

2013

Министерство образования и науки Российской Федерации  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)



УТВЕРЖДАЮ

Проректор  
по учебно-методической работе

\_\_\_\_\_ А.А.Панфилов

« 17 » \_\_\_\_\_ 03 2016 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
«ВАРИАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ»

Направление подготовки 44.03.05 Педагогическое образование

Профиль подготовки Математика. Информатика.

Уровень высшего образования бакалавриат

Форма обучения очная

| Семестр | Трудоем-<br>кость зач.<br>ед, час. | Лек-<br>ций,<br>час. | Практич.<br>занятий,<br>час. | Лаборат.<br>работ,<br>час. | СРС,<br>час. | Форма промежуточного<br>контроля<br>(экз./зачет) |
|---------|------------------------------------|----------------------|------------------------------|----------------------------|--------------|--------------------------------------------------|
| 9       | 3/108                              |                      | 36                           |                            | 72           | Зачет                                            |
| Итого   | 3/108                              |                      | 36                           |                            | 72           | Зачет                                            |

Владимир, 2016

*Handwritten signature in blue ink.*

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

*Целями курса «Вариационное исчисление» являются:*

- формирование математической культуры студентов;
- формирование систематических знаний в области задач на экстремумы
- овладение аппаратом экстремальных задач для дальнейшего использования в других областях математического знания и дисциплинах естественнонаучного содержания.

Задачи дисциплины:

1. овладение знаниями:
  - 1) теоретических основ науки, терминологии, истории становления,
  - 2) предмета и объекта исследований данной науки,
2. овладение навыками:
  - 1) решения расчетных задач,
  - 2) работы с учебной и научной литературой,
  - 3) овладение умением решения творческих и нестандартных задач.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Входит в вариативную часть дисциплин по выбору.

Дисциплины (с указанием тем и основных понятий, необходимых для успешного изучения дисциплины):

- 1) *Алгебра* – приведение квадратичной формы к каноническому виду (метод Лагранжа, метод Якоби), закон инерции.
- 3) *Математический анализ* – непрерывные функции; кусочно-непрерывные функции; криволинейные координаты; замена переменных; частные производные; неявные функции; дифференцирование неявных функций, поверхностные интегралы; формула Остроградского-Гаусса; интегралы, зависящие от параметра; несобственные интегралы; функциональные ряды; признаки сходимости ряда; ряды и интегралы Фурье; кратные интегралы; производная по направлению, градиент, дивергенция, оператор Лапласа.

Знания, полученные при изучении дисциплины, необходимы для успешного освоения и выполнения научно-исследовательской работы в области математического моделирования физических, биологических, экологических, экономических, социальных и других процессов живой и неживой природы

### 3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

| Код компетенций по ФГОС | Компетенции                                                                                                                                          | Планируемые результаты                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                      |
|-------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| ПК-11                   | Готовность использовать систематизированные теоретические и практические знания для постановки решения исследовательских задач в области образования | <b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>теоретические основы науки, терминологии, истории становления,</li> <li>методы теоретических исследований,</li> <li>предмет и объект исследований данной науки,</li> </ul> <b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>применять математический аппарат для решения практических задач,</li> </ul> <b>Владеть:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>математическим аппаратом решения математических моделей.</li> </ul> |
| ПК-12                   | Способность руководить учебно-исследовательской деятельностью обучающихся                                                                            | <b>Знать:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>предмет и объект исследований данной науки,</li> </ul> <b>Уметь:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>применять математический аппарат для решения практических задач,</li> </ul> <b>Владеть:</b> <ul style="list-style-type: none"> <li>математическим аппаратом решения математических моделей.</li> </ul>                                                                                                                     |

"В соответствии с профессиональным стандартом педагога (приказ Министерства труда и социальной защиты населения РФ № 544н от 18.10.2013г.) преподаватели в средней школе при разработке и реализации программ учебных дисциплин в рамках основной общеобразовательной программы, а также при планировании и проведении учебных занятий должны владеть общепользовательскими и общепедагогическими ИКТ-компетентностями (ИКТ - информационно-коммуникационные технологии). "

### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 3 зачетных единиц, 108 часов.

| № п/п | Раздел (тема) дисциплины                       | Семестр | Неделя семестра | Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах) |                      |              |             |     |         | Объем учебной работы, с применением интерактивных методов (в часах / %) | Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра), форма промежуточной аттестации (по семестрам) |
|-------|------------------------------------------------|---------|-----------------|----------------------------------------------------------------------------------------|----------------------|--------------|-------------|-----|---------|-------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|       |                                                |         |                 | Лекции                                                                                 | Практические занятия | Лабораторные | Контрольные | СРС | КП / КР |                                                                         |                                                                                                           |
| 1     | Определение функционала. Близость критических. | 9       | 1-2             |                                                                                        | 6                    |              |             | 12  |         | 2/33                                                                    |                                                                                                           |
| 2     | Непрерывность функционала                      | 9       | 2-4             |                                                                                        | 6                    |              |             | 12  |         | 2/33                                                                    | РК-1                                                                                                      |
| 3     | Вариация функционала. Вторая вариация функ-    | 9       | 5-6             |                                                                                        | 6                    |              |             | 12  |         | 2/33                                                                    |                                                                                                           |

|       |                                                                       |   |       |  |    |  |  |    |  |       |       |
|-------|-----------------------------------------------------------------------|---|-------|--|----|--|--|----|--|-------|-------|
|       | ционала                                                               |   |       |  |    |  |  |    |  |       |       |
| 4     | Экстремум функционала. Необходимое условие экстремума                 | 9 | 7-8   |  | 6  |  |  | 12 |  | 2/33  | РК-2  |
| 5     | Уравнение Эйлера. Простейшие случаи интегрируемости уравнения Эйлера. | 9 | 9-10  |  | 6  |  |  | 12 |  | 2/33  |       |
| 6     | Вариационная задача в параметрической форме.                          | 9 | 11-12 |  | 6  |  |  | 12 |  | 2/33  | РК-3  |
| Всего |                                                                       |   |       |  | 36 |  |  | 72 |  | 12/33 | ЗАЧЕТ |

## 5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

| N п/п | Виды учебной работы    | Образовательные технологии                                                                                                                                                                                |
|-------|------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1.    | Лекция                 | -проблемная лекция                                                                                                                                                                                        |
| 2.    | Практические занятия   | - выполнение расчетных работ;<br>- поиск и анализ информации в сети Интернет;<br>- проектные технологии;<br>- технология учебного исследования                                                            |
| 3.    | Самостоятельная работа | - внеаудиторная работа студентов (освоение теоретического материала, подготовка к практическим занятиям, работа с электронным учебно-методическим комплексом, подготовка к текущему и итоговому контролю) |
| 4.    | Текущий контроль       | - решение задач на практических занятиях;<br>- ответы на коллоквиумах                                                                                                                                     |
|       |                        |                                                                                                                                                                                                           |

**6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ**

Примерные темы на рейтинг-контроль № 1

1. Достаточные условия строгого экстремума функций многих переменных.
2. Метод градиентного спуска
3. Метод множителей Лагранжа

Примерные темы на рейтинг-контроль № 2

1. Вариация функционала. Вторая вариация функционала
2. Экстремум функционала.
3. Уравнение Брахистохроны.

Примерные темы на рейтинг-контроль № 3

1. Уравнение Эйлера.
2. Интегрируемость уравнения Эйлера.
3. Изопериметрическая задача.

## **Организация и учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов (72 часа)**

Приводится характеристика всех видов и форм самостоятельной работы студентов, включая текущую и творческую/исследовательскую деятельность студентов:

**Текущая СРС**, направленная на углубление и закрепление знаний студента, развитие практических умений включает:

- работу с лекционным материалом, поиск и обзор литературы и электронных источников информации по индивидуально заданной проблеме курса,
- выполнение домашних заданий, контрольных работ,
- изучение тем, вынесенных на самостоятельную проработку,
- подготовку к практическим и семинарским занятиям;
- подготовка к контрольной работе, к зачету, экзамену.

**Творческая проблемно-ориентированная самостоятельная работа (ТСР)**, ориентированная на развитие интеллектуальных умений, комплекса универсальных (общекультурных) и профессиональных компетенций, повышение творческого потенциала студентов включает следующие виды работ по основным проблемам курса:

- поиск, анализ, структурирование и презентация информации,
- анализ научных публикаций по заранее определенной преподавателем теме.

### **Содержание самостоятельной работы студентов по дисциплине**

#### **Темы домашних заданий:**

1. Достаточные условия строгого экстремума
2. Метод множителей Лагранжа
3. Непрерывность функционала
4. Вариация функционала
5. Вторая вариация функционала
6. Экстремум функционала. Необходимое условие экстремума.
7. Уравнение Эйлера. Вариационная задача в параметрической форме.
8. Изопериметрическая задача
9. Геодезические линии
10. Вариационные задачи с подвижными границами
11. Геодезическое расстояние
12. Достаточное условие Вейерштрасса
13. Достаточное условие Лежандра

#### **Контроль самостоятельной работы**

Оценка результатов самостоятельной работы организуется как единство двух форм: самоконтроль и контроль со стороны преподавателей. Оценка результатов самостоятельной работы организуется следующим образом:

- контрольные вопросы, задаваемые при проведении практических занятий,
- вопросы для самоконтроля;
- вопросы тестирований;
- выполнение домашних работ;
- выполнение самостоятельных и контрольных работ
- вопросы, выносимые на зачет.
- реферат с элементами проектирования;
- доклады на конференц-неделях.

Оценка качества освоения дисциплины производится по результатам следующих контролируемых мероприятий:

| Контролирующие мероприятия                                                                                                            | Результаты обучения по дисциплине                                                                                                            |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Самостоятельные работы на практических занятиях                                                                                       | Знание основных формул и определений                                                                                                         |
| Контрольные работы на практических занятиях                                                                                           | Умение самостоятельно находить решение поставленной задачи                                                                                   |
| Участие студентов в научной дискуссии по подготовленным и представленным презентациям, рефератам во время проведения конференц-недели | Овладение опытом анализа информационных источников; выступлений с докладами и участия в дискуссиях; разделения научного и ненаучного знания; |
| Выполнение и защита индивидуальных заданий                                                                                            | Знание основных формул и определений. Умение самостоятельно находить решение поставленной задачи                                             |

Контроль со стороны преподавателя и самоконтроль осуществляется в соответствии с рейтингом-планом дисциплины, во время практических и лабораторных занятий, коллоквиумов, защиты домашних заданий.

### Вопросы к зачету

1. Метод градиентного спуска.
2. Метод множителей Лагранжа
3. Функционалы, зависящие от производных высших порядков
4. Задача о Брахистохроне
5. Шарнирный метод Штейнера решения изопериметрической задачи
6. Неравенство Пуанкаре для изопериметрической задачи
7. Выпуклые функции
8. Выпуклость и изопериметрическая задача
9. Изопериметрическое неравенство
10. Определение периметра по Минковскому
11. Неравенство Бруно – Минковского
12. Простейшая задача вариационного исчисления
13. Основная лемма вариационного исчисления
14. Вариация функционала
15. Уравнение Эйлера – Лагранжа
16. Выпуклый интегрант
17. Геодезические линии

### Задачи для самостоятельного решения

1. Найти экстремаль функционала

$$f(x) = \iint_G \left( \left( \frac{\partial x}{\partial t} \right)^2 + \left( \frac{\partial x}{\partial s} \right)^2 + 2tx \right) ds dt,$$

где  $G$  – единичный круг с центром в начале координат, с граничными условиями  $x|_{(t,s) \in \partial G} = 0$ .

2. Найти экстремаль функционала

$$J(y) = \int_0^{2\pi} (y'^2 - y^2) dx \rightarrow \text{extr}$$

при граничных условиях

$$\begin{cases} y(0) = 1; \\ y(2\pi) = 1. \end{cases}$$

3. Найти экстремум функционала при граничных условиях

$$J(y) = \int_0^1 (y'^2 + 12xy) dx \rightarrow \text{extr} \quad \begin{cases} y(0) = 0; \\ y(1) = 1. \end{cases}$$

4. Найти экстремум функционала при граничных условиях

$$J(y) = \int_{-1}^1 (x^2 + y^2 + y'^2) dx, \quad \begin{cases} y(-1) = 1; \\ y(1) = 2. \end{cases}$$

5. Найти экстремум функционала при граничных условиях

$$J(y) = \int_{-1}^1 (y'^2 + 2y' \operatorname{sh} x - 5x^2) dx, \quad \begin{cases} y(-1) = 2; \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

| № п/п                      | Название и выходные данные (автор, вид издания, издательство, издания, количество страниц)                                                                                                                                                                                                         | Год издания | Количество экземпляров в библиотеке университета | Наличие в электронной библиотеке ВлГУ                                                                                                                         | Количество студентов, использующих указанную литературу | Обеспеченность студентов литературой, % |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------|--------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1                          | 2                                                                                                                                                                                                                                                                                                  | 3           | 4                                                | 5                                                                                                                                                             | 6                                                       | 7                                       |
| <b>Основная литература</b> |                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |             |                                                  |                                                                                                                                                               |                                                         |                                         |
| 1                          | Математический анализ. Краткий курс [Электронный ресурс] : Учебное пособие для студентов высших учебных заведений / Асланов Р.М., Ли О.В., Мурадов Т.Р. - М. : Прометей, 2014.                                                                                                                     | 2014        |                                                  | ЭБС «Консультант студента»<br><a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785990588653.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785990588653.html</a> | 20                                                      | 100                                     |
| 2                          | Основы математического анализа. В 2-х ч. Часть I [Электронный ресурс] : Учеб. для вузов / Ильин В.А., Позняк Э.Г. - 7-е изд., стер. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2014. - (Курс высшей математики и математической физики. Вып. 1).                                                                             | 2014        |                                                  | ЭБС «Консультант студента»<br><a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922109024.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922109024.html</a> | 20                                                      | 100                                     |
| 3                          | Лекции по математическому анализу. Ч.1 [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.Т. Дубровин. - 3-е изд., перераб. и доп. - Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2012. - <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785905787430.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785905787430.html</a> | 2012        |                                                  | ЭБС «Консультант студента»<br><a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785905787430.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785905787430.html</a> | 20                                                      | 100                                     |
|                            |                                                                                                                                                                                                                                                                                                    |             |                                                  |                                                                                                                                                               |                                                         |                                         |

### Дополнительная литература:

|   |                                                                                                                                                                                                                                                                        |      |  |                                                                                                                                                                             |    |     |
|---|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------|--|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|-----|
| 1 | Теория функций комплексного переменного: Учеб. пособ / Карасёв И. П. - М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. - 216 с.                                                                                                                                                                   | 2008 |  | ЭБС «Консультант студента»<br><a href="http://www.studentlibrary.ru/doc/ISBN9785922109604-SCN0002.html">http://www.studentlibrary.ru/doc/ISBN9785922109604-SCN0002.html</a> | 20 | 100 |
| 2 | Высшая математика. Основы математического анализа [Электронный ресурс] / Геворкян П.С. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2011                                                                                                                                                          | 2011 |  | ЭБС «Консультант студента»<br><a href="http://www.studentlibrary.ru/doc/ISBN5922105493-SCN0008.html">http://www.studentlibrary.ru/doc/ISBN5922105493-SCN0008.html</a>       | 20 | 100 |
| 3 | Лекции по математическому анализу. Ч.II [Электронный ресурс] : учебное пособие / В.Т. Дубровин - Казань : Изд-во Казан. ун-та, 2016. - <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785000195758.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785000195758.html</a> | 2016 |  | ЭБС «Консультант студента»<br><a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785000195758.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785000195758.html</a>               | 20 | 100 |

### **Периодические издания**

1. Математическое просвещение. Третья серия // М.: МЦНМО. Выпуск 13, 2009.
2. Математическое просвещение. Третья серия // М.: МЦНМО. Выпуск 14, 2010.
3. Математическое просвещение. Третья серия // М.: МЦНМО. Выпуск 15, 2011.
4. Математическое просвещение. Третья серия // М.: МЦНМО. Выпуск 16, 2012.

### **Интернет-ресурсы**

[exponenta.ru](http://exponenta.ru), [poiskknig.ru](http://poiskknig.ru)

### **8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

1. Лекционная аудитория с мультимедийным проектором и ПК (ауд. 133-7).

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению 44.03.05 Педагогическое образование профили «Математика. Информатика»

Рабочую программу составил ст. пр. Тихомиров Р.Н.  
(ФИО, подпись)

Рецензент МАОУ Гимназия №3 Мартынов Г.И.  
(место работы, должность, ФИО, подпись)

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры математического анализа

Протокол № 7 от 11.03.2016 года

Заведующий кафедрой Жиков В.В.

(ФИО, подпись)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления 44.03.05 Педагогическое образование

Протокол № 3 от 14.03.2016 года

Председатель комиссии Артамонова М.В.

### ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_