характеристиками.

Часто встречаются элементы с несимметричными относительно начала координат статическими характеристиками.

Нелинейные вычислительные звенья, например, множительное, логическое звено и другие.

Различают *статические* и *динамические* нелинейности. Первые представляются в виде нелинейных статических характеристик, а вторые - в виде нелинейных дифференциальных уравнений.

Нелинейные системы обычно классифицируются в соответствии с видом входящих в них нелинейных звеньев.

Особенности нелинейных систем. Поведение нелинейных систем, при наличии существенных нелинейностей, значительно отличается от поведения их линейных моделей [10].

1. Выходная величина нелинейной системы непропорциональна входному воздействию; форма реакции системы зависит от величины входного воздействия.

2. Характер процессов в нелинейной системе зависит от величины начального отклонения, вызванного возмущением. В связи с этим для нелинейных систем существуют понятия об устойчивости “в малом”, “в большом”, “в целом”.

Система устойчива “в малом”, если она устойчива при малых (бесконечно малых) начальных отклонениях. Система устойчива “в большом”, если она устойчива при больших (конечных по величине) начальных отклонениях. Система устойчива “в целом”, если она устойчива при любых больших (неограниченных по величине) начальных отклонениях.

3. Для нелинейных систем характерен режим незатухающих периодических колебаний с постоянной амплитудой и частотой (автоколебаний), возникающий в системах при отсутствии периодических внешних воздействий.

4. При затухающих колебаниях переходного процесса в нелинейных системах происходит изменение периода колебаний.

Основные задачи исследования нелинейных систем. Методы исследования. Задачами исследования нелинейных систем являются:

1) отыскание возможных состояний равновесия системы и исследование их устойчивости;

2) определение автоколебаний и анализ их устойчивости;

3) исследование процессов перехода системы к тому или иному установившемуся состоянию при различных начальных отклонениях.

Начало исследования нелинейных систем обычно связано с рассмотрением устойчивости и определением автоколебаний.

В настоящее время не создано общей теории анализа нелинейных систем. Разработанные методы позволяют решать лишь отдельные нелинейные задачи.

Все инженерные методы исследования нелинейных систем разделяются на две основные группы.

Точные методы, например, метод А.М.Ляпунова, метод фазовой плоскости, метод точечных преобразований, частотный метод В.М.Попова, основаны на точном решении нелинейного дифференциального уравнения, может быть и упрощенного.

Приближенные методы, такие как метод гармонической линеаризации, метод статистической линеаризации, основаны на линеаризации нелинейного уравнения системы.

Мощным и эффективным методом исследования нелинейных систем является моделирование, инструментарием которого служит компьютер. В настоящее время многие сложные для аналитического решения теоретические и практические вопросы сравнительно легко могут быть решены с помощью вычислительной техники.

2.2. Прямой метод Ляпунова

Наиболее общие результаты по исследованию устойчивости нелинейных систем могут быть получены по методу А.М. Ляпунова.

При использовании прямого метода Ляпунова, именуемого также второй методой Ляпунова, исследуемая система описывается дифференциальными уравнениями в форме уравнений первого порядка, полагая, что они записаны для переходного процесса в отклонениях всех переменных x_i ($i = 1, 2, \dots, n$) от их значений в установившемся процессе при новых постоянных значениях возмущающего

$f = f_0$ и задающего $g = g_0$ воздействий. Следовательно, эти уравнения для нелинейной системы n -го порядка будут:

$$\frac{dx_i}{dt} = F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{при } i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

где F_i - нелинейные функции произвольного вида, удовлетворяющие условию

$$F_1 = F_2 = \dots = F_n = 0 \quad \text{при } x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0, \quad (2.2)$$

так как в установившемся состоянии все отклонения и их производные равны нулю.

Чтобы исследовать устойчивость по Ляпунову, необходимо подобрать некоторую знакоопределенную функцию V и вычислить производную по времени от этой функции.

Функция V называется *знакоопределенной* в некоторой области, если она во всех точках этой области в окрестности начала координат сохраняет один и тот же знак и нигде не обращается в нуль, кроме начала координат.

Функция V называется *знакопостоянной*, если она сохраняет один и тот же знак, но может обращаться в нуль не только в начале координат, но и в других точках данной области.

Функция V называется *знакопеременной*, если она в данной области вокруг начала координат может иметь разные знаки.

Функция Ляпунова и ее производная по времени. Любая функция

$$V = V(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.3)$$

тождественно обращающаяся в нуль при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$, называется функцией Ляпунова, если в ней в качестве $x_1, x_2, \dots, x_n$ взяты переменные, в которых записаны уравнения (2.1) для этой системы.

Производная от функции Ляпунова (2.3) по времени будет

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \times \frac{dx_i}{dt}. \quad (2.4)$$

Подставив значения $\frac{dx_i}{dt}$ ($i = 1, 2, \dots, n$) из уравнений системы (2.1), получим

$$\frac{dV}{dt} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} F_i(x_1, x_2, \dots, x_n). \quad (2.5)$$

Следовательно, производная от функции Ляпунова по времени, так же как и сама V , является функцией координат системы

$$\frac{dV}{dt} = W(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad (2.6)$$

причем согласно свойству (2.2) эта функция W , так же как и сама V , тождественно обращается в нуль при $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. Поэтому к ней в одинаковой степени можно применять те же понятия знакоопределенности, знакопостоянства и знакопеременности в некоторой области вокруг начала координат.

Теорема Ляпунова об устойчивости нелинейных систем [2]: если при заданных в форме (2.1) уравнениях системы n -го порядка можно подобрать такую знакоопределенную функцию Ляпунова $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, чтобы ее производная по времени $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$, тоже была знакоопределенной (или знакопостоянной), но имела знак, противоположный знаку V , то данная система устойчива; при знакоопределенной функции W будет иметь место асимптотическая устойчивость.

Теорема Ляпунова о неустойчивости нелинейных систем [2]: если при заданных в форме (2.1) уравнениях системы n -го порядка производная по

времени $W(x_1, x_2, \dots, x_n)$ от какой-нибудь функции Ляпунова $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$ окажется знакоопределенной, причем сама функция V в какой-нибудь области, примыкающей к началу координат, будет иметь знак, одинаковый со знаком производной W , то данная система неустойчива.

Замечания к теореме Ляпунова об устойчивости.

1. При заданных в форме (2.1) уравнениях системы выбор функции V неоднозначен, поэтому данная теорема Ляпунова обеспечивает получение достаточных условий устойчивости, которые не всегда будут и необходимыми, т.е. при выполнении условий теоремы система наверняка будет устойчивой, но эти условия могут не охватывать всей области устойчивости системы по параметрам.

2. Понятие устойчивости по Ляпунову допускает, что при знакоопределенной функции V производная от нее по времени W была не обязательно знакоопределенной или знакопостоянной, а могла быть и тождественно равна нулю. В результате система хотя и не будет асимптотически приближаться к установившемуся состоянию, но все же будет все время в достаточной близости от него.

Нелинейная система (рис. 2.1) с одним нелинейным элементом с однозначной статической характеристикой

$$y_n = F(\sigma)$$

в свободном состоянии может быть представлена в виде замкнутого контура, включающего в себя линейную часть (ЛЧ) и нелинейный элемент (НЭ) (рис. 2.5).

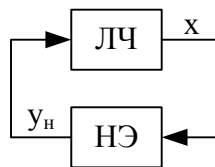


Рис. 2.5. Функциональная схема нелинейной системы
в свободном состоянии

При этом уравнения свободного движения системы ($g = 0$) будут

$$\begin{cases} \frac{dx_i}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i y_n & \text{при } i = 1, 2, \dots, n; \\ y_n = F(\sigma), \end{cases} \quad (2.7)$$

$$\text{где } \sigma = \sum_{k=1}^n c_k x_k;$$

a_{ij}, b_i, c_k - постоянные коэффициенты.

Тогда задача исследования нелинейной системы (2.7) по Ляпунову сводится к определению функции V и ее производной

$$W = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V}{\partial x_i} \left[\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j + b_i F(\sigma) \right]. \quad (2.8)$$

А.И.Лурье предложил функцию Ляпунова выбирать в виде суммы функции квадратичной формы $L(x)$ и интеграла от нелинейной функции $F(\sigma)$ рассматриваемой системы

$$V = L(x) + \int_0^{\sigma} F(\sigma) d\sigma, \quad (2.9)$$

$$\text{где } L(x) = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i^2.$$

Нелинейная система называется *абсолютно устойчивой*, если она устойчива при любых начальных отклонениях и любой форме нелинейной характеристики, удовлетворяющей условиям:

$$0 \leq \frac{F(\sigma)}{\sigma} \leq k; \quad F(0) = 0, \quad (2.10)$$

где k - заданное число.

Пример. Исследовать устойчивость системы, заданной уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= -(x_1 - \beta x_2)(1 - ax_1^2 - bx_2^2); \\ \frac{dx_2}{dt} &= -(x_2 + \alpha x_1)(1 - ax_1^2 - bx_2^2), \end{aligned}$$

где α, β, a, b - положительные постоянные числа.

Р е ш е н и е. Выбираем положительно-определенную функцию Ляпунова

$$V = \alpha x_1^2 + \beta x_2^2.$$

Находим производную от функции Ляпунова по времени

$$\begin{aligned}
 W = \frac{dV}{dt} &= 2\alpha x_1 \frac{dx_1}{dt} + 2\beta x_2 \frac{dx_2}{dt} = \\
 &= -2\alpha x_1 (x_1 - \beta x_2)(1 - ax_1^2 - bx_2^2) - 2\beta x_2 (x_2 + \alpha x_1)(1 - ax_1^2 - bx_2^2) \\
 &= \\
 &= -2(1 - ax_1^2 - bx_2^2)(\alpha x_1^2 + \beta x_2^2).
 \end{aligned}$$

Тогда $W < 0$ при $(1 - ax_1^2 - bx_2^2) > 0$ или $ax_1^2 + bx_2^2 < 1$.

Это достаточное условие устойчивости исследуемой нелинейной системы.

Границей устойчивости системы на плоскости ее координат (рис. 2.6) является эллипс

$$ax_1^2 + bx_2^2 = 1.$$

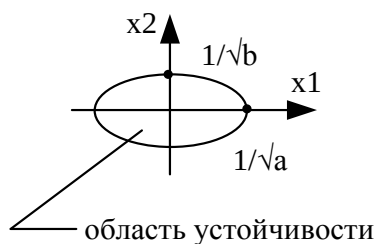


Рис. 2.6. Область устойчивости нелинейной системы

2.3. Частотный метод В.М. Попова

Частотный метод В.М. Попова решает задачу об *абсолютной* устойчивости системы с одной однозначной нелинейностью, заданной предельным значением коэффициента передачи k нелинейного элемента.

Если в системе управления (рис. 2.5) имеется лишь одна одно-значная нелинейность

$$y_n = F(x), \quad (2.11)$$

то, объединив вместе все остальные звенья системы в линейную часть, можно получить ее передаточную функцию $W_{лч}(s)$.

Нелинейность $y_n = F(x)$ имеет любое очертание, не выходящее за пределы заданного угла $\arctg k$ (рис. 2.7), т.е. при любом x

$$0 \leq F(x) \leq kx. \quad (2.12)$$

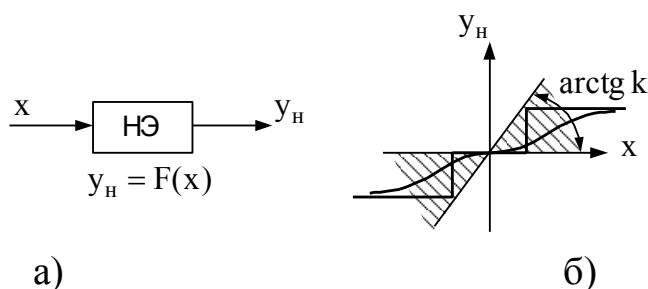


Рис. 2.7. Нелинейность системы:

а) нелинейный элемент; б) статические характеристики

Теорема В.М. Попова [2]: для установления абсолютной устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такое конечное действительное число q , при котором для всех частот $\omega \geq 0$

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W_{лч}(j\omega)] + \frac{1}{k} > 0, \quad (2.13)$$

где k - предельное значение коэффициента передачи нелинейного элемента;

$W_{лч}(j\omega)$ - амплитудно-фазовая частотная характеристика линейной части системы.

Все полюсы передаточной функции линейной части системы должны быть с отрицательными вещественными частями или же кроме них имеется еще не более двух нулевых. При наличии одного нулевого полюса требуется еще, чтобы

$$\operatorname{Im} W_{лч}(j\omega) \rightarrow -\infty \text{ при } \omega \rightarrow 0,$$

а при двух нулевых полюсах

$$\operatorname{Re} W_{\text{лч}}(j\omega) \rightarrow -\infty \text{ при } \omega \rightarrow 0, \text{ а } \operatorname{Im} W_{\text{лч}}(j\omega) < 0 \text{ при малых } \omega.$$

Другая формулировка той же теоремы, дающая удобную графическую интерпретацию, связана с введением *видоизмененной частотной характеристики* линейной части системы $W^*(j\omega)$, которая определяется следующим образом:

$$\begin{cases} U^*(j\omega) = \operatorname{Re} W^*(j\omega) = \operatorname{Re} W_{\text{лч}}(j\omega), \\ V^*(j\omega) = \operatorname{Im} W^*(j\omega) = \omega T_0 \operatorname{Im} W_{\text{лч}}(j\omega), \end{cases} \quad (2.14)$$

где $T_0 = 1$ с - нормирующий множитель.

Преобразовав левую часть неравенства (2.13)

$$\operatorname{Re}[(1 + j\omega q)W_{\text{лч}}(j\omega)] + \frac{1}{k} = \operatorname{Re} W_{\text{лч}}(j\omega) - \omega q \operatorname{Im} W_{\text{лч}}(j\omega) + \frac{1}{k}$$

и используя соотношения (2.14), получим вместо (2.13) для теоремы В.М. Попова условие

$$U^*(\omega) - \frac{q}{T_0} V^*(\omega) + \frac{1}{k} > 0 \quad (2.15)$$

при всех $\omega \geq 0$.

Очевидно, что равенство

$$U^*(\omega) - \frac{q}{T_0} V^*(\omega) + \frac{1}{k} = 0 \quad (2.16)$$

представляет собой уравнение прямой на плоскости $W^*(j\omega)$. Эта прямая, называемая прямой Попова, проходит через точку с координатами $[-1/k, j0]$ и имеет угловой коэффициент наклона к оси абсцисс $1/q$.

Отсюда вытекает *графическая интерпретация теоремы В.М. Попова* [2]: для установления абсолютной устойчивости нелинейной системы достаточно подобрать такую прямую на комплексной

плоскости $W^*(j\omega)$, проходящую через точку $(-\frac{1}{k}, j0)$, чтобы вся кривая $W^*(j\omega)$ лежала справа от этой прямой.

Условия выполнения теоремы. показаны на рис. 2.8.

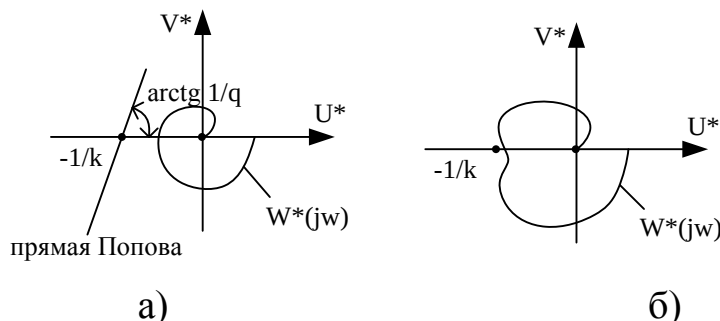


Рис. 2.8. Графическая интерпретация теоремы В.М. Попова:
а - абсолютно устойчивая система; б - система не имеет абсолютной устойчивости

На рис. 2.8,а приведен случай абсолютной устойчивости нелинейной системы при любой форме однозначной нелинейности, ограниченной лишь условием (2.12), а рис. 2.8,б соответствует случаю невыполнения теоремы, т.е. нелинейная система не имеет абсолютной устойчивости.

Таким образом, для определения абсолютной устойчивости нелинейной системы по методу В.М. Попова необходимо построить видоизмененную частотную характеристику линейной части системы $W^*(j\omega)$, определить предельное значение коэффициента передачи k нелинейного элемента из условия $0 \leq \frac{F(x)}{x} \leq k$ и через точку $(-\frac{1}{k}, j0)$ на вещественной оси комплексной плоскости провести некоторую прямую так, чтобы характеристика $W^*(j\omega)$ лежала справа от этой прямой. Если такую прямую провести нельзя, то это значит, что абсолютная устойчивость для данной системы невозможна. Величина q , связанная с угловым коэффициентом, при этом определяется из условия (2.15) так, чтобы при известных параметрах системы неравенство соблюдалось для всех частот. Очертание нелинейности может быть неизвестным. Необходимо знать лишь, в пределах какого угла $\arctg k$ (рис.

2.7,б) она расположена. Для конкретно заданных форм нелинейности область устойчивости будет несколько шире, но данным методом это не определяется.

Дополнение: неравенство (2.13) является так же достаточным условием абсолютной устойчивости нелинейной системы и при $k \rightarrow \infty$.

Пример. Определить предельное значение коэффициента передачи k нелинейного элемента из условия обеспечения абсолютной устойчивости нелинейной системы, передаточная функция линейной части которой

$$W_{\text{лч}}(s) = \frac{10}{s(s+1)}.$$

Р е ш е н и е. По передаточной функции линейной части системы находим ее частотную передаточную функцию

$$W_{\text{лч}}(j\omega) = \frac{10}{j\omega(j\omega+1)} = -\frac{10}{\omega^2+1} - j\frac{10}{\omega(\omega^2+1)},$$

откуда получаем видоизмененную частотную характеристику

$$W^*(j\omega) = -\frac{10}{\omega^2+1} - j\frac{10}{\omega^2+1}$$

и строим ее на комплексной плоскости, изменяя частоту ω от 0 до ∞ (рис. 2.9).

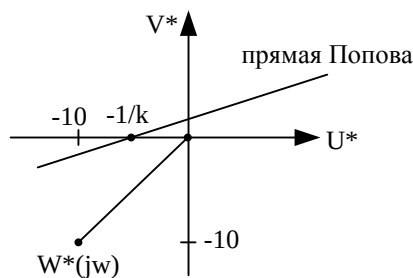


Рис. 2.9. Видоизмененная частотная характеристика

Как видно из последнего выражения, видоизмененная частотная характеристика $W^*(j\omega)$ представляет собой отрезок прямой линии между точками с координатами $[-10, -j10]$ и $[0, -j0]$.

Следовательно, прямая Попова может быть проведена для любого положительного значения коэффициента передачи k нелинейного элемента так, что вся характеристика $W^*(j\omega)$ будет лежать справа от этой прямой.

Таким образом, исследуемая нелинейная система абсолютно устойчива при $k > 0$.

2.4. Метод гармонической линеаризации

Идея метода гармонической линеаризации принадлежит Н.М. Крылову и Н.Н. Боголюбову и базируется на замене нелинейного элемента системы линейным звеном, параметры которого определяются при гармоническом входном воздействии из условия равенства амплитуд первых гармоник на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линейного звена. Данный метод может быть использован в том случае, когда линейная часть системы является низкочастотным фильтром, т.е. отфильтровывает все возникающие на выходе нелинейного элемента гармонические составляющие, кроме первой гармоники.

Коэффициенты гармонической линеаризации и эквивалентные комплексные коэффициенты передачи нелинейных элементов. В нелинейной системе (рис. 2.1) параметры линейной части и нелинейного элемента выбирают таким образом, чтобы существовали симметричные периодические колебания с частотой ω .

В основе метода гармонической линеаризации нелинейностей (рис. 2.10), описываемых уравнением

$$y_n = F(x), \quad (2.17)$$

лежит предположение, что на вход нелинейного элемента подается гармоническое воздействие с частотой ω и амплитудой a , т.е.

$$x = a \sin \psi, \quad \text{где } \psi = \omega t, \quad (2.18)$$

а из всего спектра выходного сигнала выделяется только первая гармоника

$$y_{n1} = a_{n1} \sin(\psi + \psi_{n1}), \quad (2.19)$$

где a_{n1} - амплитуда а ψ_{n1} - фазовый сдвиг;

при этом высшие гармоники отбрасываются и устанавливается связь между первой гармоникой выходного сигнала и входным гармоническим воздействием нелинейного элемента.

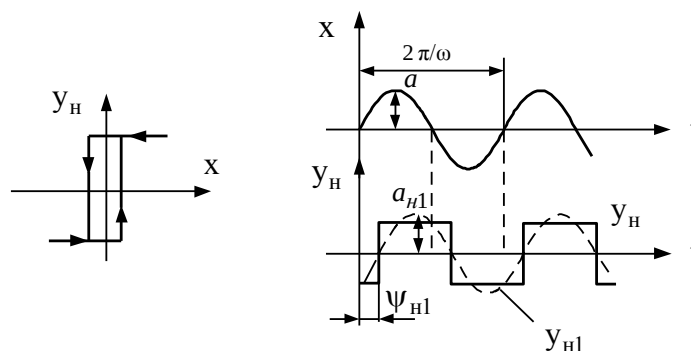


Рис. 2.10. Характеристики нелинейного элемента

В случае нечувствительности нелинейной системы к высшим гармоникам нелинейный элемент может быть в первом приближении заменен некоторым элементом с эквивалентным коэффициентом передачи, который определяет первую гармонику периодических колебаний на выходе в зависимости от частоты и амплитуды синусоидальных колебаний на входе.

Для нелинейных элементов с характеристикой (2.17) в результате разложения периодической функции $F(x)$ в ряд Фурье при синусоидальных колебаниях на входе (2.18) получим выражение для первой гармоники сигнала на выходе

$$y_{H1} = b_{1F} \sin \psi + a_{1F} \cos \psi, \quad (2.20)$$

где b_{1F} , a_{1F} - коэффициенты разложения в ряд Фурье, определяющие амплитуды соответственно синфазной и квадратурной составляющих первой гармоники, которые определяются по формулам:

$$b_{1F} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \sin \psi \, d\psi, \quad a_{1F} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(a \sin \psi) \cos \psi \, d\psi.$$

Так как

$$p x = a \omega \cos \psi, \quad \text{где } p = d/dt,$$

то связь между первой гармоникой периодических колебаний на выходе нелинейного элемента и синусоидальными колебаниями на его входе можно записать в виде

$$y_{H1} = \left[q + q' \frac{p}{\omega} \right] x, \quad (2.21)$$

где $q = b_{1F}/a$, $q' = a_{1F}/a$.

Последнее уравнение называется *уравнением гармонической линеаризации*, а коэффициенты q и q' - *коэффициентами гармонической линеаризации*.

Таким образом, нелинейный элемент при воздействии гармонического сигнала с точностью до высших гармоник описывается уравнением (2.21), которое является линейным. Это уравнение нелинейного элемента отличается от уравнения линейного звена тем, что его коэффициенты q и q' изменяются при изменении амплитуды a и частоты ω колебаний на входе. Именно в этом заключается принципиальное отличие гармонической линеаризации от обычной, коэффициенты которой не зависят от входного сигнала, а определяются только видом характеристики нелинейного элемента.

Для различных видов нелинейных характеристик коэффициенты гармонической линеаризации сведены в таблицу [7, 17]. В общем случае коэффициенты гармонической линеаризации $q(a, \omega)$ и $q'(a, \omega)$

зависят от амплитуды a и частоты ω колебаний на входе нелинейного элемента. Однако, для статических нелинейностей эти коэффициенты $q(a)$ и $q'(a)$ являются функцией только амплитуды a входного гармонического сигнала, а для статических однозначных нелинейностей коэффициент $q'(a) = 0$.

Подвергнув уравнение (2.21) преобразованию по Лапласу при нулевых начальных условиях с последующей заменой оператора s на $j\omega$ ($s = j\omega$), получим *эквивалентный комплексный коэффициент передачи* нелинейного элемента

$$W_{\Sigma}(j\omega, a) = q + jq' = A_{\Sigma}(\omega, a) e^{j\psi_{\Sigma}(\omega, a)}, \quad (2.22)$$

где модуль и аргумент эквивалентного комплексного коэффициента передачи связаны с коэффициентами гармонической линеаризации выражениями

$$A_{\Sigma}(\omega, a) = \text{mod } W_{\Sigma}(j\omega, a) = \sqrt{[q(a, \omega)]^2 + [q'(a, \omega)]^2};$$

$$\psi_{\Sigma}(\omega, a) = \arg W_{\Sigma}(j\omega, A) = \arctg[q'(a, \omega)/q(a, \omega)].$$

Эквивалентный комплексный коэффициент передачи нелинейного элемента позволяет определить амплитуду и фазовый сдвиг первой гармоники (2.19) на выходе нелинейного элемента при гармоническом воздействии (2.18) на его входе, т.е.

$$a_{n1} = a \times A_{\Sigma}(\omega, a); \quad \psi_{n1} = \psi_{\Sigma}(\omega, a).$$

Исследование симметричных периодических режимов в нелинейных системах. При исследовании нелинейных систем на основе метода гармонической линеаризации в первую очередь решают вопрос о существовании и устойчивости периодических режимов. Если периодический режим устойчив, то в системе существуют автоколебания с частотой ω_0 и амплитудой a_0 .

Рассмотрим нелинейную систему (рис. 2.5), включающую в себя линейную часть с передаточной функцией

$$W_{\text{лч}}(s) = \frac{B(s)}{A(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \dots + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \dots + a_n} \quad (2.23)$$

и нелинейный элемент с эквивалентным комплексным коэффициентом передачи

$$W_{\Sigma}(j\omega, a) = q(\omega, a) + jq'(\omega, a) = A_{\Sigma}(\omega, a) e^{j\psi_{\Sigma}(\omega, a)}. \quad (2.24)$$

Принимая во внимание выражение (2.21), можно записать уравнение нелинейной системы

$$\{A(p) + B(p) \times [q(\omega, a) + q'(\omega, a) \frac{p}{\omega}]\} x = 0. \quad (2.25)$$

Если в замкнутой нелинейной системе возникают автоколебания

$$x = a_0 \sin \omega_0 t$$

с постоянной амплитудой и частотой, то коэффициенты гармонической линеаризации оказываются постоянными, а вся система стационарной. Для оценки возможности возникновения автоколебаний в нелинейной системе методом гармонической линеаризации необходимо найти условия границы устойчивости, как это делалась при анализе устойчивости линейных систем.

Периодическое решение существует, если при $a = a_0$ и $\omega = \omega_0$ характеристическое уравнение гармонически линеаризованной системы

$$A(p) + B(p) \times [q(\omega, a) + q'(\omega, a) \frac{p}{\omega}] = 0 \quad (2.26)$$

имеет пару мнимых корней $\lambda_i = j\omega_0$ и $\lambda_{i+1} = -j\omega_0$. Устойчивость решения необходимо оценить дополнительно.

В зависимости от методов решения характеристического уравнения различают методы исследования нелинейных систем.

Аналитический метод. Для оценки возможности возникновения в нелинейной системе автоколебаний в гармонически линеаризованный характеристический полином системы вместо p подставляют $j\omega$

$$D(j\omega, a) = A(j\omega) + B(j\omega) \times [q(\omega, a) + jq'(\omega, a)]. \quad (2.27)$$

В результате получают уравнение $D(j\omega, a) = 0$, коэффициенты которого зависят от амплитуды и частоты предполагаемого автоколебательного режима. Выделив вещественную и мнимую части

$$\operatorname{Re} D(j\omega, a) = X(\omega, a);$$

$$\operatorname{Im} D(j\omega, a) = Y(\omega, a),$$

получим уравнение

$$X(\omega, a) + jY(\omega, a) = 0. \quad (2.28)$$

Если при действительных значениях a_0 и ω_0 выражение (2.28) удовлетворяется, то в системе возможен автоколебательный режим, параметры которого рассчитываются по следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} X(\omega_0, a_0) = 0; \\ Y(\omega_0, a_0) = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Из выражений (2.29) можно найти зависимость амплитуды и частоты автоколебаний от параметров системы, например, от коэффициента передачи k линейной части системы. Для этого необходимо в уравнениях (2.29) коэффициент передачи k считать переменной величиной, т.е. эти уравнения записать в виде:

$$\begin{cases} X(\omega_0, a_0, k) = 0; \\ Y(\omega_0, a_0, k) = 0. \end{cases} \quad (2.30)$$

По графикам $a_0 = f(k)$, $\omega_0 = f(k)$ можно выбрать коэффициент передачи k , при котором амплитуда и частота возможных автоколебаний имеет допустимые значения или вообще отсутствует.

Частотный метод. В соответствии с критерием устойчивости Найквиста незатухающие колебания в линейной системе возникают в том случае, когда амплитудно-фазовая характеристика разомкнутой

системы проходит через точку с координатами $[-1, j0]$. Данное условие является также условием существования автоколебаний в гармонически линеаризованной нелинейной системе, т.е.

$$W_n(j\omega, a) = -1. \quad (2.31)$$

Так как линейная и нелинейная части системы соединены последовательно, то частотная характеристика разомкнутой нелинейной системы имеет вид

$$W_n(j\omega, a) = W_{лч}(j\omega) \times W_{\varepsilon}(j\omega, a). \quad (2.32)$$

Тогда в случае статической характеристики нелинейного элемента условие (2.31) принимает вид

$$W_{лч}(j\omega) = -\frac{1}{W_{\varepsilon}(a)}. \quad (2.33)$$

Решение уравнения (2.33) относительно частоты и амплитуды автоколебаний можно получить графически как точку пересечения годографа частотной характеристики линейной части системы $W_{лч}(j\omega)$ и годографа обратной характеристики нелинейной части $W_{\varepsilon}^{-1}(a)$, взятой с обратным знаком (рис. 2.11). Если эти годографы не пересекаются, то режим автоколебаний в исследуемой системе не существует.

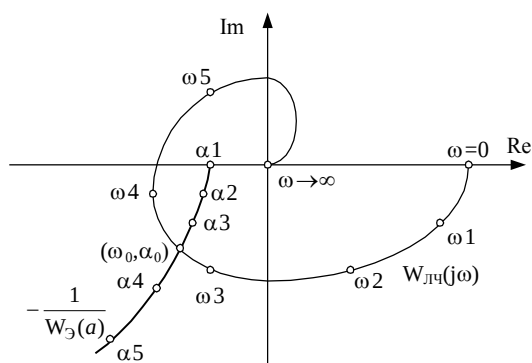


Рис. 2.11. Годографы линейной и нелинейной частей системы

Для устойчивости автоколебательного режима с частотой ω_0 и амплитудой a_0 требуется, чтобы точка на годографе нелинейной части $-W_{\varepsilon}^{-1}(a)$, соответствующая увеличенной амплитуде $a_0 + \Delta a$ по

сравнению со значением в точке пересечения годографов, не охватывалась годографом частотной характеристики линейной части системы и охватывалась точка, соответствующая уменьшенной амплитуде $a_0 - \Delta a$.

На рис. 2.11 дан пример расположения годографов для случая, когда в нелинейной системе существуют устойчивые автоколебания, так как $a_3 < a_0 < a_4$.

Исследование по логарифмическим частотным характеристикам.

При исследовании нелинейных систем по логарифмическим частотным характеристикам условие (2.31) переписывают отдельно для модуля и аргумента эквивалентного комплексного коэффициента передачи разомкнутой нелинейной системы

$$\begin{aligned} \text{mod } W_{\text{лч}}(j\omega)W_3(j\omega, a) &= 1; \\ \arg W_{\text{лч}}(j\omega)W_3(j\omega, a) &= -(2k+1)\pi, \text{ при } k=0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

с последующим переходом к логарифмическим амплитудной и фазовой характеристикам

$$L_{\text{лч}}(\omega) + L_3(\omega, a) = 0; \quad (2.34)$$

$$\psi_{\text{лч}}(\omega) + \psi_3(\omega, a) = -(2k+1)\pi, \text{ при } k=0, 1, 2, \dots \quad (2.35)$$

Условия (2.34) и (2.35) позволяют определить амплитуду a_0 и частоту ω_0 периодического решения уравнения (2.25) по логарифмическим характеристикам линейной части системы $L_{\text{лч}}(\omega)$, $\psi_{\text{лч}}(\omega)$ и нелинейного элемента $L_3(\omega, a)$, $\psi_3(\omega, a)$.

Автоколебания с частотой ω_0 и амплитудой a_0 будут существовать в нелинейной системе, если периодическое решение уравнения (2.25) устойчиво. Приближенный метод исследования устойчивости периодического решения заключается в том, что исследуется поведение системы при частоте $\omega = \omega_0$ и значениях амплитуды $a = a_0 + \Delta a$ и $a = a_0 - \Delta a$, где $\Delta a > 0$ - малое приращение амплитуды. При исследо-

вании устойчивости периодического решения при $a_0 + \Delta a$ и $a_0 - \Delta a$ по логарифмическим характеристикам пользуются критерием устойчивости Найквиста.

В нелинейных системах с однозначными статическими характеристиками нелинейного элемента коэффициент гармонической линеаризации $q'(a)$ равен нулю, а следовательно, равен нулю и фазовый сдвиг $\psi_3(a)$, вносимый элементом. В этом случае периодическое решение уравнения системы

$$[A(p) + B(p) \times q(a)]x = 0 \quad (2.36)$$

существует, если выполняются условия:

$$L_{\text{лч}}(\omega) = -L_3(a); \quad (2.37)$$

$$\psi_{\text{лч}}(\omega) = -(2k+1)\pi, \text{ при } k=0, 1, 2, \dots \quad (2.38)$$

Уравнение (2.38) позволяет определить частоту $\omega = \omega_0$ периодического решения, а уравнение (2.37) – его амплитуду $a = a_0$.

При сравнительно простой линейной части решения этих уравнений могут быть получены аналитически. Однако в большинстве случаев их целесообразно решать графически (рис. 2.12).

При исследовании устойчивости периодического решения уравнения (2.36), т.е. при определении существования автоколебаний в нелинейной системе с однозначной нелинейной статической характеристикой пользуются *критерием Найквиста* [15]: периодическое решение с частотой $\omega = \omega_0$ и амплитудой $a = a_0$ устойчиво, если при изменении частоты от нуля до бесконечности и положительном приращении амплитуды $\Delta a > 0$ разность между числом положительных (сверху вниз) и отрицательных (снизу вверх) переходов фазовой характеристики линейной части системы $\psi_{\text{лч}}(\omega)$ через линию $-\pi$ равна нулю в диапазоне частот, где $L_{\text{лч}}(\omega) \geq -L_3(\omega_0, a_0 + \Delta a)$, и не равна нулю в диапазоне частот, где $L_{\text{лч}}(\omega) \geq -L_3(\omega_0, a_0 - \Delta a)$.

На рис. 2.12 показан пример определения периодических решений в нелинейной системе с ограничением. В такой системе имеются

три периодических решения с частотами ω_{01} , ω_{02} и ω_{03} , определяемыми в точках пересечения фазовой характеристики $\psi_{лч}(\omega)$ с линией -180° . Амплитуды периодического решения a_{01} , a_{02} и a_{03} определяются из условия (2.37) по логарифмическим амплитудным характеристикам нелинейного элемента $-L_3(\omega_{01}, a)$, $-L_3(\omega_{02}, a)$ и $-L_3(\omega_{03}, a)$.

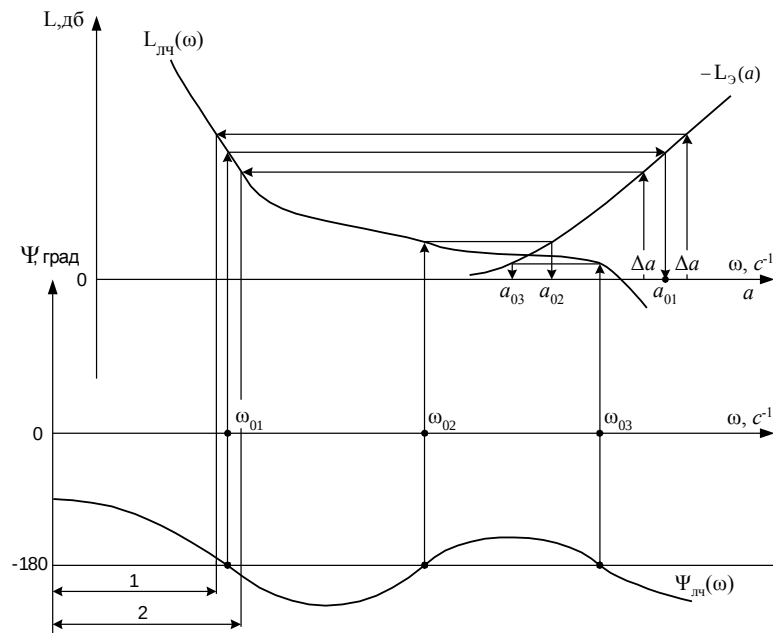


Рис. 2.12. Логарифмические амплитудные и фазовая характеристики

Из трех решений, определенных на рис. 2.12, устойчивы два. Решение с частотой $\omega = \omega_{01}$ и амплитудой $a = a_{01}$ устойчиво, так как в диапазоне частот 1, где $L_{лч}(\omega) \geq -L_3(\omega_{01}, a_{01} + \Delta a)$, фазовая характеристика $\psi_{лч}(\omega)$ не пересекает линию -180° , а в диапазоне частот 2, где $L_{лч}(\omega) \geq -L_3(\omega_{01}, a_{01} - \Delta a)$, фазовая характеристика $\psi_{лч}(\omega)$ один раз пересекает линию -180° . Решение с частотой $\omega = \omega_{02}$ и амплитудой $a = a_{02}$ неустойчиво, так как в диапазоне частот, где $L_{лч}(\omega) \geq -L_3(\omega_{02}, a_{02} + \Delta a)$, фазовая характеристика $\psi_{лч}(\omega)$ один раз пересекает линию -180° . Высокочастотное периодическое решение с частотой $\omega = \omega_{03}$ и амплитудой $a = a_{03}$ устойчиво, так как в диапазоне частот, где $L_{лч}(\omega) \geq -L_3(\omega_{03}, a_{03} + \Delta a)$, имеется один положительный и один отрица-

тельный переход фазовой характеристики $\psi_{лч}(\omega)$ через линию -180° , а в диапазоне частот, где $L_{лч}(\omega) \geq -L_3(\omega_{03}, a_{03} - \Delta a)$, имеются два положительных и один отрицательный переход фазовой характеристики $\psi_{лч}(\omega)$ через линию -180° .

В рассмотренной системе при малых по величине возмущениях установятся высокочастотные автоколебания с частотой ω_{03} и амплитудой a_{03} , а при больших по величине возмущениях – низкочастотные автоколебания с частотой ω_{01} и амплитудой a_{01} .

Пример. Исследовать автоколебательные режимы в нелинейной системе, линейная часть которой имеет следующую передаточную функцию

$$W_{лч}(s) = \frac{k}{s(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)},$$

где $k=200 \text{ с}^{-1}$; $T_1=1.5 \text{ с}$; $T_2=0.015 \text{ с}$,

а в качестве нелинейного элемента используется реле с зоной нечувствительности (рис. 2.4,б) при $c=10 \text{ В}$, $b=2 \text{ В}$.

Р е ш е н и е. По таблице [7] для реле с зоной нечувствительности находим коэффициенты гармонической линеаризации:

$$q(a) = \frac{4c}{\pi a} \sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}} \text{ при } a \geq b, \quad q'(a) = 0.$$

При построении характеристик нелинейного элемента целесообразно использовать относительное по сравнению с зоной нечувствительности значение амплитуды входного гармонического воздействия $\mu = a/b$. Перепишем выражение коэффициента гармонической линеаризации в виде

$$q(a) = \frac{4cb^2}{\pi b a^2} \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1}.$$

Откуда

$$q(\mu) = \frac{k_n}{\mu^2} \sqrt{\mu^2 - 1},$$

где $k_n = \frac{4c}{\pi b} = 6.4$ - коэффициент передачи реле;

$\mu = \frac{a}{b}$ - относительная амплитуда.

Коэффициент передачи реле k_n отнесем к линейной части системы и получим нормированные коэффициенты гармонической линеаризации

$$q(\mu) = \frac{1}{\mu^2} \sqrt{\mu^2 - 1}, \quad q'(\mu) = 0$$

и нормированную логарифмическую амплитудную характеристику релейного элемента с обратным знаком

$$-L_{\vartheta}(\mu) = 20 \lg \frac{\mu^2}{\sqrt{\mu^2 - 1}}.$$

Если $\mu \rightarrow 1$, то $-L_{\vartheta}(\mu) \rightarrow \infty$; а при $\mu \gg 1$ $-L_{\vartheta}(\mu) = 20 \lg \mu$. Таким образом, асимптотами нормированной логарифмической амплитудной характеристики с обратным знаком являются вертикальная прямая и прямая с наклоном $+20$ дБ/дек, которые проходят через точку с координатами $L = 0$, $\mu = 1$ (рис. 2.13).

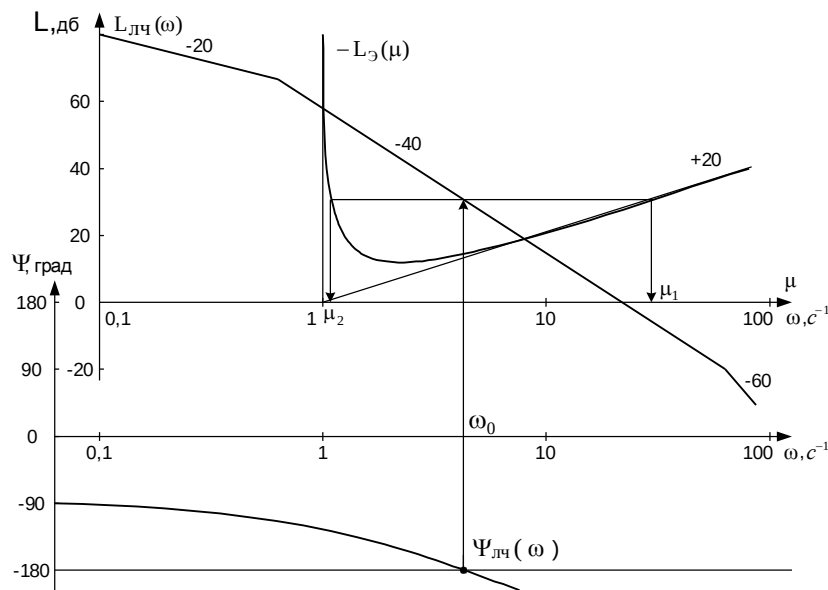


Рис. 2.13. Определение периодического решения в релейной системе с зоной нечувствительности

Для решения вопроса о существовании автоколебаний в соответствии с нормированной логарифмической амплитудной характери-

стикой с обратным знаком нелинейного элемента и передаточной функцией линейной части системы

$$W_{\text{лч}}(s) = \frac{k_{\text{н}}k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

на рис. 2.13 построены логарифмические характеристики $L_{\text{лч}}(\omega)$, $-L_{\text{э}}(\mu)$ и $\psi_{\text{лч}}(\omega)$.

Частота периодического решения $\omega_0 = 4.3 \text{ с}^{-1}$ определяется в точке пересечения фазовой характеристики $\psi_{\text{лч}}(\omega)$ и линии -180° . Амплитуды периодических решений $\mu_1 = 29$ и $\mu_2 = 1.08$ находятся по характеристикам $L_{\text{лч}}(\omega)$ и $-L_{\text{э}}(\mu)$. Периодическое решение с малой амплитудой μ_2 неустойчиво, а периодическое решение с большой амплитудой μ_1 устойчиво.

Таким образом, в исследуемой релейной системе существует автоколебательный режим с частотой $\omega_0 = 4.3 \text{ с}^{-1}$ и амплитудой $a_0 = b \times \mu_1 = 58 \text{ В}$.

Для решения вопроса о существовании автоколебаний в соответствии с нормированной логарифмической амплитудной характеристикой с обратным знаком нелинейного элемента и передаточной функцией линейной части системы

$$W_{\text{лч}}(s) = \frac{k_{\text{н}}k}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$$

на рис. 2.13 построены логарифмические характеристики $L_{\text{лч}}(\omega)$, $-L_{\text{э}}(\mu)$ и $\psi_{\text{лч}}(\omega)$.

Частота периодического решения $\omega_0 = 4.3 \text{ с}^{-1}$ определяется в точке пересечения фазовой характеристики $\psi_{\text{лч}}(\omega)$ и линии -180° . Амплитуды периодических решений $\mu_1 = 29$ и $\mu_2 = 1.08$ находятся по характеристикам $L_{\text{лч}}(\omega)$ и $-L_{\text{э}}(\mu)$. Периодическое решение с малой амплитудой μ_2 неустойчиво, а периодическое решение с большой амплитудой μ_1 устойчиво.

Таким образом, в исследуемой релейной системе существует автоколебательный режим с частотой $\omega_0 = 4.3 \text{ с}^{-1}$ и амплитудой $a_0 = b \times \mu_1 = 58 \text{ В}$.

2.5. Методы фазового пространства

Методы фазового пространства относятся к наиболее ранним точным аналитическим методам теории нелинейных систем. К ним относится метод фазовой плоскости и метод точечных отображений или преобразований [1].

Фазовым пространством называется пространство, по осям координат которого отложены переменные, характеризующие состояние динамической системы. Если движение системы описывается дифференциальным уравнением n -го порядка, то состояние этой системы в любой момент времени можно характеризовать некоторой точкой n -мерного фазового пространства, по осям которого отложены одна из координат системы и $(n-1)$ ее производных. Точка, характеризующая состояние системы, называется *изображающей точкой*.

При движении системы изображающая точка описывает в фазовом пространстве некоторую кривую, называемую *фазовой траекторией*. Каждому определенному переходному процессу в фазовом пространстве соответствует определенная фазовая траектория. Начальное положение изображающей точки определяется начальными условиями. В установившемся равновесном состоянии системы все производные рассматриваемой переменной равны нулю; соответствующие этому точки фазового пространства находятся в покое и называются *особыми точками*. Совокупность фазовых траекторий для всевозможных начальных отклонений называется *фазовым портретом* системы.

Имея фазовый портрет системы, определяют по нему особые точки и траектории, исследуют устойчивость системы и оценивают качество процесса управления.

Метод фазовой плоскости используется для исследования систем второго порядка и заключается в построении фазовых портретов на плоскости. Для этого из уравнений состояния исключается время и определяются уравнения фазовых кривых. Задача становится достаточно простой, если рассматривается система с кусочно-линейной ха-

рактической характеристикой нелинейного элемента. В этом случае в разных областях фазовой плоскости система описывается линейными уравнениями, в соответствии с которыми строятся фазовые траектории, которые в дальнейшем “сшиваются” по линиям переключения, определяемым видом нелинейной характеристики.

При исследовании нелинейных систем высокого порядка их аппроксимируют системами второго порядка с эквивалентным запаздыванием.

Для изображения процессов на фазовой плоскости нелинейное уравнение, описывающее систему, заменяют эквивалентными уравнениями первого порядка вида

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = f(x, y); \\ \frac{dx}{dt} = y, \end{cases} \quad (2.39)$$

где x, y - координата системы и ее первая производная;

$f(x, y)$ - нелинейная функция.

Разделив первое из уравнений (2.39) на второе, получим дифференциальное уравнение, из которого исключено время t :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x, y)}{y}. \quad (2.40)$$

Решение данного уравнения

$$y = F(x) \quad (2.41)$$

определяет уравнение фазовой траектории, которая графически изображается на фазовой плоскости (x, y) . Каждой совокупности начальных условий (x_0, y_0) соответствует свое решение и своя фазовая траектория. Семейство фазовых траекторий характеризует все возможные виды переходных процессов в данной системе управления при любых начальных условиях и образует ее фазовый портрет.

Основные свойства фазовых траекторий вытекают из выражения (2.40):

1) если $f(x, y)$ определена и непрерывна в некоторой области и имеет непрерывные частные производные по своим аргументам, то через всякую точку фазовой плоскости, за исключением особых точек, проходит единственная фазовая траектория. Это означает, что фазовые траектории не пересекаются между собой;

2) так как при $y > 0$ производная $dx/dt > 0$ и x только возрастает, то в верхней фазовой полуплоскости при возрастании времени t изображающая точка движется слева направо. Соответственно в нижней полуплоскости движение происходит справа налево. Направление движения на траекториях показывают стрелками;

3) в точках, где $y=0$, $f(x, y) \neq 0$ (неособых точках на оси абсцисс), фазовые траектории пересекают ось под прямым углом.

В тех случаях, когда решение уравнения (2.40) аналитическими методами затруднительно или невыполнимо, фазовые траектории можно построить приближительным графическим методом изоклин [2, 5, 10].

Изоклины представляют собой геометрическое место всех точек фазовой плоскости, для которых наклон фазовой траектории равен постоянному значению c_i , то есть $dy/dx = c_i$. Тогда вместо (2.40) можно написать уравнение

$$\frac{f(x, y)}{y} = c_i,$$

из которого получается уравнение изоклины

$$y = \varphi(x, c_i).$$

Задавая различные значения c_i наклона касательных к фазовым траекториям, пересекающим эти изоклины, строят семейство изоклин, которые используются для построения фазовых траекторий (рис. 2.14). Фазовая траектория в точке пересечения с изоклиной имеет угол наклона $\arctg c_i$. В качестве примера на рис. 2.14 на изоклинах отмечены наклоны касательных к пересекающим их траекториям

направляющими стрелками и построена фазовая траектория, исходящая из точки А.

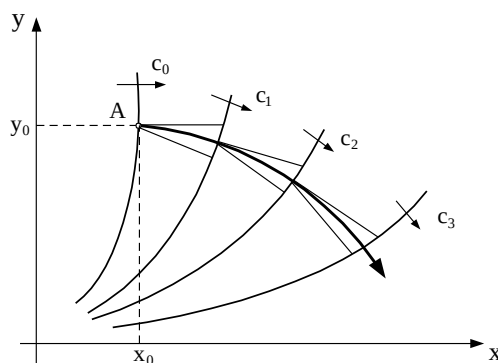


Рис. 2.14. Построение фазовой траектории методом изоклин

Рассмотрим фазовые траектории линейной системы второго порядка, переходный процесс в которой описывается уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_2 x = 0.$$

Введя обозначение для скорости изменения регулируемой величины $y = dx/dt$, получим эквивалентные уравнения первого порядка

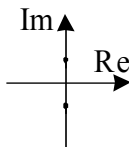
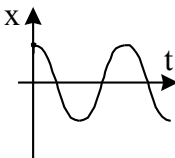
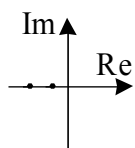
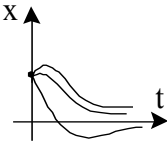
$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y; \\ \frac{dy}{dt} = -a_1 y - a_2 x, \end{cases}$$

откуда, исключив время t , находим дифференциальное уравнение для определения фазовых траекторий

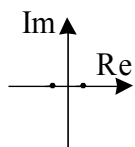
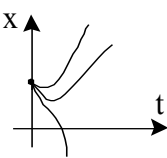
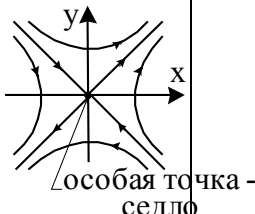
$$\frac{dy}{dx} = -a_1 - a_2 \frac{x}{y}.$$

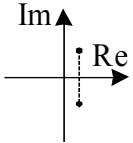
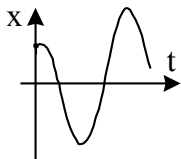
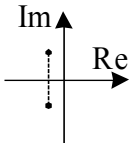
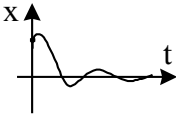
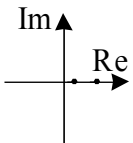
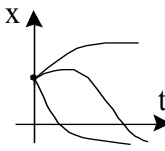
Решение $y = F(x)$ этого уравнения определяет уравнения фазовых траекторий на фазовой плоскости (x, y) . Возможные виды фазовых портретов системы, соответствующие корням характеристического уравнения $p^2 + a_1 p + a_2 = 0$, приведены в таблице.

Виды фазовых портретов для линейных систем второго порядка

Корни характеристического уравнения	Переходный процесс	Фазовая траектория
1	2	3
1. $a_1=0$, $a_2>0$ 		 особая точка - центр
2. $a_1^2>4a_2$, $a_1>0$, $a_2>0$ 		 особая точка - устойчивый узел

Продолжение табл.

1	2	3
3. $a_2<0$ 		 особая точка - седло

4. $a_1^2 < 4a_2$, $a_1 < 0, a_2 > 0$ 		 особая точка - неустойчивый фокус
5. $a_1^2 < 4a_2$, $a_1 > 0, a_2 > 0$ 		 особая точка - устойчивый фокус
6. $a_1^2 > 4a_2$, $a_1 < 0, a_2 > 0$ 		 особая точка - неустойчивый узел

Вид и расположение фазовых траекторий, а также направление движения по ним изображающей точки дают возможность судить о характере движения системы и его устойчивости при различных начальных отклонениях. Особые точки и их характер определяют состояние равновесия исходной системы.

Реальные автоматические системы можно считать линейными в предположении малости отклонений переменных от их установившихся значений. За пределами указанной области картина фазовых траекторий может стать качественно иной. В частности, если по линейной теории система неустойчивая и процесс расходится, то может оказаться, что из-за фактической нелинейности характеристик он не будет расходящимся неограниченно. Картина фазовых траекторий для такой системы изображена на рис. 2.15,а. Здесь вблизи начала ко-

ординат получаются спирали, как в неустойчивой линейной системе, но далее они приближаются асимптотически к замкнутому контуру ограниченных размеров. К нему же приближаются и все спирали, находящиеся вне контура. Такого рода замкнутый контур представляет собой особый вид линий на фазовой плоскости и называется устойчивым предельным циклом. Устойчивый предельный цикл соответствует автоколебаниям системы. Размеры предельного цикла представляют амплитуды колебаний самой величины x и скорости ее изменения y . Для определения периода автоколебаний необходимо решить уравнение системы во времени.

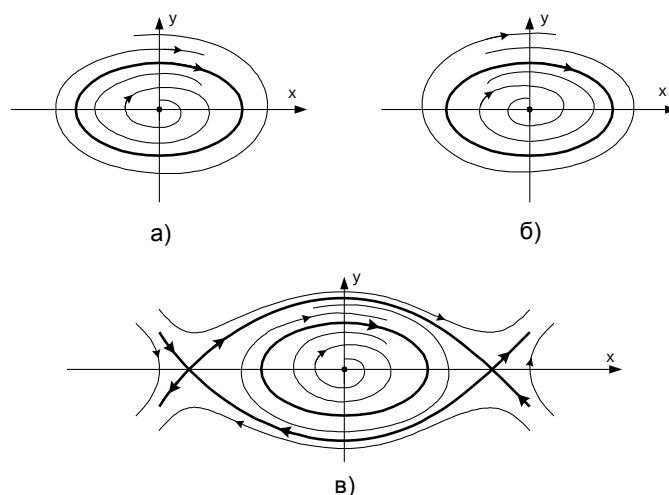


Рис. 2.15. Фазовые траектории нелинейных систем:
 а - устойчивый предельный цикл; б - неустойчивый предельный цикл;
 в - фазовый портрет системы с сепаратрисами

Замкнутые фазовые траектории на фазовой плоскости называются *предельными циклами*, которые могут быть как устойчивыми (рис. 2.15,а), так и неустойчивыми (рис. 2.15,б). К этим предельным циклам стремятся изображающие точки при различных начальных отклонениях по различным фазовым траекториям.

В различных частях фазовой плоскости фазовые траектории нелинейной системы могут быть различными (рис. 2.15,в). Линии, разделяющие фазовую плоскость на участки с различными фазовыми траекториями, называются сепаратрисами. Поведение системы в каж-

дой области фазовой плоскости описывается своим дифференциальным уравнением.

Кроме того, для фазового портрета нелинейных систем с разрывными характеристиками характерно наличие *линий переключения*, которые также разделяют фазовую плоскость на ряд областей с различными фазовыми траекториями. При этом начальные значения переменных на каждом участке определяются через их конечные значения на предыдущем участке. Линии переключения характеризуются узловыми точками разрывных характеристик нелинейных элементов.

Замечание: координатами (х, у) фазовой плоскости могут служить не обязательно отклонение (ошибка) управляемой величины системы и ее скорость. Для этой цели могут быть взяты любые две переменные, однозначно характеризующие состояние системы второго порядка в произвольный момент времени.

Пример. Изобразим на фазовой плоскости переходный процесс и автоколебания в автоматической системе (рис. 2.1), линейная часть которой задана передаточной функцией

$$W_{\text{лч}}(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)},$$

где k - коэффициент передачи;

T - постоянная времени,

а нелинейный элемент - статической характеристикой $y_n = F(x)$.

Решение. В качестве координат фазовой плоскости выбираем отклонение управляемой величины x и скорость ее изменения $y = dx/dt$. Запишем для ошибки x дифференциальное уравнение системы, описывающее ее свободное движение

$$T \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} + kF(x) = 0, \quad (2.42)$$

которое заменяем эквивалентными уравнениями первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T}y - \frac{k}{T}F(x); \\ \frac{dx}{dt} = y. \end{cases} \quad (2.43)$$

Разделив первое из уравнений (2.43) на второе, получаем дифференциальное уравнение фазовых траекторий

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} - \frac{k}{T} \times \frac{F(x)}{y}, \quad (2.44)$$

решение которого определяется характеристикой нелинейного элемента.

Рассмотрим фазовые портреты системы для некоторых типов нелинейных элементов.

1. Идеальное двухпозиционное реле (рис. 2.4,а) со статической характеристикой $F(x) = c \operatorname{sign}(x)$.

Дифференциальное уравнение (2.44) фазовых траекторий в этом случае примет вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} - \frac{k}{T} \times \frac{c \operatorname{sign}(x)}{y}. \quad (2.45)$$

Переключение идеального реле происходит при $x = 0$. Следовательно, линия переключения на фазовой плоскости (рис. 2.16,а) совпадает с осью ординат.

Справа от линии переключения при $x > 0$ дифференциальное уравнение фазовых траекторий будет

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} - \frac{kc}{Ty}. \quad (2.46)$$

Его интегрирование дает уравнение фазовой траектории [2]

$$x = kcT \ln |y + kc| - Ty + c^0, \quad (2.47)$$

где c^0 - постоянная интегрирования, определяемая начальными условиями. Каждому конкретному c^0 соответствует определенная кривая на фазовой плоскости справа от линии переключения. Эти кривые имеют асимптоту $y = -kc$.

Слева от линии переключения при $x < 0$ дифференциальное

уравнение (2.45) фазовых траекторий принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} + \frac{kc}{Ty}, \quad (2.48)$$

что дает решение [2]

$$x = -kcT \ln |y - kc| - Ty + c^0, \quad (2.49)$$

согласно которому наносится семейство фазовых траекторий с асимптотой $y = kc$ в левой фазовой полуплоскости.

На рис. 2.16,а изображены фазовые траектории системы для начальных условий $(x_0, 0)$.

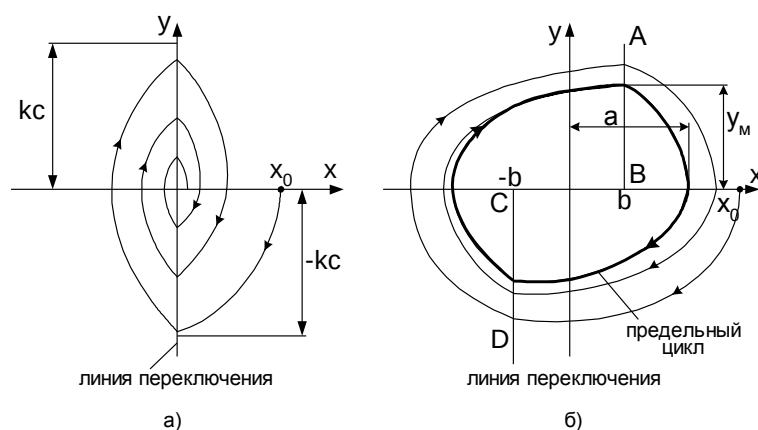


Рис. 2.16. Фазовые траектории релейных систем:
а - с идеальным реле; б - с реле с гистерезисом

2. Двухпозиционное реле с гистерезисом (рис. 2.4,в) со статической характеристикой

$$F(x) = \begin{cases} +c & \text{при } x > +b, \\ -c & \text{при } x < +b, \end{cases} \quad \text{когда } \frac{dx}{dt} > 0;$$

$$F(x) = \begin{cases} +c & \text{при } x > -b, \\ -c & \text{при } x < -b, \end{cases} \quad \text{когда } \frac{dx}{dt} < 0.$$

Переключение реле с гистерезисом происходит при $x = +b$, если $y > 0$ (линия АВ на рис. 2.16,б); если же $y < 0$, то при $x = -b$ (линия CD). Соответственно, линия переключения ABCD на фазовой

плоскости (рис. 2.16,б) имеет разрыв.

Справа от линии переключения ABCD справедливо дифференциальное уравнение фазовых траекторий (2.46), а слева – (2.48). Следовательно, фазовые траектории рассматриваемой системы (рис. 2.16,б) строятся аналогично предыдущему случаю.

В данной системе будут наблюдаться устойчивые автоколебания, к которым сходится переходный процесс с обеих сторон, т.е. при любых начальных условиях. Амплитуда автоколебаний изображена на рис. 2.16,б отрезком a ; отрезок u_m изображает амплитуду скорости. Период автоколебаний определяется решением уравнений во времени.

3. Трехпозиционное реле с зоной нечувствительности (рис. 2.4,б) со статической характеристикой

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } -b \leq x \leq +b, \\ +c & \text{при } x > +b, \\ -c & \text{при } x < -b. \end{cases}$$

Переключение трехпозиционного реле с зоной нечувствительности происходит при $x = -b$ (линия АВ фазовой плоскости на рис. 2.17,а) и при $x = +b$ (линия CD). Соответственно, линии переключения АВ и CD разделяют фазовую плоскость на три области (рис. 2.17,а).

Справа от линии переключения CD справедливо дифференциальное уравнение фазовых траекторий (2.46), а слева от линии переключения АВ – (2.48). Следовательно, для рассматриваемой системы фазовые траектории в этих областях фазовой плоскости (рис. 2.17,а) строятся аналогично предыдущим случаям.

В средней области при $-b \leq x \leq +b$, соответствующей зоне нечувствительности реле, дифференциальное уравнение (2.44) фазовых траекторий принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T}, \quad (2.50)$$

откуда

$$y = -\frac{1}{T}x + c^0, \quad (2.51)$$

согласно которому семейство фазовых траекторий образуется отрезками прямых линий с отрицательным угловым коэффициентом $-1/T$.

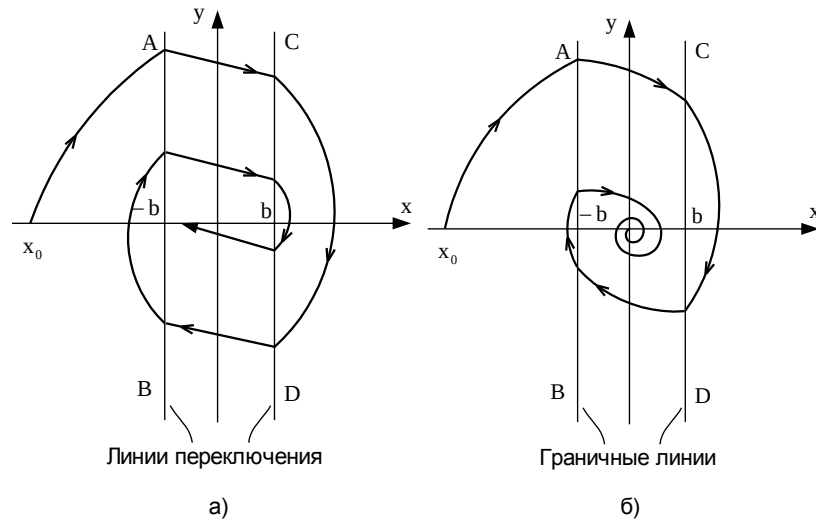


Рис. 2.17. Фазовые траектории нелинейных систем:
а - с трехпозиционным реле; б - с усилителем с насыщением

На рис. 2.17,а изображены фазовые траектории системы для начальных условий $(x_0, 0)$. Система приходит в положение равновесия при значениях ошибки, определяемой зоной нечувствительности реле.

4. Усилитель с насыщением (рис. 2.3,а) со статической характеристикой

$$F(x) = \begin{cases} k_y x & \text{при } -b \leq x \leq +b, \\ +c & \text{при } x > +b, \\ -c & \text{при } x < -b. \end{cases}$$

Для построения фазовых траекторий нелинейной системы с кусочно-линейной характеристикой нелинейного элемента фазовую плоскость разделяем на области линиями АВ и CD (рис. 2.17,б).

Как следует из сравнения статических характеристик нелинейных элементов, фазовые траектории в правой и левой областях фазовой плоскости рассматриваемой системы строятся аналогично преды-

дущему случаю.

В средней области при $-b \leq x \leq +b$, соответствующей линейному участку характеристики, система становится линейной и дифференциальное уравнение (2.44) фазовых траекторий принимает вид

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} - \frac{kk}{T} \times \frac{x}{y}. \quad (2.52)$$

На рис. 2.17,б приведена фазовая траектория системы для начальных условий $(x_0, 0)$ в случае ее устойчивости в линейной области.

Метод точечных преобразований (метод Пуанкаре-Андрона) позволяет установить существование автоколебаний в нелинейной системе второго порядка без построения фазовых траекторий [10]. Сущность метода заключается в том, что для исследования динамики системы необходимо выяснить, как в зависимости от начальных условий перемещаются точки пересечения фазовой траектории с некоторой полупрямой, например, отрезком OX фазовой плоскости (рис. 2.18).

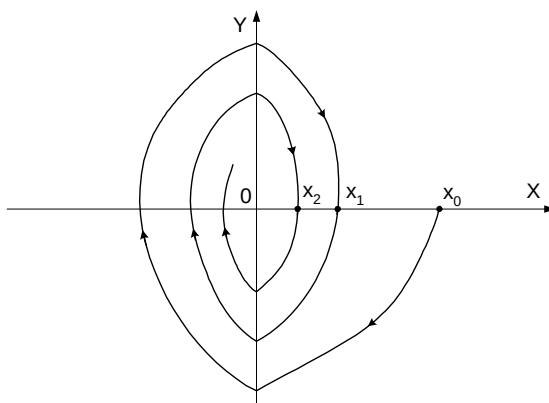


Рис. 2.18. Фазовая плоскость

Возьмем начальное положение изображающей точки $(x_0, 0)$ где-нибудь на полуоси OX . После обхода вокруг начала координат изображающая точка пересекает полуось OX в точках x_1, x_2 и т.д. Последовательность точек пересечения фазовой траектории с выбранной полупрямой представляет точечное преобразование полупрямой самой в себя. Задавая различные начальные положения x_{0i} изображающей точки на полуоси OX , согласно уравнениям системы определяют

соответствующие им точки x_i на той же полуоси после обхода начала координат. Полученная таким образом зависимость

$$x_i = f(x_{0i}) \quad (2.53)$$

называется *функцией соответствия* и используется для исследования периодических режимов в нелинейных системах.

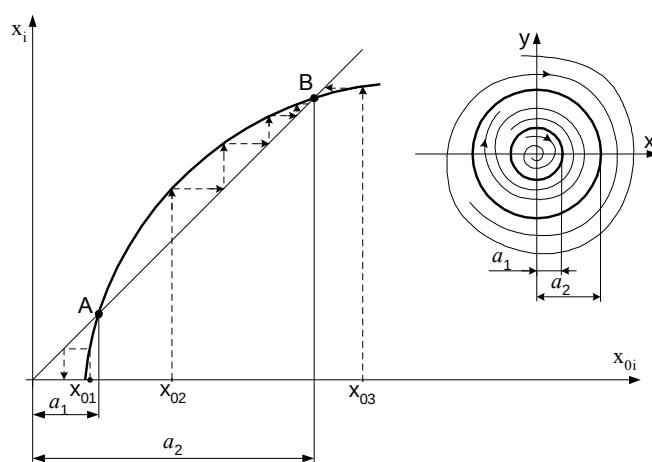


Рис. 2.19. Функция соответствия

Для исследования возможных автоколебаний в координатах функции соответствия (рис. 2.19) проводится прямая из начала координат под углом 45° к координатным осям, для которой $x_i = x_{0i}$, что соответствует отображению каждой точки полуоси OX самой в себя, т.е. после обхода вокруг начала координат точка возвращается в исходное положение. Пересечение кривой $x_i = f(x_{0i})$ с прямой $x_i = x_{0i}$ (точки A и B) определяют существование предельного цикла. Если указанная кривая и прямая не пересекаются, то автоколебания невозможны, а если касаются, то имеет место один предельный цикл.

Чтобы определить, какому типу предельного цикла это соответствует, надо взять на оси абсцисс начальную точку x_0 сначала слева, а затем справа от точки пересечения и проследить ход точечного преобразования, как показано стрелками на рис. 2.19.

Рис. 2.19 соответствует двум предельным циклам, из которых меньший (точка А) неустойчив, а больший (точка В) устойчив. Следовательно, при начальных условиях (x_0, y_0) , расположенных внутри меньшего предельного цикла, система устойчива, а при всяких других начальных условиях она стремится к установившемуся автоколебательному процессу. Пересечение кривой $x_i = f(x_{0i})$ с прямой $x_i = x_{0i}$ (точки А и В) определяют существование предельного цикла. Если указанная кривая и прямая не пересекаются, то автоколебания невозможны, а если касаются, то имеет место один предельный цикл.

Чтобы определить, какому типу предельного цикла это соответствует, надо взять на оси абсцисс начальную точку x_0 сначала слева, а затем справа от точки пересечения и проследить ход точечного преобразования, как показано стрелками на рис. 2.19.

Рис. 2.19 соответствует двум предельным циклам, из которых меньший (точка А) неустойчив, а больший (точка В) устойчив. Следовательно, при начальных условиях (x_0, y_0) , расположенных внутри меньшего предельного цикла, система устойчива, а при всяких других начальных условиях она стремится к установившемуся автоколебательному процессу.

2.6. Коррекция нелинейных систем

При коррекции нелинейных автоматических систем обычно решаются две основные задачи [10]:

обеспечение устойчивости системы;

получение автоколебаний с заданной амплитудой и частотой.

Коррекция осуществляется с помощью включения линейных или нелинейных корректирующих устройств, а также компенсацией влияния нелинейностей.

Корректирующие устройства. В качестве линейных корректирующих устройств используются главным образом неединичные главные обратные связи (рис. 2.20,а) и местные обратные связи, охватывающие нелинейные элементы (рис. 2.20,б).

Нелинейные корректирующие устройства включаются либо последовательно либо в обратные связи.

При расчете корректирующих устройств структурную схему нелинейной системы необходимо привести к эквивалентной одноконтурной схеме с нелинейным элементом и эквивалентной линейной частью с передаточной функцией для схемы, приведенной на рис. 2.20,а,

$$W_{\text{элч}}(s) = W_{\text{лч}}(s) \times W_{\text{ос}}(s)$$

и для схемы, приведенной на рис. 2.20,б,

$$W_{\text{элч}}(s) = W_{\text{лч}}(s) + W_{\text{мос}}(s).$$

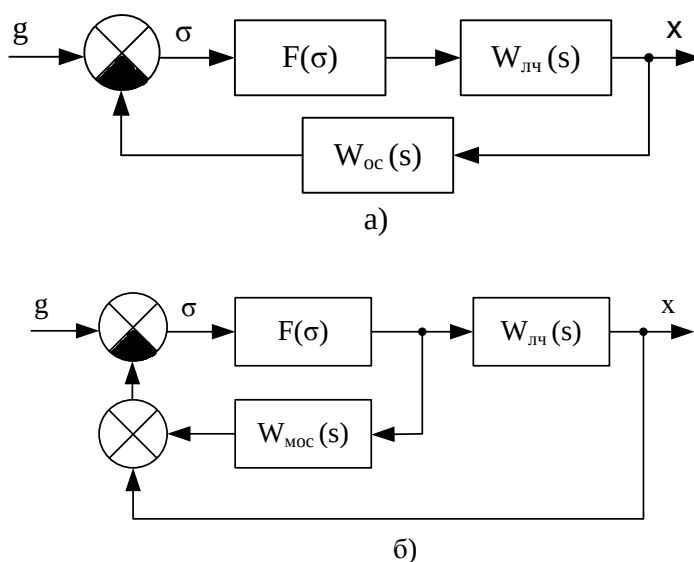


Рис. 2.20. Структурная схема нелинейной системы:
а - с неединичной главной обратной связью; б - с местной обратной связью

Влияние линейного корректирующего устройства на фазовый портрет системы. Рассмотрим систему, представленную на рис. 2.20,а, линейная часть которой задана передаточной функцией

$$W_{\text{лч}}(s) = \frac{k}{s(Ts + 1)},$$

где k - коэффициент передачи;

T - постоянная времени,

а нелинейный элемент - статической характеристикой $F(\sigma)$; у которой в качестве линейного корректирующего устройства включено в главную обратную связь форсирующее звено с передаточной функцией

$$W_{oc}(s) = (T_{oc} s + 1),$$

где T_{oc} - постоянная времени.

Передаточная функция эквивалентной линейной части системы будет

$$W_{элч}(s) = \frac{k(T_{oc}s + 1)}{s(Ts + 1)}. \quad (2.54)$$

На основании структурной схемы (рис. 2.20,а) и выражения (2.54) свободное движение нелинейной системы ($g = 0$) можно описать дифференциальным уравнением относительно отклонения σ

$$(Tp^2 + p)\sigma + k(T_{oc}p + 1)F(\sigma) = 0, \quad \text{где } p = d/dt. \quad (2.55)$$

Учитывая, что

$$\sigma = -(T_{oc}p + 1)x, \quad (2.56)$$

получим дифференциальное уравнение относительно управляемой величины x системы

$$T \frac{d^2 x(t)}{dt^2} + \frac{dx(t)}{dt} - kF(\sigma) = 0. \quad (2.57)$$

Для построения фазового портрета в качестве координат фазовой плоскости выбираем управляемую величину x и скорость ее изменения $y = dx/dt$ и уравнение (2.57) заменяем эквивалентными уравнениями первого порядка

$$\begin{cases} \frac{dy}{dt} = -\frac{1}{T}y + \frac{k}{T}F(\sigma); \\ \frac{dx}{dt} = y, \end{cases} \quad (2.58)$$

откуда дифференциальное уравнение фазовых траекторий будет

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} + \frac{k}{T} \times \frac{F(\sigma)}{y}. \quad (2.59)$$

Если нелинейным элементом является усилитель с насыщением (рис. 2.3,а), то для линейного участка характеристики $|\sigma| \leq b$

$$F(\sigma) = k_y \sigma = -k_y(T_{oc} p + 1)x$$

и, следовательно,

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1 + k k_y T_{oc}}{T} - \frac{k k_y}{T} \times \frac{x}{y}. \quad (2.60)$$

Поскольку для участков насыщения $F(\sigma) = \pm c$, то вместо (2.59) аналогично (2.46) и (2.48) получим уравнения:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} - \frac{kc}{T y} \quad \text{при } \sigma < -b \text{ и } (T_{oc} p + 1)x > +b; \quad (2.61)$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{T} + \frac{kc}{T y} \quad \text{при } \sigma > +b \text{ и } (T_{oc} p + 1)x < -b. \quad (2.62)$$

Так как линейная область на фазовой плоскости определяется неравенством $|\sigma| \leq b$ и зависимостью (2.56), то уравнения граничных линий можно записать в виде:

$$\begin{cases} T_{oc} y + x = b \quad \text{или} \quad y = -\frac{1}{T_{oc}}(x - b); \\ T_{oc} y + x = -b \quad \text{или} \quad y = -\frac{1}{T_{oc}}(x + b). \end{cases} \quad (2.63)$$

Следовательно, граничные линии проходят через точки на оси абсцисс $|x| = \pm b$ и являются наклонными прямыми, угол наклона которых зависит от величины постоянной времени звена обратной связи

$$\alpha = \arctg\left(\frac{1}{T_{oc}}\right). \quad (2.64)$$

На рис. 2.21,а изображены фазовые траектории и граничные линии для системы при начальных условиях $(x_0, 0)$.

Таким образом, при неединичной обратной связи фазовый портрет в зонах насыщения, определяемый уравнениями (2.61) и (2.62), будет таким же, как и при единичной обратной связи. В области линейной части характеристики фазовый портрет системы определяется уравнением (2.60), в котором имеется дополнительный член, обусловленный постоянной времени звена обратной связи T_{oc} . Кроме того, наличие производной в главной обратной связи поворачивает граничные линии, разделяющие фазовую плоскость на области, против часовой стрелки навстречу движению изображающей точки. Угол поворота этих линий тем больше, чем больше постоянная времени T_{oc} ; в случае единичной обратной связи ($T_{oc} = 0$) угол поворота равняется нулю, при этом угол наклона $\alpha = 90^\circ$.

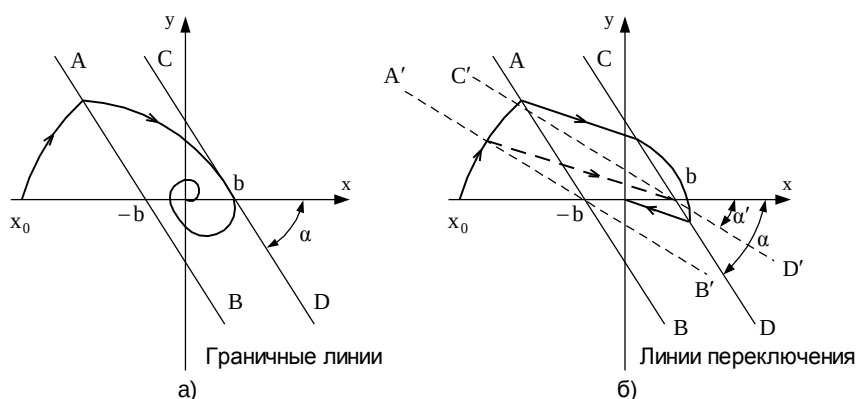


Рис. 2.21. Фазовые траектории нелинейных систем:

а - с усилителем с насыщением; б - с трехпозиционным реле

Если нелинейный элемент обладает релейной характеристикой, то фазовые траектории в зонах насыщения и нечувствительности

определяются такими же уравнениями, как и в случае единичной обратной связи. Однако наличие члена $T_{oc}s$ в передаточной функции звена обратной связи обуславливает поворот линий переключения реле влево соответственно уравнениям (2.63); при этом угол наклона α определяется по формуле (2.64). На рис. 2.21,б показана фазовая траектория и линии переключения для нелинейной системы с трехпозиционным реле с зоной нечувствительности (рис. 2.4,б) при начальных условиях $(x_0, 0)$. Поворот линий переключения реле навстречу движению изображающей точки фазовой траектории обеспечивает работу системы с упреждением. Путем подбора постоянной времени T_{oc} можно обеспечить перевод релейной системы в новое состояние за одно включение реле, как показано на рис. 2.4,б, при угле наклона линий переключения, равном α' .

В том случае, когда система имеет неединичную жесткую главную обратную связь вида

$$W_{oc}(s) = 1 + k_{oc}, \quad (2.65)$$

имеет место

$$\sigma = -(1 + k_{oc})x. \quad (2.66)$$

Граничные линии и линии переключения для такой главной обратной связи определяются уравнениями:

$$\left\{ \begin{array}{l} k_{oc} x + x = b \quad или \quad x = \frac{b}{1 + k_{oc}}; \\ k_{oc} x + x = -b \quad или \quad x = -\frac{b}{1 + k_{oc}}. \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Отсюда следует, что неединичная жесткая главная обратная связь вызывает перемещение граничных линий и линий переключения без изменения угла их наклона, что позволяет изменять соотношения между областями с различными фазовыми траекториями на фазовой плоскости, например, изменять область нечувствительности системы при неизменности зоны нечувствительности реле или усилителя.

Компенсация влияния нелинейности. При компенсации нелинейностей нелинейную систему можно рассматривать как линейную относительно определенных входных воздействий.

Компенсирующие нелинейности. Линеаризация заданной нелинейности $F(\sigma)$ заключается во включении последовательно или параллельно компенсирующего нелинейного элемента с обратной нелинейной характеристикой $F^{-1}(\sigma)$. При этом получаем эквивалентный линейный элемент. На рис. 2.22 приведен пример линеаризации усилителя с зоной нечувствительности путем включения параллельно с ним усилителя с насыщением.

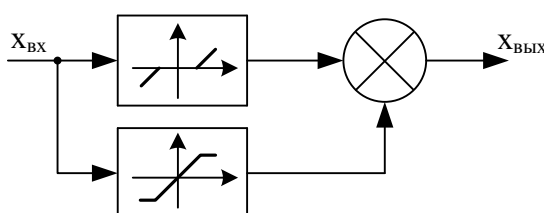


Рис. 2.22. Пример включения компенсирующей нелинейности

Если нелинейность $F(\sigma)$ присутствует в объекте управления ОУ, то линеаризация системы может быть осуществлена путем параллельного включения объекту управления компенсирующей нелинейности $F^{-1}(\sigma)$ и модели его линейной части $W_{\text{м лч оу}}(s)$ (рис. 2.23).

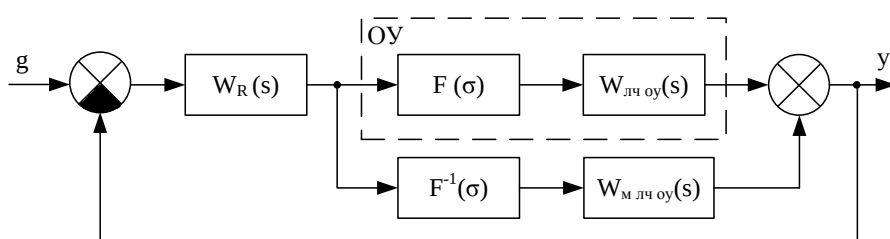


Рис. 2.23. Структурная схема нелинейной системы

Вибрационная компенсация нелинейностей заключается в том, что нелинейный элемент приобретает свойства пропорциональности, если на его вход вместе с полезным медленно изменяющимся сигнала-

лом $g(t)$ подается высокочастотная периодическая составляющая $u(t)$ (рис. 2.24).

Если на входе нелинейного элемента (рис. 2.24,а,б) с характеристикой $F(x)$ действует полезный медленно изменяющийся сигнал $g(t)$ совместно с несмещенным периодическим сигналом $u(t)$, частота ω которого достаточно велика, чтобы можно было приближенно считать функцию $g(t)$ постоянной в пределах периода $T = 2\pi/\omega$ (рис. 2.24,б), т.е.

$$x(t) = g(t) + u(t), \quad (2.68)$$

то выходной сигнал можно представить в виде суммы средней, медленно изменяющейся составляющей $F_1(g)$ и колебательной функции $F_2(u)$, близкой

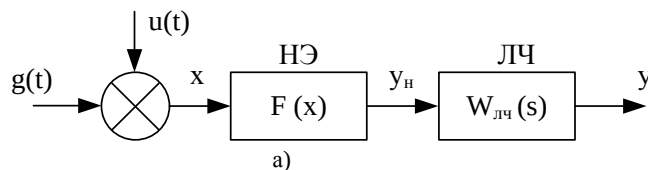
к периодической с частотой ω

$$y_n = F(x) = F[g(t) + u(t)] = F_1(g) + F_2(u). \quad (2.69)$$

Среднюю составляющую приближенно можно представить как среднее значение выходного сигнала нелинейного элемента за период

$$F_1[g(t)] \approx \frac{\omega}{2\pi} \int_{t-\pi/\omega}^{t+\pi/\omega} F[g(t) + u(t)] dt. \quad (2.70)$$

В случае $g = \text{const}$ формула (2.70) точная и определяет постоянный член ряда Фурье, составленного относительно выходного сигнала нелинейного элемента, а колебательная функция $F_2(u)$ есть сумма гармонических составляющих этого ряда.



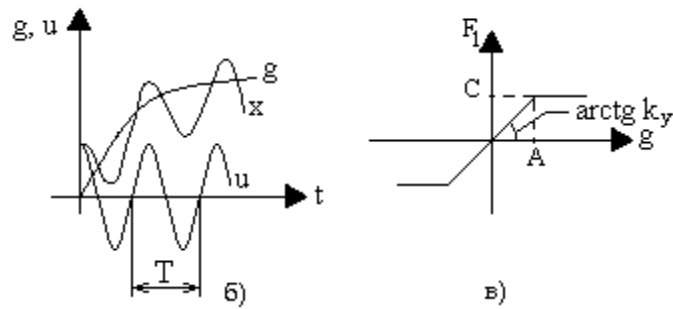


Рис. 2.24. Вибрационная компенсация нелинейности:
а - структурная схема разомкнутой системы; б - временные диаграммы

изменения сигналов; в - статическая характеристика

Формула (2.70) тем точнее, чем больше частота ω и чем меньше $g(t)$ изменяется в пределах периода T . На рис. 2.24,в представлена характеристика $F_1(g)$ для идеального двухпозиционного реле при компенсирующей периодической функции $u(t)$ треугольного вида частоты ω и амплитуды A . Статическая характеристика является линейной для полезного сигнала $g(t)$, изменяющегося в пределах $\pm A$. Коэффициент передачи линейной части определяется как

$$k_y = \frac{C}{A}. \quad (2.71)$$

Таким образом, чем больше амплитуда компенсирующих колебаний A , тем шире зона линейности нелинейного элемента. Однако при этом уменьшается коэффициент передачи линеаризованного элемента.

Статическая характеристика $F_1(g)$ может быть получена экспериментальным путем, что позволяет определить значения k_y и A .

Выходной сигнал нелинейного элемента u_n (2.69) поступает на вход линейной части системы. При достаточно большой частоте ω периодического сигнала $u(t)$ линейная часть из-за инерционности не пропускает компенсирующие колебания, поэтому составляющей $F_2(u)$

можно пренебречь. Следовательно, для разомкнутой системы (рис. 2.24,а) можно определить передаточную функцию

$$W(s) = k_y W_{лч}(s). \quad (2.72)$$

Это значит, что при задающем воздействии $g(t) < A$ (рис. 2.24,в) для частоты ω компенсирующих колебаний $u(t)$, превышающих частоту среза линейной части системы, нелинейная система может рассматриваться как линейная.

Для формирования высокочастотного сигнала $u(t)$ используется или специальный генератор или собственные колебания системы.

2.7. Скользящие режимы в релейных системах

Скользящим режимом называется режим работы релейной системы, характеризующийся колебательным движением изображающей точки вдоль линии переключения. Чем сильнее воздействие производной в цепи обратной связи, тем больше поворачиваются линии переключения реле против часовой стрелки. При этом интенсивность затухания переходного процесса возрастает. В том случае, когда в точке переключения угол наклона линии переключения становится равным наклону или меньше угла наклона касательной к фазовой траектории, по которой движется изображающая точка после переключения реле, возникают условия существования скользящего режима [10].

Рассмотрим возникновение скользящего режима в нелинейной системе, изображенной на рис. 2.20,а, с идеальным реле при отсутствии внешнего воздействия и при заданных начальных условиях $x_0 \neq 0$ и $y_0 = 0$.

Пусть начальное состояние системы задано точкой $(x_0, 0)$ (рис. 2.25), от которой изображающая точка перемещается по фазовой траектории типа 1 до встречи с линией переключения АВ в точке С. В этой точке происходит переключение реле и изображающая точка бу-

дет перемещаться по фазовой траектории типа 2 до точки D. В точке D происходит переключение реле в другую сторону, после чего изображающая точка будет перемещаться по фазовой траектории типа 1. Но как только увеличится результирующий сигнал обратной связи, произойдет переключение реле и изображающая точка будет перемещаться по фазовой траектории типа 2 и так далее, т.е. изображающая точка, подходя к этому отрезку линии переключения - отрезку скольжения, не сможет уйти с него.

Таким образом, изображающая точка, достигнув точки D, непрерывно переходит с траектории типа 1 на траекторию типа 2 и обратно, как бы скользя вдоль линии переключения и асимптотически приближаясь к точке равновесия 0.

Как видно из рис. 2.25, скользящий режим возможен на тех участках, где фазовая траектория типа 2 проходит ниже линии переключения АВ (после точки D). При начальном положении изображающей точки $(x_{02}, 0)$ после ее прихода по траектории типа 1 в точку на линии переключения D сразу начинается скользящий режим. При начальном положении изображающей точки $(x_{03}, 0)$ скользящий режим имеет место после переключения реле, когда изображающая точка скользит по линии переключения АВ в четвертом квадранте. В последнем случае переходный процесс имеет перерегулирование.

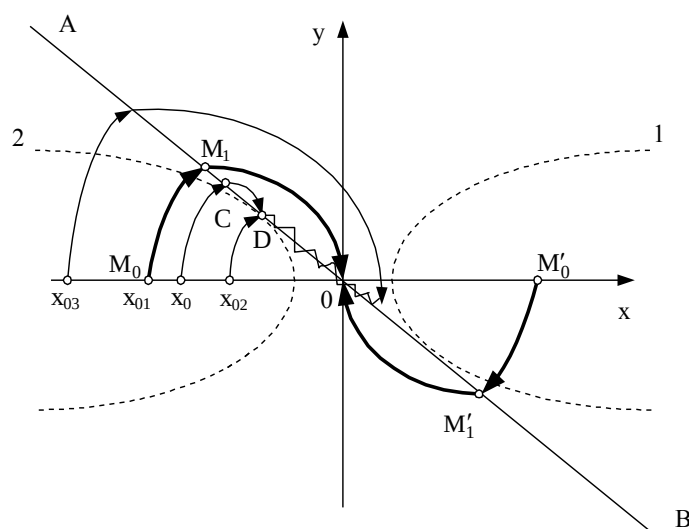


Рис. 2.25. Фазовые траектории релейной системы

В рассматриваемом примере предполагается, что переключение реле происходит мгновенно, в результате частота переключений бесконечно велика, а амплитуда колебаний бесконечно мала. Такой скользящий режим называется *предельным*. Если учесть неоднозначность характеристики или зону нечувствительности, то переключение реле при скользящем режиме происходит с конечной частотой, а амплитуда колебаний отличается от нуля.

В предельном скользящем режиме релейный элемент можно заменить эквивалентным линейным безынерционным звеном с коэффициентом передачи, стремящимся к бесконечности ($k_p \rightarrow \infty$). Тогда эквивалентная передаточная функция системы, соответствующая структурной схеме, приведенной на рис. 2.20,а, будет

$$\Phi_{\text{экв}}(s) = \lim_{k_p \rightarrow \infty} \frac{k_p W_{\text{лч}}(s)}{1 + k_p W_{\text{лч}}(s) W_{\text{ос}}(s)} = \frac{1}{W_{\text{ос}}(s)} = \frac{1}{T_{\text{ос}} s + 1}. \quad (2.73)$$

Следовательно, для предельного скользящего режима релейную систему можно представить эквивалентной структурной схемой в виде интегрирующего звена, охваченного обратной связью, или просто в виде апериодического звена первого порядка.

При начальном положении системы x_{01} (точка M_0 на рис. 2.25) после переключения реле в точке M_1 изображающая точка по фазовой траектории типа 2 приходит в начало координат, характеризующее состояние покоя. При этом переходный процесс будет иметь минимальное время, а режим работы системы будет *оптимальным по быстродействию*. При заданной постоянной времени корректирующей цепи обратной связи $T_{\text{ос}}$ такой режим будет существовать только для определенной группы начальных значений, когда изображающая точка в начальный момент времени оказывается на траектории $M_0 M_1 O_{M_1 M'_0}$, проходящей через начало координат; во всех других случаях будет иметь место скользящий режим либо сразу после переключения реле, либо после нескольких переключений.

Для того чтобы процесс при любых начальных условиях был оптимальным по быстродействию, линией переключения должна

быть сама фазовая траектория, проходящая через начало координат. Такая кривая линия переключения свидетельствует о нелинейном характере воздействия корректирующей обратной связи. Линия переключения не относится к фазовым траекториям. Но можно сделать так, что она будет совпадать с одной из фазовых траекторий. Тогда процесс в системе будет состоять из двух частей: подход к линии переключения по одной из траекторий, выбор которой зависит от начальных условий, и движение по линии переключения к положению равновесия.

Наглядное представление о совокупности оптимальных процессов при различных начальных условиях дает фазовый портрет, приведенный на рис. 2.26.

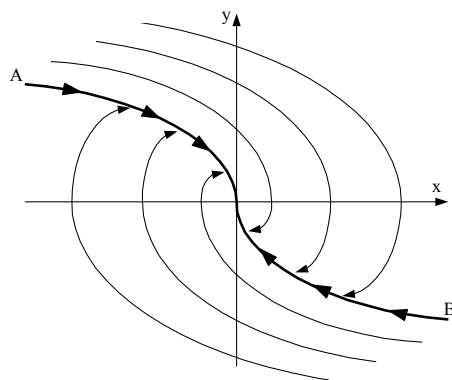


Рис. 2.26. Фазовый портрет оптимальной по быстродействию системы:

АВ - линия переключения

При построении оптимальных по быстродействию систем основной задачей является формирование функции управления, характеризующей переключение релейного элемента. На рис. 2.27 приведена структурная схема системы с нелинейной обратной связью.

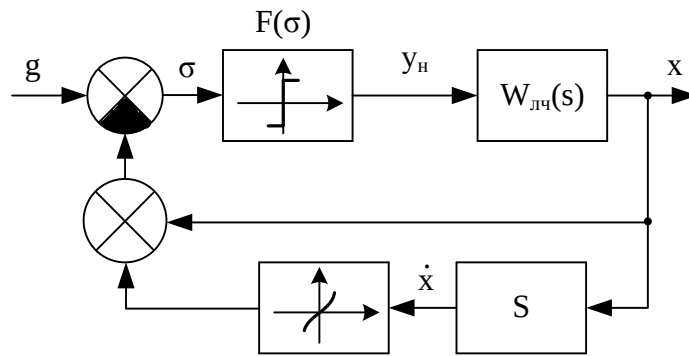


Рис. 2.27. Структурная схема оптимальной по быстродействию системы

В общем случае оптимальная по быстродействию система может содержать вычислительное устройство, формирующее функцию нелинейной обратной связи, логические элементы и иметь переменную структуру.

2.8. Статистическая линеаризация нелинейных характеристик

Анализ и синтез нелинейных систем, работающих под воздействием случайных сигналов, значительно усложняется по сравнению с линеаризованной системой, так как, во-первых, закон распределения случайного процесса изменяется за счет изменения коэффициента усиления нелинейного элемента в зависимости от величины входного сигнала, во-вторых, если вместе с полезным сигналом на вход системы поступает случайная помеха, то при прохождении через нелинейный элемент соотношение между ними изменяется.

Для нелинейных элементов нет простой связи между средними значениями, корреляционными функциями и спектральными плотностями случайных сигналов на его выходе и входе. Однако такую зависимость можно формально получить, если заменить нелинейное преобразование случайного сигнала некоторым эквивалентным линеаризованным преобразованием.

Оценить статистические характеристики нелинейных систем позволяет *метод статистической линеаризации* [2, 9, 10], основанный на замене нелинейной характеристики статистически равноценной линейной. Критериями статистической равноценности служат два принципа:

принцип *равенства* средних значений и дисперсий случайных процессов на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линеаризованного элемента;

принцип *минимума* средней квадратической ошибки, обусловленной заменой нелинейного элемента приближенным линеаризованным элементом.

Заменим нелинейную характеристику элемента

$$y_n = F(x) \quad (2.74)$$

линейной зависимостью

$$y = k \times x, \quad (2.75)$$

которая имеет такие же математическое ожидание и дисперсию на выходе. С этой целью запишем (2.75) в виде

$$y = k_0 m_x + k_{11} x^0, \quad (2.76)$$

где x^0 - центрированная случайная функция.

Выберем коэффициенты k_0 и k_{11} так, чтобы

$$m_y = k_0 m_x = m_{y_n}; \quad \sigma_y^2 = k_{11}^2 \sigma_x^2 = \sigma_{y_n}^2, \quad (2.77)$$

где $m_x, m_{y_n}, m_y, \sigma_x^2, \sigma_{y_n}^2, \sigma_y^2$ - математические ожидания и дисперсии сигналов.

Из выражения (2.77) следует, что для статистической равноценности, исходя из равенства средних значений и дисперсий случайных процессов на выходе нелинейного элемента и эквивалентного ему линеаризованного звена, требуется

$$k_0 = \frac{m_{y_n}}{m_x}; \quad (2.78)$$

$$k_{11} = \pm \frac{\sigma_{y_n}}{\sigma_x}, \quad (2.79)$$

причем знак k_{11} должен совпадать со знаком производной нелинейной характеристики $F(x)$.

Величины k_0 и k_{11} называются *коэффициентами статистической линеаризации*. Для их вычисления требуется знать математическое ожидание и дисперсию сигнала на выходе нелинейного элемента:

$$m_{y_n} = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \omega(x) dx; \quad (2.80)$$

$$\sigma_{y_n}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(x) \omega(x) dx, \quad (2.81)$$

где $\omega(x)$ - плотность вероятности распределения случайного сигнала на входе нелинейного элемента.

Далее найдем коэффициенты статистической линеаризации на основании второго принципа, обеспечивающего наилучшее приближение корреляционной функции сигнала на выходе нелинейного элемента к корреляционной функции сигнала на выходе линейного звена. Среднее значение квадрата ошибки, обусловленное заменой нелинейного элемента приближенным линеаризованным звеном, исходя из (2.74) и (2.76) определяется выражением

$$\overline{(y - y_n)^2} = k_0^2 m_x^2 + k_{12}^2 \sigma_x^2 - 2 k_0 m_x m_{y_n} - 2 k_{12} \overline{(x^0 y_n)} + y_n^2 \quad (2.82)$$

и должно быть минимальным. Приравняв нулю производные от последнего выражения по k_0 и k_{12} , запишем уравнения

$$2 k_0 m_x^2 - 2 m_x m_{y_n} = 0; \quad (2.83)$$

$$2 k_{12} \sigma_x^2 - 2 \overline{(x^0 y_n)} = 0. \quad (2.84)$$

Следовательно, в этом случае коэффициенты статистической линеаризации вычисляются по формулам

$$k_0 = \frac{m_{y_H}}{m_x}; \quad (2.85)$$

$$k_{12} = \frac{(x^0 y_H)}{\sigma_x^2} = \frac{R_{xy_H}(0)}{R_x(0)} = \frac{1}{\sigma_x^2} \int_{-\infty}^{\infty} (x - m_x) F(x) \omega(x) dx. \quad (2.86)$$

Таким образом, статистическая линеаризация из условия минимума средней квадратической ошибки дает то же значение коэффициента k_0 , которое было найдено при первом способе линеаризации; коэффициент линеаризации относительно случайной составляющей k_{12} другой. Рекомендуется брать их среднее арифметическое значение:

$$k_1 = \frac{k_{11} + k_{12}}{2}. \quad (2.87)$$

Коэффициенты статистической линеаризации зависят не только от характеристик нелинейного элемента, но и от математического ожидания и дисперсии сигнала на его входе. Кроме того, для их вычисления требуется знать закон распределения случайного процесса. При прохождении случайного сигнала через замкнутую систему инерционные звенья линейной части системы приближают закон распределения к нормальному, поэтому для типовых нелинейных характеристик коэффициенты k_0 и k_1 могут быть заранее вычислены.

В заключение следует отметить, что метод статистической линеаризации применим к системам, в которых невозможны автоколебания. Для исследования нелинейных систем с автоколебаниями используется метод совместной статистической и гармонической линеаризации.

Таблицы коэффициентов статистической и совместной статистической и гармонической линеаризации для различных нелинейностей приведены в литературе [17].

ВОПРОСЫ К РАЗДЕЛУ 2

- 1. Сформулируйте определение и приведите классификацию нелинейных систем. Перечислите особенности нелинейных систем.*
- 2. Каковы основные методы исследования и расчета нелинейных систем, применяемые в инженерной практике?*
- 3. Расскажите о прямом методе Ляпунова.*
- 4. Объясните определение абсолютной устойчивости нелинейных систем по методу В.М.Попова.*
- 5. В чем сущность метода гармонической линеаризации нелинейных характеристик?*
- 6. Поясните исследование нелинейных систем на фазовой плоскости.*
- 7. Какие средства применяются для коррекции нелинейных систем?*
- 8. Что означает вибрационная компенсация нелинейностей?*
- 9. В каких случаях в нелинейной системе возникает скользящий режим? Как построить систему оптимальную по быстродействию?*
- 10. Что такое статистическая линеаризация нелинейных характеристик? Как она осуществляется*

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК К МОДУЛЮ 2

1. Андриевский Б.Р., Фрадков А.Л. Избранные главы теории автоматического управления с примерами на языке MATLAB. - СПб.: Наука, 1999. - 467 с.
2. Бесекерский В.А., Попов Е.П. Теория систем автоматического регулирования. - М.: Наука, 1975. - 768 с.
3. Бесекерский В.А. Цифровые автоматические системы. - М.: Наука, 1976. - 576 с.
4. Бесекерский В.А., Изранцев В.В. Системы автоматического управления с микроЭВМ. - М.: Наука, 1987. - 320 с.
5. Воронов А.А. Основы теории автоматического управления. Особые линейные и нелинейные системы. - М.: Энергоиздат, 1981. - 304 с.
6. Дроздов В.Н., Мирошник И.В., Скорубский И.В. Системы автоматического управления с микроЭВМ. - Л.: Машиностроение, 1989. - 284 с.
7. Иващенко Н.Н. Автоматическое регулирование. - М.: Машиностроение, 1978. - 609 с.
8. Имаев Д.Х., Ковальски З., Кузьмин Н.Н., Пошихонов Л.Б., Цапко Г.П., Яковлев В.Б. Анализ и синтез систем управления. Теория. Методы. Примеры решения типовых задач с использованием персонального компьютера. - Санкт-Петербург, Гданьск, Сургут, Томск, 1998. - 172 с.
9. Коновалов Г.Ф. Радиоавтоматика. - М.: Высшая школа, 1990. - 335 с.
10. Куропаткин П.В. Теория автоматического управления. - М.: Высшая школа, 1973. - 507 с.
11. Мирошник И.В., Никифоров В.О., Фрадков А.Л. Нелинейное и адаптивное управление сложными динамическими системами. - СПб.: Наука, 2000. - 549 с.
12. Первозванский А.А. Курс теории автоматического управления. - М.: Наука, 1986. - 616 с.

13. Попов Е.П. Теория линейных систем автоматического регулирования и управления. - М.: Наука, 1989. - 304 с.
14. Попов Е.П. Теория нелинейных систем автоматического регулирования и управления. - М.: Наука, 1979. - 256 с.
15. Расчет автоматических систем / Под ред. А.В.Фатеева. - М.: Высшая школа, 1973. - 336 с.
16. Теория автоматического управления: Учеб. для вузов в 2-х частях / Под ред. А.А.Воронова. 2-е изд. - М.: Высшая школа, 1986.
17. Топчиев Ю.И. Атлас для проектирования систем автоматического регулирования. - М.: Машиностроение, 1989. - 752 с.
18. Цыпкин Я.З. Теория линейных импульсных систем. - М.: Физматгиз, 1963. - 968 с.
19. Цыпкин Я.З. Релейные автоматические системы. - М.: Наука, 1974. - 576 с.
20. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. - Л.: Машиностроение, 1980. - 412 с.

СОДЕРЖАНИЕ

Модуль 1. Линейные системы автоматического управления	3
1. ОБЩИЕ СВЕДЕНИЯ О СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ	3
1.1. Основные понятия и определения	3
1.2. Принципы управления, принципы построения систем управления	5
1.3. Классификация систем управления	14
1.4. Структура и основные элементы системы автоматического управления	16
3. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ И СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ	20
2.1. Общие понятия	20
2.2. Линеаризация дифференциальных уравнений	21
2.3. Линеаризация дифференциальных уравнений	25
3. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗВЕНЬЯ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ	30
3.1. Характеристики линейных звеньев	30
3.2. Типовые динамические звенья и их характеристики	39
3.3. Структурные схемы. Способы соединения звеньев	49
3.4. Построение логарифмических частотных характеристик разомкнутой цепи звеньев	53
4. СОСТАВЛЕНИЕ ИСХОДНЫХ УРАВНЕНИЙ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	59
4.1. Дифференциальные уравнения и передаточные функции замкнутых систем управления	59
4.2. Многомерные системы управления	64
5. УСТОЙЧИВОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ	69
5.1. Понятие устойчивости систем	69
5.2. Устойчивость линейных систем	71
5.3. Алгебраические критерии устойчивости	75
5.4. Частотные критерии устойчивости	79
5.5. Запасы устойчивости	85
5.6. Оценка устойчивости по ЛЧХ	87

6. ОЦЕНКА КАЧЕСТВА УПРАВЛЕНИЯ	90
6.1. Общие понятия	90
6.2. Оценка точности работы систем	92
6.3. Показатели качества переходного процесса	98
6.4. Частотные оценки качества	101
6.5. Корневые оценки качества	105
6.6. Интегральные оценки качества	107
6.7. Моделирование систем управления	109
7. ТОЧНОСТЬ И ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ	114
7.1. Общие методы повышения точности систем управления	114
7.2. Теория инвариантности и комбинированное управление	118
7.3. Неединичные обратные связи	121
7.4. Чувствительность систем автоматического управления	122
8. УЛУЧШЕНИЕ КАЧЕСТВА ПРОЦЕССА УПРАВЛЕНИЯ	128
8.1. Постановка задачи	128
8.2. Законы управления. Типовые регуляторы	128
8.3. Корректирующие устройства	133
8.4. Синтез систем автоматического управления	140
9. СЛУЧАЙНЫЕ ПРОЦЕССЫ В СИСТЕМАХ УПРАВЛЕНИЯ	153
9.1. Введение в статистическую динамику систем управления	153
9.2. Общие сведения о случайных процессах	154
9.3. Оценка работы линейных автоматических систем при случайных стационарных воздействиях	162
10. АНАЛИЗ СИСТЕМ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ	167
10.1. Описание систем в пространстве состояний	167
10.2. Структура решения уравнений переменных состояния	172
10.3. Характеристики систем в пространстве состояний	175
10.4. Нормальная форма уравнений в пространстве состоя- ний	178
10.5. Управление по состоянию. Системы управления состоянием	182

10.6. Оценивание координат состояния систем	188
10.7. Прямой корневой метод синтеза систем управления	191
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК К МОДУЛЮ 1	195
Модуль 2 НЕЛИНЕЙНЫЕ СИСТЕМЫ	
АВТОМАТИЧЕСКОГО УПРАВЛЕНИЯ	197
2.1. Общие понятия и особенности нелинейных систем	197
2.2. Прямой метод Ляпунова	202
2.3. Частотный метод В.М. Попова	207
2.4. Метод гармонической линеаризации	212
2.5. Методы фазового пространства	225
2.6. Коррекция нелинейных систем	239
2.7. Скользящие режимы в релейных системах	248
2.8. Статистическая линеаризация нелинейных характери- стик	252
БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК К МОДУЛЮ 2	257