2013

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

УТВЕРЖДАЮ
Проректор
по учебно-методической работе
_______________ А.А.Панфилов
«17» 03 2016 г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

АКТУАЛЬНЫЕ ПРОБЛЕМЫ ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ
(наименование дисциплины)

Направление подготовки 44.03.05 «Педагогическое образование»
(с двумя профилями подготовки)

Профиль подготовки Математика. Информатика

Уровень высшего образования бакалавриат

Форма обучения очная

Семестр	Трудоем-кость зач. ед,час.	Лек-ции, час.	Практич. занятия, час.	Лаборат. работы, час.	СРС, час.	Форма промежуточного контроля (экз./зачет)
7	5/180		54		126	Зачет с оценкой
Итого	5/180		54		126	Зачет с оценкой

г. Владимир 2016г.

1. ЦЕЛИ И ЗАДАЧИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целями освоения дисциплины «Актуальные проблемы прикладной математики» является понятие числа, которое позволяет описывать количественную сторону отношения изучаемого объекта к некоторому эталону. В процессе развития и совершенствования моделей, описывающий окружающий нас мир, и условий математических конструкций появляются новые объекты, обладающие совершенно новыми свойствами по сравнению с действительными числами. Изучаются натуральные числа и история их возникновения. Далее переходим к изучению целых чисел, а именно представляем их в виде пар натуральных чисел и приводим действия с ними. Позже рассматриваются действительные числа. Это единственные числа, которые нельзя представить в виде пар. Там приводится особые рассуждения.

Первое обобщение понятия действительного числа – введение комплексных чисел, которые мы рассматриваем в виде пар действительных чисел и приводим действия с такими парами.

Второе обобщение действительного числа - векторы в трехмерном пространстве, которое образуют линейное пространство. Наиболее естественным способом, который позволяет описывать повороты в трехмерном пространстве, является использование операторов преобразования и соответствующих им матриц.

Гиперкомплексные числа или кватернионы рассматриваются как пары комплексных чисел. Кватернионы используются в алгебраической, геометрической формах, а так же в виде действительных и комплексных матриц. Использование кватернионов позволяет дать более простую форму поворота. Кватернион определяет ось вращения и угол поворота.

Цели изучения дисциплины:

- Познакомить студентов с целыми числами, представленными в виде пар натуральных чисел.
- Познакомить студентов с рациональными числами, представленными в виде пар целых чисел.
- Познакомить студентов с действительными числами, которые нельзя представить в виде пар и дать обоснование этому.
- Познакомить студентов с комплексными числами, представленными в виде пар действительных чисел.
- Познакомить студентов с гиперкомплексными числами, представленными в виде пар комплексных чисел.
- Прояснить связь кватернионов с разделами механики, робототехники и др.

- Сформировать у студентов элементы математической культуры, которые смогут обеспечить ясное понимание смысла и значения разделов математики и механики в школе, ВУЗе и на практике (предприятия связанные с робототехникой).

Задачи изучения дисциплины:

- Научить студента проявлять самостоятельность и творческий подход в овладении нового математического спецкурса.
- Научить студентов оперировать, как с классическим понятием комплексных чисел, так и с их обобщением- кватернионами.
- Познакомить студентов с одним из разделов прикладной математики – кватернионами и рассмотреть различные приложения кватернионов в механике, робототехнике, ПК и других математических приложениях.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина относиться к разделу «Дисциплины по выбору». Спецкурс «Актуальные проблемы прикладной математики» продолжает развивать у студентов понятия числа, пространственное воображение. Его изучение основывается на таких математических понятиях, как представление основных классов чисел в виде пар, действия с парами – сложение, вычитание, умножение и деление. Изучение комплексных чисел на комплексной плоскости, действия с ними в алгебраической, геометрической, тригонометрической и других формах. Рассмотрение гиперкомплексных чисел и действий с ними в алгебраической и геометрической формах, в форме действительных и комплексных матриц и т.д.

Спецкурс «Актуальные проблемы прикладной математики» имеет связи с различными математическими дисциплинами. Знания, полученные в этом курсе используются в алгебре, математическом анализе, функциональном анализе, дифференциальных уравнениях, механике.

Так приложение комплексных чисел – тесно связано с решение уравнений высоких степеней, а приложение кватернионов тесно связано с поворотами в трехмерном пространстве, где используются операторы преобразования и соответствующие им матрицы.

Умения оперировать комплексными и гиперкомплексными числами необходимы для изучения курса «теория функций комплексного переменного». И наоборот изучение последнего позволяет обогащать его теорию и практику, используя понятия кватернионов и их приложения.

3.КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

В результате дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования: ПК-11

Выпускник должен обладать следующими профессиональными компетенциями (ПК):

Готовность использовать систематизирование теоретические и практические знания для определения и решения исследовательских задач в области образования (ПК-11):

В результате спецкурса «Актуальные проблемы прикладной математики» студент должен знать следующие методы, факты, свойства, применяемые при решении задач, связанных с кватернионами.

Алгебра, алгебраические системы.

1. Действия с целыми числами, записанными в виде пар.
2. Действия с рациональными числами, записанными в виде пар.
3. Действия с действительными числами.
4. Действия с комплексными числами, записанными в виде пар.
5. Умение изображать комплексные числа в двумерном и трехмерном пространствах.
6. Умение работать с различными матрицами 3-го и 4-го порядков.
7. Умение вычислять модуль кватерниона и в связи с этим показать, что кватернионы обладают мультипликативной нормой и образуют ассоциативную алгебру с делением.

Числовые системы

1. Первоначальные сведения о числах (натуральные, целые, рациональные, действительные). Круги Эйлера.
2. Систематические числа и действия с ними.
3. Расширение понятия числа - алгебраическая и геометрическая формы комплексных и гиперкомплексных чисел.
4. Использование правил действия с комплексными числами и кватернионами.

Поле комплексных чисел

1. Умение находить сопряженные числа к комплексным.
2. Умение использовать свойства комплексного сопряжения.
3. Умение находить сопряженный кватернион, знак кватерниона, его аргумент.
4. Умение перенести на случай кватернионов производной аналитической функции.

Аналитические функции

1. Умение вычислять аналитические функции от кватерниона (экспоненту и натуральный логарифм, синус и косинус, гиперболический синус и косинус).
2. Умение извлекать корень квадратный из кватерниона.

Система координат

1. Умение использовать для вычислительных целей в одной и той же форме компонентов кватернионов в разных системах координат.
2. Выполнение преобразований компонентов кватернионов при переходе от подвижной системы координат к неподвижной и наоборот.
3. Выполнение элементарных поворотов и их суммирование.

Ориентация твердого тела в трехмерном пространстве

1. Вычисление углов Эйлера.

2. Геометрические построения в трехмерном пространстве (неподвижная система связана с землёй ,а подвижная с телом).

3. Использование самолетной системы координат (оси крена, тангажа и скольжения).

Сферическая геометрия

1. Умение решать задачи сферической геометрии и тригонометрии.

2. Использование географической системы, состоящей из угловых координат (долгота, широта).

3. Умение изображать систему координат, начало которой находится в центре сферы.

4. Определение расстояния между точкам на сфере, углов между большими окружностями на сфере.

5. Вычисление углов в сферическом треугольнике.

Вывод: в результате изучения спецкурса «Актуальные проблемы прикладной математики» выстраивается четкая система в построении всех чисел, происходит закрепление материала, связанного с изучением комплексных чисел, действий с ними и гиперкомплексными числами, переход от двумерных к трехмерным изображениям. Приводятся первоначальные сведения о математике и геометрии кватернионов. Выбор этих сведений ориентирован на решение ряда задач из области формообразования и расчета стержневых и оболочечных конструкций его сложной пространственной геометрией (несущие конструкции олимпийского стадиона в Пекине).

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 5 зачетных единиц, 180 часов.

№ п/п	Раздел (тема) дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)						Объем учебной работы, с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)*, форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лекции	Семинары Практические занятия	Лабораторные работы	Контрольные работы	СРС	КП / КР		
	Основные классы чисел. Целые числа и действия с ними в парах. Систематические числа, действия с ними	7			4			10		2/50	

в различных системах счисления. Переход от одной системы счисления к другой.										
Основные классы чисел. Рациональные числа и действия с ними в парах. Систематические числа, действия с ними в различных системах счисления. Переход от одной системы счисления к другой.				4			10		2/50	
Основные классы чисел. Действительные числа. Систематические числа, действия с ними в различных системах счисления. Переход от одной системы счисления к другой.				6			10		3/50	Рейтинг-контроль №1
Основные классы чисел. Комплексные числа и действия с ними в парах. Решение уравнений второй, третьей и четвертой степеней. Возведение комплексного числа в степень и извлечение корня из единицы (с				4			10		2/50	

	изображением) и комплексного числа.										
	Основные классы чисел. Алгебраическая, тригонометрическая и геометрическая форма (с изображением) комплексного числа.				4			10		2/50	Рейтинг контроль №2
6	**Определение кватернионов.** Стандартное определение, как вектор и скаляр, через комплексные числа, через матричные представления (вещественными и комплексными матрицами).				6			10		3/50	
	Связанные объекты и операции. Сопряжение. Модуль. Обращение умножения (деление).	7			6			10		3/50	
	Алгебраические свойства. Четыре базисных кватерниона и четыре противоположных им по знаку образуют по умножению группу кватернионов порядка 8. Множество кватернионов является примером кольца с	7			6			10		3/50	

	делением.										
9	**Целые кватернионы.** Целые единичные кватернионы. Разложение на простые сомножители.	7				6		10		3/50	
0	**Из истории.** Новый вид обнаружен Гамильтоном в 1843 году. Максвелл использовал компактную кватернионную запись для формулировки своих уравнений магнитного поля. Позднее создан трехмерный векторный анализ. (Гибб.с Хевисайд).	7				4		10		2/50	
1	**Современное применение.**	7				2		10		1/50	
2	**Контрольная работа.**	7				2		16		1/50	Рейтинг - контроль №3
Всего						54		126		27/50	Зачет с оценкой

5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

Активные и интерактивные формы. лекции. практические занятия. контрольные работы. компьютеры. В течение семестра студенты решают задачи. указанные преподавателем. к каждому семинару. Зачет выставляется после решения всех задач контрольной работы и самостоятельного выполнения индивидуального задания (реферат) и предоставления презентаций по разделам курса.

6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Контрольная работа оценивается по пятибалльной системе. На практических занятиях контроль осуществляется при ответе у доски и при проверке домашних заданий, кроме того прослушиваются рефераты и идет просмотр презентаций.

6.1. Перечень примерных контрольных вопросов и заданий для самостоятельной работы

Рассмотрим *пример 1*: $z = \sqrt{-4}$.

Нельзя извлечь корень? Действительно, нельзя, если речь идет о действительных числах. В комплексных числа извлечь корень – можно. Точнее, два корня:

$z_1 = \sqrt{-4} = -2i$

$z_2 = \sqrt{-4} = 2i$

Действительно ли найденные корни являются решением уравнения $z^2 = -4$? Выполним проверку:

$(-2i)^2 = (-2)^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$

$(2i)^2 = 2^2 \cdot i^2 = 4 \cdot (-1) = -4$

Что и требовалось проверить.

Часто используется сокращенная запись, оба корня записывают в одну строчку: $z_{1,2} = \pm 2i$.

Такие корни также называют сопряженными комплексными корнями.

Следовательно, при извлечении квадратного корня из отрицательных чисел, во всех случаях получается два сопряженных комплексных корня.

Пример 2: решить квадратное уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$

Вычислим дискриминант: $D = 36 - 136 = -100$

Так как дискриминант отрицателен, и в действительных числах уравнение решения не имеет. Но корень можно извлечь в комплексных числа. Отсюда, получаем: $\sqrt{D} = \pm 10i$

По известным формулам получаем два корня: $z_{1,2} = \frac{6 \pm 10i}{2}$

$z_{1,2} = 3 \pm 5i$ – сопряженные комплексные корни

Таким образом, уравнение $z^2 - 6z + 34 = 0$ имеет два сопряженных комплексных корня: $z_1 = 3 - 5i, z_2 = 3 + 5i$.

Нетрудно заметить, что в поле комплексных чисел «школьное» квадратное уравнение всегда имеет два корня. Вообще, любое уравнение вида $a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_2 z^2 + a_1 z + a_0 = 0$ имеет ровно n корней, часть из которых могут быть и комплексными.

Как извлечь корень из произвольного комплексного числа?

Рассмотрим уравнение вида $z^n = W$, или, то же самое: $z = \sqrt[n]{W}$. Здесь n может принимать любое натуральное значение, которое больше единицы. В частности, при $n = 2$ получается квадратный корень $z = \sqrt{W}$. Что касается именно квадратного корня, то он успешно извлекается и алгебраическим методом, который рассмотрен выше.

Уравнение вида $z = \sqrt[n]{W}$ имеет ровно n корней $z_0, z_1, z_2, \dots, z_{n-1}$, которые можно найти по формуле: $z_k = \sqrt[n]{|W|} \cdot \left(cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + isin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right)$, где $|W|$ – это модуль комплексного числа W, φ – его аргумент, а параметр k принимает значения: $k = \{0; 1; 2 \dots; n - 1\}$

Пример 3: Найти корни уравнения $z^2 = 1 + \sqrt{3}i$

Перепишем уравнение в виде $z = \sqrt{1 + \sqrt{3}i}$

В данном примере $W = 1 + \sqrt{3}i, n = 2$, поэтому уравнение будет иметь два корня: z_0 и z_1.

Общую формулу можно сразу преобразовать:

$$z_k = \sqrt{|W|} \cdot \left(cos\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right) + isin\left(\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)\right), k = \{0; 1\}$$

Теперь нужно найти модуль и аргумент комплексного числа $W = 1 + \sqrt{W}$:

$$|W| = \sqrt{1^2 + \left(\sqrt{3}\right)^2} = \sqrt{1 + 3} = \sqrt{4} = 2$$

Число w располагается в первой четверти, поэтому:

$$\varphi = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$$

Еще более детализируем формулу:

$$z_k = \sqrt{2} \cdot \left(cos\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right) + isin\left(\frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2}\right)\right), k = \{0; 1\}$$

Подставляя в формулу значение k=0, получаем первый корень:

$$z_0 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 0}{2}\right)\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

Подставляя в формулу значение k=1, получаем второй корень:

$$z_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi\cdot 1}{2}\right)\right) = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$$

Ответ: $z_0 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right),\ z_1 = \sqrt{2} \cdot \left(\cos\frac{7\pi}{6} + i\sin\frac{7\pi}{6}\right)$.

При желании или требовании задания, полученные корни можно перевести обратно в алгебраическую форму.

Следует отметить, что на практике аргумент подкоренного числа может оказаться не так «хорош», как в рассмотренном примере. В этом случае для извлечения квадратного корня лучше использовать упомянутый выше алгебраический метод.

Пример 4: найти корни уравнения $z^3 + a$, где $a = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Сначала представим уравнение в виде $z = \sqrt[n]{w}$: $z^3 = -a$

Если $a = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$, тогда $-a = -\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

Обозначим $-a$ привычной формульной буквой: $w = -a = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

Таким образом, требуется найти корни уравнения $z = \sqrt[3]{-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

В данном примере $n = 3$, а значит, уравнение имеет ровно три корня: z_0, z_1, z_2

Преобразуем общую формулу:

$$z_k = \sqrt[3]{|w|} \cdot \left(\cos\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi+2\pi k}{3}\right)\right), k = \{0; 1; 2\}$$

Найдем модуль и аргумент комплексного числа $w = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$:

$$|w| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{3}{2}}$$

Число w располагается во второй четверти, поэтому:

$$\varphi = \pi + arctg\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = \pi + arctg(-1) = \pi - arctg1 = \pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$$

Еще раз преобразуем формулу:

$$z_k = \sqrt[3]{\sqrt{\frac{3}{2}}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right)\right), k = \{0; 1; 2\}$$

Корень удобно сразу же упростить:

$$z_k = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi k}{3}\right) \right)$$

Подставляем в формулу значение k=0 и получаем первый корень:

$$z_0 = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi \cdot 0}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi \cdot 0}{3}\right) \right) = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} \right)$$

Подставляем в формулу значение k=1 и получаем второй корень:

$$z_1 = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi \cdot 1}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi \cdot 1}{3}\right) \right) = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12} \right)$$

Подставляем в формулу значение k=2 и получаем третий корень:

$$z_2 = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi \cdot 2}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{4}+2\pi \cdot 2}{3}\right) \right) = \sqrt[6]{\frac{3}{2}} \cdot \left(\cos\frac{19\pi}{12} + i\sin\frac{19\pi}{12} \right)$$

Очень часто полученные корни требуется изобразить геометрически:

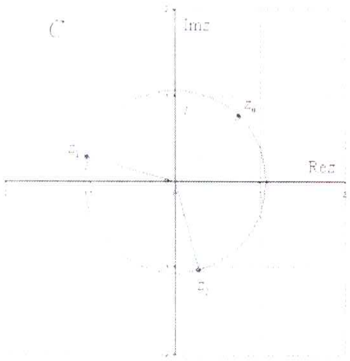

Рисунок 1[illegible] – геометрическое изображение комплексных чисел

Как выполнить чертеж?

Для начала, находим чему равен модуль корней $\sqrt[6]{\frac{3}{2}} \approx 1{,}07$ и чертим циркулем окружность данного радиуса. Все корни будут располагаться на данной окружности. Теперь берем аргумент первого корня $\frac{\pi}{4}$ и выясним, чему равняется угол в градусах: $\frac{\pi}{4} \cdot \frac{180}{\pi} = 45^\circ$ и ставим на чертеже точку z_0.

Берем аргумент второго корня $\frac{11\pi}{12}$ и переводим в градусы: $\frac{11\pi}{12} \cdot \frac{180}{\pi} = 165^\circ$. Отмеряем транспортиром 165° и ставим точку z_1 на чертеже.

По такому де алгоритму строится точка z_2.

Легко заметить, что корни расположены геометрически правильно с интервалом $\frac{360^\circ}{3} = 120^\circ$ между радиус-векторами. Чертеж крайне желательно выполнять с помощью транспортира.

6.2. Примерные тексты контрольных работ

Рейтинг контроль №1.

Дать ответы на вопросы:

1. Перечислить все известные числа и изобразить с помощью кругов Эйлера.

2. Десятеричная, двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная системы счисления. Сложение, вычитание, деление и умножение одного и того же числа в различных системах счисления.

Например: Сложить числа 15 и 6 в различных системах счисления.

Эти числа в двоичной системе обозначают 1111_2+110_2,

в восьмеричной 17_8+6_8,

в шестнадцатеричной $F_{16}+6_{16}$.

3. Перевод из 10 ► 2, 10 ► 8, 10 ► 16.

Перевод из 16 ► 10, 8 ► 10, 2 ► 10. Самим привести примеры.

4. Как переводить целые числа?

Например: 141 в различные системы счисление.

5. Как перевести смешанное число ?

Например: 141,5 или 59,75.

6. Привести таблицы для сложения и умножения в восьмеричной системе счисления. Привести пример умножения.

7. Перевод из 2 ► 8 и обратно - триадами.

8. Перевод из 2 ► 16 и обратно – тетрадами.

9. Комплексные числа. Их геометрическое изображение. Сложение. Вычитание. Действия с комплексными числами, заданными в алгебраической и тригонометрической формах. Привести примеры.

Рейтинг-контроль №2.

1. Вопросы, на которые надо дать краткий ответ.

1.1. Комплексные числа. Основные формы комплексных чисел.

1.2. Комплексная плоскость. Действия с комплексными числами в геометрической форме.

1.3. Тригонометрическая форма комплексного числа. Возведение в степень. Формула Муавра.

1.4. Извлечение корня n-ой степени из единицы. Частные случаи при n= 1,2,3,4,5,6. Изображение корней в этих случаях.

1.5. Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа.

1.6. Действия с комплексными числами в парах.

2. Практические задания.

1. Дано комплексное число $z=3+\sqrt{3}i$, найти z^{20}.
2. Возвести в степень комплексные числа $i^{10}; i^{33} (-i)^{21}$.
3. Извлечь корень $z=\sqrt{-4}$.
4. Решить квадратное уравнение $z^2-6z+34=0$
5. Найти корни уравнения $z^2=1+\sqrt{3}i$
6. Изобразить комплексные числа на плоскости: $z_1 = 1 + 2i$, $z_2 = 4$, $z_3 = 3i$, $z_4 = \overline{z_1} = 1 - 2i$

Рейтинг-контроль №3.

1. Вопросы, на которые надо дать краткий ответ.

1.1. Стандартное представление кватернионов.

1.2. Определение кватерниона как вектор и скаляр.

1.3. Определение кватерниона через комплексные числа.

1.4. Определение кватерниона через матричное представление.

1.5. Геометрическая интерпретация кватернионов.

1.6. Сопряженный кватернион.

1.7. Модуль кватерниона.

2. Практические задания.

2.1. Вычислите по определению

$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение:

$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k$, $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = = 2 + 9i 2 - j 2 - 8k 2 + (2(-3) + (-3) \cdot 1 + 1 \cdot 2 - (-4)(-1))i + +(2 \cdot (-1) + 1 \cdot 1 + (-4)(-3) - (-3) \cdot 2)j + +(2 \cdot 2 \cdot (-4) \cdot 1 + (-3)(-1) - 1 \cdot (-3))k = = 2 - 11i + 17j + 6k$.

Пользуемся таблицей умножения базисных кватернионов.

×	1	**i**	**j**	**k**
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

2.2. Вычислите с помощью матричной интерпретации кватерниона

$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Кватернионы можно определить как комплексные матрицы следующего вида с обычными матричными произведением и суммой.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + bi & c + di \\ -c + di & a - bi \end{pmatrix}$$

$\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ - комплексно-сопряженные к α и β.

$$\left(\begin{pmatrix} 2 - 3i & 1 - 4i \\ -1 - 4i & 2 + 3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$
$$\begin{pmatrix} 3 - 6i & -2i \\ -2i & 3 + 6i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 3 - 6i - 2k.$$

Этот результат совпадает с ранее полученным результатом 2.1.

2.3. Вычислить с помощью матричной интерпретации кватерниона.

$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

$$(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) =$$
$$= \left(\begin{pmatrix} 2 - 3i & 1 - 4i \\ -1 - 4i & 2 + 3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 - 3i & -1 + 2i \\ 1 + 2i & 1 + 3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$
$$= \begin{pmatrix} 2 - 11i & 17 + 6i \\ -17 + 6i & 2 + 11i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 2 - 11i + 17j + 6k.$$

что совпадает с ранее полученным результатом 2.2.

2.4. Вычислите с помощью геометрической интерпретации кватерниона

$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

$$(2-3i+j-4k)+(1-3i-j+2k)=$$
$$=\left((2-3\overrightarrow{\mathrm{i}}+\overrightarrow{\mathrm{j}}-4\overrightarrow{\mathrm{k}})+(1-3\overrightarrow{\mathrm{i}}-\overrightarrow{\mathrm{j}}+2\overrightarrow{\mathrm{k}})\right)^{\varphi^{-1}}=$$
$$=\left(3-6\overrightarrow{\mathrm{i}}-2\overrightarrow{\mathrm{k}}\right)^{\varphi^{-1}}=3-6i-2k,$$

что совпадает с ранее полученными результатами.

2.5. $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) =$

Используем. что для кватерниона

$q=a+b_i+c_j+d_k$.

a - скалярная часть кватерниона q.

$u = b_i+c_j+d_k$ – векторная часть

$$=2-\left(-3\overrightarrow{\mathrm{i}}+\overrightarrow{\mathrm{j}}-4\overrightarrow{\mathrm{k}},\ -3\overrightarrow{\mathrm{i}}-\overrightarrow{\mathrm{j}}+2\overrightarrow{\mathrm{k}}\right)+$$
$$+\left(2\left(-3\overrightarrow{\mathrm{i}}-\overrightarrow{\mathrm{j}}+2\overrightarrow{\mathrm{k}}\right)+1\cdot\left(-3\overrightarrow{\mathrm{i}}+\overrightarrow{\mathrm{j}}-4\overrightarrow{\mathrm{k}}\right)+\right.$$
$$\left.+\left[-3\overrightarrow{\mathrm{i}}+\overrightarrow{\mathrm{j}}-4\overrightarrow{\mathrm{k}},\ -3\overrightarrow{\mathrm{i}}-\overrightarrow{\mathrm{j}}+2\overrightarrow{\mathrm{k}}\right]\right)^{\varphi^{-1}}=$$
$$=2+\left(-9\overrightarrow{\mathrm{i}}-\overrightarrow{\mathrm{j}}+\begin{vmatrix}\overrightarrow{\mathrm{i}} & \overrightarrow{\mathrm{j}} & \overrightarrow{\mathrm{k}}\\ -3 & 1 & -4\\ -3 & -1 & 2\end{vmatrix}\right)^{\varphi^{-1}}=2-11i+17j+6k.$$

Что совпадает с ранее полученными ответами.

Контрольная работа.

Примерный вариант.

1. Вычислите по определению:

$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k)$ и $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k)$.

Решение:

$(2 - 3i + j - 4k) + (1 - 3i - j + 2k) = 3 - 6i - 2k$, $(2 - 3i + j - 4k)(1 - 3i - j + 2k) = = 2 + 9i\ 2 - j\ 2 - 8k\ 2 + (2(-3) + (-3)\cdot 1 + 1\cdot 2 - (-4)(-1))i + +(2\cdot(-1) + 1\cdot 1 + (-4)(-3) - (-3)\cdot 2)j + +(2\cdot 2 + (-4)\cdot 1 + (-3)(-1) - 1\cdot(-3))k = = 2 - 11i + 17j + 6k$.

Пользуемся таблицей умножения базисных кватернионов.

×	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	-1	k	$-j$
j	j	$-k$	-1	i
k	k	j	$-i$	-1

2. Вычислите с помощью матричной интерпретации кватерниона

(2 − 3i + j − 4k) + (1 − 3i − j + 2k) и (2 − 3i + j − 4k)(1 − 3i − j + 2k).

Кватернионы можно определить как комплексные матрицы следующего вида с обычными матричными произведением и суммой.

$$\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi & c+di \\ -c+di & a-bi \end{pmatrix}$$

$\bar{\alpha}$ и $\bar{\beta}$ - комплексно-сопряженные к α и β.

$$\left(\begin{pmatrix} 2-3i & 1-4i \\ -1-4i & 2+3i \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1-3i & -1+2i \\ 1+2i & 1+3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$\begin{pmatrix} 3-6i & -2i \\ -2i & 3+6i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 3-6i-2k.$$

Этот результат совпадает с ранее полученным результатом 1.

3. Вычислить с помощью матричной интерпретации кватерниона.

(2 − 3i + j − 4k) + (1 − 3i − j + 2k) и (2 − 3i + j − 4k)(1 − 3i − j + 2k).

$$(2-3i+j-4k)(1-3i-j+2k) =$$

$$= \left(\begin{pmatrix} 2-3i & 1-4i \\ -1-4i & 2+3i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1-3i & -1+2i \\ 1+2i & 1+3i \end{pmatrix} \right)^{\varphi^{-1}} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2-11i & 17+6i \\ -17+6i & 2+11i \end{pmatrix}^{\varphi^{-1}} = 2-11i+17j+6k.$$

что совпадает с ранее полученным результатом 2.

4. Вычислите с помощью геометрической интерпретации кватерниона

(2 − 3i + j − 4k) + (1 − 3i − j + 2k) и (2 − 3i + j − 4k)(1 − 3i − j + 2k).

$$(2-3i+j-4k)+(1-3i-j+2k) =$$

$$= \left((2-3\overrightarrow{\mathbf{i}}+\overrightarrow{\mathbf{j}}-4\overrightarrow{\mathbf{k}}) + (1-3\overrightarrow{\mathbf{i}}-\overrightarrow{\mathbf{j}}+2\overrightarrow{\mathbf{k}}) \right)^{\iota^{-1}} =$$

$$= \left(3-6\overrightarrow{\mathbf{i}}-2\overrightarrow{\mathbf{k}} \right)^{\iota^{-1}} = 3-6i-2k.$$

что совпадает с ранее полученными результатами.

5. Решить уравнение:

$(2-i-l+2k)x+3+5i-8j-5k=2j-2-2k+l$ и $y(2-i-j+2k)+3+5i-8j-5k=2j-2-2k+i$

Вычтем из обеих частей равенства кватернион $3+5i-8j-5k$, получим $(2-i-j+2k)\ x=-5-4i+10j+3k$

Теперь обе части уравнения умножим слева на $(2-i-j+2k)^{-1}$.

$x=(2-i-j+2k)^{-1}(-5-4i+10j+3k)$

$x=\frac{1}{2^2+(-1)^2+(-1)^2+2^2}(2+i+j-2k)(-5-4i+10j+3k)$

$x=\frac{-10+10i+20j+30k}{10}=-1+i+2j+3k$

Для второго уравнения

$y=\frac{1}{10}(-10-36i+10j+2k)$

6. Используя алгебру кватернионов в матричной интерпретации, вычислите $[2\vec{i}-\vec{k},\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}]$ с помощью соответствующей формулы для вычисления скалярного и векторного произведения. Проверьте результат по определению векторного произведения и с помощью координатной формулы.

По формуле для вычисления скалярного и векторного произведения имеем

$$[2\vec{i}-\vec{k},\vec{i}+2\vec{j}+\vec{k}]=\frac{1}{2}((2i-k)(i+2j+k)-(i+2j+k)(2i-k))$$

$$\psi=\frac{1}{2}\left(\left(\begin{pmatrix}0+2i & 0-i\\ -0-i & 0-2i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0+i & 2+i\\ -2+i & 0-i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0+i & 2+i\\ -2+i & 0-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0+2i & 0-i\\ -0-i & 0-2i\end{pmatrix}\right)^{\varphi}\right)^{\psi}=\frac{1}{2}\left(\left(\begin{pmatrix}-1+2i & -3+4i\\ 3+4i & -1-2i\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1-2i & 3-4i\\ -3-4i & -1+2i\end{pmatrix}\right)^{\varphi-1}\right)^{\psi}=\frac{1}{2}\left(\left(\begin{pmatrix}4i & -6+8i\\ 6+8i & -4i\end{pmatrix}\right)^{\varphi-1}\right)^{\psi}=\frac{1}{2}(4i-6j++8k)^{\psi}=2\vec{i}-3\vec{j}+4\vec{k}$$

6.3. Примерный перечень вопросов к зачету

1. Натуральные числа. История возникновения чисел.
2. Систематические числа. Действия в основных системах счисления.
3. Переход от одной системы счисления к другой.
4. Восьмиричная и шестнадцатиричная системы счисления.

5. Целые числа и действия с целыми числами.
6. Рациональные числа и действия с ними в парах.
7. Действительные числа. Изображение.
8. Комплексные числа. Основные формы комплексных чисел.
9. Комплексная плоскость. Действия с комплексными числами в геометрической форме.
10. Тригонометрическая форма комплексного числа. Возведение в степень. Формула Муавра.
11. Извлечение корня n-ой степени из единицы. Частные случаи при n= 1,2,3,4,5,6. Изображение корней в этих случаях.
12. Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа.
13. Действия с комплексными числами в парах.
14. Стандартное определение кватерниона.
15. Определение кватерниона как вектор и скаляр.
16. Определение кватерниона через комплексные числа.
17. Определение кватерниона через матричное представление (с помощью вещественных матриц, с помощью комплексных матриц).
18. Сопряженный кватернион.
19. Модуль кватерниона.
20. Обращение умножения кватерниона.
21. Алгебраические свойства кватернионов.
22. Кватернионы и повороты пространства.
23. Целые кватернионы.
24. Евклидово умножение кватернионов. Скалярное умножение кватернионов.
25. Внешнее умножение кватернионов. Векторное умножение кватернионов.
26. История возникновения кватернионов. (Реферат, презентация).
27. Современное применение кватернионов (Реферат, презентация).

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

№ п п	Название и выходные данные (автор, вид издания, издательство, издания, количество страниц)	Год издания	Количество экземпляров в библиотеке университета	Наличие в электрон-ной библиотеке ВлГУ	Количество студентов, использующих указанную литературу	Обеспеченность студентов литературой, %
1	2	3	4	5	6	7
	Основная литература					
1	Л.В. Веселова, О.Е. Тихонов Алгебра и теория чисел [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.В. Веселова, О.Е. Тихонов. - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. -	2014		ЭБС «Консультант студента» http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785788216362.html	20	100%
2	Ильин В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учебник / В.А. Ильин, Г.Д. Ким. - М. : Проспект, 2015 – 225с	2015		ЭБС «Консультант студента» http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785392163397.html	20	100%
3	В.И. Антонов, М.В. Лагунова, Н.И. Лобкова, Ю.Д. Максимов, В.М. Семёнов, Ю.А. Хватов Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный конспект [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.И. Антонов, М.В. Лагунова, Н.И. Лобкова, Ю.Д. Максимов, В.М. Семёнов, Ю.А. Хватов. - М. : Проспект, 2015 – 144с	2015		ЭБС «Консультант студента» http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785392168934.html	20	100%
4	**Линейная алгебра. Линейные операторы. Квадратичные формы. Комплексные числа**: Учебное пособие / Рубашкина Е.В. - М.: НИЦ ИНФРА-М, 2016. - 38 с.	2016		ЭБС «znanium» ISBN 978-5-16-011858-1	20	100%
	Дополнительная литература					
1	Конвей Дж. "О кватернионах и октавах, об их геометрии, арифметике и симметриях. [Электронный ресурс] / Конвей Дж.; Пер. с англ. С.М. Львовского. - М.: МЦНМО, 2009." – 184 с	2009		ЭБС «Консультант студента» http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940575177.html	20	100%
2	Гельфанд И.М., Шень А. Алгебра. [Электронный ресурс] / Гельфанд И.М., Шень А. - 2-е изд., испр. и дополн. - М.: МЦНМО, 2009. -144 с	2009		ЭБС «Консультант студента» http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940574507.html	20	100%
3	Кочетова Ю.В., Ширшова Е.Е. Алгебра. Конечномерные	2013		ЭБС «Консультант	20	100%

	пространства. Линейные операторы [Электронный ресурс] : курс лекций / Ю.В. Кочетова. Е.Е. Ширшова. - М. : Прометей. 2013. – 80 с			студента» http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785704224549.html		
4	Епихин В.Е. Алгебра и теория пределов. Элективный курс [Электронный ресурс] / Епихин В.Е. - М. : БИНОМ. 2012. – 352 с	2012		ЭБС «Консультант студента» http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996309573.html	20	100%

Периодические издания:

1. Журнал «Математика в школе»

http://publ.lib.ru/ARCHIVES/M/"Matematika_v_shkole"/_"Matematika_v_shkole".html

Интернет ресурсы:

1. Exponent.ru

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Учебные аудитории для проведения лекционных и семинарских занятий. Мультимедийная техника на практических занятиях.

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению 44.03.05 Педагогическое образование профили «Математика. Информатика»

Рабочую программу составил доц. Соловьева О.А.
(ФИО, подпись)

Рецензент Мачнева Марина Петровна
– директор школы МБОУ СОШ №9
(место работы, должность, ФИО, подпись)

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры математического анализа
Протокол № 7 от 11.03.2016 года
Заведующий кафедрой Жиков В.В.
(ФИО, подпись)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления 44.03.05 Педагогическое образование
Протокол № 3 от 17.03.16 года
Председатель комиссии Артамонова М.В.

ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Рабочая программа одобрена на ___________ учебный год
Протокол заседания кафедры № ______ от _________ года
Заведующий
кафедрой____

Рабочая программа одобрена на ___________ учебный год
Протокол заседания кафедры № ______ от _________ года
Заведующий
кафедрой____

Рабочая программа одобрена на ___________ учебный год
Протокол заседания кафедры № ______ от _________ года
Заведующий
кафедрой____