Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

В. П. Покровский

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ: ЧИСЛОВАЯ СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ

Учебно-методическое пособие

Владимир 2015

УДК 51(07)
ББК 74.262.21
П48

Рецензенты:
Кандидат педагогических наук,
профессор кафедры начального образования
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
Г. Г. Шмырёва

Кандидат педагогических наук
зав. кафедрой естественно-математического образования
Владимирского института развития образования имени Л. И. Новиковой
Е. И. Антонова

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

Покровский, В. П.
П48 Методика обучения математике: числовая содержательно-методическая линия : учеб.-метод. пособие / В. П. Покровский ; Владим. гос. ун-т им. А. Г. и Н. Г. Столетовых. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2015. – 111 с. – ISBN 978-5-9984-0582-2.

Посвящено вопросам методики изучения числового материала в школьных курсах математики (5-е, 6-е классы), алгебры (7 – 9-е классы), алгебры и начал анализа (10-е, 11-е классы). Включает теоретические основы и практические задания, помогающие студентам наиболее успешно организовать самостоятельную работу по усвоению программного содержания важного раздела учебной дисциплины «Методика обучения математике». Базируется на идеях личностно-ориентированного и деятельностного подходов.

Предназначено для студентов 3-го, 4-го курсов бакалавриата очной формы обучения – будущих учителей математики, обучающихся по направлению 44.03.05 – Педагогическое образование (с двумя профилями подготовки). Может быть использовано магистрами и учителями математики общеобразовательных организаций.

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответствии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 5. Табл. 2. Библиогр.: 24 назв.

УДК 51(07)
ББК 74.262.21

ISBN 978-5-9984-0582-2

© ВлГУ, 2015

Увлекающийся практикой без теории – словно кормчий, ступающий на корабль без руля и компаса, он никогда не уверен, куда плывёт.
Леонардо да Винчи

В математике всего важнее способ преподавания.
Н. И. Лобачевский

Числа правят миром.
Пифагор

Счет и вычисления – основа порядка в голове.
И. Песталоцци

ПРЕДИСЛОВИЕ

Настоящее учебно-методическое пособие предназначено для студентов физико-математического факультета, начинающих изучать второй раздел (модуль) курса „Методика обучения математике", называемый специальной, или частной, методикой. В программном арифметико-алгебраическом материале этого раздела большое место отводится теоретическим и практическим вопросам обучения учащихся числовым системам, являющимся основой всего математического образования. Вопросы, относящиеся к изучению различных числовых множеств, принято объединять в числовую содержательно-методическую линию, или линию развития числа, в школьном обучении математике. Этой наиважнейшей содержательно-методической линии в разделе специальной методики и посвящено пособие.

Поскольку линия развития числа является первой, поэтому в начале рассмотрим отдельные особенности содержания специальной методики и дадим ряд общих методических рекомендаций студентам к самостоятельной работе по изучению программного материала всего раздела. Они смогут помочь им более качественно усвоить теоретические основы и овладеть методическими умениями и компетенциями, необходимыми современному учителю математики в его профессиональной деятельности.

Специальная методика включает вопросы методики изучения учебных предметов образовательной области „Математика" (математика (арифметика), алгебра, начала анализа, геометрия) в 5 – 11-х классах образовательных учреждений, чем и оправдывается его название. С позиций теоретических основ, заложенных в первом разделе курса, дается характеристика сквозных содержательно-методических линий математического образования, раскрываются методические особенности изучения отдельных тем программы по математике, реализующей основное общее и среднее (полное) общее образование, даются наиболее эффективные рекомендации по практике обучения с учетом возможных вариантов изложения учебного материала для различных возрастных групп и индивидуальных особенностей учащихся, перспектив развития темы, пропедевтического или систематического изучения, принципа преемственности, внутрипредметных и межпредметных связей, уровня теоретической и практической подготовки обучаемых, профиля обучения и многих других факторов. В центре внимания оказывается глубокий анализ содержания учебных предметов школьного курса математики, который является фундаментом методической подготовки студентов.

Вопросы специальной методики обучения математике в первую очередь обращены к содержанию обучения (предметный аспект), а затем к деятельности учителя и учащихся по работе с этим содержанием (процессуальный аспект). Поэтому без знания фактического материала школьного курса математики и его научных основ (в объеме, соответствующем вузовским пособиям), умения свободно решать типовые задачи невозможно дать грамотный ответ ни на один из методических вопросов, касающихся организации учебно-воспитательного процесса по изучению раздела, главы, параграфа или отдельного пункта школьного учебника.

Только знающий математику может эффективно обучать ей и прививать любовь к предмету. А. Н. Колмогоров подчеркивал, что хорошо преподавать математику может только тот, кто сам ею увлечен. Методика опредмечена, без знания содержания математического образования будут только разговоры о методике. Структурный анализ содержания учебного материала в той или иной мере помогает определить адекватные цели его изучения, выбрать наиболее приемлемые в данной ситуации методы и приемы, формы и средства обучения, обеспечивающие гарантированное достижение поставленных целей. Все названные компоненты методической системы „обучения математике" были рассмотрены в первой части курса – общей методике (см.: Покровский В. П. Методические рекомендации к самостоятельной работе студентов по курсу «Теория и методика обучения математике». Владимир: ВГПУ, 2004), а сейчас они будут применены к конкретному математическому содержанию, с использованием психолого-педагогических и методических знаний и накопленного опыта студентов. Только студент, глубоко овладевший теоретическими основами на 1 – 3-м курсах, сможет самостоятельно (или с помощью преподавателя) разрешить любой вопрос специальной методики, внося творческое начало, ориентируясь при этом на современную методическую систему обучения математике, методологическую основу которой составляют концепции гуманитаризации образования, личностно-ориентированного, деятельностного и технологического подходов к обучению.

Только так может быть реализована в учебной дисциплине концепция единства теории и практики обучения, которая предполагает, что конкретные методические рекомендации даются на основе тех или иных теоретических положений математики, педагогики и психологии, а используемые в практике современные технологии обучения теоретически обосновываются. Содержание школьного курса математики рассматривается с точки зрения связи его с современной наукой, потребностями практики и с возрастными особенностями учащихся. Повышение уровня теоретических знаний и совершенствование практических умений и компетенций студентов является основной задачей курса специальной методики обучения школьников математике.

Заметим, что в Резолюции Всероссийского съезда учителей математики, состоявшегося в МГУ им. М. В. Ломоносова 28 – 30 октября 2010 г., была отмечена важность поддержки и укрепления системы высшего педагогического образования с целью повышения качества подготовки специалистов в педагогических вузах. (Математика в школе. 2011. № 1. С. 5).

Специальная методика направлена на достижение следующих целей:

- выработку у студентов профессионально-педагогических умений и компетенций, базирующихся на глубоком анализе содержания школьного курса математики;

- подготовку студентов к педагогической практике на 4-м (8-й семестр) и 5-м (9-й семестр) курсах;
- овладение основами учебно-исследовательской и научно-исследовательской деятельности в области методики обучения математике (написания курсовой и дипломной работ).

Второй раздел курса „Методика обучения математике” играет исключительно важную роль в подготовке будущих учителей-математиков. На его изучение учебным планом в 7-м и 8-м семестрах отводится 84 ч: 28 ч – на лекции, 28 ч – на семинарско-практические занятия и 28 ч – на лабораторные занятия; на внеаудиторную самостоятельную работу выделяется 87 ч. В целях активизации самостоятельной работы студентов и проверки их знаний, умений и навыков проводятся две письменные контрольные работы – по одной в каждом семестре. Предусмотрена семестровая отчетность в форме экзамена (7-й, 8-й семестры). Текущая аттестация осуществляется на основе анализа ежесеместровой самостоятельной работы студентов по подготовке и участию в проведении аудиторных занятий, выполнения коллективных и индивидуальных заданий по курсу, рейтинга контроля в форме тестирования.

Стимулированию научно-исследовательских способностей по методике служат курсовая работа (8-й семестр), рефераты, доклады, которые отражают результаты самостоятельной работы студентов. Студенты, проявившие особый интерес к вопросам методики обучения математике и склонности к научно-исследовательской работе в данной области могут выступить с докладом на студенческой конференции (8-й семестр) и опубликовать статью по материалам выступления. Настоящей лабораторией практической подготовки студентов к работе в общеобразовательном учреждении является педагогическая практика в 8-м и 9-м семестрах, каждая соответственно в основной и старшей школе.

За отведенное учебным планом время должна быть изучена вся специальная методика базового образования основной и старшей школы с основными вопросами начальной математической подготовки. Сокращение числа аудиторных занятий приводит к увеличению объема самостоятельной работы студентов. Целенаправленно и оптимально организовать ее поможет данное издание.

В теоретической части курса, отражающей современное состояние науки об обучении математике, освещается как то новое, что внесено в теорию и практику обучения предмету в последние десятилетия, так и богатое методическое наследие прошлого. При оценке отдельных методов и приемов обучения математике надо исходить из того, что вообще не существует универсальных методов, годных для применения в любых условиях с одинаковой эффективностью, что в методике не только допустима, но и необходима вариативность в подходе к решению одних и тех же вопросов в разных условиях. Определяющим моментом в выборе методов, форм и средств обучения являются теоретические (математические) и методические особенности учебного материала, которые и раскрываются на лекциях и семинарских занятиях при обсуждении тем школьной программы. Лабораторные занятия посвящаются вопросам планирования работы учителя, конструирования планов и конспектов уроков различных типов и видов, изготовления наглядных пособий, пленок для кодоскопа, компьютерных программ, разбору типовых (ключевых) задач из школьных предметов и т.п. Организуемая деятельность студентов должна отвечать общим направлениям проводимой в стране модернизации системы отечественного математического образования, чтобы они, став учителями, были способны творчески участвовать в этом процессе.

При изучении специальной методики важное место отводится самостоятельной работе с учебно-методической литературой в ходе самоподготовки студентов к аудиторным занятиям и во время педагогической практики. Студент должен научиться самостоятельно ориентироваться в большом потоке информации, отбирать важный и нужный в работе материал, оценивать и анализировать его с точки зрения действующей примерной школьной программы по математике и современных требований к обучению, воспитанию и развитию учащихся на уроках, адаптировать методические рекомендации к собственной деятельности, предлагать и обосновывать свои идеи и экспериментально проверять их эффективность на практике в школе.

Подготовка развернутого ответа на конкретный методический вопрос может включать в себя изучение следующих источников (полное или выборочное):

1) основных разделов школьной программы: требования к математической подготовке учащихся, содержание обучения, тематическое планирование учебного материала;

2) соответствующего теоретического материала в альтернативных школьных учебниках федерального списка, который ежегодно публикуется в журнале „Математика в школе” и „Российской газете”, а в последние годы на сайте Минобрнауки РФ;

3) системы разнообразных обучающих, развивающих и контролирующих задач, имеющихся в учебниках и задачниках для учащихся, дидактических материалах и рабочих тетрадях, выделение основных типов задач, представляющих обязательные результаты обучения;

4) государственных образовательных стандартов начального общего, основного общего и среднего (полного) общего образования;

5) примерного поурочного планирования, опубликованного отдельным изданием или в журнале „Математика в школе”, газете „Математика”;

6) пособий для учителя (поклассные методики);

7) образцов заданий, конкретизирующих требования к уровню обязательной математической подготовки, с рекомендациями по их использованию;

8) методической литературы для учителя, включая инструктивные письма и материалы журнала „Математика в школе”, газеты „Математика” и научно-популярных изданий для учащихся, включая журналы „Квант” и „Математика для школьников”, пособия для абитуриентов;

9) школьных учебников по смежным предметам с целью установления межпредметных связей;

10) учебных пособий по методике обучения математике для студентов физико-математических факультетов, книг по истории математики;

11) вузовских учебных пособий по дисциплинам математического цикла с целью воспроизведения теоретических основ соответствующего раздела школьной программы.

Мы здесь не приводим списка литературных источников, так как основные из них уже были названы в методических рекомендациях к первому разделу курса, отдельные издания и статьи из журналов и сборников приводятся в вузовских учебных пособиях*. Необходимые статьи из журнала „Математика в школе” и газеты „Математика” можно самостоятельно подобрать с помощью специальных пособий

---

* Все названные в пособии школьные учебники Федерального перечня размещены на сайте [22].

по методическому обеспечению курса „Теория и методика обучения математике”: тематический указатель статей, опубликованных в журнале „Математика в школе” в 1980 – 2012 гг., тематический указатель статей, опубликованных в газете „Математика” в 1992 – 2012 гг., которые имеются в кабинете на кафедре.

Изучение литературы сопровождается выполнением различного рода общих, групповых и индивидуальных заданий, которые проверяются на аудиторных занятиях, чаще всего в форме деловых игр. Одним из таких заданий может быть составление методической разработки (проекта) определенной темы. При ее выполнении целесообразно придерживаться такого плана:

1) роль и место темы в современном школьном курсе математики с точки зрения науки (научное значение) и методики (методическое значение), образовательные, развивающие и воспитательные цели темы;

2) история развития преподавания темы, различные подходы к трактовке ее основных понятий (обзор учебной и методической литературы), сравнение различных вариантов изложения теоретических вопросов, соблюдение принципов научности и доступности;

3) анализ содержания учебного материала темы по ступеням обучения, внутрипредметные и межпредметные связи, тематическое планирование (пропедевтическое и систематическое изучение в общеобразовательных и профильных классах);

4) общие методические рекомендации по изучению темы, изложенные в школьной программе, инструктивных письмах, пособиях для учителя;

5) программные требования к математической подготовке учащихся по теме с учетом государственного образовательного стандарта и обязательных результатов обучения, объем знаний, умений и навыков учащихся как необходимых для успешного изучения темы, так и получаемых в итоге овладения материалом;

6) основные методические трудности при усвоении темы и пути их преодоления, типичные ошибки учащихся и методика их предупреждения и исправления;

7) предлагаемая технология изучения темы с анализом ее преимуществ и опорой на передовой опыт учителей, возможная оценка результатов деятельности учащихся при изучении темы;

8) особенности методики изучения наиболее важных понятий, теорем, правил, законов, фактов темы с анализом системы упражнений по подготовке учеников к введению нового знания, его усвоению и применению;

9) примерные образцы оформления доказательств теорем и решения задач по теме;

10) краткий исторический экскурс по учебному материалу темы;

11) обзор учебной и методической литературы по теме и сравнение различных вариантов ее изложения с точки зрения пригодности для школьного изучения;

12) свой методический комментарий по изучению темы.

Приведенный план может послужить студенту ориентиром при ответе на вопрос по специальной методике и на экзамене. Ответ студента не должен сводиться к пересказу содержания школьного учебника. В то же время невозможно вести разговор о методике без знания фактического материала. Необходимо добиваться глубокого понимания математических и методических идей, заложенных в школьном учебнике, логической структуры изложения, внутренних и внешних связей учебного материала, а также прочного знания и сознательной ориентировки в содержании курса математики. Это понимание и знания позволят выбрать правильную технологию обучения учащихся, соответствующую специфике математического содержания и его структуре. Поэтому студент должен научиться проводить логико-математический и логико-дидактический анализ учебного материала, чтобы эффективно разработать программу обучения на всю очередную тему или даже на весь годичный курс. Тем самым основательно подготовиться к учебно-воспитательным практикам в школе, написанию курсовой и дипломной работ по методике обучения математике. Оба вида анализа учебного материала предшествуют написанию тематического плана и поурочного конспекта, которые учатся разрабатывать студенты на лабораторных занятиях. Умение анализировать учебный материал темы является главным профессиональным умением учителя; все остальные умения формируются на его основе.

Логико-математический анализ предполагает внимательное изучение теоретического и задачного материала школьного учебника (пункта, параграфа, главы, раздела) с целью выяснения авторского замысла, логической структуры математических идей, теорий, методов и подходов, истории развития, развивающих и воспитательных возможностей, других характерных особенностей этого содержания обучения. Под логической структурой учебного материала понимается совокупность понятий, предложений (определений, теорем, аксиом, правил) и логических связей (отношений) между ними. Для наглядного представления структуры учебного материала используются графы, блок-схемы, классификации, родословные и т.п. Математический анализ сводится к выяснению основной идеи, теоретических основ содержания, методов и приемов доказательств, способов решения задач. В практике обучения учителю в каждом конкретном случае необходимо уметь выделять те логико-математические основы, на которые опирается соответствующая методика обучения. Они являются обоснованием тех или иных методических подходов.

Логико-математический анализ включает в себя: разделение материала на основной („ядерный") и второстепенный, выделение понятийного аппарата с указанием взаимосвязей и отношений между собой и с другими понятиями (составление схем, классификация и т. п.), выделение определений, правил, законов, фактов, теорем и выяснение их структуры, наличия или отсутствия доказательства, установление метода доказательства и обоснованности его проведения на каждом этапе, выяснение соответствия принципу научности при изложении теоретического материала, уровня логической строгости доказательств, выделение внутритемных и межтемных связей нового теоретического материала с ранее изученным, составление опорного конспекта с включением в него основных фактов темы, установление наличия исторического материала, выделение задачного материала и выяснение роли каждой задачи (для мотивации, подготовки нового знания, его усвоения и закрепления), выявление методов решения задач и использования теоретических фактов, решение всех задач по теме (в том числе и дополнительных) с анализом полученных результатов, выявление недостающих задач для усвоения материала, выделение типовых задач („ключевых"), входящих в „стандарт" образования.

Логико-математический анализ может включать в себя большее число пунктов за счет особого анализа определений, теорем, правил, задач, алгоритмов, которые даются в пособиях [6, 21]. В них же можно найти примерные анализы конкретных тем.

На основе логико-математического анализа темы проводится **логико-дидактический**, предназначенный для обоснования деятельности учителя по организации эффективной деятельности учащихся по овладению математическим содержанием. Здесь привлекаются психолого-педагогические и методические знания и умения. Логико-дидактический анализ включает в себя: постановку целей обучения, развития и воспитания, если последние каким-то образом заложены в содержание материала; мотивировку изучения темы; постановку основных учебных задач (обобщенных целей деятельности, сформулированных в виде заданий „найти…”, „открыть…”, „выявить…”, „проанализировать…”, „исследовать…”, „оценить…” и др.) и выбор адекватных им учебно-познавательных действий; выбор методов, приемов и организационных форм обучения в соответствии с содержанием материала, уровнем готовности учащихся и собственными возможностями учителя; выбор наиболее оптимальных средств обучения с учетом возрастных особенностей учащихся и наличия их в школе (ТСО, компьютер, таблицы, магнитная доска и т. п.); определение форм коррекции, контроля и оценки процесса и результатов деятельности учащихся. Примерные логико-дидактические анализы ряда программных тем приведены в тех же пособиях [6, 21].

Приведенные два вида анализа учебного материала с математической и процессуальной точек зрения дополняются методическим, который заключается в планировании теоретического содержания и задач темы по урокам; методическом обосновании выбора методов, средств и форм обучения и контроля; выяснении трудностей в изучении темы, типичных ошибок учащихся и путей их предупреждения и исправления; в адаптировании к собственной деятельности методических рекомендаций из опыта работы учителей при написании конспектов уроков (различных типов и видов, с использованием различных учебников, с учетом профиля класса, с использованием разных технологий), прогнозировании результатов своей деятельности и др.

Выделение в специальной методике двух составляющих оправдано целенаправленной подготовкой к двум педагогическим практикам (8-й и 9-й семестры). В то же время при рассмотрении частных вопросов основной школы необходимо обращать внимание на перспективу развития темы в старшей школе, чтобы студенты видели, как постепенно, по мере роста математических знаний и общего кругозора учащихся, раскрываются основные идеи школьной математики. Такое опережение полезно для разрешения методических проблем. При рассмотрении вопросов содержательно-методических линий старшей школы необходимо обращаться к материалу основной школы, чтобы студенты видели, как изменяются содержание, методы и приемы обучения в зависимости от возраста учащихся, но избегать излишнего дублирования.

Как было сказано ранее, пособие посвящено вопросам методики изучения числового материала в основной и старшей школе, включая пропедевтику отдельных числовых множеств. По каждому числовому множеству от натуральных чисел до комплексных чисел дается методический комментарий (теоретический аспект) и перечень заданий (практический аспект) для самостоятельной работы студентов. Задания, как правило, связаны с формированием творческого подхода к обучению математике, умением оценивать различные системы изложения материала в альтернативных учебниках, высказывать и отстаивать свою точку зрения, критически подходить к опыту и советам учителей, адаптировать изученные методические рекомендации к собственной деятельности в школе во время педагогической практики и др. Отдельные задания в целях расширения теоретических знаний рекомендуют обращаться к учебным пособиям, сборникам статей, материалам научно-практических конференций, имеющимся в библиотеке или на сайтах Интернета.

В организации выполнения заданий полезно сочетать различные формы учебной работы: общегрупповую, групповую, парную, индивидуальную. Работа над одним заданием в группе от двух до пяти человек, объединенных одной идеей, приводит к организации наиболее активной деятельности студентов, усиливающей её продуктивность. Кооперация в обучении позволяет лучше освоить материал и дольше его помнить, увеличивает число нестандартных решений, формирует позитивное отношение к изучаемому материалу и готовность не отвлекаться от достижения совместного результата, повышает самооценку и коммуникативную компетентность студентов, усиливает готовность их к организации проектной деятельности школьников во время педагогической практики.

При организации различных видов самостоятельной работы считается целесообразным использование современных образовательных технологий, которые позволяли бы как можно чаще создавать ситуации, моделирующие различные аспекты будущей педагогической деятельности студентов. Это одно из основных положений компетентностного подхода, который рекомендуется Федеральный государственный образовательный стандарт (ФГОС) высшего профессионального образования в организации учебного процесса. В учебном пособии это достигается через систему заданий, которые носят практико-ориентированный характер и целенаправленно способствуют профессиональному росту студентов.

В пособии учтена индивидуальность студентов, что нашло отражение в предоставлении им права выбора темы урока, учебника, методов и приемов изучения материала, типа урока, средств, форм обучения и другого при написании конспекта.

Пособие разработано в соответствии с ФГОС школьного математического образования второго поколения и ориентировано на современные учебники для общеобразовательных и профильных классов (2009 – 2014 гг.). В этом и состоит главное его отличие от методических руководств для студентов, которые были ориентированы на учебники 70 – 80-х гг. прошлого столетия. Кроме того оно соответствует ФГОС высшего профессионального образования третьего поколения по направлению 44.03.05 – Педагогическое образование (бакалавриат) для студентов, изучающих учебную дисциплину „Методика обучения математике" в профилях „Математика и информатика", „Информатика и математика", „Физика и математика".

Прямым продолжением курса „Методика обучения математике" служит курс по выбору „Современные технологии обучения математике", который согласно учебному плану включен в 8-й семестр. Его содержание тесно связано с вопросами специальной методики обучения математике в общеобразовательной школе. Студенты знакомятся с различными технологиями на примере изучения конкретных тем школьной программы, усиливая логико-дидактический анализ в том или ином ключе, составляя конспекты одного урока с использованием разных технологий. На его изучение отводится 54 ч аудиторных занятий (лекций – 18 ч и семинарских занятий – 36 ч) и 90 ч на самостоятельную работу; формой отчетности является зачет.

Автор выражает искреннюю благодарность рецензентам пособия профессору Галине Григорьевне Шмырёвой и кандидату педагогических наук Елене Ивановне Антоновой; слова особой признательности адресует доценту Елене Вячеславовне Лопаткиной – коллеге по кафедре – за сотрудничество и содействие в апробации учебных материалов в студенческой и учительской среде.

Глава 1
УЧЕНИЕ О ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМАХ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

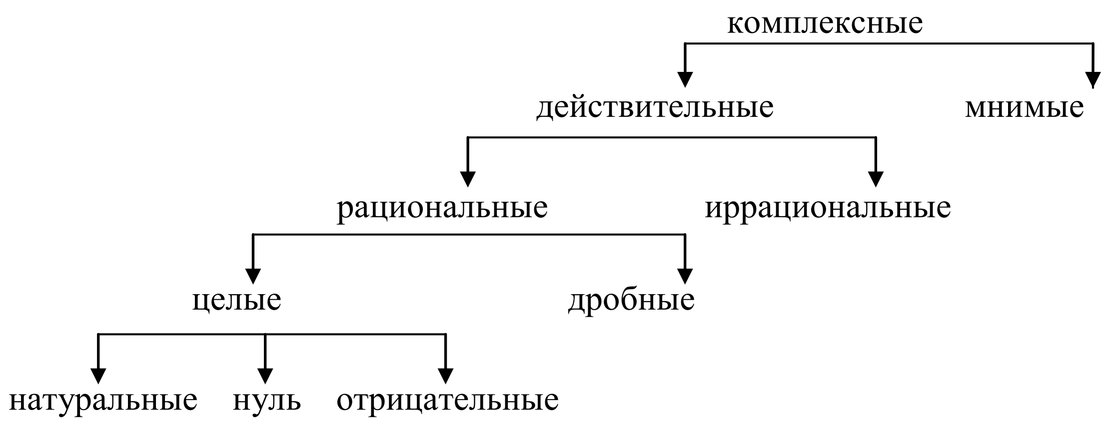
1.1. „Числа и вычисления" как одна из основных содержательно-методических линий образовательной области „Математика"

Числовая линия, в школьной программе именуемая „Числа и вычисления", – первая сквозная содержательно-методическая линия в курсе математики, изучаемая в той или иной степени на протяжении всех лет обучения: с 1-го по 11-й класс. Это обосновывается ролью числа, как фундаментального понятия современной математики и важнейшего средства, с помощью которого человек познает количественные отношения реального мира. Понятие числа постепенно по мере роста сознания учащихся от класса к классу не только обогащается и расширяется по содержанию, включая все новые и новые виды чисел, но и качественно приобретает новые черты и структурные особенности, поднимаясь на все более высокий уровень обобщения и абстракции, логической завершенности. При этом происходит математическое развитие учащихся, ознакомление их с законами развития математических идей и связями математики с потребностями практики, формирования и развития вычислительной культуры, укрепление внутрипредметных и межпредметных связей.

Зародившись в глубокой древности, понятие числа развивалось медленно и трудно, в мучительных поисках смысла различных их видов, обосновании правил оперирования все новыми и новыми числами. Практическая деятельность человека, с одной стороны, и внутренние потребности математики – с другой, определили возникновение и развитие понятия числа. Накопленные сведения о числах и действиях над ними оформились как математические теории лишь во второй половине XIX в. В связи с развитием аксиоматического метода появилась специальная наука „Теория чисел", а позднее „Числовые системы".

Числовая линия относится к арифметико-алгебраическому материалу. По-гречески число – арифмос. Соответствующий раздел математики так и называется – арифметика (учение о числах, их свойствах и действиях над ними). В стандарте основного общего образования по математике в разделе „Арифметика” перечислены все числовые множества, включая действительные числа, а в стандарте среднего (полного) общего образования на профильном уровне (2004 г.) в разделе „Числовые и буквенные выражения” – комплексные числа. Таким образом, на профильном уровне учению о числе придается более логически законченный вид. Расширение множества комплексных чисел уже невозможно без отказа от каких-либо обычных свойств чисел. Числовая линия объединяет все школьные математические предметы: в алгебре с опорой на понятие числа вводятся действия над буквами (буквы обозначают неизвестные числа, они упрощают запись законов и свойств арифметических действий, формул, решения задач и т.д.), числам дается геометрическая интерпретация, введение координатного метода не что иное как „арифметизация” геометрии, теория измерения базируется на арифметике действительных чисел и др. Учение о числе является важнейшей частью школьной алгебры, геометрии и начал анализа. Числовая линия чередуется, переплетается и взаимодействует с другими содержательно-методическими линиями на протяжении всех лет обучения математике. Распределение числового материала на достаточно длительный срок изучения с учетом возрастных особенностей учащихся создает более благоприятные условия для прочного и более глубокого овладения им. Постепенно повышается удельный вес теории и совершенствуется техника вычислений при использовании различных видов чисел для решения практических задач.

Изучаемые в школьном курсе математики числа можно представить в виде следующей классификации:



Задания для самостоятельной работы

- Сформулируйте основные этапы исторического развития понятия числа и трудности на этом пути, используя краткие исторические экскурсы из школьных учебников и более обстоятельные повествования в книгах Г. И. Глейзера (История математики в школе: 4 – 6 кл. (1981), 7 – 8 кл. (1982), 9 – 10 кл. (1983)). Каковы возможности использования исторических сведений о развитии понятия числа на уроках математики и во внеурочной работе с учащимися?
- Установите с помощью стандарта (2004 г.) и примерной программы (2011 г.) обязательный минимум содержания учебного материала числовой линии по 5 – 9-м классам и 10-м, 11-м классам (базовый и профильный уровни).
- Ответьте на вопрос: „Какие множества чисел изучаются в математике в 1 – 4-м и 5-м, 6-м классах, в алгебре 7 – 9-го классов, в алгебре и началах анализа 10-х, 11-х классов?”
- Проиллюстрируйте примерами ответ на вопрос: „В каких школьных предметах (кроме математики) в большей степени необходимы вычислительные навыки?”
- Приведите примеры использования знаний и умений учащихся из числовой линии при изучении функционального материала.
- Подтвердите значимость возникновения понятия числа для всего человечества высказываниями математиков, писателей, философов, используя книгу М. М. Лимана (Школьникам о математике и математиках. М., 1981). Например, академик Н. Н. Лузин говорил, что математика возникла вместе с числом и с идеи числа начиналась история величайшей из наук.

1.2. Общие теоретические и методические основы изучения числовых систем

Понятие числа является неопределяемым в математике. Это означает, что невозможна постановка вопроса „Что называется числом?” на любом уровне (в теории, школьном обучении). Иначе решается вопрос с введением конкретных числовых множеств. В теоретических курсах все они строго определяются с учетом принятого способа построения. Так, например, первое числовое множество – натуральные числа – может быть построено либо аксиоматически (на основе аксиом Дж. Пеано), либо конструктивно (на основе интуитивной теории множеств Г. Кантора) как мощности (численности) непустых конечных множеств. Натуральные числа являются фундаментом, на котором строятся все другие числовые множества. С помощью натуральных чисел последовательно определяются целые, рациональные, действительные и комплексные числа. Каждое из названных числовых множеств содержит предыдущее, то есть является его расширением. Существуют кроме аксиоматического еще конструктивные подходы к построению теории действительного числа: по Кантору (построение фундаментальной последовательности рациональных чисел), по Вейерштрассу (представление действительного числа в виде бесконечной десятичной дроби), по Дедекинду (построение сечения на множестве рациональных чисел). В каждом числовом множестве определены его элементы, отношения для них и операции с определенными свойствами.

Дедуктивные теории построения числовых множеств „в чистом виде" не могут быть применены в школьном обучении. Тем не менее идейные основы сохраняются и здесь при изложении материала в учебниках с учетом возрастных возможностей учащихся.

В чем же состоит идея „расширения (развития) числовых множеств"? В ее основу положен принцип перманентности (непрерывного продолжения), который предполагает выполнение четырех условий, известных из курса „Числовые системы". Если исходное множество X расширяется до множества Y, то должно быть: 1) $X \subset Y$; 2) все операции, выполняемые в X, определяются и в Y так, что не противоречат прежним правилам; 3) в Y выполнима операция, которая была невыполнима или не всегда выполнима в X; 4) Y минимальное расширение X, причем определяется X однозначно (с точностью до изоморфизма). Сформулированные условия можно прокомментировать так: третье является целевым, ради него и строится расширение; второе – можно выразить согласованностью действий и требованием „не переучивать"; четвертое – указывает на постепенность при обобщении понятия числа.

Существуют различные способы расширения множества X до множества Y: 1) можно построить Y независимое от X, а затем некоторое его подмножество отождествить с X (устанавливается изоморфизм); 2) X можно дополнить новыми числами – $\overline{X}$ и в результате получить Y: $Y = X \cup \overline{X}$, где Y – новое расширенное множество, X – исходное, расширяемое множество.

С методической точки зрения второй способ расширения X до Y представляется более разумным, и он реализуется во всех действующих школьных учебниках. Первый способ использовался в учебниках алгебры А. П. Киселева, и у учеников первоначально создавалось впечатление, что отрицательные и положительные числа являются не связанными друг с другом числовыми множествами.

Возможны различные пути (схемы) осуществления последовательного расширения понятия числа:

1) $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$ (логический, научный);

2) $N_0 \subset Q^+ \subset Q \subset R \subset C$ (исторический).

Естественно, первый путь в научном плане предпочтительнее, он применяется в современной математике (предполагается более раннее введение отрицательного числа). Второй путь хотя и уступает в логической стройности первому, но заслуживает предпочтения для школы из методических соображений: соблюдение принципа историзма (дроби возникли значительно раньше отрицательных чисел) и доступности учебного материала (дроби легче усваиваются в этом возрасте). Попытка реализации первого пути в школьном обучении под руководством психологов (Л. В. Занкова, В. В. Давыдова) оказалась несостоятельной (60-е гг. XX в.), но эксперименты продолжаются по введению в школьное обучение научного пути обобщения и развития числа.

В школьной практике исторический подход также имеет разночтения в различных учебниках. Это касается возможного изучения (совместного, последовательного, в каком порядке) обыкновенных и десятичных дробей, положительных и отрицательных дробей, целых и дробных отрицательных чисел и других вопросов. Во всех учебниках математики 5-х, 6-х классов построено множество рациональных чисел, а в „Арифметике" С. М. Никольского и других и множество действительных чисел. Изучение отдельных числовых множеств имеет концентрический характер (обращение к старому множеству при изучении нового, например, при рассмотрении различных форм записи чисел). Вопрос о наиболее рациональной последовательности изучения числовых множеств далеко не бесспорный, в решении его проявляется диалектическое противоречие логического и исторического. Сейчас сложился приоритет за историческим подходом, обоснованный опорой на многовековой опыт человечества. Все единодушны в одном – начинать надо с натуральных чисел. Общепризнано в методике обучения, что первым расширением понятия числа является присоединение нуля к множеству натуральных чисел, тем самым будет построено множество целых неотрицательных чисел. В математике существует точка зрения, что нуль является натуральным числом, и тогда ставится под сомнение вопрос о расширении числового множества в этом случае. Ее разделяет методист-математик Г. В. Дорофеев. Мы будем придерживаться утверждения, что нуль не является натуральным числом, как того и требует действующая школьная программа по математике, и будем считать, что первое расширение числа происходит в начальной школе.

Для школьного обучения важно, чтобы учащиеся осознали число как основной объект математики, идею расширения числовых множеств и уяснили необходимость введения новых чисел как для внутренних потребностей математики (выполнимость арифметических действий), так и для обеспечения нужд практики, жизни людей (решение практических, жизненных задач). Последнее достигается сначала предъявлением учащимся доступных для понимания, но неразрешимых задач в известном множестве чисел. Тем самым показывается, что и сама математика развивает и совершенствует свой аппарат под влиянием потребностей практики. Педагог А. А. Столяр предложил такую схему обучения: от потребностей практики в разрешимости задач – к потребностям математики в выполнимости действий и от этих последних – к новым числам, вооружающим математику средством для удовлетворения потребностей практики.

Изучение каждого числового множества имеет свои учебные цели, которые зависят от содержания изучаемого материала и возрастных особенностей учащихся. Общую же учебную цель можно сформулировать так: формирование у учащихся знаний о числах и действиях с ними, вычислительных умений, уверенного их использования для решения практических задач, вычислительной и алгоритмической культуры.

Изучение любого числового множества идет по единому плану:

1) необходимость новых чисел (мотивировка);

2) введение новых чисел (название, определение (если оно дается), чтение и запись, геометрическое изображение);

3) сравнение чисел (введение и способы осуществления);

4) действия над числами (введение, смысл, выполнимость, определение (если оно дается), суть алгоритма и его обоснование);

5) законы и свойства действий, специальные случаи действий;

6) текстовые задачи, решаемые с помощью действий, законов и свойств;

7) использование таблиц и калькулятора в вычислениях;

8) упражнения на все действия над числами;

9) обобщение понятия числа, выяснение структуры нового числового множества и соотношения его с ранее изученными;

10) исторические сведения.

В практике обучения пункты этого плана раскрываются с различной степенью детализации в соответствии с программой по математике для конкретных числовых множеств. Учителю следует иметь это в виду, чтобы не перегружать учащихся информацией. Основное внимание необходимо уделить выработке вычислительных умений и навыков в устной и письменной форме, используя различные виды упражнений и задач, в том числе практической направленности. При продумывании методики изучения очередного числового множества следует предусмотреть: воспроизведение наиболее принципиальных теоретических сведений об исходном множестве и выяснение степени владения техникой вычислений в целях создания опоры для построения нового; разумное сочетание индуктивного и дедуктивного методов изучения материала; соблюдение принципа преемственности; стремление к наглядности с помощью рисунков, схем, таблиц, геометрических образов; организацию разнообразной самостоятельной деятельности учащихся, в том числе обучающего характера; обеспечение возможностей для уровневой дифференциации и др.

Задания для самостоятельной работы

- Ознакомьтесь с научными теориями построения различных числовых множеств, используя вузовские учебники („Алгебра и теория чисел", „Числовые системы").
- Охарактеризуйте порядковые и алгебраические структурные особенности различных числовых множеств, зная, что числовое множество может быть конечным или бесконечным, упорядоченным, дискретным, непрерывным, плотным или неплотным, симметричным или несимметричным, иметь первый (последний) элемент или не иметь его, замкнутым относительно операций или не замкнутым, обладать групповыми свойствами (кольца, поля, тела) или не обладать ими.

• Скопируйте таблицу, отражающую этапность расширения понятия числа, и заполните ее:

Исходное числовое множество	Причина расширения исходного множества	Присоединяемое множество	Расширенное числовое множество
1	2	3	4

В первой графе выделите следующие числовые множества: N, N_0, Z, Q, R.

• Охарактеризуйте возможные последовательности расширения понятия числа в различных учебниках для 5-х, 6-х классов. Какой из вариантов наиболее рационален и почему?

• Проанализируйте достоинства и недостатки различных вариантов последовательности изучения обыкновенных и десятичных дробей, раннего изучения отрицательных чисел (сразу после N_0).

• Перечислите признаки, характеризующие достаточно высокий уровень вычислительной культуры [13, с. 78 – 79].

• В программе по математике [19, 20] отыщите учебные цели для каждого изучаемого числового множества.

• Законспектируйте основные учебные задачи из учебника Н. Б. Истоминой для 5-го класса, нацеленные на повторение знаний и умений учащихся, из раздела: „Проверь себя! Чему ты научился в начальной школе?”

Глава 2
МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ЧИСЕЛ

Рассмотрим основные вопросы методики изучения конкретных числовых множеств в соответствии с планом, предложенным в 1.2. Отдельные вопросы будут раскрыты подробно, а другие – вынесены на самостоятельную работу.

2.1. Натуральные числа и нуль

Натуральные числа и нуль (множество целых неотрицательных чисел) изучаются на протяжении всех четырех лет начального обучения и составляют основу курса математики. Программа предусматривает постепенное расширение области рассматриваемых чисел. В связи с этим выделяется пять концентров (разделов): числа от 1 до 10 и 0, от 0 до 20, от 0 до 100, от 0 до 1000, большие 1000. В первом концентре десять натуральных чисел дополняются числом „нуль”, которое уже становится равноправным с другими при выполнении действий. Концентризм в изучении числового множества позволяет неоднократно возвращаться к основным вопросам и тем самым совершенствовать знания и умения учащихся. Основное внимание уделяется чтению, записи и сравнению чисел до одного миллиона, выработке умений безошибочно выполнять четыре арифметических действия над многозначными числами (умножать и делить на однозначное, двузначное и трехзначное числа) и вычислять значения числовых выражений (из 3 – 4 действий со скобками и без них), оперировать числами при решении задач арифметическим способом (в 1 – 4 действия). В основе формирования понятия числа лежит счет предметов и измерение величин (масса, время, скорость, длина, площадь и др.), так как величина определяется числом, выраженным в единицах измерения. Числа выступают объектами для выполнения действий при решении задач. В итоге идея натурального числа еще не полностью раскрыта; учащиеся не получили необходимое представление о натуральном ряде чисел, они ограничены конечной частью (отрезком) его, хотя и довольно-таки большой; сам термин „натуральные числа” не введен (речь идет о числах, которые используются для счета). Поэтому предстоит дальнейшая работа по формированию понятия о множестве целых неотрицательных чисел в 5-м, 6-м классах.

В 5-х, 6-х классах продолжается изучение арифметики натуральных чисел и нуля. Основное внимание концентрируется на четырех числовых вопросах: нумерация многозначных чисел, система действий, законы действий, делимость чисел. Основные общие цели: 1) систематизировать, обобщить и расширить знания учащихся о натуральных числах с привлечением буквенной символики (для записи действий, законов, свойств, формул и др.) и геометрического материала (координатный луч, фигуры для счета и измерений длин, площадей, объемов, углов и др.); 2) совершенствовать вычислительные умения и навыки (не прибегая к громоздким вычислениям) с применением алгоритмов, приемы прикидки и оценки результата (устные и письменные вычисления); 3) углубить умение решать текстовые задачи арифметическим способом и познакомить с алгебраическим способом. Сформулированные цели реализуются при изучении всех вышеназванных вопросов, которые в большинстве учебников из Федерального списка полностью изложены в 5-м классе и позволяют во всей полноте на данном этапе обучения рассмотреть натуральные числа.

Вопросу нумерации уделено было большое внимание в начальных классах, поэтому в 5-м классе на первых уроках осуществляется повторение материала через систему упражнений, сопровождающееся некоторыми обобщениями, которые формулируются учащимися как выводы.

Напомним отдельные положения нумерации многозначных чисел, которые позволяют называть и обозначать числа, узнавать их свойства и выполнять над ними действия. Способ записи и чтения чисел называется нумерацией или системой счисления. Различают позиционные и непозиционные системы счисления. Преимущества первой системы показываются на примере сопоставления ее с римской нумерацией, которая не является позиционной. Натуральные числа записываются в позиционной системе счисления с помощью десяти символов (знаков) – арабских цифр (аналогия с русским языком: слова – 33 буквы), причем значение числа зависит не только от того, какими цифрами оно записано, но и от того, на каком месте стоит каждая из его цифр, т.е. от ее позиции (система поэтому и называется поместной, или позиционной); место, на котором стоит цифра в записи числа, называют еще разрядом числа; счет в этой системе идет десятками, сотнями (это 10 десятков), тысячами (10 сотен) и т.д., поэтому она называется десятичной; числа 1, 10, 100, 1000, ... называют разрядными единицами (отношение соседних разрядов равно 10); каждые три последовательных разряда, начиная с разряда единиц, объединяются в классы; отсутствие в числе единиц какого-нибудь разряда обозначается цифрой 0; чтение и запись многозначного числа начинается с высшего класса; в десятичной и позиционной системе можно записать любое число, как бы велико оно ни было; каждое число можно записать в виде суммы разрядных слагаемых (чисел): $2534 = 2000 + 500 + 30 + 4 = 2 \cdot 1000 + 5 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 4$. Все выводы хорошо должны быть усвоены учащимися наряду с такими понятиями, как число, цифра, разряд, класс, разрядные единицы, разрядные десятки, разрядные сотни, разрядные слагаемые. Больше внимания надо уделить таблице разрядов и классов с дополнением ее классами миллионов, миллиардов, триллионов, даже если последний не обозначен в учебнике. Для любознательных можно сообщить и другие классы, которые в практической жизни встречаются редко. Американский математик Кастнер изобрел самое „большое" число и назвал его гугол – 10^{100} (это граница исчисляемого мира). Учащиеся должны уметь читать и записывать большие числа, включая несколько триллионов (они сейчас часто употребляются в газетах), иметь представление о „величине" чисел (например, книга в один миллиард страниц имела бы толщину более 40 км).

При повторении нумерации впервые вводится понятие „натуральные числа" без определения, выясняется их назначение: для счета предметов (ответ на вопрос: „Сколько?") и установления порядка элементов в множестве (ответ на вопрос: „Который?") – ответ выражается количественным или порядковым числительным (количественная и порядковая характеристика числа тесно связаны); встречаются при измерении величин, но только тогда, когда единица измерения (мерка) укладывается в измеряемой величине целое число раз (число как результат измерения величин). При измерении величина получает определенное числовое значение (число) с указанием соответствующего наименования – выбранной единицы измерения, поэтому в методике начального обучения долгое время существовал термин „именованные числа" (числа с именем). Натуральные числа называют „природными", естественными, их название соответствует происхождению из человеческой практики (nature – по латыни „природа"). Число нуль не является натуральным, так как считать предметы не начинают с нуля. В учебнике С. М. Никольского вводится еще термин „целые неотрицательные числа" – это натуральные числа и нуль. Возможно это преждевременно и никак не оправдано.

Полезно записать с учащимися начало натурального ряда чисел и рассмотреть его свойства: 1) начинается с числа 1; 2) каждое следующее число на 1 больше предыдущего; 3) последнего числа нет (бесконечен). Можно говорить о свойстве дискретности множества натуральных чисел (для каждого числа существует непосредственно следующее за ним число), а также об ограниченности сверху множества.

Весьма важно здесь же начать реализацию идеи геометрического изображения чисел. Натуральные числа отмечаются точками на координатном луче, при этом сами числа получают название координат точек (число – координата точки). Введение координатного луча (или сразу координатной прямой) принято в большинстве учебников и используется как наглядное средство для сравнения чисел, а затем для их сложения и вычитания. Необходимо обратить внимание учащихся, что числу 0 соответствует начало луча (точка отсчета), числу 1 соответствует точка, удаленная от начала луча на расстоянии, равном единице длины (единичный отрезок), и т.д. Полезно обратить внимание учеников на факт: любому натуральному числу (а также числу 0) соответствует одна определенная точка координатного луча.

При введении новых чисел всегда возникает проблема с их сравнением. Универсальным для всех видов положительных чисел является тот факт, что большей величине соответствует большее число и наоборот. Количественная характеристика числа находит выражение в понятиях „больше", „меньше", „равно". В учебниках предлагаются различные способы сравнения двух натуральных чисел: с помощью натурального ряда чисел, по их десятичной записи, с помощью координатного луча, с привлечением привычного счета. Достаточно четко учащиеся должны усвоить, что для любых двух различных чисел возможно только одно отношение – либо первое больше второго, либо второе больше первого. Предлагать сравнение с нулем. Результат учащиеся должны уметь записать в виде неравенства с помощью соответствующих знаков сравнения. Полезны упражнения на запись ряда чисел в порядке возрастания или убывания, проверки правильности поставки знаков сравнения (=, >, <) между числовыми выражениями, на сравнение величин; на координатном луче следует отметить все числа, лежащие между двумя данными, объяснить, по какому правилу записан ряд чисел. Можно говорить об упорядоченности множества натуральных чисел (о любых двух неравных числах можно сказать, что одно меньше другого).

Теперь перейдем ко второму вопросу − системе действий над числами, которому была посвящена значительная часть курса начальной математики. Учителю важно соблюдать основное дидактическое требование: не объяснять как новое то, что уже известно учащимся, а всячески стимулировать их самостоятельное воспроизведение через систему упражнений. Учащиеся, повторяя изученный материал, должны четко осознать смысл четырех арифметических действий, их взаимосвязь, взаимосвязь компонентов, свойства этих действий, изменение результата действия в зависимости от изменения компонентов, выполнимость действий, увеличение (уменьшение) на столько-то единиц, увеличение (уменьшение) во столько-то раз. При этом число выступает как объект вычислений.

В действующих учебниках предлагается различный порядок рассмотрения действий. В одних сохраняется существующее в начальной школе последовательное изучение действий, в других – совместное изучение прямых и обратных действий с учетом достаточного опыта выполнения этих действий учащимися и возможности лучше уяснить их взаимосвязь. В 5-м классе новым для учащихся будет понятие „степень числа” с вычислением значений выражений, содержащих квадраты и кубы чисел, используемые в формулах площадей квадрата и объема куба. Это понятие вводится в пропедевтическом плане.

В учебниках существует единство во взгляде на определение действий. Для сложения (суммы) определения не дается. Для остальных трех действий даются приемлемые для учащихся 5-го класса конструктивные определения, причем для обратных действий они пригодны для любых числовых множеств. Умножение на натуральное число, большее 1, принято определять как сложение нескольких одинаковых слагаемых. Умножение на 1 и на 0 должно быть специально обговорено (число нельзя брать слагаемым один или нуль раз). Определения вычитания и деления формулируются аналогично, поэтому можно использовать „двухэтажную” запись.

Действие, с помощью которого по $\frac{\textit{сумме}}{\textit{произведению}}$ и одному из $\frac{\textit{слагаемых}}{\textit{множителей}}$ находят $\frac{\textit{другое слагаемое}}{\textit{другой множитель}}$, называют $\frac{\textit{вычитанием}}{\textit{делением}}$.

Сходство формулировок облегчит учащимся их запоминание и усвоение; определения содержат в себе указание на способ проверки результата действий. Следует подчеркнуть, что действия совершаются над двумя числами, сложение и умножение нескольких чисел надо обговорить специально. Практика показывает, что все приведенные определения посильны для пятиклассников. Необходимо предлагать упражнения для усвоения их: „Объясните, что значит умножить 12 на 6?”, „Объясните, что значит разделить 36 на 12?” и т.д.

Введение каждого из четырех действий необходимо осуществлять на простых задачах (в одно действие), причем еще до вычислений ставить вопросы: „Каким действием будет решаться задача?”, „Каковы признаки этой задачи?”. Полезно предложить ученикам самим привести задачи, решаемые этим действием. Одновременно проверяется понимание смысла используемых терминов. Учащиеся должны правильно использовать терминологию – названия компонентов и результата действий. Удобно пользоваться табл. 2.1.

Таблица 2.1

Действия	Запись буквами	Компоненты действия		Результат
		a	b	c
Сложение	a + b = c	1-е слагаемое	2-е слагаемое	Сумма
Вычитание	a – b = c	Уменьшаемое	Вычитаемое	Разность
Умножение	a · b = c	1-й множитель	2-й множитель	Произведение
Деление	a : b = c	Делимое	Делитель	Частное

Параллельно с изучением действий над натуральными числами нужно рассматривать и действия с нулем. Объяснить ученикам, почему нельзя делить на нуль. Это можно сделать на частном примере: требуется разделить 6 на 0. Это значит, что нужно найти такое число x, которое, будучи умноженным на 0, дало бы 6. Но такого числа нет, т.к. всегда, умножив на 0, мы получим 0. Значение частного в этом случае не существует. Все рассуждения остаются в силе, если вместо 6 взять любое другое отличное от нуля число.

При делении нуля на нуль можно было бы считать, что $0 : 0 = x$, потому что $x \cdot 0 = 0$. Но в этом случае частным могло бы быть любое число. Поэтому говорят, что в этом случае значение частного не определено, а деление 0 на 0 бессмысленно. Отсюда делаем общий вывод: никакое число не может быть разделено на нуль.

Через систему упражнений учащиеся формулируют правила об изменении результата действия в зависимости от изменения компонентов, учатся применять их для вычислений. При этом учащиеся сначала анализируют предложенные выражения, выявляют закономерности, а затем делают обобщения в виде правил. Здесь же повторяют известные учащимся правила нахождения неизвестных компонентов. Но это не простое повторение, ибо соответствующие правила получаются уже строго логически из принятых определений действий. Тем самым учащиеся приучаются к логическому обоснованию выводов. Правила сразу же используются для решения простейших линейных уравнений, которые способствуют осмыслению зависимостей между компонентами и результатом действий. Этим способом уравнения решались и в начальных классах. Если ученик забыл правило, ему нужно предложить пример с числами в пределах 10, и он вспомнит его с помощью этой „модели”.

Особое внимание должно быть уделено безошибочному выполнению действий над многозначными числами. Не во всех учебниках повторяются разъяснения алгоритмов письменного выполнения действий. Считается, что они должны быть прочно усвоены учащимися еще в начальных классах. Однако не все учащиеся правильно выполняют действия в трудных случаях (с нулем в середине или в конце множителей, когда уменьшаемое имеет несколько нулей подряд, когда делитель оканчивается нулями, когда в частном должны быть поставлены нули в середине или в конце и др.). Поэтому нужно добиваться осознанного применения операций, входящих в тот или иной алгоритм. Проконтролировать правильность процесса получения ответа можно с помощью приема комментирования, когда учащийся вслух проговаривает все операции, которые он выполняет; этот прием позволяет сразу же внести коррективы в деятельность школьника по применению алгоритма. Например, для случая 8463 : 7 появление нуля в частном обычно комментируется так: „6 на 7 не делится – ставим нуль”. Кроме того приучать учеников к самоконтролю: проверять результаты вычислений с помощью обратной операции, приемов прикидки (определение высшего разряда результата, оценка результата „снизу” или „сверху”) и др. Лучше понять алгоритм выполнения действия помогут упражнения на восстановление цифр, замененных звездочками („арифметические ребусы”). После изучения законов действий необходимо дать обоснование письменного сложения, вычитания и умножения столбиком. При подведении итогов изучения этого вопроса рассматриваются упражнения на все действия (с использованием скобок) и выяснением порядка их выполнения. Необходимо обращать внимание на грамотную запись решения, особенно „цепочкой”, умело использовать устные вычисления, где это возможно. Учащиеся должны помнить, что всякое нарушение порядка действий может привести к вычислительной ошибке. Каждое выражение задает программу своего вычисления, ее надо определить и ей строго следовать. В ряде учебников программа вычислений изображается в виде схемы, состоящей из нескольких команд. Такие упражнения очень полезны для изучения структуры выражений и уяснения порядка действий в вычислениях.

В конечном итоге учащиеся должны четко осознать основной общий смысл четырех действий над числами: по двум данным числам находим третье число ($a \pm b = c$, $a \cdot b = c$, $a : b = c$), которое находится по-разному алгоритму, присущему только ему. При этом важно обратить внимание на их выполнимость, отметив, что при сложении и умножении всегда существует результат и он единственен. Иначе говоря, можно говорить о замкнутости множества натуральных чисел относительно этих двух действий. Вычитание возможно, когда уменьшаемое больше или равно вычитаемому ($a \geq b$). Деление также не всегда возможно нацело. Поэтому в 5-м классе повторяется деление с остатком. Смысл его можно рассмотреть на конкретной задаче: бабушка дала 15 конфет 4 внукам и предложила разделить их поровну, запретив разрезать конфеты на части. Сколько конфет достанется каждому внуку? Получаем деление с остатком числа 15 на 4 и результат записывают в таком виде: $15 : 4 = 3$ (остаток 3) или иначе – равенством: $15 = 4 \cdot 3 + 3$. При делении с остатком отыскивается не одно число – частное, а два – частное (именуемое неполным частным) и остаток, причем остаток всегда меньше делителя. Кроме того, деление с остатком во множестве натуральных чисел выполнимо всегда. Можно записать и общую формулу: $a = bc + r$, $(r < b)$, показывающую взаимосвязь между компонентами, которая доказывается в курсе вузовской математики. Деление с остатком будет использоваться при выделении целой части из неправильной дроби, поэтому в ряде учебников этот пункт помещают в главу „Обыкновенные дроби”.

Следующий вопрос – законы (свойства) арифметических действий, представления о которых сформированы у учащихся еще в начальной школе. В 5-м классе показывается их справедливость методом неполной индукции на достаточном числовом материале. В одних учебниках они сконцентрированы в одном пункте, в других – в нескольких пунктах вместе с действиями сложения и умножения чисел. Переместительный (по латыни – коммутативный), сочетательный (по латыни – ассоциативный), распределительный (по латыни – дистрибутивный) законы остаются справедливыми и для других числовых множеств. Уместна следующая схема их рассмотрения: наблюдение закономерности в практической ситуации (задача, числовые примеры на сравнение, рисунки), обобщение в виде буквенного равенства, словесная формулировка, подтверждение на нескольких примерах, применение к вычислениям. Усвоение законов происходит постепенно при выполнении вычислений как устных, так и письменных. Важно показать применение законов к упрощению числовых и буквенных выражений. Прежде чем упрощать выражение, учащиеся должны определить, какой способ решения наиболее рационален. Знание законов сложения и умножения делает понятными для учащихся алгоритмы действий. В ряде учебников разъясняются действия сложения и умножения столбиком. Например, найти сумму 267+521 можно так:

267 + 521 = (200 + 60 + 7) + (500 + 20 + 1) = (200 + 500) + (60 + 20) + + (7 + 1) = 700 + 80 + 8 = 788. Умножим 275 и 1459. Поступаем так:

$1459 \cdot 275 = 1459 \cdot (200 + 70 + 5) = 1459 \cdot 200 + 1459 \cdot 70 + 1459 \cdot 5$

$$
\begin{array}{rcr}
 & & \times\begin{array}{r}1459\\275\end{array}\\
\cline{3-3}
1459 \cdot 5 = 7295 & \rightarrow & 7295\\
1459 \cdot 70 = 102130 & \rightarrow & 102130\\
1459 \cdot 200 = 291800 & \rightarrow & 291800\\
\cline{1-1}\cline{3-3}
401225 & \rightarrow & 401225
\end{array}
$$

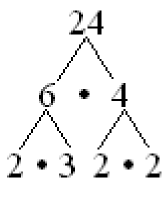
Для вычитания и деления формулируются свойства на основе их определений и законов прямых действий. В школе они устанавливаются на конкретных примерах. Запишем несколько свойств в общем виде: $a + (b - c) = (a + b) - c$, $a + (b - c) = (a - c) + b$, $(a + b) - c = (a - c) + b$, $a - (b + c) = (a - b) - c$, $a \cdot (b : c) = (a \cdot b) : c$, $a : (b : c) = (a : b) \cdot c$, $a : (b \cdot c) = (a : b) : c$. Распределительный закон умножения относительно вычитания справедлив. Для предупреждения вычислительных ошибок полезно на примерах показать ученикам невыполнимость переместительного закона для вычитания и деления, сочетательного закона для деления ($64 : (16 : 4) \neq (64 : 16) : 4$) и распределительного закона ($160 : (8 + 2) \neq 160 : 8 + 160 : 2$). Культура вычислений должна быть постоянно в поле зрения учителя. Обращать внимание учеников на рациональность вычислений, предварительный контроль (прикидка) и последующий контроль (проверка) выполнения действий, рациональное сочетание устных и письменных вычислений, соблюдение аккуратности в записях на доске и в тетрадях согласно вычислительной орфографии и др.

И, наконец, последний вопрос – делимость чисел. Он расширяет знания учащихся о натуральных числах введением новых понятий „делитель” и „кратное”, „простые и составные числа”, „признаки делимости”, „разложение числа на простые множители”, „нахождение наибольшего общего делителя и наименьшего общего кратного” и создает необходимую базу для изучения дробей. В большинстве учебников им завершается изучение множества натуральных чисел в 5-м классе. Но есть сторонники изучения в 6-м классе введения в тему „Обыкновенные дроби”. При этом усиливается мотивация его изучения (сокращение дробей, приведение к наименьшему общему знаменателю и др.). Хотя все перечисленные понятия включены в ГОС (2004 г.), но в тематическом планировании учебного материала к учебникам три последних понятия не относят к числу обязательных. Ознакомление с ними все же будет полезно ученикам, особенно в условиях уровневой дифференциации обучения. Вопрос делимости чисел представляет богатый материал для кружковых занятий, где можно доказать многие теоремы (о делимости суммы и произведения, признаки делимости, о разложении числа на простые множители и др.), познакомить с биографиями ученых-числовиков и т.п. При изучении программного материала на уроках востребован индуктивный метод с использованием несложных доказательных рассуждений, обосновываются выводы ссылками на определение, правило. Учащимся предстоит усвоить много определений, правил, но они не представляют в современной трактовке трудности для них. Усвоение их должно происходить в процессе упражнений. Желательно организовать учебно-познавательную деятельность по „открытию” фактов учащимися с помощью учителя. Новый материал необходимо связать с делением чисел нацело, что даст возможность ученикам лучше усвоить это самое трудное для них действие. Кроме того, эта тема не будет оторванной от ранее изученных, а явится их логическим продолжением. Мы будем выяснять, когда же число a разделится на b нацело (без остатка). Но для этого введем несколько понятий. Мы знаем, что число 15 нацело делится на 3 (15 : 3 = 5). Связь между числами 15 и 3 можно выразить двумя способами: число 3 – делитель числа 15 (это известно), число 15 – кратное числа 3 (это новое). Отсюда легко дать определения: „ Делителем числа a называется число, на которое a делится без остатка”, „ Кратным числу a называется число, которое делится без остатка на a”. Для уяснения предлагается составлять ряды делителей (Д) и кратных (К) для натуральных чисел: Д (15) – 1, 3, 5; К (3) – 3, 9, 12, 15, 18,.. (бесконечно много); Д (1) – 1. После рассмотрения рядов делителей для нескольких чисел можно подвести учеников к определению простого и составного числа, исходя из числа делителей: простое – только два делителя (1 и само число), составное – больше двух делителей. Теперь можно провести классификацию натуральных чисел:

Чтобы доказать, что некоторое число является составным, достаточно найти еще один делитель, отличный от самого числа и единицы. Следует приучать учащихся чаще пользоваться таблицей простых чисел (вывесить в классе).

После этого можно перейти к рассмотрению признаков делимости. Программа и учебники предполагают знакомство с признаками делимости на 2, 3, 5, 9, 10. Полезно рассказать ученикам о важности „признаков” в жизненных, практических и математических ситуациях. Они всегда помогают быстрее решить вопрос. Что касается признаков делимости, то они дают возможность безошибочно угадать, разделится ли данное число на другое или не разделится. Конечно, для выяснения этого всегда можно провести деление „уголком”, но это занятие часто бывает довольно утомительным. Математики придумали специальные приемы для упрощения вычислений – признаки делимости. Под признаками делимости подразумеваются необходимые и достаточные условия делимости одного числа на другое. В школьных учебниках 5 – 6-х классов эти слова не употребляются. В формулировках приводится либо достаточный признак (если число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10), либо прямое и противоположное (если число оканчивается цифрой 0, то оно делится на 10; если число оканчивается другой цифрой, то оно не делится на 10), либо объединенное предложение (число делится на 10 тогда и только тогда, когда цифра единиц – 0). В упражнениях предполагается использование двух условий. Важно обратить внимание учащихся на то, что признаки можно подразделить на две группы в зависимости от проверяемости в данном числе – последней цифры (на 2, 5, 10) или суммы цифр (на 3, 9). Изучение пяти программных признаков надо организовать так, чтобы учащиеся могли „открыть” и другие. Вывод признаков дается на основе разбора конкретных числовых примеров, которые носят общий характер и могут быть логически доказаны в сильном классе. При выводе используется запись числа в виде суммы разрядных слагаемых, свойства делимости суммы и произведения. При выводе признака делимости числа 324 на 9 будет такая запись: $324 = 300 + 20 + 4 = 3(99 + 1) + 2(9 + 1) + 4 = 3 \cdot 99 + 3 + 2 \cdot 9 + 2 + 4 =$ $= (3 \cdot 99 + 2 \cdot 9) + (3 + 2 + 4) = (3 \cdot 99 + 2 \cdot 9) + 9 \vdots 9$ (запись $a \vdots b$ часто используется вместо фразы: „a делится нацело на b”).

С признаками делимости тесно связан вопрос о представлении (разложении) числа в виде произведения простых множителей. Термин „разложение числа на простые множители” употребляется в двух смыслах: это и процесс представления числа в виде произведения простых множителей или произведения степеней с простыми основаниями, и само произведение простых чисел или степеней. В теоретическом плане основным содержанием является теорема о единственности разложения числа на простые множители, которая разъясняется на конкретном примере. Главное внимание должно быть уделено технике выполнения разложения. Начинать при этом необходимо с небольших чисел. Рассуждения можно вести устно и письменно. Оформить поиск простых множителей можно с помощью схемы (графа), строки, вертикальной черты. Окончательная запись разложения делается строкой в виде произведения простых чисел или их степеней. Примеры поисковых записей:



$$\begin{array}{r|l} 24 & 2 \\ 12 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$$24 = 6 \cdot 4 = 2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2$$

Примеры ответа: $24 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3$ или $24 = 2^3 \cdot 3$. Как правило, числа записывают в порядке возрастания. При разложении наибольших чисел на простые множители учащиеся должны обращаться к известным им признакам делимости, а в трудных случаях (437, 667, 887, 997 и др.) – к таблице простых чисел, чтобы экономить время на испытания.

Научившись разлагать числа на простые множители, можно перейти к изучению понятий: „общий делитель” (ОД), „общее кратное” (ОК), „наибольший общий делитель” (НОД), „наименьшее общее кратное” (НОК) нескольких чисел и сформулировать алгоритмы (правила) их нахождения. В ряде учебников даются строгие определения понятиям, но возможно ограничиться только их смыслом. Для этого можно использовать задачи из учебника. Не надо требовать заучивать правила нахождения НОД и НОК. Учащиеся должны усвоить саму процедуру и сознательно использовать ее, выделяя общие моменты (этапы): разложить данные числа на простые множители ($12 = 2\cdot2\cdot3$ и $18 = 2\cdot3\cdot3$); в разложениях подчеркнуть (или выписать) все их общие множители / из одного разложения взять все множители и к ним добавить недостающие от других чисел ($12 = \underline{2}\cdot2\cdot\underline{3}$ и $18 = \underline{2}\cdot\underline{3}\cdot3$ / 2,2,3 и 3); найти произведение получившихся множителей ($2\cdot3 = 6 =$ $=$ НОД(12, 18) / $2\cdot2\cdot3\cdot3 = 36 =$ НОК(12, 18)). Если через степени, то для нахождения НОД множители надо взять с наименьшим показателем, а для НОК – с наивысшим: НОД(12, 18) $= 2^1\cdot3^1$, НОК(12, 18) $= 2^2\cdot3^2$. Если НОД(a, b) = 1, то числа называются взаимно простыми.

Задания для самостоятельной работы

- Ознакомьтесь с основными требованиями к уровню подготовки ученика начальной школы, которые обеспечивают преемственную связь с курсом математики в 5-м классе, по сборнику: „Программы общеобразовательных учреждений : Начальные классы (1 – 4), часть I” (М.: Просвещение, 2002, С. 230 – 308).
- Охарактеризуйте основные вопросы методики изучения натуральных чисел, используя один из пяти вариантов программы по математике для начальных классов.
- Познакомьтесь с одним из одиннадцати комплектов учебников по математике для 1 – 4-го кл. из Федерального списка. Выпишите основные разделы (темы) по классам.
- Проследите по учебникам математики, как осуществляется ознакомление учащихся начальной школы с действиями над натуральными числами. Какова методика разъяснения логического смысла действий и алгоритмов выполнения их над многозначными числами?
- Расскажите, о каких еще позиционных системах счисления учащиеся могут прочесть в учебниках?

- Найдите в учебниках упражнения, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают:

а) разрядный и классовый состав многозначных чисел;

б) их десятичный состав;

в) соотношения между разрядами;

г) запись числа в виде суммы разрядных слагаемых;

д) представление о больших числах („числах великанах”);

е) различные формы записи чисел (словесная, цифровая, смешанная).

- Определите, нет ли ошибки в названии книги „Москва в цифрах” с точки зрения математики?
- Опишите методику работы с таблицей разрядов и классов чисел на уроке, последовательно вписывая в нее разнообразные многозначные числа с отсутствием некоторых разрядов и даже целых классов.
- Проанализируйте роль нуля как цифры и как числа. Подкрепите выводы упражнениями из учебников.
- Обоснуйте, можно ли считать определением следующее предложение, которое встречается в ряде учебников: „Числа, которые используются при подсчете предметов, называют натуральными числами”? Следует ли требовать от учеников запоминать эту формулировку?
- Приведите примеры упражнений на осознание связи между количественной и порядковой характеристикой числа.
- Найдите в учебниках упражнения, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают свойства натурального ряда чисел.
- Ответьте на вопрос: „В каких учебниках вводится понятие натурального ряда чисел (ряда натуральных чисел)?”
- Расскажите, как подвести учащихся к правилам сравнения многозначных чисел по их десятичной записи? Как целесообразнее записывать числа для удобства их сравнения в этом случае?
- Изложите суть геометрической иллюстрации понятий „большее число” и „меньшее число”. Как используется она при сравнении чисел?
- Ответьте на вопрос: „Что означает запись: $a > b$, $b < a$, $a > 0$, $a < b < c$, $AB = CD$, $a = b$?” Последняя запись означает, что a и b одно и то же число.

- Используя учебник-собеседник (5-й класс), выпишите основные типы (схемы) задач, решаемых определенным действием (сложением, вычитанием, умножением и делением), которые приводятся в объяснительных текстах к урокам, начинающимся одинаково: „Какие задачи решаются…”. Какова методика работы с этими простыми задачами на уроке?
- В учебниках найдите сложные текстовые задачи, решаемые арифметическим способом с использованием четырех действий. Какова методика работы с этими задачами?
- Найдите в учебниках упражнения, в процессе выполнения которых учащиеся усваивают:
  - свойство чисел 0 и 1 быть нейтральным элементом;
  - частные случаи выполнения действий;
  - алгоритмы выполнения четырех действий;
  - способы и варианты проверки выполнимости действий.
- Найдите в различных учебниках объяснительный текст с алгоритмами выполнения действий. В каком из них больше внимания уделено самой процедуре выполнения?
- Найдите в учебниках вычислительные упражнения, которые вызывают затруднения у учащихся при их выполнении. Какова причина появления ошибочных результатов?
- Найдите упражнения на выяснение изменения результата действия в зависимости от изменения компонентов. Какова методика работы с подобными заданиями?
- Приведите примеры текстовых задач, требующих понимания смысла отношений „больше на…(в…)”, „меньше на…(в…)”.
- Выпишите основные типы уравнений, решаемых в теме „Натуральные числа и нуль”, и укажите правила их решения.
- Ознакомьтесь с основными вопросами методики изучения натуральных чисел и нуля по книге Н. Б. Истоминой (Методика обучения математике в начальных классах : учеб. пособие для студентов. М. : Академия, 2002).
- Укажите теоретические факты (правила, определения), которые учащиеся должны запомнить. Сравните число их в различных учебниках по изучаемому вопросу.
- Предложите исторический материал для использования его на уроках?

- Приведите примеры упражнений (задач), способствующих развитию интереса к изучаемому вопросу.
- Найдите в различных учебниках страницы, где учащимся предлагается изучить соответствующие законы действий. Проанализируйте методику изложения материала.
- Сравните задачный материал, предложенный в различных учебниках при изучении распределительного закона. В чем его отличие?
- Разработайте методику изучения одного из законов по предложенной схеме.
- Проанализируйте виды упражнений на применение законов действий.
- Найдите упражнения на усвоение свойств обратных действий.
- Объясните, какие методические особенности изучения законов и свойств действий можно выделить в различных учебниках?
- Запишите словесные и буквенные записи законов, используя двухэтажную запись („два в одном”).
- Разъясните смысл слов в названии законов.

Переместительный – перестановка (перемена мест) слагаемых (множителей); сочетательный – слагаемые (множители) можно объединять (сочетать) по-разному; распределительный – множитель распределяется к слагаемым.

- Приведите примеры упражнений, при выполнении которых законы используются „слева направо”(„справа налево”).
- Назовите ученых, которые разрабатывали теорию чисел, и приведите их биографические данные.
- Проанализируйте различные учебники по введению новых понятий из теории делимости, их определения.
- Расскажите, какие признаки делимости можно дать ученикам дополнительно?
- Проанализируйте различные формулировки программных признаков делимости.
- Какова система упражнений по усвоению признаков делимости?
- Подберите задачи для рассмотрения при введении понятий НОД и НОК чисел.
- Сравните учебники по содержанию изучаемых вопросов в этой теме.

2.2. Дробные числа

Программа курса математики предполагает вслед за изучением натуральных чисел и нуля введение дробных чисел. Это фактически второе расширение понятия числа. Формирование понятия дробных неотрицательных чисел позволяет расширить само понятие числа, а также определить место натуральных чисел в более широком множестве. Необходимо иметь в виду, что натуральные числа должны быть опорой и прочным фундаментом изучения дробных чисел. Это обстоятельство может служить источником многочисленных сопоставлений и аналогий, обращений к опыту учащихся, активизации их познавательной деятельности и повышения интереса к новым числам. В методической литературе по традиции к дробным числам относят обыкновенные и десятичные дроби, а также смешанные числа (иногда их называют смешанные дроби). Естественно, этот перечень не является классификацией дробных чисел. Термином „смешанное число" подчеркивается соединение, „смешение" в одном символе целого числа и дроби. При этом под дробью подразумевается только правильная обыкновенная дробь. К десятичным дробям этот термин не применяется: число, содержащее целую часть и десятичную дробь, называют, как обычно, „десятичная дробь", не считая нужным в названии подчеркивать наличие целой части. Поэтому есть сторонники неупотребления этого специфически школьного термина вообще. Однако во всех школьных учебниках он присутствует, и им надо уметь правильно пользоваться. Иногда для чтения дробных чисел с целой частью вводят различие, чтобы записать дробную часть в виде обыкновенной дроби или десятичной дроби. В первом случае употребляют союз „и". Например, $2\frac{3}{10}$ – две целых и три десятых; 2,3 – две целых три десятых. Опять же в школьных учебниках различия нет (союз „и" не произносится).

Некоторые методисты считают, что смешанная, обыкновенная и десятичная дроби – это не числа, а только символы для обозначения дробных чисел. Тем самым предлагают различать число и способ его записи. При этом из контекста задачи надо уметь выделять, о чем идет речь: о дробном числе или о его записи той или иной дробью. Например, при сокращении дробей под дробью понимается запись дробного числа (дробь-запись), а при выполнении действий – дробное число (дробь-число); дроби $\frac{25}{30}$ и $\frac{5}{6}$ различны, а дробные числа одинаковы (равны): $\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$. В учебниках часто происходит смешение этих понятий, поэтому и в 5-х, 6-х классах нецелесообразно с учащимися обсуждать эти языковые тонкости. Но учитель, естественно, должен об этом знать.

Другой методической проблемой является последовательность изучения десятичных и обыкновенных дробей. Во всех школьных учебниках Федерального списка изучение дробных чисел начинается с обыкновенных дробей, что соответствует историческому пути и логике учения о числе (десятичные дроби появились намного позже как частный случай обыкновенных дробей), традициям в сложившейся практике обучения, важности их в приобретении опыта выполнения тождественных преобразований выражений (важно для алгебры); они используются при обосновании действий над десятичными дробями. В то же время программный материал по ряду учебников распределяется все-таки на два концентра: на первом – введение понятия дроби, сравнение, сложение и вычитание дробей с одинаковыми знаменателями; на втором – преобразования и действия с дробями. После пропедевтического рассмотрения дробей предполагается систематическое изучение в полном объеме десятичных дробей как частного случая обыкновенных. Такое компромиссное решение ряда авторов учебников принято под воздействием реформаторов, которые вообще предлагали десятичные дроби изучать после натуральных чисел как их обобщение в результате продолжения десятичной системы нумерации, а обыкновенные дроби изучать уже после как обобщение десятичных. В качестве аргументов реформаторы выдвигали следующие: десятичные дроби имеют большую практическую ценность, производить действия над ними легче (они аналогичны действиям с натуральными числами), при изучении их происходит самопроизвольное повторение натуральных чисел (можно уменьшить число часов на первую тему) и др. Изучение десятичных дробей без предварительного ознакомления с обыкновенными дробями вызывает определенные методические трудности, на которые было указано в литературе [12, с. 10]. В то же время существуют и поныне учебники с такой последовательностью изучения (например, учебники МПИ, М. Б. Воловича, Г. Г. Левитаса). Имеется вариант совместного изучения обыкновенных и десятичных дробей (например, учебник П. М. Эрдниева). Надо поддерживать ровный интерес как к обыкновенным, так и десятичным дробям – те и другие важны с точки зрения теории и практики обучения математике, каждая имеет свою специфику и область применения.

Говоря об обыкновенной дроби, надо иметь в виду дробь, в которой числитель натуральное число или нуль, а знаменатель – только натуральное число. После ознакомления с дробными отрицательными числами учащиеся выполняют действия над любыми дробями и дробными числами.

Методически важным является выяснение соотношения между терминами „дробь" и „проценты". Следует с самого начала изучения процентов внести ясность, что проценты представляют собой особую форму записи дробных чисел, а не числа какой-то новой природы. Любая задача с дробными данными может быть поставлена и решена в процентной записи и обратно. Эта новая форма записи дробных чисел появилась исходя из практических соображений по возможности пользоваться (хотя бы приближенно) в расчетах выражением дробных чисел в виде дробей с одним и тем же знаменателем, дающих вполне достаточную точность. В качестве такого универсального знаменателя и выбрали число 100, что означает переход к процентной записи дробных чисел ($\frac{65}{100} = 0{,}65 = 65\ \%$). Широкое употребление процентов в жизни людей обязывает школу добиться четкого усвоения учащимися этого понятия и приобретения навыков в его применении.

В действующих учебниках в отличие от традиционных не даются формальные определения понятий дроби, обыкновенной и десятичной дробей. Это упрощает изложение теоретического материала, но в то же время усиливает роль задач в правильном понимании и усвоении этих понятий.

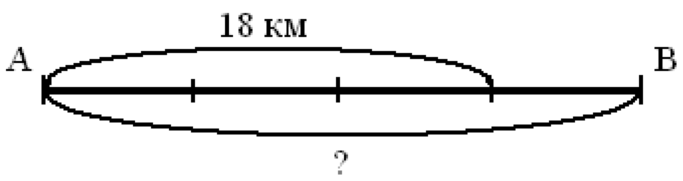
При любом способе реализации учения о дробных числах учителю необходимо добиваться сознательного усвоения материала учащимися, выработки прочных навыков в выполнении действий. Теоретические факты должны вытекать из рассмотрения конкретных задач с широким привлечением наглядности и жизненного опыта учащихся. Программа не требует использования дробей с очень большими знаменателями, чтобы не вносить дополнительные вычислительные трудности. Следует предлагать учащимся упражнения для устных вычислений с дробными числами.

Центральным понятием в учении о дробных числах является понятие обыкновенной дроби (или просто дроби). В качестве мотивировки введения понятия могут последовательно выступать три основных источника в получении дробных чисел: 1) разделение целого на равные части (доли): при этом дробь выступает в качестве математического способа выражения долей как равных частей взятого за единицу предмета (дробь как часть от целого); 2) измерение величин, когда единица меры не укладывается целое число раз (дробь как результат измерения более крупной единицей); 3) деление одного натурального числа на другое (дробь как результат деления, как частное двух натуральных чисел). Не следует торопиться сразу рассмотреть все названные источники получения дробей. Вначале каждый ученик должен прочно усвоить те операции, которые надо выполнить, чтобы получить ту или иную дробь предмета (пирога, арбуза, полоски бумаги), геометрической фигуры (отрезка, круга, прямоугольника) – разделить (разрезать) на какое-то число долей (равных частей) и взять (отделить, заштриховать) одну или несколько таких долей. Учащиеся должны сами создавать наглядные образы с помощью моделей, рисунков, чертежей, схем. В результате они будут отчетливо представлять себе дробь как одну или несколько долей целого, принимаемого за единицу. Необходимо сообщить учащимся, что дроби связываются с долями предметов, а натуральные числа с самими предметами. Одинаковые доли тоже можно пересчитывать. После этого можно ввести запись дробей с помощью пары натуральных чисел (следует помнить, что числитель может быть и нулем), разделенных горизонтальной чертой („двухэтажная запись”), сообщить термины „обыкновенная дробь”, „числитель дроби”, „знаменатель дроби”, дать содержательную характеристику дроби (что показывают знаменатель и числитель). При введении перечисленных понятий необходимо учителю выяснить, было ли пропедевтическое ознакомление с ними в начальных классах (стандартом изучения темы „Доли и дроби” не предусмотрено). Если материал знаком ученикам на уровне конкретного образного представления о дробных числах, то важно спланировать его использование.

Постепенно можно включать простейшие задачи на измерение величин, когда приходится осуществлять переход от более мелких единиц измерения к более крупным (переход от метров и сантиметров к дециметрам, от секунд и минут – к часам, от граммов и килограммов – к тоннам, от копеек – к рублям и т.п.), получая дробные числа. Дробь воспринимается учащимися как часть (в смысле доля) некоторой величины. Без дробных чисел измерение не всегда возможно с требуемой точностью.

Уяснению смысла дроби очень способствует решение трех основных задач (нахождение части (дроби) от целого (числа), числа по его дроби, отношения двух чисел). Это первый этап в решении таких задач, и никаких правил здесь формулировать не следует. Основу решения составляет понимание смысла дроби как части соответствующего целого, а ключом к решению двух задач – нахождение одной доли. Осознанию учащимися способа рассуждений будет способствовать изображение условия задачи в виде схематического рисунка. Формулировка этих задач в отвлеченной форме (найти $\frac{3}{4}$ от 24) пока затруднительна для учащихся, и поэтому они решаются позже с помощью соответствующих правил (формальный подход).

Рассмотрим примерный способ рассуждения на примере одной из задач. *Турист прошел 18 км, что составляет $\frac{3}{4}$ маршрута. Какой путь должен пройти турист?* Изобразим схематически путь туриста:



$\frac{3}{4}$ – 18 км

Дробь $\frac{3}{4}$ означает, что весь путь разделен на 4 части, из них пройдено 3 части, которые составляют 18 км. Поэтому $\frac{1}{4}$ часть пути равна 18 : 3 = 6 (км). Весь путь состоит из 4 таких частей, следовательно, он равен $6 \cdot 4 = 24$ (км).

После уяснения смысла дроби как части целого и того, что часть всегда меньше целого (числитель меньше знаменателя), необходимо показать ученикам существование других дробей, у которых числитель больше или равен знаменателю. Здесь уже происходит расширение понятия дроби: они уже не части единицы. Проиллюстрировать эти дроби лучше всего с помощью отрезков, противопоставляя дроби ранее изученным. Например, дан отрезок *AB*. Построить $\frac{1}{4}AB$, $\frac{2}{4}AB$, $\frac{4}{4}AB$, $\frac{5}{4}AB$, $\frac{6}{4}AB$.

Предъявляя задание на установление сходства и различия в записанных дробях, можно подвести учащихся к осознанию новых понятий „правильная дробь", „неправильная дробь" и сформулировать их определения: дробь, в которой числитель $\frac{\text{меньше}}{\text{не меньше}}$ знаменателя, называется $\frac{\text{правильной}}{\text{неправильной}}$ дробью. Можно сравнить дроби с единицей:

Если a < b, то $\frac{a}{b} < 1$	Если a > b, то $\frac{a}{b} > 1$	Если a = b, то $\frac{a}{b} = 1$

Когда говорят слово „дробь", то чаще всего думают о числе меньшем, чем единица. Может быть, поэтому те дроби, которые равны единице или больше единицы, назвали неправильными и стремятся записать их иначе, выделив целую часть.

При решении задач у учителя появляется возможность постепенно подвести учащихся к восприятию отвлеченного понятия дроби как числа. Рассмотрим последовательно три аналогичные ситуации с дележом 6, 2, 5 яблок поровну между тремя детьми. Каждый раз ставим вопрос: „Сколько должен получить каждый из них?". В первом случае задача решается действием деления: 6 : 3 = 2 – каждый получает по 2 яблока. Во втором случае 2 не делится без остатка на число 3, поэтому придется разрезать каждое яблоко на 3 части и каждому дать по $\frac{2}{3}$ яблока. По аналогии с первым случаем мы можем записать 2 : 3 и из полученных рассуждений частное приравнять: $\frac{2}{3}$: $2 : 3 = \frac{2}{3}$. Таким образом, дробь $\frac{2}{3}$ можно рассматривать как частное от деления числа 2 (делимое) на 3 (делитель). В третьем случае, аналогично рассуждая, можем записать 5 : 3 = $\frac{5}{3}$. Но делить каждое яблоко на три части нецелесообразно, а лучше каждому дать по яблоку, а оставшиеся два яблока разрезать на три части и дать каждому еще по $\frac{2}{3}$ яблока. В результате каждый получает $(1+\frac{2}{3})$ яблок. В математике это записывают короче $1\frac{2}{3}$ и такого вида числа называют смешанными (5 : 3 = $= \frac{5}{3} = 1+\frac{2}{3} = 1\frac{2}{3}$). Анализируя записи, можно подвести учащихся к важному выводу: с помощью дробей можно записать результат деления двух любых натуральных чисел, а дробная черта заменяет знак деления. Учащиеся поднимаются на ступеньку выше в своем математическом развитии. Деление натуральных чисел оказывается выполнимым всегда, и частным может быть либо натуральное число, либо дробное. Дробь можно рассматривать как частное натуральных чисел. Связь между дробью и частным можно записать так:

$a:b=\frac{a}{b}$	$\frac{a}{b}=a:b$

Понимание дроби как частного числителя и знаменателя дает возможность ввести обыкновенные дроби со знаменателем 1 и с числителем 0. Учащиеся должны уяснить предметный смысл записи числа 1 в виде дроби с одинаковыми числителями и знаменателями: $1=\frac{2}{2}=\frac{3}{3}=\frac{4}{4}=\ldots$ (целое делим на две доли и все берем и т.д.), а затем запись любого натурального числа в виде дроби (например, $5=\frac{5}{1}=\frac{10}{2}=\frac{15}{3}=\frac{20}{4}=\ldots$ – самая простая дробь $\frac{5}{1}$). Через систему упражнений учащиеся убеждаются, что любое натуральное число можно записать в виде дроби, причем бесконечным множеством способов. Натуральные числа теперь выступают как разновидность (частный случай) дробных чисел. В этом выражается диалектический закон единства противоположностей в арифметике.

Большое значение в изучении дробных чисел уделяется во всех учебниках их изображению точками на координатном луче (или координатной прямой). Как правило, в учебниках соответствующий прием не сформулирован в виде общего правила, а разъясняется на примере конкретной дроби с опорой на смысл понятия дроби и единичного отрезка. При этом учащиеся должны научиться выбирать отрезок, удобный для построения указанных дробей. Координатный луч широко используется при изучении равенства и сравнения дробей, основного свойства дроби. Как видим, изображение дробных чисел на координатном луче неразрывно связано с задачей измерения отрезков.

Следующий этап в изучении дробей – их преобразования, теоретической основой которых является основное свойство дроби. В связи с этим рассматривается вопрос и о равенстве дробей. Определения равенства дробей в современных учебниках не дается, оно понимается как обычно в математике: знак равенства означает, что слева и справа от него записано одно и то же число, но в различной форме. В том, что такие дроби существуют, учащиеся убеждаются с помощью координатного луча (равные дроби изображаются одной и той же точкой), отрезков (равные дроби выражают длину одного и того же отрезка) конкретных предметов, легко делимых на части. Получить дробь, равную данной, не прибегая к наглядности, можно с помощью основного свойства дроби, которое формулируется в виде правила. Вот его буквенная запись:

$\frac{a}{b}=\frac{a\cdot \mathrm{c}}{\mathrm{b}\cdot \mathrm{c}}$	$\frac{a}{b}=\frac{a:c}{b:c}$

Для обоснования правила можно использовать различные наглядные образы (отрезок, круг), которые позволяют осознать возможность выражения одной и той же части целого разными дробями. При выполнении упражнений по формированию представления о бесконечности множества дробей, равных данной, надо обращать внимание учеников на правильность речи, записей. Вот типичный неверный оборот речи: „Умножим дробь на одно и то же число”.

Основное свойство дроби позволяет осуществлять два вида преобразований: сокращение дроби (чтение первой буквенной записи „справа налево”) и приведение дроби к новому знаменателю (чтение первой буквенной записи „слева направо”). При выполнении упражнений на сокращение дробей учащиеся могут поступать по-разному:

последовательно, используя признаки делимости ($\frac{63}{315}=\frac{21}{105}=\frac{7}{35}=\frac{1}{5}$); одномоментно, деля числитель и знаменатель на их наибольший общий делитель ($\frac{63}{315}=\frac{1}{5}$). Последний прием не обязателен для всех учащихся. Важно, чтобы учащиеся в результате любого приема получили уже несократимую дробь (числитель и знаменатель – взаимно простые числа). При сокращении мы упрощали дробь, в чем и состоит целесообразность этой операции.

При приведении дроби к новому знаменателю учащиеся должны усвоить, что дробь можно привести к любому знаменателю, кратному исходному (например, $\frac{2}{3}$ можно заменить дробями $\frac{4}{6}$, $\frac{6}{9}$, $\frac{8}{12}$, $\frac{10}{15}$ и далее, но нельзя дробью со знаменателем 8, 10, 11 и т.д.). Это преобразование необходимо для сравнения, вычитания и деления дробей. При нахождении общего знаменателя для двух и более дробей учащиеся могут поступать по-разному: выбрать произведение знаменателей, любое общее кратное знаменателей, наименьшее общее кратное знаменателей. Ученикам дается формулировка общего приема в виде алгоритмического предписания и сообщается, что для упрощения вычислений нужно стараться привести дроби к наименьшему общему знаменателю. Последнее трудно дается ученикам, и не надо предлагать им сразу же большие знаменатели. Необходимо рассмотреть простейшие типичные случаи отыскания общего знаменателя, приучая вначале проверять, делится ли больший знаменатель на остальные.

Названные два преобразования приводят к изменению записи первоначальной дроби на новую с сохранением их равенства. Равенство сохраняется и при выделении целой части из неправильной дроби. Это приводит к получению смешанной дроби путем деления числителя на знаменатель. Рассматривается и обратное преобразование. Соответствующие правила очень громоздки и поэтому процедуру лучше разъяснить на конкретных примерах без требования заучивать их.

В соответствующих местах рассматриваются еще два преобразования: дополнение правильной дроби до единицы ($1-\frac{2}{5}=\frac{5}{5}-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$; $1-\frac{2}{5}=\frac{1}{1}-\frac{2}{5}=\frac{5-2}{5}=\frac{3}{5}$, $1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$, так как $\frac{2}{5}+\frac{3}{5}=\frac{5}{5}=1$) и нахождение дроби, обратной данной ($\frac{a}{b}$ и $\frac{b}{a}$ – взаимно обратные дроби; дробь $\frac{0}{a}$ не имеет обратной).

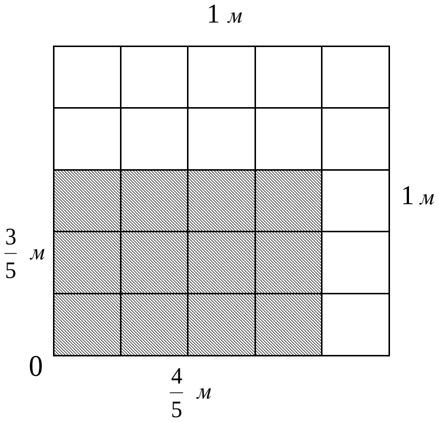
Очередной этап в изучении дробных чисел – сравнение: долей единицы, дробей с одинаковыми знаменателями, дробей с одинаковыми числителями, правильной дроби с неправильной, дробей с разными знаменателями, смешанных чисел. Обучение приемам сравнения дробей должно быть основано на опыте учащихся, полученном ими в ходе практических действий с различными моделями. Отрезки, координатный луч помогут осознать приемы сравнения, а затем сформулировать правила. Каждый ученик должен научиться сравнивать такие дроби, как $\frac{8}{17}$ и $\frac{6}{17}$, $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{100}$, $\frac{7}{10}$ и $\frac{10}{7}$, $\frac{5}{8}$ и $\frac{4}{7}$, а также каждую из них с 1. Отношения порядка на множестве положительных дробей обладают свойством плотности (между двумя „соседними” дробями существует бесконечно много дробей), расположить все дроби в определенном порядке подобно натуральным числам (натуральный ряд) невозможно, так как они не обладают свойством дискретности в отличие от натуральных чисел.

После изучения довольно-таки большого объема теоретических сведений о дробных числах возможно перейти к действиям над ними, их законам и свойствам. Изученный материал является базовым для введения и обоснования действий. Кроме того, будут использоваться знания учащихся о действиях и законах над натуральными числами, которые приобретают здесь характер общности. Переосмысление знаний поможет учащимся понять универсальность смысла арифметических действий, различие в вычислительных приемах нахождения их результата и условиях выполнимости. Действия над дробными числами во всех учебниках сейчас вводятся в той же последовательности, что и на множестве натуральных чисел. (Традиционная последовательность была нарушена в нескольких изданиях учебника Н. Я. Виленкина и других, когда вначале изучалось умножение и деление дробей из-за простоты алгоритма выполнения). Отдельно рассматриваются действия над смешанными числами (дробями). В ряде учебников взаимно обратные действия над обыкновенными дробями излагаются одновременно. Определения вычитания и деления сохраняются прежние, они лишь переносятся на дроби. В учебнике

С. М. Никольского и других даются определения действиям сложения и умножения через соответствующие формулы, в других – они заменяются на правила, которые формулируются в виде алгоритмических предписаний („чтобы умножить дробь на дробь, нужно…”). Подобные правила приводятся для всех четырех действий. Наиболее сложными являются алгоритмы для выполнения действия сложения и вычитания дробей с разными знаменателями, так как они предусматривают большее число шагов: найти общий знаменатель (1), дополнительные множители (2), произведения числителей на эти множители (3, 4), сумму (разность) полученных произведений (5) и т.д. Поэтому следует соблюдать последовательность в подборе упражнений и добиваться наиболее рационального выполнения действий, в простых случаях прибегать к устным вычислениям. При вычитании смешанных дробей часто приходится преобразовывать уменьшаемое, что затрудняет выполнение действия: $4\frac{1}{3}-2\frac{1}{2}=4\frac{2}{6}-2\frac{3}{6}=(3+\frac{8}{6})-2\frac{3}{6}=1\frac{5}{6}$. После выполнения действий необходимо делать проверку: сложение – вычитанием, вычитание – сложением, умножение – делением, деление – умножением.

В методическом плане важно учеников подвести к соответствующим правилам арифметических действий путем решения практических задач, связанных с измерениями величины (длины отрезка, площади прямоугольника). Затем продемонстрировать их целесообразность на ряде упражнений, в том числе с натуральными числами (заменив их дробями) – убедиться в получении одного и того же результата. Смысл действий сложения и вычитания фактически совпадает со смыслом аналогичных действий над натуральными числами, поэтому упрощается их изучение. Смысл действия умножения на дробь резко отличается от умножения на натуральное число. Здесь не проходит сведение умножения к сумме, как это было с натуральными числами. Хотя еще можно этот смысл использовать при умножении дроби на натуральное число ($\frac{1}{4}\cdot 3=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$). В методике существуют различные вариативные мотивировки действия умножения на дробь и разъяснения его смысла. В большинстве вариантов учебников действие умножения рассматривается сразу в общем виде как умножение дроби на дробь. Все остальные случаи вытекают из него (умножение на натуральное число, на смешанную дробь, на правильную дробь и т.п.). Вывод правила осуществляется на задаче, связанной с вычислением площади прямоугольника по известным его длине и ширине:

1) а =4 м, в =3 м; 2) а $=\frac{4}{5}$ м, в $=\frac{3}{5}$ м; 3) а $=\frac{4}{5}$ дм, в $=\frac{2}{3}$ дм. Первая задача знакома ученикам, она решалась на множестве натуральных чисел действием умножения по известной формуле $S = a \cdot b$: $S = 4 \cdot 3 = 12$ ($м^2$). Другие задачи аналогичны первой, поэтому они должны решаться тем же действием: $S = \frac{4}{5} \cdot \frac{3}{5} = ?$; $S = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = ?$ Как умножать дроби? Выходом из создавшейся проблемы будет решение задач геометрическим способом с помощью чертежа (по соображению).



Учитель может задать вопросы: На сколько частей разделены стороны квадрата? На сколько равных квадратов разделен данный квадрат? Какую часть площади данного квадрата составляет площадь одного квадрата? Какую часть площади данного квадрата составляет площадь заштрихованного прямоугольника? Какова площадь прямоугольника?

По числам $\frac{3}{5}$ и $\frac{4}{5}$ мы нашли число $\frac{12}{25}$, выражающее площадь прямоугольника, следовательно, можем записать $S = \frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$ ($м^2$). Аналогично рассматривается третья задача $S = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ ($дм^2$). Теперь учитель обращает внимание на равенства $\frac{3}{5} \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{25}$, $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$ и предлагает найти более простое правило умножения дробей без вычерчивания квадрата и разбиения его на равные части. Формулировка правила затруднения у учащихся не вызовет. Действием умножения решаются другие задачи с дробными данными (нахождение пути, стоимости товара и др.).

Деление выполняется двумя способами: сведением к умножению на число, обратное делителю, или по правилу „паука”. С точки зрения практики первый способ удобнее второго. В связи с изучением деления дробей рассматривается вопрос об отношении двух чисел. Отношение определяется как частное от деления одного из них на другое (отношение рассматривается только для положительных чисел, оно записывается как 3 : 2 или $\frac{3}{2}$) и показывает, какую часть первое число составляет от второго.

Заметим, что действия умножения и деления на дробь имеют свои особенности: если дробь правильная, то значение произведения будет меньше значения частного (на множестве натуральных чисел значение произведения двух любых чисел всегда больше частного этих чисел).

После овладения действиями умножения и деления дробей учащимся вновь предлагаются известные задачи на дроби (нахождение дроби от числа и числа по его дроби), которые решались на основе смысла понятия дроби в два действия (ранее употреблялось в названии слово „часть”, теперь – слово „ дробь”). Здесь предлагаются уже формальные приемы (правила) решения этих задач – умножением или делением на дробь в одно действие. Однако учащийся вправе решать, каким способом ему удобнее получить ответ. Решение задач должно сопровождаться рисунком (схемой), который может составить основу решения задачи. Третья задача на дроби (нахождение отношения) также решается с учащимися на действии деления.

По ходу изучения действия нужно показать ученикам справедливость известных им законов и свойств на новом числовом множестве. Особый интерес представляет распределительный закон, который является основой различных вычислительных приемов. Необходимо рассмотреть те случаи, когда произведение, частное и разность окажутся нулями. Действие вычитания на множестве дробных чисел еще остается не всегда выполнимым.

Теперь перейдем к рассмотрению основных вопросов методики изучения десятичных дробей. В большинстве учебников это 5-й класс. До этого учащиеся изучили обыкновенные дроби полностью или частично (в объеме, достаточном для введения десятичной дроби). Наилучшим способом введения десятичных дробей является обращение к метрической системе мер, в которой каждая единица измерения делится на 10, 100, 1000 более мелких единиц. Целесообразно дать упражнения на выражение результатов измерения длины, массы и других величин в более крупных единицах, которые записываются обыкновенными или смешанными дробями (например, 23 кг $=\frac{23}{100}$ ц; 503 кг $=\frac{503}{1000}$ т; 14 м 2 дм = $14\frac{2}{10}$ м; 25 к. = $\frac{25}{100}$ р.; 1 дм = = $\frac{1}{10}$ м = $\frac{1}{10000}$ км). Затем учитель сообщает, что для таких дробей математики придумали новую запись, которую назвали десятичной, а сами числа стали называть десятичными дробями. Важно, чтобы учащиеся уяснили, что десятичные дроби – это не новые числа, это те же обыкновенные дроби, но со стандартным знаменателем, выраженным единицей с последующими нулями. Они чаще других встречаются на практике, поэтому для них используют более простую форму записи в строчку (линейная запись), отделяя целую часть от дробной запятой (иногда точкой). Необходимо заметить, что у десятичной дроби знаменатель тоже записан, но по иному правилу и его при необходимости сразу можно назвать по числу десятичных знаков. Читается она так же, как смешанная дробь.

Чтобы лучше понять правила записи и чтения десятичных дробей, в ряде учебников обращаются к десятичной системе счисления, где значение каждой цифры зависит от разряда (позиции), в котором она записана. Вспомнив таблицу разрядов и классов для натуральных чисел, легко можно продолжить ее от разряда единиц после запятой (знака дробности) вправо и получить симметричные разряды: десятки – десятые, сотни – сотые, тысячи – тысячные, десятки тысяч – десятитысячные и т.д. Развитие системы счисления сближает натуральные числа и десятичные дроби, что и послужило мотивом изучения последних сразу же после первых. Способ записи десятичных дробей является обобщением десятичного позиционного способа записи натуральных чисел, и десятичную дробь можно представить в виде суммы разрядных слагаемых:

$$5{,}134=5\frac{134}{1000}=5+\frac{100}{1000}+\frac{30}{1000}+\frac{4}{1000}=5+\frac{1}{10}+\frac{3}{100}+\frac{4}{1000}=$$
$$=5+0{,}1+0{,}03+0{,}004.$$

Итак, десятичная дробь – это число, записанное в десятичной системе счисления позиционным способом.

Введение десятичных дробей как частного случая обыкновенных дробей упрощает методику изучения соответствующего материала, так как всегда десятичную дробь можно заменить обыкновенной. В то же время надо показать ученикам, что обратное не всегда возможно (например, дробь $\frac{1}{3}$ не представима в виде конечной десятичной дроби).

Десятичные дроби можно изображать на координатном луче разными способами: 1) путем перехода к обыкновенной дроби; 2) с помощью разложения по разрядам. Следует предлагать дроби с одним-двумя десятичными знаками и за единицу брать 10 клеток в тетради.

Преобразования десятичных дробей проще, чем обыкновенных: приписывание справа нулей в записи (аналог приведения дробей к общему знаменателю: 0,3 = 0,30 = 0,300 = …); отбрасывание (вычеркивание) справа нулей в записи (аналог сокращения дробей: 0,300 = = 0,30 = 0,3); уравнивание числа десятичных знаков в нескольких записях. Все они вытекают из основного свойства обыкновенных дробей. В результате этих преобразований получаем равные десятичные дроби. Многозначности представления одного и того же числа в виде десятичных дробей необходимо уделить особое внимание: 23 = 23,0 = = 23,00 =…; 26,000 = 26,00 = 26,0 = 26; 0,15 = 0,150 = 0,1500 =… .

Устанавливается правило кратного изменения (иначе – умножения или деления) десятичной дроби на 10, 100, 1000 и т.д. – перенос запятой вправо или влево на 1, 2, 3 и далее цифр: $3{,}753 \xleftarrow{:10} 37{,}53 \xrightarrow{\cdot 10} 375{,}3$.

Правило позволяет легко переходить от крупных единиц измерения к более мелким и обратно. Например, 7,583 м (7,583 · 100) см = = 758,3 см; 6537 г (6537 : 1000) кг = 6,537 кг.

Сравнение десятичных дробей можно производить по-разному: 1) уравняв число десятичных знаков и отбросив запятую, сравнивают натуральные числа (сведение к натуральным числам); 2) с помощью координатного луча (меньшая лежит левее большей); 3) по разрядам (сравнивают поэтапно разряды целой и дробной части). Последний способ имеет большое практическое применение, и поэтому ему нужно уделить больше внимания; соответствующее правило формулируется не во всех учебниках. Часто учащиеся ошибочно считают, что из двух десятичных дробей больше та, у которой больше десятичных знаков. Для предотвращения такой ошибки лучше начинать с упражнения типа: что больше 0,9 или 0,2025?

Действия над десятичными дробями вводятся на задачах с использованием метрической системы мер. Они позволяют подвести учащихся к соответствующему правилу, которое сводится к выполнению действия над натуральными числами, а затем к определению места запятой в ответе. Обоснование правила происходит либо путем перехода к обыкновенным дробям, либо к натуральным числам (данные выражаются в более мелких единицах измерения). Сложение и вычитание дробей рассматривается совместно в противопоставлении, и алгоритм иногда дается общий. Подвести учащихся к правилу сложения дробей можно на следующей задаче: *На пальто израсходовали 3,41 м ткани, а на костюм – 2,83 м. Сколько ткани пошло на оба изделия?* Используя опыт учащихся в сложении именованных чисел, решаем задачу путем перевода данных в метры и сантиметры или только в сантиметры: 3 м 41 см + 2 м 83 см = 6 м 24 см = 6,24 м, или 341 см + 283 см = 624 см = 6,24 м. Обращается внимание на то, что тот же результат можно получить, если сложить 3,41 и 2,83 „столбиком”, как натуральные числа, а затем в ответе поставить запятую под запятой в слагаемых. Затем формулируется правило сложения и сообщается, что сложение десятичных дробей подчиняется законам. Можно показать, что правило не противоречит правилу сложения обыкновенных дробей: $3{,}41+2{,}83 = 3\frac{41}{100}+2\frac{83}{100}=5\frac{124}{100}=6\frac{24}{100}=6{,}24.$ Для закрепления правила предлагаются упражнения сначала с одинаковым числом знаков после запятой, а затем с различным, когда требуется приписывание нулей с целью уравнивания числа знаков после запятой; включаются упражнения на сложение трех-четырех слагаемых. Развитию навыков самоконтроля помогут упражнения на нахождение ошибок в выполнении действия. Ученики должны понять, что сложение десятичных дробей выполняется по разрядам так же, как и натуральных чисел. При этом необходимо следить, когда происходит перенос единицы в следующий разряд. Аналогично вводится и действие вычитания. Чтобы учащиеся лучше уяснили его смысл, надо предлагать проверять правильность вычитания сложением, требуя обоснования. Ошибки в выполнении действия чаще всего наблюдаются, когда нужно „занимать” единицу высшего разряда (производить раздробление, например, одной десятой в сотые), поэтому на эту трудность надо обратить особое внимание. Всякий раз, когда ученик ошибается, необходимо уяснить, почему он ошибается и помочь ему осознанно исправить вычисления. Упражнения выстраивают в следующей последовательности: число знаков после запятой одинаково (9,86 – 6,43), различно (35,78 – 1,6; 87,95 – 12,0612), вычитаем из целого (3 – 0,51). На каждом этапе важно добиваться безошибочности выполнения и только после этого переходить на следующий.

При введении правил умножения и деления в учебниках имеются разночтения, обусловленные порядком изучения этих действий над обыкновенными и десятичными дробями. Там, где эти действия уже были изучены над обыкновенными дробями, обоснование правил производится намного проще путем замены десятичных дробей обыкновенными. Например, при решении конкретной задачи необходимо 3,76·2,4. Переходим к обыкновенным дробям и выполняем действие: $3{,}76 \cdot 2{,}4 = 3\frac{76}{100} \cdot 2\frac{4}{10} = \frac{376 \cdot 24}{1000} = \frac{9024}{1000} = 9\frac{24}{1000} = 9{,}024$. После этого выясняется, как можно было бы получить ответ иначе, формулируется соответствующее правило, применимое во всех случаях. Представляет интерес другой способ определения места запятой в ответе, основанный на правиле краткого изменения дроби при переносе запятой: желая перемножить 3,76 и 2,4, переносим запятую в первом множителе на две, во втором – на три цифры вправо, отчего произведение увеличивается в 1000 раз. Найдя это увеличенное произведение 376 · 24 = 9024, исправляем его, уменьшив в 1000 раз, т.е. переносим запятую влево на три цифры, и получаем искомое произведение 3,76 · 2,4 = 9,024.

В случае первоначального изучения действия умножения десятичных дробей следует начать с простейших случаев: умножение на натуральное число, на 10, 100 и т.д. В этом случае необходимо дать определение произведения как суммы слагаемых и правило. Затем рассмотреть общий случай, предложив ученикам задачи, решаемые действием умножения. Например, задача на вычисление площади прямоугольника. *Найти площадь кабинета прямоугольной формы, длина которого 4,3 м и ширина 3,8 м.* Предложим ученикам перейти к новой единице измерения (1 см). Они получат натуральные числа, перемножив которые, найдут ответ: S = 4,3 м · 3,8 м = 430 см · 380 см = = 163400 см^2 = 16,34 м^2. Получили равенство 4,3 · 3,8 = 16,34, анализируя которое учащиеся смогут сформулировать соответствующее правило, не требующее такого двойного перехода (сначала замена долей метра сантиметрами, а затем возврат к метрам, но уже квадратным). Обоснование правила опирается на допущение, что способ решения задачи не должен зависеть от характера чисел, входящих в условие. Аналогично вводится и действие деления. Особое внимание надо уделить всем действиям с десятичными дробями и задачам, в которых данными являются десятичные дроби (в том числе задачи на дроби). Необходимо уделять внимание выработке навыков выполнения действий с простейшими десятичными дробями, порядку их выполнения и использованию законов и свойств для рационализации вычислений. Программа не требует трудоемких письменных вычислений, которые могут быть выполнены на микрокалькуляторе, но уделяет внимание выработке умений прикидки и оценки результата действий. Особо следует обратить внимание на применение десятичных дробей в практических вычислениях. Через систему задач показать ученикам, как они появляются в практических задачах. В процессе решения задач важно уметь округлять данные и вычислять проценты, строить диаграммы. Учащиеся должны свободно переходить от процентной формы записи чисел к десятичной (1 % = 0,01; 35 % = = 0,35; 100 % = 1; 125 % = 1,25 и т.д.) и наоборот (2,35 = 235 %, 43,2 = = 4320 % и т.д.). Приобретенные умения позволяют рассматривать любую задачу на проценты как особую форму задач на дроби; решать их можно как на содержательном уровне (понимание смысла процента), так и на формальном – умножением или делением на десятичную дробь. Заметим, что в ряде учебников к задачам на проценты обращаются несколько раз, на каждом этапе – на новом, более высоком уровне.

После изучения дробных чисел в полном объеме дается понятие дробного выражения как частного двух чисел или числовых выражений. Предлагаются упражнения на совместные действия обыкновенных и десятичных дробей с выяснением вопроса, в каких дробях рациональнее находить значение дробного выражения, помня, что не любая обыкновенная дробь может быть записана конечной десятичной дробью (например, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{5}{11}$ и др.). Выполнять действия можно двумя способами: по действиям, „цепочкой”:

$$\frac{(2\frac{1}{2}+0{,}75)\cdot\frac{4}{11}}{(45{,}5-44{,}3):0{,}2}=\frac{3{,}25\cdot 4}{1{,}2\cdot 5\cdot 11}=\frac{13}{66}.$$

Вырабатываем у учащихся привычку сначала проводить прикидку, что и как выгодно делать, а что невыгодно. Из теории здесь может быть рассмотрен вопрос об условии обращения обыкновенной дроби в десятичную (несократимую дробь можно записать в виде десятичной, если ее знаменатель имеет в качестве простых делителей только 2 и 5).

Задания для самостоятельной работы

- Выделите систему знаний и умений учащихся, которыми они овладевают при изучении дробных чисел (обыкновенных дробей, десятичных дробей).
- Объясните, почему в курсе математики 5-х, 6-х классов уделяется большое внимание изучению обыкновенных дробей, хотя их роль в практических вычислениях невелика?
- Проанализируйте последовательность изучения дробных чисел в разных учебниках Федерального списка. Ваш комментарий по тому или иному обоснованию авторов.
- Предложите вариант беседы с учащимися на тему „Возникновение дробных чисел”.
- Используя различия между понятиями „дробь и дробное число”, изучите запись: $0{,}40$; $\frac{0}{100}$; $0{,}4$; $\frac{6}{3}$; 0; $\frac{2}{5}$; $\frac{3}{5}$; $0{,}33$ и ответьте на вопросы: „Сколько различных чисел записано? Сколько среди них дробных? Сколько – целых?”
- Проанализируйте два-три учебника математики для начальных классов с точки зрения пропедевтики понятий „доля”, „дробь”.
- Составьте сравнительную таблицу по последовательности изучения дробных чисел в различных учебниках Федерального списка для 5-х, 6-х классов.
- Обоснуйте, какой источник происхождения дроби целесообразнее положить в основу введения понятия дроби? Почему?
- Проанализируйте упражнения и задачи на формирование понятия дроби.
- Проанализируйте учебную деятельность учащихся по формированию правильной и неправильной дроби.
- Проанализируйте систему упражнений по формированию понятий равных дробей в различных учебниках.

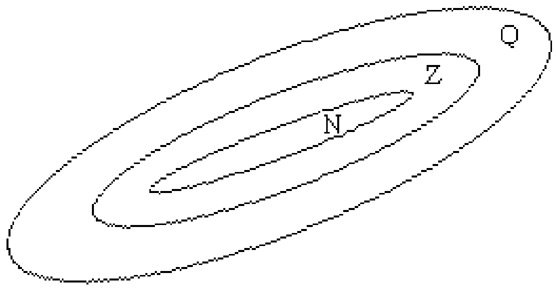
- Ответьте на вопрос: „В какой последовательности целесообразнее изучать преобразования дробей?”
- Рассмотрите последовательность изучения сложения дробных чисел в различных учебниках.
- С какими трудностями учащиеся могут встретиться при изучении вычитания дробных чисел? Как предупредить их?
- Ознакомьтесь с методикой изучения умножения и деления обыкновенных дробей по учебнику Н. Б. Истоминой через систему упражнений.
- Проанализируйте схему изучения умножения дробей по учебнику И. И. Зубаревой и других в 5-х, 6-х классах.
- Ознакомьтесь со статьей Д. А. Волкова в журнале „Математика в школе” (1997. № 2. С. 13 – 14) и ответьте на вопрос: „Какое место занимают устные вычисления при изучении дробных чисел?”
- Укажите математическую значимость понятия взаимно обратных чисел. Какова методика его формирования?
- Правило деления дробей – это теорема, выводимая из определения. Проанализируйте способ вывода этого правила в учебнике Н. Я. Виленкина и других.
- Исследуйте возможности использования алгоритмов для выполнения действий над дробями.
- Ознакомьтесь с методикой обучения учащихся решению задач на дроби Л. В. Виноградовой по журналу „Математика в школе” (1999. № 4. С. 21 – 22).
- Подберите статьи из журнала „Математика в школе”, отражающие опыт работы учителей по изучению дробных чисел, и ознакомьтесь с их методикой.
- Составьте серии задач на применение законов действий.
- Приведите несколько упражнений на совместные действия над дробными числами, выделите наиболее рациональные приемы вычислений.
- В теме „Обыкновенные дроби” в ряде учебников рассматривается понятие пропорции (от латинского – на порции, на части). Объясните, в чем заключается важность этого понятия для математики? Какие задачи решаются с помощью понятия пропорции? Что такое масштаб?

- Исследуйте соотношение индуктивного и дедуктивного методов в изучении дробных чисел. Отметьте особенности использования принципа наглядности в обучении.
- Познакомьтесь с различными методическими подходами в учебниках к введению действия умножения десятичных дробей.
- Покажите на примере одного из учебников обоснование правила деления на дробь.
- Найдите в учебниках серии упражнений на применение законов сложения и умножения.
- Проанализируйте упражнения на совместное выполнение действий над дробными числами.
- Обоснуйте необходимость изучения процентов непосредственно за десятичными дробями.
- Ознакомьтесь с методикой изучения процентов, предлагаемой в журнале „Математика в школе" О. О. Барабановым (2003. № 5. С. 50 – 59), А. В. Шевкиным (1993. № 1. С. 20 – 22), Г. В. Дорофеевым и другими (2002. № 1. С. 19 – 23).
- Составьте план вводного урока по теме „Проценты".
- Выделите этапы формирования умения решать три основные задачи на проценты в различных учебниках.
- Объясните, как можно решать задачи на проценты с помощью пропорций?

2.3. Отрицательные числа и множество рациональных чисел

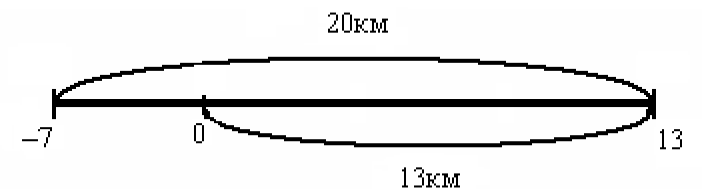
Введение отрицательных чисел является третьим расширением понятия числа после введения нуля и дробей. Присоединение к уже изученным числам (натуральным, нулю и дробным) отрицательных чисел дает множество рациональных чисел. Для усвоения учащимися этот ключевой раздел курса математики 5-х, 6-х классов представляет значительную трудность, так как он менее всего связан с их жизненным опытом. Ранее изученные числа широко используются в жизни и практике, учащимся было легче осознавать потребность в изучении действий над ними. Отрицательные же числа хотя и знакомы учащимся на бытовом уровне, но выступают в их сознании лишь как некоторая характеристика состояния объекта (например, его температуры), а не как числа, над которыми надо производить действия. Сама природа отрицательного числа значительно более сложна, поэтому и путь введения их в науку был тернист и длителен (признаны были только в XVII в.). Необычным для учащихся является двузначность знаков „ ± ” (числа, действия), вычитание из меньшего числа большего, запись −6 + 3 („Из чего вычитать 6?”), умножение отрицательных чисел и другое, что затрудняет понимание смысла действий. В связи с этим методика изучения этого раздела должна носить конкретно-индуктивный, наглядно-геометрический характер с привлечением разнообразных по содержанию жизненных ситуаций для мотивировки изучения отрицательных чисел и включения их в числовую систему наряду с ранее изученными, стремиться постоянно поддерживать и поощрять любознательность и познавательный интерес учеников.

Во всех учебниках Федерального списка этот раздел математики включен в 6-й класс либо под названием „Положительные и отрицательные числа”, либо сразу „Рациональные числа”. В большинстве учебников – это заключительный материал курса (12 – 13-летние дети), что является возвратом к прежним традициям более позднего его изучения. В учебниках просматриваются два подхода к раскрытию идеи отрицательных чисел и правил действия с ними: 1) сначала на целых числах, чтобы сосредоточить главное внимание на знаке числа, так как действия над модулями (натуральными числами) уже усвоены, а затем переходить к дробным числам любого знака, сводя действия над ними к действиям над целыми числами; 2) одновременное использование целых и дробных чисел любого знака. При втором подходе происходит экономия во времени, но он труднее для усвоения.



В содержание этого раздела включены понятия отрицательного и положительного числа, целого числа, рационального числа, противоположных чисел, модуля числа, координатной прямой. Последним четырем даются определения. Вводятся обозначения для чисел (N, Z, Q) и устанавливается соотношение между ними на диаграмме. Методическая схема изучения материала прежняя. Главным моментом является убеждение учащихся в необходимости изучения нового числового множества; осознание отрицательных чисел, которые естественно отражают определенные отношения действительного мира. Существуют несколько способов, чтобы показать учащимся недостаточность известных им чисел для решения конкретных задач: 1) в связи с выполнением действия вычитания без ограничения ($3 - 4 = ?$, $\frac{1}{3} - \frac{1}{2} = ?$ и др.); 2) в связи с рассмотрением величин, которые имеют два противоположных направления (движение вправо – влево, вверх – вниз; температура на улице: тепло-холод; денежные операции: расход – доход, убыток – прибыль, долг-имущество; лента времени: до нашей эры – нашей эры; уровень моря: выше – ниже, глубина – высота и др.); 3) в связи с обозначением положения точки на координатной прямой (математизированная форма практических задач из второго способа); 4) с помощью задачи, решаемой исходя из некоторой формулы общей [12, с. 22 − 23]; 5) с помощью векторов, расположенных на прямой, (см. учебник математики П. М. Эрдниева); 6) с помощью температурной шкалы (см. учебники математики И. И. Зубаревой и других, С. М. Никольского и других); 7) в связи с рассмотрением величины, которая претерпевает изменения (увеличивается или уменьшается) под некоторым воздействием (см. учебник математики Н. Я. Виленкина и других, пункт „Изменение величин”). Заметим, что для введения отрицательных чисел необходимо выбрать две-три практические ситуации и проанализировать их особенно тщательно и подробно, а затем постепенно знакомить учащихся с другими источниками возникновения новых чисел. Естественно рассмотреть первый и третий способы, последний сразу же дает возможность геометрически изобразить числа точками на координатной прямой. При решении практических задач каждый раз приходится к числу добавлять соответствующую оговорку о направлении величины, что затрудняет запись ответа (число и слова). Математики предложили эту оговорку заменять математическими знаками „+” и „–” и ввели термины: положительные и отрицательные числа. Важно научить учащихся правильно записывать эти числа, снабжая их знаком (чисел без знаков нет): $(+2)$, $(+3)$,$(+\frac{1}{2})$ − положительные числа, (-2), (-8), $(-\frac{1}{3})$ − отрицательные числа. На первых порах скобки обязательны и для положительных чисел, а затем их можно будет в записи опускать.

После введения отрицательных чисел необходимо обратить внимание на число нуль: теперь он характеризует величину − температуру воздуха, температуру таяния льда, уровень океана и другое; является началом отсчета (началом координат), нулевой отметкой на шкале приборов; числу нуль знак не приписывают (0 не является ни положительным, ни отрицательным). Достаточное внимание надо уделить ознакомлению с координатной прямой, которая играет важную роль в математике и ее приложениях, к ней неоднократно будут обращаться учащиеся в этом и других разделах. Полезно иметь в классе демонстрационную координатную прямую. С ее помощью можно ввести понятия противоположных чисел (не путать с обратными числами) и модуля числа (термин предпочтительнее, чем абсолютная величина числа, ввиду его краткости). Важно, чтобы учащиеся поняли, что для каждого положительного числа имеется противоположное ему отрицательное число, и наоборот, для каждого отрицательного числа есть противоположное ему положительное число; число нуль не имеет себе противоположного (или противоположно самому себе); знак „–” указывает на противоположную природу числа; запись (−5) можно прочитать двояко: „число минус 5”, „число, противоположное числу 5”; запись −(−5) означает „число, противоположное числу минус 5”, т.е. само число 5; запись в общем виде –(−a) = a, −(+a) = −a. В связи с этим определяется множество целых чисел (натуральные числа, противоположные им числа и нуль) и записывается ряд целых чисел: …, –5, –4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4, 5,… .



Введение модуля числа можно мотивировать задачей, которая показывает, что для ответа на ее вопрос не нужно учитывать направление отсчета значения величины. *Автомобиль прошел от начального пункта вправо 13 км (+13), а затем влево 20 км (−20). Найти, где находится автомобиль после этих двух пробегов.*

Ответ: в 7 км (−7) от начального пункта.

Определение модуля числа дается в геометрической форме как расстояние от начала координат до точки, изображающей это число.

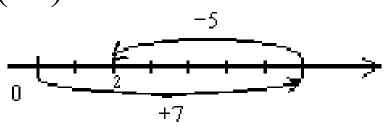
Затем переходят к аналитической формулировке, более приемлемой для выполнения упражнений: $|+4| = 4, |0| = 0, \ |-4| = -(-4) = 4$. Можно дать другое определение противоположным числам, как числам, имеющим одинаковые модули, но отличающиеся знаком ($|-a| = |a|$). В итоге можно заключить, что любое число может быть задано указанием его знака и модуля. Понятие о противоположных числах можно связать с симметричными точками.

Геометрические представления лежат и в основе сравнения чисел. Правила сравнения можно вывести из известного правила сравнения положительных чисел: из двух чисел больше то, которое расположено правее на горизонтальной координатной прямой (аналогично с помощью ряда целых чисел). Сравнение чисел можно ввести, используя термометр, а также с помощью их модулей. Правила сравнения: с нулем (положительные числа больше нуля, отрицательные − меньше нуля), положительных и отрицательных чисел (положительное больше отрицательного), отрицательных чисел (меньше то, модуль которого больше), положительных чисел (меньше то, модуль которого меньше). Правила должны быть хорошо усвоены учащимися в процессе обобщения наблюдений и достаточного числа упражнений. В случае затруднений учащиеся должны прибегать к координатной прямой, ограничиваясь схематическим изображением чисел без строгого соблюдения масштаба.

Большое внимание должно быть уделено действиям над положительными и отрицательными числами, их законам и свойствам. Очень важно, чтобы учащиеся поняли (а не только заучили) правила выполнения действий. Для этого необходимо создать содержательную основу для подведения учащихся к правилам через конкретные задачи, которые можно решать с помощью модели термометра, координатной прямой, ряда целых чисел, понятий финансовой деятельности (доход − расход, прибыль − убытки) и др. Правила формулируются в форме алгоритма, который предполагает нахождение знака модуля числа − результата действия. Чаще всего сложение описывают как последовательное изменение положения точки на координатной прямой (прибавить к числу *а* число *в* – значит изменить число *а* на *в* единиц). С помощью координатной прямой находят сумму: (+2) + (3); (−2) + (–3); (+3) + (–2); (+2) + (−3); (+3) + (–3); (–3) + 0 − эти суммы могут быть взяты из конкретных задач (например, *термометр пока-*

зывает – 2 °С. *Каким будет его показание после изменения температуры на* – 3 °С?).

Покажем обоснование смысла суммы (+7) + (–5):

Перемещение точки по координатной прямой: вправо (+7) и влево (−5):  (+7) + (−5) = (+2)	При доходе 7 тыс. р. и расходе 5 тыс. получим прибыль в 2 тыс. р.: (+7) + (−5) = (+2)	Температура воздуха была 7 °С, затем − понизилась на 5 °С. Теперь температура будет + 2 °С: (+7) + (−5) = (+2)

Вычитание с самого начала определяется как действие, обратное сложению. Здесь оно получает простой смысл − достаточно прибавить противоположное число: $a - b = a + (-b)$. Эту формулу можно получить, решая задачу. *Вечером термометр показывал* a °С. *К утру температура понизилась на* b °С. *Какова утренняя температура?* Доказать формулу можно, опираясь на определение действия вычитания и сочетательный закон сложения: $\big(a + (-b)\big) + b = a + \big((-b) + b\big) = a + 0 = a$. После введения отрицательных чисел действие вычитания становится всегда выполнимым. В ряде учебников оба действия объединяются под одним названием *нахождение алгебраической суммы*, которое позволяет упрощать запись − не писать знаки действия сложения, а числа записывать с их знаками без скобок. Например, сумму чисел (– 4) + + (+5) + (–3) + (+1) + (–6) можно записать короче: – 4 + 5 – 3 + 1 – 6. Для нахождения суммы группируют положительные и отрицательные слагаемые и складывают их по отдельности (– 4 – 3 – 6) + (5 + 1) = –13 + + 6 = –7. При раскрытии скобок можно пользоваться правилом знаков: – (–…) = +…, – (+…) = –…, а при чтении вместо пропущенного знака „+” говорить „да” (минус 4 да плюс 5 да минус 3 и т.д.). В тех учебниках, где не вводится термин „алгебраическая сумма”, говорят о раскрытии скобок.

При введении умножения необходимо показать потребность в выполнении этого действия и целесообразность соответствующих правил. Естественно, что умножение на отрицательное число, как и на дробное число (дробь), нельзя рассматривать как умножение на натуральное число, это определение действия здесь не применимо. Необходимо новое (оно дается только в учебнике С. М. Никольского и других). На практике поступают иначе – дают правило выполнения действия, которое и заменяет определение. Вывести правило можно с использованием задачи на вычисление пути (отрицательные значения принимает либо скорость (движение назад), либо время (в прошлое), либо то и другое) или задачи на вычисление температуры (отрицательные значения принимает либо изменение температуры, либо приращение времени, либо то и другое). В каждой задаче рассматриваются четыре конкретных случая с числовыми данными, охватывающие все случаи умножения положительных и отрицательных чисел, и с помощью модели координатной прямой или термометра находят произведение (например, с такими числами: (+ 5) и (+ 4), (– 5) и (+ 4), (+ 5) и (– 4), (– 5) и (– 4)). Некоторые авторы предлагают просто самим „придумать” правила, исходя из анализа четырех записанных произведений. Учащиеся убеждаются, что в результате получим числа с равными модулями, а в парах отличающиеся знаком. В этом случае и в случае, если учитель сам сообщит правила, необходимо убедить учащихся в их целесообразности на разнообразных практических задачах. После введения правил важно рассмотреть частные случаи умножения (на 0, 1, –1), сформулировать краткое правило знаков (плюс на минус дает минус, минус на минус дает плюс) и подчеркнуть, что оно совпадает с правилом раскрытия скобок. Развеять сомнения учеников в том, что произведение положительно и при отрицательных числах, можно высказыванием „двойное отрицание – утверждение”.

Деление (как и вычитание) вводится как действие, обратное умножению. Методика работы на уроке обычная, правила выводятся индуктивно, рассматриваются частные случаи, обращается внимание, что деление на нуль невозможно (обоснование факта такое же, как и в случае с натуральными числами). Важно отметить постановку знака „ – ” перед дробью: для любых чисел a и b $\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}=-\frac{a}{b}$.

В этом разделе большое внимание уделяется выработке навыков выполнения действий, в том числе в упражнениях на совместные действия. В вычислениях применяются законы действий для упрощения выражений. Законы действий проверяются (как и раньше) на конкретных упражнениях. Отрицательные числа позволяют иначе решать уравнения – более общим способом.

Изучение раздела завершается введением определения рационального числа, которое можно записать в виде отношения (дроби) $\frac{m}{n}$, где $m \in Z$ и $n \in N$. После построения множества рациональных чисел необходимо систематизировать знания учеников. В частности, отметить, что действия (кроме деления на нуль) всегда выполнимы (свойство замкнутости), результат всегда единственен и является рациональным числом, всегда из двух чисел можно указать большее и меньшее (свойство упорядоченности), между любыми двумя числами можно вставить бесконечно много чисел (свойство плотности), любое целое число является рациональным числом, действия подчиняются законам и свойствам, имеется нейтральный элемент ($a + 0 = a$, $a \cdot 1 = a$) и противоположный элемент ($a + (-a) = 0$, $a \cdot \frac{1}{a} = 1$), числа допускают различные формы записи. Множество рациональных чисел еще не позволяет установить взаимно однозначное соответствие между числами и точками координатной прямой (точек больше). Программа предусматривает рассмотрение вопроса о записи рационального числа в виде десятичной дроби (конечной и бесконечной), понятия периодической дроби и ее приближенного значения с недостатком и с избытком.

Задания для самостоятельной работы

- Ознакомьтесь с учебным материалом по введению понятий отрицательного и положительного чисел в различных учебниках. Какой учебник ближе вам по сложившимся стереотипам?
- Проанализируйте систему упражнений в каждом учебнике по усвоению вводимых понятий.
- Обратите внимание на диалоговый режим обучения по введению понятий в учебнике Н. Б. Истоминой. Как это помогает их изучению?
- Охарактеризуйте систему упражнений в учебниках по усвоению понятий противоположных чисел и модуля числа. Достаточна ли она, с вашей точки зрения?
- Проанализируйте упражнения на сравнение целых чисел в разных учебниках.

• Объясните, какова методика формирования понятия координатной прямой для учащихся 6-го класса? Почему эту прямую называют координатной?

• Опишите принцип реализации обучения через задачи в учебнике И. И. Зубаревой.

• Продолжите обобщающую таблицу, используя задачный материал всех учебников, по образцу:

Отрицательным числом выражается	Числом нуль выражается	Положительным числом выражается
Координата точки, лежащей на координатной прямой левее начала координат (точки 0)	Координата точки 0 – начало координат	Координата точки, лежащей правее точки 0 – начала координат
Расход (денег, воды, топлива и т.п.)		Приход (денег, воды, топлива и т.п.)
……………….....................	………………….…….	………………...………

• Проанализируйте методический подход к введению правил действий в различных учебниках.

• Составьте блок-схему алгоритма сложения чисел с разными знаками.

• Ознакомьтесь с рассуждениями двух учеников при введении правил действий в учебнике Н. Б. Истоминой. Выскажите свое мнение о такой методике работы.

• Ознакомьтесь с методической схемой введения правил умножения в учебнике И. И. Зубаревой. Выскажите свое суждение.

• Проанализируйте методику работы по введению правил деления чисел в различных учебниках.

• Проанализируйте систему упражнений по применению распределительного закона.

• Познакомьтесь со „сложенческо-умноженческим” словарем в учебнике-собеседнике. Как его можно использовать с учащимися?

• Познакомьтесь с выводом правил умножения и деления в учебнике-собеседнике.

• Изучите опыт учителей, описанный в журнале „Математика в школе”: Ю. В. Покорного (2000. № 3. С. 24 – 30), А. В. Шевкина (1991. № 3. С. 17 – 21), В. А. Котовой (2002. № 7. С. 54 – 55), М. Б. Воловича и И. В. Клещевой (2004. № 7. С. 78, 41 – 43), М. Ю. Шубы (1995. № 3. С. 14 – 16).

2.4. Иррациональные числа и множество действительных чисел

Введение иррациональных чисел является четвертым расширением понятия числа. Добавление к уже изученным ранее рациональным числам иррациональных чисел приводит к множеству действительных (вещественных) чисел. Новое числовое множество представляет определенные трудности как в выборе наиболее приемлемого для школы варианта построения (существующие различные научные теории выходят за границы возможностей учащихся), так и для восприятия и усвоения школьниками сложной по своей природе идеи иррационального числа, потребности в ознакомлении с новыми числами. Важно соблюдать доступность изложения материала с научным подходом на уровне школьного обучения. Традиционно этот раздел математики изучался в старших классах. В связи с переходом на новую программу изучение действительных чисел было перенесено в курс алгебры основной школы. Считается, что основные факты теории действительного числа доступны учащимся 8-го класса (в учебниках С. М. Никольского и других этот материал изложен уже в 6-м классе). К таким основным фактам стандарт и программа по математике относят: „Корни n-ой степени из числа (квадратный и кубический). Понятие об иррациональном числе и его десятичных приближениях. Действительные числа как бесконечные десятичные дроби. Сравнение и действия над ними”. Этот минимальный объем содержания позволяет сформировать у учащихся уже в 8-м классе цельное представление о числе, полнее обеспечить потребности вычислительной практики, строже изложить функциональный материал и т.д. Программа не предусматривает дальнейшего изучения действительных чисел в старших классах на более высоком уровне строгости, поэтому учитель на этом этапе должен создать у учащихся правильное и отчетливое представление об иррациональных числах (не сводящееся только к квадратным корням), используя алгебраический и геометрический материал. Углубить и расширить теоретический материал возможно на внеклассных мероприятиях (кружковых, факультативных), элективных курсах.

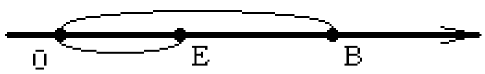
В большинстве учебников иррациональное число рассматривается как бесконечная периодическая дробь (как и в теории Вейерштрасса) и дается соответствующее определение: „Иррациональным числом называют бесконечную непериодическую десятичную дробь”.

Число определяют через его запись (представление), поэтому некоторые авторы оспаривают это определение, считая, что число и его запись не одно и то же, и предлагают другое определение в виде отрицания: „Иррациональным числом называется число, которое не является рациональным”. Учителю нужно придерживаться точки зрения автора избранного учебника для учащихся. Здесь важно не формальное определение, а умение ученика отдифференцировать рациональное число от иррационального на конкретных примерах. Действительное число в школе не определяется. Определяются понятия *квадратный корень из числа*, *арифметический квадратный корень*; формулируются и доказываются свойства арифметического квадратного корня; выполняются несложные преобразования корней. М. И. Башмаков считает, что необходимо сократить материал о тождествах, связывающих радикалы.

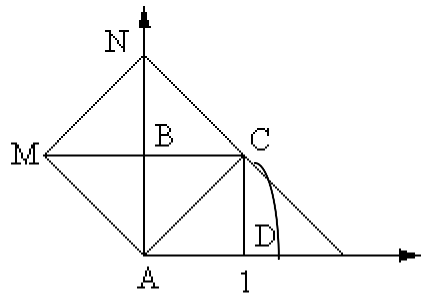
В методическом отношении важен вопрос мотивировки изучения новых чисел. Поскольку для практических нужд достаточно рациональных чисел, то введение иррациональных чисел опирается прежде всего на выявление внутренних потребностей математики. Они могут быть обнаружены в связи с извлечением квадратного корня (из положительных рациональных чисел, не являющихся полными квадратами); решением простейших квадратных уравнений вида $x^2 - a = 0$ (при тех же условиях для *a*); измерением длин отрезков (в случае несоизмеримости длины отрезка с выбранным единичным отрезком); нахождением координат точек на координатной прямой (установлением соответствия между точками координатной прямой и числами); построением графиков функций (получение непрерывных линий). Все сформулированные задачи неразрешимы на множестве рациональных чисел. Они обязательно все должны быть рассмотрены в той последовательности, какую предлагает учебник. Каждый из источников появления иррациональных чисел по-своему разъясняет их природу. Существуют иррациональные и числа другого происхождения: число π ($C = \pi d$, $S = \pi R^2$), с которым учащиеся знакомы с 6-го класса; $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\mathrm{tg}\,60^\circ = \sqrt{3}$, $\lg 3$, $\sqrt[3]{2}$, $\sqrt[5]{3}$ и другие, для записи которых используются символы операций, в следствие чего они получаются. Иррациональных чисел бесконечно много, и в некотором смысле их даже больше, чем рациональных чисел (если представилась бы возможность рациональные точки окрасить в черный цвет, а иррациональные – в красный, то координатная прямая была бы сплошь красной). Множество разрывов имеет большую мощность.

Изучению иррациональных чисел во всех учебниках предшествует систематизация и развитие известных учащимся из 6-го класса сведений о рациональных числах, которые закрепляются в ходе выполнения упражнений. Большее внимание необходимо уделить их представлению в виде десятичных дробей. На конкретных примерах рассматривается обращение обыкновенной дроби в конечную или бесконечную десятичную дробь, но периодическую. После договоренности о том, что конечные десятичные дроби и целые числа можно считать периодическими с периодом 0, формулируется вывод о взаимно однозначном соответствии между множеством рациональных чисел и множеством бесконечных периодических десятичных дробей (при этом для обеспечения однозначности исключаются дроби с периодом 9, которые считают просто другой записью дробей с периодом 0: 0,(9) = 0,999… = 1,000… = 1,(0) = 1; 2,45(9) = 2,46(0) = 2,46). На практике деления уголком десятичная дробь с периодом 9 получиться не может. Чтобы убедить учеников во взаимной однозначности соответствия, можно показать на конкретных примерах перевод бесконечных периодических десятичных дробей в обыкновенные, в том числе с периодом 9. Однако этот вопрос можно отложить до изучения в 9-м классе бесконечной геометрической прогрессии, когда этот перевод можно осуществить значительно проще по формуле суммы. Возможно, уже на этом этапе учащиеся выскажут догадку о существовании и непериодических десятичных дробей. Тогда можно показать принцип составления таких дробей, вспомнить число π и ввести соответствующую терминологию. Так и поступают в учебниках С. М. Никольского и других для 6-го класса и Ш. А. Алимова и других в 8-м классе.

Существование бесконечных десятичных периодических и непериодических дробей можно показать на задаче десятичного измерения длины отрезка:



Теоретически этот процесс может быть бесконечным, и в результате мы можем получить два случая: либо на каком-то шаге не получится остатка (будем иметь натуральное число или десятичную дробь), либо остатки будут получаться на каждом шаге (будем иметь бесконечную десятичную дробь). Практически нельзя обнаружить существование несоизмеримых отрезков, так как единицу измерения делить бесконечно невозможно. Поэтому на практике довольствуются приблизительным значением длины отрезка (например, с недостатком). Все же необходимо предложить учащимся выполнить процедуру измерения хотя бы трех отрезков, заданных условием равенства их $\frac{7}{4}$ и $\frac{8}{3}$ единичного отрезка, диагонали квадрата со стороной, равной 1. В результате они получат числа 1,75000…, 2,666…, 1,414… . В последнем случае геометрически можно убедиться, что $S_{AMNC} : S_{ABCD} = 2$, а затем доказать, что не существует рационального числа, квадрат которого равен 2. Этот факт, полученный более двадцати веков тому назад математиками Древней Греции, вызвал кризис в науке: сторона у квадрата есть, а длины у нее нет. В итоге появились новые числа – иррациональные, которые не представимы в виде квадрата целого или дробного числа. Таких чисел много, даже среди натуральных: 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, … . Отрезки с иррациональными длинами можно построить с помощью теоремы Пифагора, если она уже изучена в курсе геометрии (в учебнике Г. В. Дорофеева и других теорема рассматривается и в курсе алгебры 8-го класса).



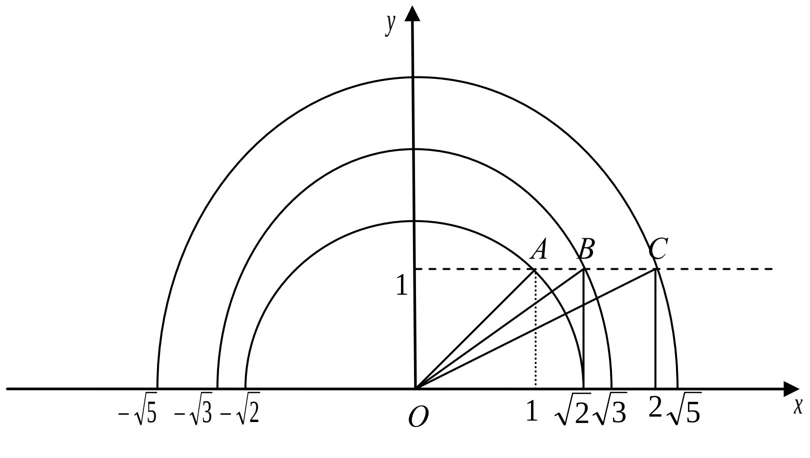
Рассмотренный геометрический подход можно сочетать с алгебраическим, предложив ученикам решить хотя бы уравнение $x^2 – 2 = 0$, которое не разрешимо на множестве рациональных чисел. Обратившись к графическому решению этого уравнения, учащиеся убедятся, что имеются две точки пересечения параболы $y = x^2$ и прямой $y = 2$, поэтому корни уравнения есть, и они отличаются только знаком (как и в случае $x^2 = 4$, $x^2 = 9$,…). Встретившись с этой ситуацией, математики ввели новые числа – иррациональные, с помощью которых можно записать корни этого уравнения: $x_1 = \sqrt{2}, x_2 = -\sqrt{2}$. Строгое доказательство того, что уравнение $x^2 = 2$ не имеет корней на множестве рациональных чисел, дал еще Евклид. Заметим, что обращение к графикам функций $y = x^2$ и $y = 2$, еще не имея иррациональных чисел, не вполне оправданно, но сомнения у учащихся в наличии точек пересечения вряд ли возникнут, поэтому с методической точки зрения это возможно.

Иррациональные числа необходимы и при выполнении действия извлечения квадратного корня из рационального числа, являющегося обратным к действию возведения в квадрат. Эти действия приходится производить при решении двух взаимно обратных задач: нахождение площади S квадрата по его стороне a (S = a^2) и стороны a по его площади S ($a = \sqrt{S}$). После решения ряда задач с числовыми данными, отвлекаясь от содержания, можно ввести понятие квадратного корня из данного числа, как числа, квадрат которого равен данному числу. Можно сказать иначе: квадратный корень из числа a – это корень уравнения $x^2 = a$. Обратить внимание на совпадение терминов – квадратный корень и корень уравнения. Квадратный корень можно извлечь только из неотрицательного числа. Поскольку уравнение имеет два корня, то один из них – неотрицательный – называют арифметическим квадратным корнем и для обозначения его вводят символ (знак) $\sqrt{\ }$, называемый радикалом. Учащиеся находят (извлекают) арифметические квадратные корни ($\sqrt{25} = 5$, $\sqrt{121} = 11$, $\sqrt{\frac{1}{49}} = \frac{1}{7}$ и др.) и доказывают, исходя из определения, данные равенства (например, $\sqrt{64} = 8$, так как: 1) $8 \geq 0$ и 2) $8^2 = 64$). Затем учащиеся убеждаются, что на множестве рациональных чисел это действие не всегда выполнимо: $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{7}$ и т.п. Основное внимание уделяется вычислениям и простейшим преобразованиям числовых выражений, содержащих радикалы. Важно остановиться на нахождении приближенных значений квадратного корня (если невозможно найти точного значения). Существуют различные способы приближенного вычисления. Один из них – с помощью выражения бесконечными десятичными непериодическими дробями, в основу которого положен теоретический факт: если $a > 0$ и $b > 0$, $a^2 < b^2$, то $a < b$ (квадрат с меньшей площадью имеет и меньшую сторону). На практике пользуются специальными таблицами или микрокалькулятором. Увеличивая точность приближения, учащиеся убедятся в существовании бесконечных непериодических десятичных дробей, т.е. нерациональных чисел.

В основной же школе дается понятие об извлечении корня третьей степени и *n*-степени из числа. Иначе говоря, происходит обобщение понятия корня. Изучение ведется на пропедевтическом уровне, с этим вопросом учащиеся еще встретятся в старшей школе. Рассмотрев появление иррациональных чисел (положительных и отрицательных) в различных ситуациях, необходимо сообщить учащимся, что любое иррациональное число представимо в виде бесконечной десятичной непериодической дроби и наоборот; рациональные и иррациональные числа вместе образуют множество действительных чисел (обозначается буквой R); действительные числа можно сравнивать и выполнять над ними арифметические действия, все законы и свойства которых остаются справедливы и в этом множестве.

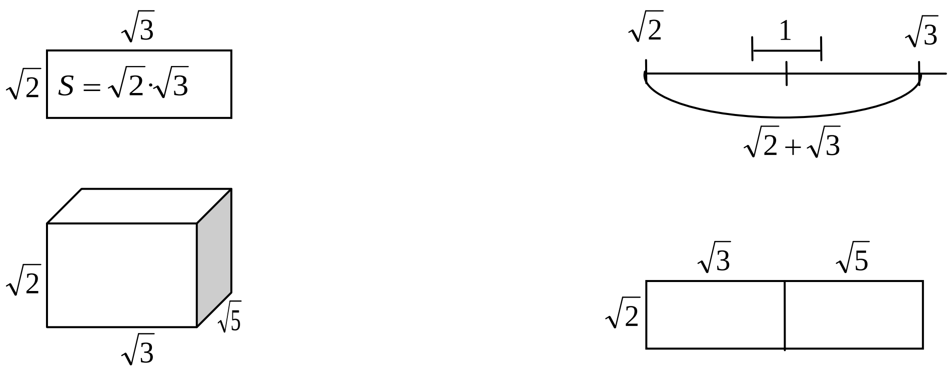
При рассмотрении геометрической интерпретации действительных чисел надо, чтобы учащиеся поняли, что точки, соответствующие действительным числам, сплошь заполняют координатную прямую. Между точками и числами теперь установлено взаимно однозначное соответствие. Изображать иррациональные числа можно с помощью теоремы Пифагора:

$$OA=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$
$$OB=\sqrt{(\sqrt{2})^2+1^2}=\sqrt{3}$$
$$OC=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$$
$$\cdot\ \cdot\ \cdot$$



Сравнение действительных чисел сводится к сравнению их приближения с помощью бесконечных десятичных дробей по уже известным правилам сравнения рациональных чисел. Можно сравнить с помощью графика функции $y=\sqrt{x}$ ($\sqrt{27}$ и $\sqrt{28}$, $\sqrt{7}$ и $\sqrt{3}$) или теоремы ($a,b \geq 0$; $a<b \Rightarrow \sqrt{a}<\sqrt{b}$), свойств корней ($3\sqrt{3}$ и $\sqrt{12}$, $5\sqrt{4}$ и $4\sqrt{5}$), координатной прямой. Можно предложить сравнить длину гипотенузы прямоугольного треугольника с катетами 1 см и 3 см с длиной окружности R = 0,5 см ($\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{10}$(см) и С = 2π ·0,5 = π (см), $\sqrt{10}$ = 3,1622… и π = 3,1415…, $\sqrt{10}>\pi$).

Действия устанавливаются с помощью специальных определений в математических классах старшей школы с использованием понятия десятичного приближения с недостатком и избытком. Можно показать геометрический смысл, выполняя построения с помощью циркуля и линейки:



$$V=\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}=\sqrt{30} \qquad S=\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})=\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}+\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}$$

Знакомство же с определениями преследует лишь теоретический интерес. Важно обращать внимание на то, что результат действия (число) всегда существует (кроме деления на нуль) и единственен. На практике довольствуются приближенными значениями с выбранной точностью.

Приведем определение суммы: суммой двух действительных чисел называется такое действительное число, которое не меньше суммы любых десятичных приближений этих чисел по недостатку, но меньше суммы соответствующих им десятичных приближений по избытку при любой точности. Учащимся следует показать на примере сложения и умножения чисел α = 1,21211211123 … и β = 3,616616661 … с точностью до 0,01. В целях экономии времени можно приготовить таблицу заранее:

Точность	α	β	$\alpha+\beta=\varphi$	$\alpha\cdot\beta=\varphi$
1	$1\le\alpha<2$	$3\le\beta<4$	$4\le\varphi<6$	$3\le\varphi<8$
0,1	$1{,}2\le\alpha<1{,}3$	$3{,}6\le\beta<3{,}7$	$4{,}8\le\varphi<5{,}0$	$4{,}32\le\varphi<4{,}81$
0,01	$1{,}21\le\alpha<1{,}22$	$3{,}61\le\beta<3{,}62$	$4{,}82\le\varphi<4{,}84$	$4{,}3681\le\varphi<4{,}4164$
0,001	$1{,}212\le\alpha<1{,}213$ …	$3{,}616\le\beta<3{,}617$ …	$4{,}828\le\varphi<4{,}830$ …	$4{,}382592\le\varphi<4{,}387521$ …
0,01	–	–	$x+y=4{,}82\ldots$	$x\cdot y=4{,}38\ldots$

Хотя невозможно записать всю десятичную дробь ($\alpha+\beta$ и $\alpha\cdot\beta$), есть способ получить любой десятичный знак в записи результата. А это и означает, что найден искомый результат. Существование результата можно показать с помощью аксиомы Кантора о вложенных стягивающихся отрезках.

Необходимо сравнить рациональные и иррациональные числа по результату действий. Любые действия над рациональными числами приводят в результате к рациональному числу. Этого нельзя сказать про иррациональные числа (ведь они и называются „неразумными” числами): $\sqrt{5}\sqrt{5}=5$, $\sqrt{5}\sqrt{3}=\sqrt{15}$, $(3+\sqrt{2})+(3-\sqrt{2})=6$; $(3+\sqrt{2})(3-\sqrt{2})=7$ и др. Если в действии присутствуют рациональное и иррациональное число, то результат – иррациональное число.

Задания для самостоятельной работы

- Сравните последовательность изучения иррациональных чисел в разных учебниках. Выскажите свои суждения.
- Выясните роль геометрической иллюстрации при изучении действительных чисел.
- Докажите иррациональность чисел $\sqrt{2},\sqrt{5},\sqrt{7}$.
- Ответьте на вопрос: „Какие сведения о квадратных корнях изучаются в основной школе?”
- Создайте проблемную ситуацию при введении иррациональных чисел.
- Продумайте методику изучения сравнения действительных чисел.
- Предложите способ формирования достаточно многопланового взгляда на природу иррациональных чисел.

- Перечислите способы извлечения квадратного корня из числа. Ознакомьтесь с книгой Л. Ф. Пичугина (За страницами учебника алгебры. М. : Просвещение, 1999) и учебником К. С. Муравина и других (Алгебра-8) по этому вопросу.
- Продумайте методику изучения действий с квадратными корнями.

2.5. Мнимые числа и множество комплексных чисел

Очередное – пятое расширение понятия числа изучается в профильных классах старшей школы, как его логическое завершение. Последнее расширение было в 8-м классе основной школы, когда было построено множество действительных чисел. Поэтому во вводной беседе необходимо проследить все ступени становления понятия числа, вспомнив мотивировку введения каждого нового множества, геометрическую иллюстрацию и выполнимость арифметических действий, провести краткий исторический экскурс. Ученики должны получить отчетливое представление о том, что последовательные этапы расширения понятия числа сопровождались постепенным „заселением” координатной прямой числами. После построения поля действительных чисел координатная прямая полностью оказалась „заселенной” числами и установилось взаимно однозначное соответствие между точками и числами. В распоряжении математики есть координатная плоскость, которую тоже можно „заселять” числами, но уже новыми.

Мотивировать мнимые числа возможно только внутренними потребностями математики, так как показать связь новых чисел с реальной действительностью на уровне школьника затруднительно. Да и в математику исторически они вошли исходя из ее потребностей, а практическую значимость получили значительно позже (например, в исследовании движения жидкостей и газов, в электротехнике, самолетостроении). Старшеклассники уже в состоянии понять и уважать нужды самой математической науки, являющейся косвенным проявлением запросов все той же практики. Впервые задачу, приводящую к квадратному уравнению с отрицательным дискриминантом, решил Д. Кардано (XVI в.), рассмотрев квадратный корень из отрицательного числа, и соответствующее число назвал софистическим. Эти числа считались „ненастоящими”, „воображаемыми” (отсюда и термин „мнимое число”) до тех пор, пока им У. Гамильтон (XIX в.) не дал геометрическую иллюстрацию с помощью вектора. Название „комплексное число” было предложено К. Гауссом в 1831 г.; эти числа получили признание после работ Л. Эйлера. Учащиеся убедились еще в 8-м классе, что квадратное уравнение с отрицательным дискриминантом на множестве действительных чисел не имеет корней, действие извлечения квадратного корня (корня четной степени) не определено для отрицательных действительных чисел. Обе эти задачи могут быть взяты в качестве мотивировки введения новых чисел.

Существуют различные методические подходы к введению новых чисел в школе, апробированные на факультативных занятиях, в специализированных математических классах за последние 30 лет; комплексные числа обязательно изучались в общеобразовательной школе до реформы 70-х гг. прошлого века.

Согласно первому (формальному) подходу сразу вводится обозначение и определение комплексного числа, как числа в виде $a + bi$, где a и b – действительные числа, i – мнимая единица (новое число, такое, что $i^2 = -1$), „+” – соединительный знак (позднее назовут его знаком сложения). Комплексное число по виду составное, смешанное. Затем изучают действия.

Второй подход (способ Гамильтона) рассматривает комплексное число как упорядоченную пару действительных чисел (a, b), изображаемое некоторой точкой ориентированной плоскости. Определяются действия над числами, заданными парами. Затем вводится мнимая единица, алгебраическая (координатная) и тригонометрическая формы записи комплексного числа и правила выполнения действий.

Третий подход в основе имеет геометрическую иллюстрацию чисел на координатной плоскости. Он имеет следующие разновидности.

1. *Через рассмотрение множества точек координатной плоскости.* Вспомнив, что каждой точке координатной прямой можно поставить в соответствие действительное число, резонно направить мысль учеников на решение новой задачи: нельзя ли аналогичным образом задать числом любую точку, произвольно взятую на этой

плоскости? Ответ может быть таким: одним числом нельзя, а вот парой чисел можно – абсциссой и ординатой точки, т.е. двумя действительными числами. Положение точки на плоскости характеризуется двумя числами, которые можно рассматривать как одно новое число, состоящее из двух числовых элементов – „составное” число. Его можно назвать „комплексным числом” (в переводе на русский язык этот латинский термин и означает „составное число”). Вводится определение, соответствующее второму подходу. Комплексные числа характеризуют вполне реальное положение точек координатной плоскости (таинственность чисел исчезает). Вводится запись: $Z = (x, y)$, которая подчеркивает не изолированность друг от друга чисел x и y, а единое целое – одно число. Устанавливается взаимно однозначное соответствие между комплексными числами и точками координатной плоскости. Важно рассмотреть различные случаи расположения точек на координатной плоскости и задание их числом: M(0,0); $M \in OX$; $M \in OY (y \neq 0)$; $M(x, y)$. Особо выделив пару $(0,1) = i$ – „мнимая единица”; ввести обозначение $(x, y) = x + yi$. При этом четко различать и правильно называть числа: 1) комплексными – при любых x и y; 2) действительными – при $y = 0$; мнимыми – при $y \neq 0$; чисто мнимыми – при $x = 0$; изображать их на координатной плоскости. Множество действительных и мнимых чисел вместе образуют множество комплексных чисел.

2. *Через рассмотрение множества векторов.* Каждая точка координатной плоскости имеет радиус-вектор с началом в точке O(0,0) и концом в точке $M(x, y)$, обозначаемым $\overrightarrow{OM}$. Тем самым будем говорить о векторах в координатной форме (в курсе геометрии основной школы это было изучено), которые задают комплексные числа. Сумма двух чисел будет определена как диагональ параллелограмма, построенного на векторах слагаемых.

В пропедевтическом плане знакомство с комплексными числами возможно при изучении алгебры в основной школе. Для этого имеются предпосылки – изложение первоначальных сведений в действующих учебниках. Это позволит дать интуитивно-наглядные представления, которые могут быть использованы при изучении материала в 11-м классе по учебнику Н. Я. Виленкина и других.

Задания для самостоятельной работы

• Ознакомьтесь с материалом, изложенным в учебниках алгебры основной школы.

• Ознакомьтесь с содержанием материала в Стандарте и программе по математике для профильных классов.

• Изучите материал темы „Комплексные числа” по учебнику Н. Я. Виленкина и других.

• Продумайте методику введения комплексных чисел и геометрическую интерпретацию.

• Продумайте методику изучения действий над комплексными числами, заданными в алгебраической и тригонометрической формах.

• Ответьте на вопрос: „Как ознакомить учащихся с основной теоремой алгебры?”

Глава 3
ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРАКТИКА И ЕЁ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ

3.1. Методика изучения приближенных вычислений

Вычисления с давних пор играют важную роль в жизни общества. Часто мы сознательно заменяем число его приближением, так как точное значение его нам не требуется. Вычисления выполняют основную роль во многих научных и технических достижениях. Во всех случаях, когда нужно довести до конца решение какой-либо практической задачи, необходимо получить числовой результат. Если исходные данные приближенные, то нельзя добиться любой степени точности результата. Надо уметь оценивать точность исходных данных, а также определять, какая точность результата может быть достигнута и какая точность результата нужна при практическом использовании полученных числовых результатов. Для этого нужно организовать вычисления так, чтобы получить результаты с требуемой точностью при минимальной затрате вычислительного труда. Для достижения этой цели необходимо ознакомиться с теорией приближенных вычислений, которая излагается в разделе „Вычислительная математика”. Математический аппарат приближенных вычислений используется в физике, химии, биологии, медицине, где находят числовые значения величин с помощью приборов и необходимо знать погрешность вычислений по формулам. Ввиду значимости вопроса тема „Приближенные вычисления” включена в школьную программу как имеющая важное прикладное значение. Формируемые в ней понятия будут использованы в других смежных предметах и практической деятельности. Опыт показал, что изучение приближенных вычислений в курсе математики у учащихся вызывает определенные трудности, им не совсем понятна необходимость изучения, когда у всех имеются микрокалькуляторы. Надо заметить, что ряд методистов считают необходимым сократить до минимума объем учебного материала по теме, так как он слабо подкреплен практическими приложениями в школьной математике. В действующих учебниках материал излагается с различной степенью детализации. Предельно кратко рассмотрен материал в учебниках алгебры Г. В. Дорофеева и других, А. Г. Мордковича, М. И. Башмакова. По линии сокращения пошли и авторы Стандарта общего математического образования, включив только вопросы: „Округление чисел. Прикидка и оценка результатов вычислений. Выделение множителя – степени десяти в записи числа”. Значительно больший объем сведений включала программа по математике в реформе 1970-х гг. и позднее, а также в дореформенный период по предложению В. М. Брадиса. Предложенный в Стандарте материал распределен между двумя блоками: 5-е, 6-е и 7 – 9-е классы. Отдельные вопросы, не обозначенные Стандартом, рассматриваются и в старших классах: приближенные вычисления функций (с помощью производной и интегралов), приближенные формулы и др. Можно сказать, что вопросы приближенных вычислений распределены по всему курсу математики с 5-го по 11-й класс. Крупноблочное изучение предполагает рассмотрение только основных понятий теории приближенных вычислений.

Чтобы более осознанно воспринимались понятия теории приближенных вычислений, необходимо ознакомить учащихся с источниками приближенных вычислений: 1) измерение величин (расстояния, скорости, температуры, стоимости, времени, площади, объема и т.д.) с помощью соответствующих приборов, имеющих допустимую точность (органы зрения тоже допускают погрешность); 2) округление чисел по практическим соображениям; 3) всякого рода „прикидки” (например, число присутствующих на митинге, длина шага на глаз, в вычислениях с десятичными дробями); 4) использование таблиц, микрокалькулятора и др.

Начальные сведения о приближенных вычислениях учащиеся получают в 5-м классе либо в темах „Натуральные числа”, „Десятичные дроби”. Уже по названию темы ясна последовательность изучения понятия об окружении чисел. Труднее ученикам округлять натуральные числа (до единиц, десятков, сотен и т.д.), так как им приходится заменять цифры нулями; проще начать округлять десятичные дроби (до единиц, десятков, сотен и т.д.), где приходится отбрасывать соответствующие цифры. В начале следует на наглядном материале (нахождение массы и длины) ознакомить учащихся с понятием приближенного значения числа с недостатком (приближение снизу) и с избытком (приближение сверху), записью в виде двойного неравенства (например, $3 < x < 4$). Обратить внимание на то, что на практике пользуются оценками „около”, „более”, „от….до”, „ближе”, „примерно” и т.п. (например, мы говорим, что число 6375 ближе к числу 6 тыс., чем к числу 7 тыс.). Понятие „близости” расположения числа поможет подвести учащихся к округлению чисел. Основная трудность при округлении и состоит в выборе из двух приближенных значений с недостатком и с избытком лучшего приближенного значения. Термин „округление” отождествляется с заменой первоначального числа другим числом, лучшим образом удовлетворяющим практике. Округление вначале осуществляется на содержательном уровне (по смыслу задачи), а затем по правилу. Правило можно представить таблицей:

Первая отброшенная или замененная нулем цифра	Цифра, стоящая перед первой отбрасываемой или замененной нулем
0, 1, 2, 3, 4	Остается без изменения
5, 6, 7, 8, 9	Увеличивается на 1

Вводится знак приближенного равенства „$\approx$”. Обратить внимание на то, что число, полученное округлением данного, является его приближением или приближенным значением. В текстовых задачах предлагается вычислять периметр или площадь прямоугольника, длину лыжной трассы, массу деталей и другое с требованием округления результата. В теме „Рациональные числа” учащиеся находят приближения с недостатком и с избытком при обращении обыкновенных дробей в десятичные, округляют числа для получения меньшего числа десятичных знаков. Внутри числовой линии в учебнике Г. В. Дорофеева и других выделяется направление, связанное с обучением приемам прикидки и оценки результатов вычислений.

Учащихся можно подвести к правилу округления на такой задаче. *Нужно перевезти 23 т груза. Сколько рейсов должна сделать пятитонная машина?* Ясно, что в этой ситуации результат деления 23 на 5 должен быть округлен с избытком, исходя из практических соображений. Но можно рассуждать иначе: составим двойное неравенство $4 < 4{,}6 < 5$; выбираем лучшее число (которое ближе к 4,6) – 5; в ответе получим: 5 рейсов. Можно было бы рассуждать с помощью графической иллюстрации (координатный луч) или вычислений ($5 - 4{,}6 = 0{,}4$; $4{,}6 - 4 = 0{,}6$; $0{,}6 > 0{,}4$).

Второй блок вопросов из теории приближенных вычислений относится к курсу алгебры (7-й, 8-й, либо 9-й класс), где дается понятие точности приближения, абсолютной и относительной погрешности, стандартного вида числа. Действия с приближенными значениями не предусмотрены действующей программой, поэтому они могут не рассматриваться. Изучение этих вопросов следует начать с повторения операции округления чисел до требуемого разряда. А теперь формулировку задания *округлить число до десятых, сотых и так далее* мы заменим на *округлить число с точностью до десятых, сотых и так далее*. Последняя формулировка указывает на точность приближения. Приближенному значению придается более точный смысл, когда приводится не только число, но и указывается точность, с какой оно приближает истинное значение (например, $\pi \approx 3$ с точностью до 1, $\pi \approx 3{,}14$ с точностью до 0,01 и т.д.). Округляя числа в 5 – 6-х классах, учащиеся не задумывались о точности приближения. Для сравнения точности некоторых приближений одной и той же величины применяют понятие абсолютной погрешности (или просто погрешности – синоним слова ошибка). Абсолютная погрешность дает количественную характеристику приближения (отклонения приближенного значения от истинного значения величины). Для введения этого понятия можно использовать задачу. *Один ученик, на вопрос о том, сколько* *учащихся в школе, ответил 1000, а другой – 950. Чей ответ точнее, если в школе 986 учеников?* Отклонение от истинного значения в первом случае будет равно (–14), во втором – (+36), следовательно, ответ точнее у первого ученика. Далее выяснить с учениками: важен ли знак разности? Что важнее? Важно знать, насколько приближенное значение отличается от точного. Этим обосновывается введение нового понятия и его определения как модуля разности точного и приближенного значений. Если точное значение величины равно x, а вычисленное приближенное значение равно a, то абсолютная погрешность равна $|x-a|$. Обозначив ее через h, можно записать $|x-a| = h$. Выяснить геометрический смысл этого выражения. Можно рассмотреть при введении задачу на нахождение значения функции $y = x^2$ при некотором значении аргумента двумя способами – по графику (приближенное) и по формуле (точное) и сравнить значения функции.

Однако вычислить h не всегда возможно (при округлении всегда можно). Так при измерении мы наперед не знаем точного значения величины, а получаем приближенные значения с разной степенью точности. В этом случаем мы можем только оценить степень точности измерения – дать оценку погрешности, т.е. указать число h, для которого верно неравенство $|x-a| \le h$. Задачу приближенного вычисления величины обычно так и ставят: найти приближенное значение величины и оценить допущенную погрешность.

Неравенство $|\pi - 3{,}14| \le 0{,}01$ означает, что 3,14 – приближенное значение π и погрешность вычисления не превышает 0,01. Чтобы найти точность приближения, надо оценить абсолютную погрешность, т.е. указать ее верхнюю границу. При решении задач, в которых указаны границы величин, всегда в качестве приближенного значения берут среднее арифметическое границ.

Для сравнения точности приближения разных величин используется относительная погрешность, которая характеризует качество измерения. Относительной погрешностью называется отношение абсолютной погрешности к модулю приближенного значения, т.е. $r = \frac{h}{a} = \frac{|x-a|}{a}$. Относительная погрешность часто указывается в процентах. Приведем пример: *Найти относительную погрешность, которая получится при замене дроби* $\frac{17}{35}$ *ее десятичным приближением* 0,5.

Решение будет выглядеть так: $h = \left| \frac{17}{35} - 0{,}5 \right| = \left| \frac{17}{35} - \frac{1}{2} \right| = \frac{1}{70}$; $r = \frac{1}{70} : \frac{17}{35} = \frac{1}{34} = 0{,}0294\ldots \approx 3\ \%$.

Если точное значение величины неизвестно, то ограничиваются оценкой относительной погрешности и говорят, что измерения выполнены с относительной точностью до … . Целесообразно привести примеры, указывающие практическую значимость абсолютной и относительной погрешностей.

Важное место должно быть уделено практическим способам записи приближенных значений величин, главным условием которых должно быть то, что по записи возможно определить точность приближения. Среди них можно назвать следующие: *1. Стандартный вид числа* $a \cdot 10^n$, где $1 \le n < 10, n \in Z$ – информацию о точности приближения можно получить по множителю *a*. Масса Луны *m* равна $7{,}35 \cdot 10^{22}$ кг. Это означает, что $m = (7{,}35 \pm 0{,}01) \cdot 10^{22} = 7{,}35 \cdot 10^{22} \pm$ $\pm 0{,}01 \cdot 10^{22} = 7{,}35 \cdot 10^{22} \pm 10^{20}$ (кг). Поэтому $h \le 10^{20}$, $r \le 0{,}01$. *2. „Плюс-минус”*: $l = 18 \pm 0{,}3$ м – запись на рулоне обоев. Это означает, что истинная длина рулона (в м) отличается от 18 не более чем на 0,3; $17{,}7 \le l \le 18{,}3$; $h \le 0{,}3$. *3. „С точностью до …”*: $|S - 22{,}6| \le 0{,}2$ (м^2) – площадь комнаты равна 22,6 м^2 с точностью до 0,2 м^2, $22{,}4 < S < 22{,}8$, $S = 22{,}6 \pm 0{,}2$; $h \le 0{,}2$, $r \le 9\ \%$. *4. „Лежит между …”*: скорость автомобиля ν лежит между 50 и 60 км/ч; $50 < \nu < 60$, $\nu = 55 \pm 5$, $|\nu - 55| < 5$; $h \le 5$, $r \le 9\ \%$. *5. В таблицах, справочниках* – все цифры в записи верные: плотность кислорода $\rho \approx 1{,}429$ кг/м^3; $h \le 0{,}001$. *6. Число и слово*: 3 млрд, 100 тыс. *7.* $x \approx 234{,}5$ м, $x = 234 \pm 5$ (м).

В теме „Неравенства” предлагается оценить выражения, зная границы величины. Тем самым учащиеся знакомятся с методом границ (термин не вводится). Например, рассмотрим задачу. *Оценить площадь участка прямоугольной формы, если* $53 < a < 54$, $40 < b < 41$ *(данные даны в м)*. Решение: перемножив почленно неравенства, будем иметь $2120 < S < 2214$ (м^2).

Можно в ознакомительной форме ввести действия над приближенными значениями. Действия в этой форме приходится выполнять при решении практических задач, в условиях которых данные могут быть точными и приближенными. Встает вопрос о наилучшем результате вычислений (ответе) и его точности, чтобы приближение было более достоверным, а вычисления по возможности экономными (менее громоздкими). Надо знать, сколько цифр оставить в компонентах действия и результате. Результат округляют по менее точному данному:

Сложение, вычитание	Умножение, деление
Данные числа записывают:	
десятичными дробями	в стандартной форме
Менее точное число определяют по:	
абсолютной точности	относительной точности
В результате оставляют столько знаков после запятой, сколько их содержится в менее точном данном	

Эти правила довольно подробно иллюстрируются в учебнике алгебры (8-й класс) Ю. Н. Макарычева и других. Необходимо уделить внимание вычислениям с помощью микрокалькулятора.

При решении практических задач важно уметь выполнять прикидку результатов вычисления. Это может быть на уровне определения знака результата или на уровне предварительной грубой оценки ответа на основании округления исходных данных. Так, например, при вычислении значения выражения $\frac{2{,}28+7{,}953}{9{,}3-5{,}87} \approx \frac{2+8}{9-6} \approx 3$ прикидка показывает, что значение выражения примерно равно трем; вычисления с использованием микрокалькулятора дадут: $3{,}23733417 \approx 3$.

Задания для самостоятельной работы

- Проанализируйте содержание учебного материала в разных учебниках.
- Охарактеризуйте систему умений, которыми должен овладеть ученик. Проследите, как они используются и развиваются при изучении других тем курса алгебры и курса геометрии.
- Ответьте на вопрос: „Какие задачи практического характера предлагаются в различных учебниках?”
- Проанализируйте задания на вычисления с помощью микрокалькулятора.
- Разработайте методику формирования у учащихся понятий „абсолютная погрешность”, „относительная погрешность”.
- Проанализируйте предлагаемую в школьных учебниках систему работы по изучению действий над приближенными значениями чисел.

3.2. Вычислительная техника и возможности ее использования в школьном обучении: прошлое и настоящее

На протяжении всей человеческой истории людям приходилось проводить всевозможные математические расчеты различного уровня сложности и они всегда стремились как-то облегчить свой труд с помощью разнообразных счетных приспособлений, многократно совершенствуя методы и технику вычислений. Человеческая мечта всегда опережала временные возможности самого человека, которые во многом определялись развитием математических, физических, химических и других наук, уровнем технологии производства. Предыстория создания современных вычислительных средств исчисляется тысячелетиями. Обозначим основные исторические вехи, чтобы показать поступательный характер развития вычислительной практики, лучше осознать ее современное состояние и возможности. Исторический экскурс может пригодиться учителю в работе. Самым древним счетным инструментом человека, которым его снабдила сама природа, были пальцы рук и ног; пальцы потом заменились камешками, узелками на веревке, зарубками на палке (бирке) и т.п. Все это помогало человеку фиксировать простейшие числа, складывать и вычитать их. Усовершенствованный пальцевый счет с помощью рук, включающий еще выполнение умножения и деления чисел, сохранялся в Европе до XVII в.; практиковался он и в дореволюционной России, чаще всего среди крестьян. Счетные палочки используются до сих пор в обучении дошкольников и первоклассников.

Первым счетным прибором, сконструированным людьми, ученые считают абак-доску с полосками (лунками) для разных числовых разрядов, в которых передвигались счетные марки (камешки, косточки, шарики, бусинки, монеты, бобы и т.п.), производя арифметические вычисления. Его различные конструкции применялись еще древними греками, римлянами, арабами, китайцами и др. Абак просуществовал до XVII в., когда его заменили письменные вычисления. На Руси этот прибор также был известен издавна и усовершенствованный его вариант получил новое название „русские счеты" в XVI в. Счеты прочно вошли в обиход на Руси и обучение вычислениям с их помощью стало обязательным в школах. В Древнем Риме абак называли „calculi" от „calculus" – галька, отчего и произошел глагол

„calculre” – считать и слова „калькуляция” (счет камешками) и „калькулятор” – вычислитель, вычислительное устройство.

Среди вычислительных инструментов необходимо отметить счет с помощью математических таблиц, из которого затем возник счет на линейках. Простейшим примером математических таблиц является таблица умножения. Важную роль в ускорении вычислений сыграли логарифмы, изобретенные Джоном Непером; в 1614 г. он опубликовал первые логарифмические таблицы, а в 20 – 30 гг. XVII в. была изобретена первая счетная линейка, которая вскоре была названа логарифмической (У. Однер и Р. Деламейн). Современный вид она получила в следующем веке и последовательно расширялись ее вычислительные возможности: выполнялись умножение и деление, возведение в квадрат и куб, извлечение квадратных и кубических корней, логарифмирование, действия с тригонометрическими функциями, решения пропорций и треугольников и др. В советских школах широкое распространение получили четырехзначные математические таблицы В. М. Брадиса и логарифмическая линейка.

Начиная с XVII в. многие ученые начали трудиться над созданием вычислительной машины, которая бы позволила механизировать работу человека. Творцом первой механической счетной машины, реально построенной, считается Блез Паскаль (1641 г. или 1642 г.) За прошедшие с тех пор три с лишним века было предложено множество их разновидностей под названием арифмометр (от греческого arithmos – число и ... метр), в котором установка чисел и приведение счетного механизма в действие происходит вручную – вращением ручки. Одним из наиболее совершенных по тому времени считался арифмометр, изобретенный в 1878 г. П. Л. Чебышевым. Относительно широкое распространение получил арифмометр Петербургского инженера В. Т. Однера (1879 г.). Усовершенствованная его модель, получившая название „Феликс”, выпускалась в нашей стране до конца 50-х гг. прошлого века и успешно использовалась в вычислительной практике.

Достигнутый прогресс в создании настольных механических вычислительных машин не удовлетворял ученых; человеку приходилось работать с ней, например, вращать ручку арифмометра; она не могла анализировать проводимые действия и не имела устройства управления. Человеческая мечта состояла в автоматизации вычислительного процесса. В первой половине XIX в. Чарльз Беббедж предложил проект „Аналитической машины”, которая должна была выполнять без вмешательства человека сложные арифметические и логические действия по заданной программе. Его идеи более чем на сто лет опередили своё время. Научно-техническая революция XX в. привела к появлению электронной вычислительной техники, открыла период автоматизации вычислений. Быстродействующие электронные вычислительные машины (ЭВМ) теперь чаще всего называют компьютерами (от слова computer, пришедшего из американской научной терминологии, а теперь ставшего мировым). Помимо компьютеров, существует „малая” электронная техника – микрокалькулятор (для краткости говорят просто калькулятор), о происхождении названия которого говорилось выше. Калькулятор – это портативное электронное устройство, позволяющее быстро и с высокой скоростью производить математические расчеты.

Современная промышленность выпускает достаточно широкий ассортимент калькуляторов в производственных, научных и бытовых целях. Традиционные вычислительные средства индивидуального пользования – механические и электромеханические арифмометры, счеты и логарифмические линейки (прямолинейные, круговые) уже не могут конкурировать с калькуляторами (а тем более с компьютерами) по скорости выполнения вычислений, точности результата и неумолимо уходят в прошлое. Создание и массовое распространение ЭВМ по праву считается одним из важнейших научно-технических достижений нашего легко обозримого периода. Совсем за относительно короткий промежуток времени бурное развитие электроники вызвало быструю смену поколений ЭВМ, еще не дав состариться предшествующим, рождались и совершенствовались машинные языки. Словом вычислительная техника в последнее время развивается бурными темпами. Появившись впервые электронный настольный калькулятор в Англии в 1962 г. (по размерам пишущей машинки), постоянно совершенствовался и уменьшался по массе и габаритам. Наш отечественный „карманный” образец был создан в конце 1973г. и именовался "Электроника Б3-04". В связи с этим в 1980-е гг. стали говорить о компьютерной революции, обеспечении всеобщей компьютерной грамотности населения, в том числе молодежи школьного возраста.

Отечественная и зарубежная промышленность производит калькуляторы различных типов, моделей и марок, которые могут удовлетворить даже самого требовательного пользователя. С позиций вычислительных возможностей и применения в школьном обучении считается целесообразной такая классификация отечественных калькуляторов:

1) простейшие (арифметические), которые предназначены для выполнения арифметических расчетов с использованием четырех действий с целыми и дробными числами, вычислений процентов и извлечения квадратных корней, других вспомогательных операций;

2) инженерные (непрограммируемые), которые позволяют выполнять научно-технические (статистические) расчеты, требующие вычислений значений основных элементарных функций, выполнения арифметических действий с использованием скобок, запоминания промежуточных результатов в дополнительных блоках памяти – на них можно выполнять все вычисления, встречающиеся в школьных курсах математики, физики, химии и др.;

3) программируемые, которые автоматически производят сложные и длинные вычисления по заранее введенным в их память программам с помощью клавиатуры – они удобны, когда приходится многократно решать одни и те же вычислительные задачи, отличающиеся лишь исходными данными (по своему характеру они принципиально не отличаются от персональных ЭВМ).

Перечисленные группы калькуляторов позволяют пользователю выбрать наиболее подходящий прибор в зависимости от вида предстоящей вычислительной работы. По своему функциональному назначению калькулятор является прежде всего средством для быстрого выполнения числовых расчетов от простых до самых сложных, требующих в том числе обращения к табличным значениям элементарных функций. Нужное значение функции калькулятор самостоятельно вычисляет по заложенным в нем алгоритмам и отображает его на индикаторе с большей степенью точности, чем это было в четырехзначных таблицах В. М. Брадиса. Для решения большого числа прикладных задач заложенных алгоритмов в нем явно недостаточно. Тогда приходится самим составлять вычислительную программу – задавать один или несколько алгоритмов. Компьютер также может работать в режиме калькулятора.

Современная вычислительная техника стала постепенно применяться в школе, начав со старших классов, она дошла и до начальных классов сначала в экспериментальном порядке, а затем и в массовом. Это новшество было неоднозначно воспринято учителями, родителями и общественностью. Опасение вызывало возможное ослабление уровня письменной и устной вычислительной подготовки учащихся со снижением активности и интереса к ней, якобы вредное влияние на здоровье, динамичность, жизнедеятельность детей, особенно младшего возраста. Однако экспериментальные исследования, производимые С. И. Шварцбурдом, В. Г. Болтянским, Э. В. Григоряном, Л. М. Пашковой, И. Н. Антиповым, С. С. Минаевой и другими в 1970 – 1980-е гг., развеивали эти сомнения.

На уровне государства в 1985 – 1986 учебном году пока только в старших классах был введен новый общеобразовательный предмет „Основы информатики и вычислительной техники", чтобы способствовать обеспечению компьютерной грамотности школьников; разрешено применять калькуляторы в предметах, наиболее насыщенных вычислительной работой – математика, физика, химия, начиная с 7-го класса. Как ранее отмечалось, сейчас калькулятор и компьютер являются не только объектом изучения, а и средством обучения учащихся с первого до одиннадцатого класса.

В школьной методике обучения математике инструментальные (машинные) вычисления относят к вспомогательным средствам [13, с. 86], основными видами вычислений считают письменные (вручную) и устные (в уме), овладение которыми в первую очередь является важной задачей изучения математики в 1 – 6-х классах. Поэтому обучение вычислениям с помощью машинной техники должно следовать после того, как школьники научились свободно пользоваться письменными алгоритмами арифметических действий с числами каждого нового множества, устно выполнять перечисленные в примерной программе вычисления с ними, контролировать результат прикидкой, а также выполнили соответствующие контрольно-оценочные работы на достаточном уровне для данного этапа обучения. Следует соблюдать разумное сочетание тех и других средств вычислений, особенно при решении практических задач межпредметного характера.

Как показывает опыт, применение калькулятора при изучении математики, физики, химии содействует интенсификации процесса обучения, дает возможность за одну и ту же единицу времени выполнить больший объем работы, как говорят, повысить „средний балл одной минуты” и тем самым экономить учебное время урока, а сэкономленное время использовать для самостоятельной работы учащихся, которая имеет большое общеобразовательное значение.

Эффективность использования калькулятора в учебном процессе для вычислений зависит от умения обращаться с ним, которое формируется на практике, т.е. в непосредственной работе с ним на уроках и в домашней обстановке. В школьной практике сейчас предоставляется возможность освоить работу отдельных калькуляторов из всех трех групп. Для этого в школьных учебниках математики имеются специальные пункты, посвященные работе с ними, включая программируемые. Возможности калькуляторов учащиеся усваивают постепенно по мере необходимости применения их в вычислительной работе. В частности, это относится к вычислению значений элементарных функций и построению их графиков, решению уравнений и их систем, решению треугольников и др.

Несмотря на существенные функциональные отличия калькуляторов, выделяют основные умения, которыми должен овладеть ученик при работе с ним: подготовка к работе; ввод и сброс числовых данных; выполнение арифметических действий над двумя числами и более, установление последовательности выполнения цепочки действий со скобками и без них; вычисления с константами; вычисления с использованием регистра памяти; выполнение приближенных вычислений с использованием способа подсчета верных цифр; проведение проверки вычислений, так как недостаточность внимания, опыта может повлечь сбои в счете; вычисление значений функций и выражений их содержащих; использование всех изученных функциональных возможностей того или иного прибора, обеспечивающих выполнение планируемых вычислений; четкое соблюдение инструкций работы с прибором.

При ознакомление с каждой новой возможностью калькулятора (компьютера) целесообразно чередовать одновременную работу всех учащихся с индивидуальной. Для этого введение каждого приема сопровождается объяснением учителя с соответствующей демонстрацией и повторением всеми учащимися, а затем умение вырабатывается каждым из них в самостоятельной деятельности по предложенному заданию. В дальнейшем системное использование каждого приема работы с калькулятором предполагает использование его лишь в тех случаях, когда это целесообразно и требуется текстом задания. Не контролируемое учителем применение калькулятора не способно привести к совершенствованию обучения, повышению вычислительной культуры учащихся.

Вопросам обучения учащихся выполнению вычислительной работы с помощью калькулятора, начиная с 1980-х гг., посвящены статьи в журнале „Математика в школе" и сборниках методических работ, а также отдельные специальные книги для учителей и школьников. Назовем некоторые из них. Особый интерес представляет книга под редакцией В. Г. Болтянского «Использование микрокалькуляторов в обучении математике» (М.: Просвещение, 1990), которая содержит развернутую методику применения калькуляторов на уроках во всех классах школы – от первого до последнего, подкрепленную экспериментальной работой с 1978 г. В ней подробно описана методика решения задач различного типа с использованием калькулятора. Хотя она была ориентирована на программу по математике того времени, но основные идеи не потеряли актуальности и сейчас.

Полезным будет пособие для учителя С. С. Минаевой «Вычисления на уроках и внеклассных занятиях по математике» (М.: Просвещение, 1983), которое содержит методические рекомендации и упражнения, направленные на совершенствование вычислительной культуры учащихся основной школы, сочетающей устные, письменные и инструментальные (калькулятор) вычисления.

В помощь школьникам по выработке «технических» умений обращения с различными моделями калькуляторов изданы такие книги, как:

1. Виленкин, Н. Я. Микрокалькулятор – школьнику : кн. для учащихся / Н. Я. Виленкин, В. М. Оксман, С. И. Шварцбурд. – М. : Просвещение, 1986. – 95 с.
2. Лодатко, Е. А. Школьнику о вычислениях с микрокалькулятором : кн. для учащихся / Е. А. Лодатко. – М. : Просвещение, 1985. – 96 с.
3. Антипов, И. Н. Программирование на микрокалькуляторе МК-64 : кн. для учащихся / И. Н. Антипов. – М. : Просвещение, 1988. – 64 с.

4. Абдулаев, И. Математические задачи с микрокалькулятором : кн. для учащихся / И. Абдулаев. – М. : Просвещение, 1990. – 80 с.
5. Романовский, Т. Б. Микрокалькуляторы в рассказах и играх / Т. Б. Романовский. – Минск : Университетское, 1987. – 192 с.

В перечисленных книгах на большом количестве задач раскрываются возможности калькуляторов, приводятся практические рекомендации и советы, позволяющие ученикам овладеть необходимыми умениями рациональных вычислений (иногда даже в игровой форме); обсуждаются приемы работы с различными калькуляторами. В последней книге приводятся занимательные задачи и игры, имеющие познавательный и обучающий характер.

В методике обучения математике калькулятор рассматривается не только как вычислительное средство, но и как основа проведения так называемых численных (математических, машинных) экспериментов – новой, увлекательной для учащихся формы познавательной деятельности. Именно калькулятор позволяет быстро и экономно организовать экспериментальное установление математических фактов в ходе проведения соответствующих вычислений, построения графиков, измерений и на их основе исследовать полученные результаты с целью обобщения выявления той или иной важной в математике закономерности или зависимости. Естественно индуктивно выявленный математический факт, ставший более доступным и понятным, в дальнейшем требует строгого доказательства (если предусмотрено программой).

Калькулятор бывает полезен для коррекции, например графика функции, построенного на основе общих соображений путем вычисления значений функции в ряде точек.

Н. Б. Истомина, автор линейки учебников математики для 1 – 6-х классов, считает, что численный эксперимент с успехом может использоваться в обучении младших школьников, в котором калькулятор выполняет функции методического средства для открытия и усвоения понятий, свойств и способов действий, проверки гипотез, выявления зависимостей и закономерностей между числами и величинами, для развития математической наблюдательности, способности к самоконтролю и обобщению, воспитания „чувства числа” [5]. При первом знакомстве с переместительным свойством действия сложения она на доске предлагает сделать следующую запись:

1+3= 4+5= 3+2= 5+6= 7+8= …
3+1= 5+4= 2+3= 6+5= 8+7= …

По заданию учителя ученики вычисляют с помощью калькулятора написанные суммы: один в первом столбике, другой – во втором и т.д. Затем записываются результаты вычислений. Коллективные обсуждения результатов приводят к названному выше свойству. Численные эксперименты, аналогичные описанному, рекомендуется проводить и при изучении дальнейших свойств действий.

В ее учебниках предлагаются такие задания:

– Увеличь число 50 на 1, на 2, на 3, на 4. Наблюдай, какая цифра изменится в числе 50 (на экране). Какие еще числа можно прибавить к 50, чтобы изменилась только цифра, обозначающая единицы, а цифра, обозначающая десятки, не изменилась?
– Набери на калькуляторе любое двузначное число. Подумай, на сколько его можно уменьшить, чтобы изменилась цифра, обозначающая десятки, а цифра, обозначающая единицы, оставалась без изменения.
– Проверь свои предположения на различных числах.
– Какое арифметическое действие надо выполнить на калькуляторе, чтобы на экране появилось число, которое можно вставить в „окошко" и получить верное равенство:
  $\square + 36 = 81$, $78 - \square = 24$?
– Поиграем в парах „Соревнуюсь с калькулятором". Один ученик считает устно, другой – на калькуляторе. Предлагаются разные табличные случаи сложения и вычитания в пределах 10.

Она предлагает использовать калькулятор для создания проблемных ситуаций. Так, основанием для введения нового понятия – „отрицательные числа" – использует обращение к калькулятору выполнить вычитание большего числа из меньшего (например, 2 – 9) и зафиксировать результат полученный на экране (–7). После этого предлагает самим учащимся придумать аналогичные упражнения и вычислить результат. Они убеждаются, что в этих случаях на экране все ответы получаются со знаком "–". Появляется мотивировка для изучения новых чисел, придуманных математиками.

Численные эксперименты с помощью калькулятора могут применяться в основной и старшей школе, открывая новые дидактиские возможности и методические приёмы в обучении математике. Целесообразно их использование, например, при „открытии” теоремы Виета; введении понятия „степень с иррациональным показателем”; изучении действий над иррациональными числами; вычислении членов последовательности, пределов функции; изучении поведения более сложных функций; приближенном вычислении интегралов с помощью частных сумм и во многих других случаях. Здесь уже для улавливания какой-то математической закономерности, для составления гипотезы приходится проводить целые серии более сложных вычислений.

Современная школа продолжает оснащать кабинеты математики и информатики компьютерной техникой.

Задания для самостоятельной работы

- Изучите материал, представленный в пособиях для студентов [12, 13] по организации вычислительной работы с учащимися на уроках, факультативах, курсах по выбору. Выделите основные формы и виды этой деятельности.
- Подтвердите или опровергните утверждение, что применение вычислительной техники способствует обогащению практических методов обучения математике.
- Составьте обзор литературы по использованию вычислительной техники в школьном обучении в историческом плане.
- Обоснуйте своё согласие или несогласие с высказыванием: „Через несколько лет люди полностью перестанут считать в столбик, на счетах, на логарифмической линейке. Это будет таким же архаичным делом, как пользоваться трением при разведении огня вместо применения спичек”. (Из книги 1990 г. издания). Ответ обоснуйте.

Не созвучна ли часть этого высказывания отказу от арифметического способа решения текстовых задач в начальной школе и замене его алгебраическим способом в связи с включением в курс математики элементов алгебры в 1970-е гг.? Ответ обоснуйте.

- Объясните, как вы понимаете изречение П. Лапласа: «Изобретение логарифмов, сократив работу астрономов, продлило им жизнь».
- Проанализируйте ФГОС, примерную программу по математике с точки зрения использования инструментальных вычислений в начальной, основной и старшей школе.

• Ознакомьтесь с учебным материалом альтернативных школьных учебников, ориентированных на обучение учащихся работе с микрокалькулятором и компьютером, проследите реализацию теоретических сведений через задания, задачи и вычислительные упражнения. Составьте перечень соответствующих пунктов учебников и образцов задач. Отражает ли теоретический и задачный материал требования ФГОС и примерной программы?

• Охарактеризуйте особенности выполнения приближённых вычислений на калькуляторе и объясните, как тема приближённых вычислений отражает работу учащихся с калькуляторами разных модификаций.

• Составьте картотеку статей из журнала „Математика в школе" с собственным комментарием по вопросам использования компьютера и калькулятора в обучении математике.

• Изучите методические рекомендации по книге В. Г. Болтянского и выскажите свои суждения по их применению в современных условиях. Какие из них не потеряли своей актуальности и сейчас? Какие из них вы смогли бы реализовать на практике?

• Предложите численные эксперименты, которые можно использовать как средство организации познавательной деятельности учащихся на уроках математики в основной и старшей школе.

• Предложите ряд компьютерных игр, которые можно использовать на уроках математики в связи с программным материалом.

• Охарактеризуйте возможности использования компьютера и калькулятора для осуществления межпредметных связей с информатикой.

• Расскажите о перспективах использования вычислительной техники в обучении математике (по материалам периодической печати).

3.3. Формирование вычислительных умений

Основной задачей курса математики 5-х, 6-х классов в его арифметической составляющей всегда являлось формирование у учащихся сознательных и прочных вычислительных умений на множестве рациональных чисел, без которых существенно затрудняется дальнейшее изучение как математических, так и смежных с ней предметов. Поставленная задача остается наиважнейшей и в условиях появления вспомогательных средств вычислений (компьютера, калькулятора и др.), которые приобретают все возрастающее значение в практической деятельности человека. Не случайно на государственном выпускном экзамене по математике в 9-м и 11-м классах не разрешается пользоваться калькулятором, а по физике, химии и географии учащиеся могут воспользоваться только непрограммируемым калькулятором. Однако появление вычислительной техники, ознакомление с которой происходит на уроках математики, реализация идей развивающего обучения привели к пересмотру ряда требований к вычислительной подготовке учащихся: в учебники не включаются громоздкие и трудоемкие числовые выражения для письменных вычислений (их легко выполнит техника), исключается однообразие вычислительных упражнений (заданий), делается акцент на развитие вычислительной культуры (на обучение эвристическим приемам прикидки и оценки результатов действий, проверки их на правдоподобие), рекомендуется письменные вычисления по-возможности сопровождать промежуточными устными вычислениями, включается непосредственное обучение алгоритмическим предписаниям (алгоритмам) выполнения действий, повышается внимание к арифметическим приемам решения текстовых задач как средству обучения способам рассуждений, усиленное внимание направляется на выработку вычислительных умений и обобщение приемов вычислений, констатируется достаточно длительный характер процесса формирования умений (по времени, по количеству упражнений, которые необходимо выполнить, по мере помощи от учителя) и др.

В учебном пособии для студентов в главе, посвященной культуре вычислений [13], авторами была предпринята попытка охарактеризовать достаточно высокий уровень вычислительной культуры учащихся следующей совокупностью признаков:

1) прочные и осознанные знания свойств и алгоритмов операций над числами;

2) умение по условию поставленной задачи определить, являются ли исходные данные для вычислений точными или приближенными числами, прочные знания правил приближенных вычислений и навыки их выполнения;

3) умение правильно сочетать устные, письменные вычисления и вычисления с применением вспомогательных средств;

4) устойчивое применение рациональных приемов вычислений;

5) автоматизм навыков безошибочного выполнения вычислительных операций;

6) аккуратная и экономная запись расчетов;

7) применение рациональных приемов контроля вычислений;

8) умение на определенном теоретическом уровне обосновать правила и приемы, применяемые в процессе вычислений [13, с. 78].

Несмотря на то, что перечень был ориентирован на школьную программу 70-х гг. прошлого века, учителю важно использовать его в своей работе с учетом произошедших изменений в требованиях к вычислительной подготовке учащихся. Обратимся к современным общим требованиям, сформулированным в пояснительной записке к Примерной программе основного общего образования ФГОС второго поколения: „… развитие представлений о числе и числовых системах от натуральных до действительных чисел; овладение навыками устных, письменных, инструментальных вычислений; умение проводить несложные практические расчеты с использованием при необходимости справочных материалов, калькулятора, компьютера; понимание сущности алгоритмических предписаний и умение действовать в соответствии с предложенным алгоритмом; умение самостоятельно ставить цели, выбирать и создавать алгоритмы для решения учебных проблем; умение применять индуктивные и дедуктивные способы рассуждений, видеть различные стратегии решения задач" [19, с. 8, 9]. Как видим, требования к выпускникам 9-го класса нацелены на тщательный анализ хода вычислений, его особенностей в зависимости от числового множества, на котором они выполняются, ссылок на соответствующее правило (алгоритм) и понимание принципа его использования, выработку сознательного отношения к технике устных и письменных вычислений, т.е. к активному обучению. Чтобы достичь сознательного отношения к вычислениям, работа с учащимися при выполнении упражнений должна носить не тренировочный (на практике часто именно так и происходит), а обучающий, развивающий, познавательный характер. Учитель должен воспитывать у учащихся потребность в обосновании хода рассуждений как в устной, так и письменной работе, а также проверки самой процедуры вычислений (самоконтроль). Вопрос об уровне сознательного выполнения упражнений во многом зависит от учителя, от его реакции на допускаемые учащимися ошибки, недочеты или не совсем удачный выбор способа деятельности. В примерной программе теперь снято требование безошибочного выполнения действий, а в одном из учебников признается право учащихся на ошибку (как в жизни) приведением давно известного высказывания: „Не ошибается тот, кто ничего не делает" и приводится рекомендация не бояться своих ошибок. В методике часто ссылаются на такое изречение: „На ошибках учатся". Своевременное обсуждение ошибочных записей и пробелов имеет обучающее значение.

Примерная программа уделяет большое внимание систематическому применению устных вычислений во всех возможных случаях. Считается, что владение навыками устных вычислений ускоряет выработку умений производить письменные выкладки, позволяет усовершенствовать их. Кроме того в повседневной жизни часто приходится считать в уме. Устные вычисления приводят к экономии времени на выполнение разнообразных упражнений, в том числе воспринимающихся на слух; с их помощью организуется напряженная мыслительная деятельность учащихся, приводящая к сосредоточенности внимания. Поэтому учителю важно не упускать каждого подходящего случая в побуждении учащихся к устным вычислениям, а не только на специально организованном этапе урока (устный счет).

Особое место в изучении курса математики занимает обучение алгоритмам вычислений, которое может осуществляться двумя путями:

1) сообщение алгоритмов в готовом виде и обучение учащихся их применению;

2) обучение самостоятельному составлению алгоритмов.

Учебный процесс необходимо ориентировать на их сочетание. При формировании каждого алгоритма необходимо соблюдать определенную этапность: вначале выявляется перечень операций (операционный состав) и выстраивается их последовательность при выполнении соответствующего арифметического действия (подготовительный этап – опора), затем организуется усвоение на различных упражнениях с его прямым применением (алгоритм становится „достоянием", „приобретением" учащегося) и, наконец, самостоятельное применение в измененной ситуации (в заданиях с вариативной формулировкой, нестандартных и творческих упражнениях, расчетных заданиях практического характера и сюжетных задачах, заданиях на восстановление цифр в компонентах действия).

Как видим вычислительная культура дополняется алгоритмической, которая находит свое отражение в системе упражнений, имеющей своей целью обучение учащихся выполнять арифметические действия, правильно определять порядок действий при вычислении значений выражений. В этой системе важное место отводится упражнениям на составление числовых выражений по заданным схемам (блок-схемы) или условию текстовых задач, заполнение различных вычислительных схем и таблиц. Схемы позволяют разнообразить формулировки заданий, включают зрительную память учащихся, помогая единым взором охватить все предстоящие действия, чтобы получить окончательный результат.

В приведенных выше выдержках из методических и нормативных источников употребляются термины „умение”, „навык”, „перенос”, которые трактуются по-разному в психолого-педагогической литературе. Считается, что вычислительные умения и навыки формируются в процессе выполнения целенаправленной системы упражнений; в их основе лежит соответствующий прием (алгоритм), по которому осуществляются вычисления; владение приемом вычислительной деятельности может быть доведено до умения, а в некоторых случаях и до навыка. Основной чертой вычислительного умения является развернутое выполнение соответствующего действия (пооперационно), сопровождающееся осознанием цели, состава приема и условий его осуществления, а навык характеризуется свернутым, в значительной мере автоматизированным выполнением действия, т.е. без напряжения внимания, не обдумывая каждую операцию (как бы само собой), при этом контроль переносится на конечный результат. Показателем усвоенных приемов, умений и навыков является их перенос, т. е. использование в новой ситуации, которая требует существенной перестройки учебной деятельности учащихся. Владение совокупностью вычислительных приемов включается в состав умения учиться математике.

В процессе обучения учитель, прежде чем ставить учебную задачу перед учащимися, должен определить цель: какие знания и приемы учебной работы будут изучаться, что остается на уровне умения, что доводится до уровня навыка и как в соответствии с этим будет организована познавательная деятельность учащихся. Кроме того, необходимо установить, в состав каких умений может входить тот или иной навык в виде отдельной операции. Современная методика обучения предполагает, что формирование знаний и умений представляет собой единый процесс, а не раздельный: сначала знания, затем умения. Нарушение этого принципа может привести к проникновению формализма в изучение предмета.

Мы считаем, что письменное выполнение арифметических действий над числами преимущественно осуществляется на уровне умения, а не навыка. Требование доводить до навыка, которое сформулировано в примерной программе ФГОС, очень проблематично. Трансформироваться в навык могут случаи табличного сложения и умножения натуральных чисел, умножение двухзначного или трехзначного числа на однозначное, умножение любого числа на нуль или единицу, простейшие случаи выполнения действий с дробными числами (умножение и деление десятичной дроби на число, выраженное единицей с последующими нулями) и др. Учитель сам может составить вычислительные упражнения для выработки навыка, предлагая их для устной работы.

Основы культуры вычислений закладываются в начальной школе на множестве целых неотрицательных чисел. В 5-м классе систематизируются, обобщаются, развиваются и расширяются знания о натуральных числах, совершенствуются умения выполнения арифметических действий с многозначными числами. В большинстве учебников к натуральным числам приближено изучение десятичных дробей, а в некоторых даже практикуется совместное их рассмотрение. В последнем варианте вместе с повторением учебного материала о натуральных числах происходит усвоение вопросов, связанных с десятичными дробями. В том и другом случае учащиеся применяют свои знания и умения в измененных условиях, на новом математическом содержании; осознают взаимосвязь между натуральными и десятичными дробями, основанную на единой десятичной структуре и принципе разрядности в записи чисел, служащим ориентировочной опорой при выполнении арифметических действий. При изучении реализуется принцип преемственности через связь упражнений вычислительного характера, раскрывающих аналогию в записи десятичных дробей и натуральных чисел. Использование десятичных дробей позволяет выполнять преобразования и действия с именованными числами.

Учащимся демонстрируется сходство алгоритмов выполнения действий над десятичными дробями и натуральными числами. Это сходство выступает основой для прочного усвоения данных алгоритмов. Трудность в вычислениях с десятичными дробями состоит в определении места запятой в процессе выполнения алгоритма того или иного действия. Согласно алгоритмам (или объединенному алгоритму) выполнения действий сложения и вычитания десятичных дробей надо в начале уравнять число знаков после запятой, в алгоритме умножения не обращать внимание на запятые в множителях до определения места запятой в полученном произведении, деление на десятичную дробь свести к делению на натуральное число. Все действия над многозначными натуральными числами и десятичными дробями выполняют поразрядно: начиная с младшего разряда единиц (справа налево) – при сложении, вычитании и умножении; начиная со старшего разряда единиц (слева направо) – при делении.

Вышеперечисленные операции, дополняющие алгоритмы действий с натуральными числами, ведут к перестройке усвоенного алгоритма (приёма), т.е. к его переносу на новые числа. Чаще всего говорят о переносе вычислительного умения, подразумевая тот или иной приём, лежащий в его основе. Заметим, что в учебнике Э. Г. Гельфман и О. В. Холодной учащиеся подводятся к обобщенному правилу (алгоритму) умножения двух десятичных дробей, которое заменяет четыре ранее усвоенных для умножения (на однозначное натуральное число, на 10, 100 и так далее, на круглое натуральное число, на многозначное натуральное число). Сообщается ученикам, что первые четыре правила были в основном только вспомогательными шагами, они вели к общему правилу умножения. Обучение учащихся обобщенным приемам способствует активизации умственной деятельности учащихся и устраняет шаблонность в использовании приёмов.

Для овладения тем или иным алгоритмом важно иметь систему упражнений, включающую различные случаи (в том числе специальные) выполнения действий. Так, например, в упражнениях на вычитание десятичных дробей предусмотреть: одинаковое число десятичных знаков у уменьшаемого и вычитаемого, у уменьшаемого больше (меньше), чем у вычитаемого, из десятичной дроби вычитается натуральное число, из натурального числа вычитается десятичная дробь, в уменьшаемом требуется перенос единицы из высшего разряда в низший («занимать единицу»); компоненты с нулями в середине дробной части. Кроме того, предлагать различные формулировки упражнений: найди разность; вычисли; найди ошибку в выполнении действия и реши правильно; составь все возможные разности из данных чисел (3,6; 0,36 и 0,036) и найди их значения; поставь в примере недостающие нули и запятые так, чтобы выполнялось равенство (752 – 36 = = 3,92); заполни пропуски (задания с „окошечками” или „звездочками” вместо ряда цифр); реши уравнение; реши задачу; выполни действие и сделай проверку. Задания могут предлагаться в игровой форме, носить исследовательский характер, требовать перебора вариантов и т.п., чтобы поддержать интерес к вычислениям.

Отметим еще важную особенность этой темы. При делении натуральных чисел и десятичных дробей ученики впервые встречаются с алгоритмом, не дающим конечного результата. Этот факт и еще задачи на измерение величин могут послужить мотивировкой введения приближенного значения числа с недостатком и избытком, а также к необходимости округления натуральных чисел и десятичных дробей. В этом случае учащиеся будут иметь возможность перестраивать прием. При изучении умножения и деления десятичных дробей дается понятие о простейших процентных вычислениях, формируется умение перехода от процентной формы записи чисел к десятичной и наоборот.

В некоторых учебниках в целях обучения учащихся рассуждениям, обоснованиям, доказательствам, аргументации используются диалоги между известными им сказочными персонажами (Э. Г. Гельфман и др.), между мальчиком Мишей и девочкой Машей (Н. Б. Истомина), между Смекалкиным, его младшим братом и Клоуном (Л. Н. Шеврин и др.), между учителем и учеником (М. И. Башмаков), в результате которых выясняется новое знание, правило, алгоритм, выстраивается контрпример.

Алгоритмы (правила) могут оформляться либо в виде текста с выделением операций, либо в виде схемы. Например, для округления натуральных чисел авторы одного из учебников приводят такую схему (рис. 3.1).

Схема 1

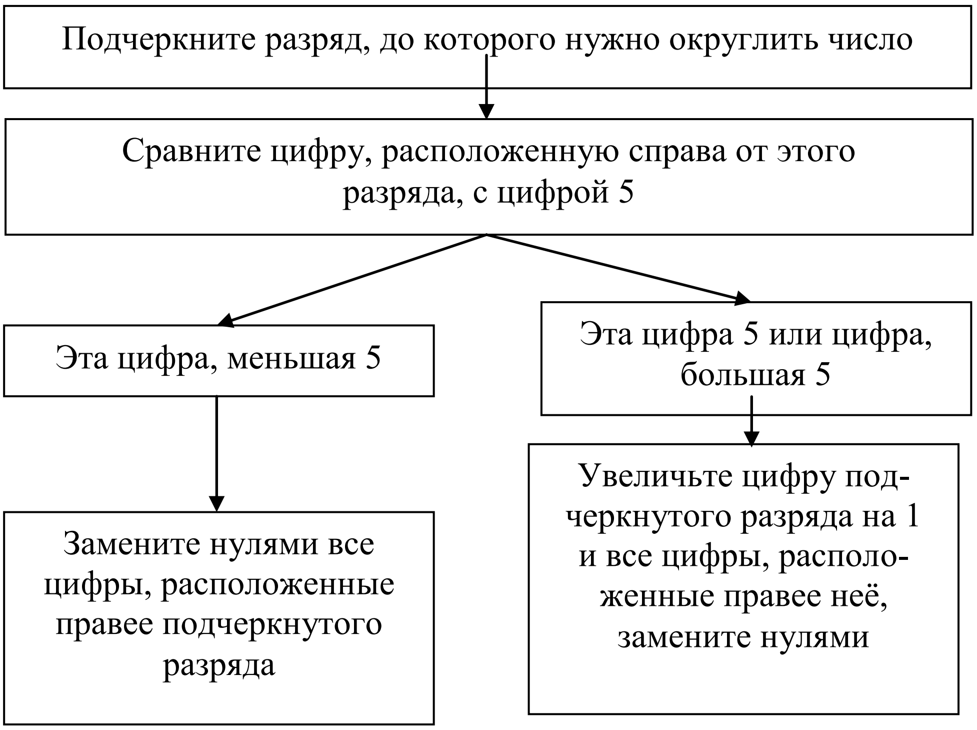


Рис. 3.1

Аналогичные схемы учащиеся с помощью учителя или сами могут составить для индивидуального или демонстрационного использования по другим вычислительным алгоритмам. На время изучения того или иного действия полезно в классе вывешивать не только сами алгоритмы, но и образцы рациональных записей деятельности по ним. Полезно вывести и общие указания по выполнению вычислений на все действия над изученными к тому времени числами. Например такие:

Перед вычислением выяснить: 1) последовательность выполнения действий; 2) какие действия можно выполнить устно; 3) нельзя ли применить свойства действий для упрощения вычитаний; 4) вести ли записи в виде цепочки равенств или по нумерованным действиям (частям), или составить удобную вычислительную схему; 5) как проверить результат.

Правило умножения или деления десятичной дроби на 10, 100 и далее или на 0,1; 0,01 и далее можно оформить наглядно так (рис. 3.2).

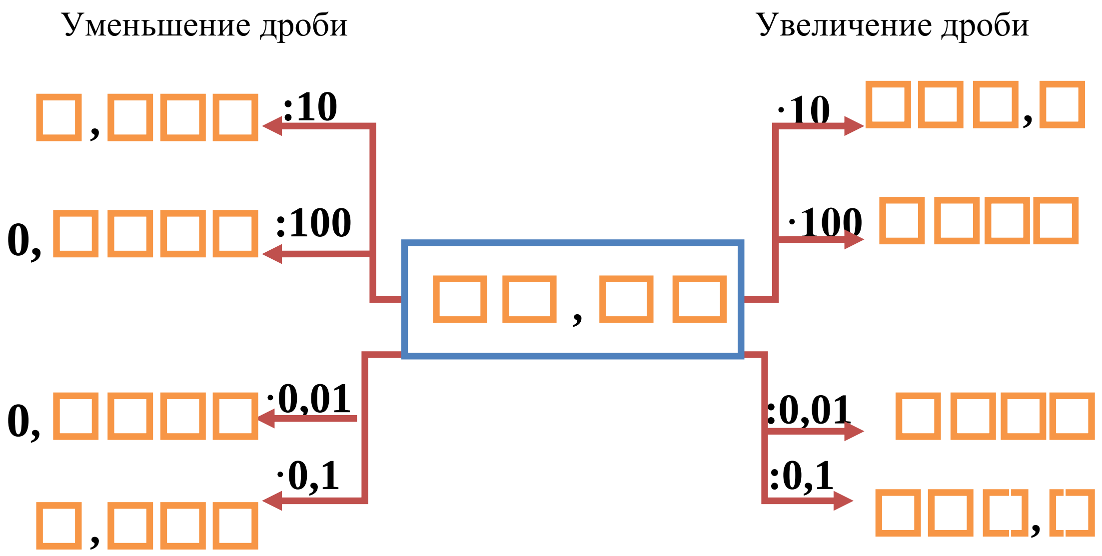


Рис. 3.2

Наглядно видно различие в правилах, которое заключается в переносе запятой, отделяющей целую часть от дробной.

Культура вычислений, непрерывно формируемая в течение шести лет обучения младших школьников, продолжает совершенствоваться и развиваться при изучении как математических, так и смежных предметов в основной и старшей школе. Сформированные вычислительные умения закрепляются при переносе в новые ситуации, решая различные по содержанию и усвоению сложности жизненно-практические задачи, составной частью которых являются вычисления. На этом этапе важно обращать внимание учеников на рациональную организацию вычислительного процесса (на выбор и применение подходящего для данной ситуации приема), использование калькулятора, который обеспечит безошибочное выполнение действий, а в целом на стремление к достижению более высокого уровня вычислительной культуры.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Перелистнув последнюю страницу основного текста учебно-методического пособия, студент получил определенный багаж знаний, а если еще выполнил все задания для самостоятельной работы, то приобрел соответствующие методические умения и компетенции по числовой линии. Оперировать числами приходится при решении вычислительных упражнений, текстовых задач (арифметических, алгебраических, геометрических, начал анализа, физических, химических и т.п.), решении уравнений и неравенств, выполнении арифметических и трансцендентных преобразований и др. Тем самым линия развития числа тесно связана со всеми другими содержательно-методическими линиями. Без вычислительных умений невозможно говорить о вычислительной культуре учащихся, которая всегда занимала важное место в обучении математике. Однако она еще не получила должного воплощения в школьной практике, что подтверждается статистическими данными о качестве вычислительных умений и навыков выпускников общеобразовательных школ. Многие авторы публикаций по этому вопросу считали прежде и продолжают считать, что недостаточно высокий уровень культуры вычислений учащихся является следствием формализма в их знаниях, отрыва теории от практики. Это всецело зависит от профессионализма учителя.

Введение компьютера и калькулятора в учебный процесс по-новому ставит вопрос о формировании культуры вычислений. В основе нового подхода лежат такие требования, как гармоничное сочетание устных, письменных и инструментальных вычислений; умение быстро делать приближенную оценку (прикидку) значения результата; более тесная и согласованная взаимосвязь в вычислительной работе на уроках математики, физики, химии и других предметах; выработка у учащихся потребности в упрощении (если это возможно) полученного или данного выражения, прежде чем выполнять вычисления; систематический контроль за вычислениями различными способами.

Учителю важно знать исторические трудности и ошибочные суждения, с которыми сталкивались математики в процессе кристаллизации понятия числа, чтобы вовремя предупреждать их появление у учащихся. Считается, что трудно усваивается именно то, что трудно давалось изначально самим ученым. История науки может помочь методике.

Завершая заключительную часть пособия, заметим, что прошли те годы, когда вся страна занималась по единым стабильным учебникам по каждому школьному предмету. Теперь их число по каждому предмету с каждым годом все возрастает. Например, только по математике для 5-х, 6-х классов сейчас по 12 альтернативных комплектов различных издательств. Каждый образовательно-издательский комплект отличается своей идеологией и концептуальными идеями, дидактическим, информационным и дизайнерским подходом к представлению учебного и задачного материала. Учебник нового поколения „ФГОС. Инновационная школа" под редакцией двух академиков В. В. Козлова (РАН) и А. А. Никитина (РАО) по математике для 5-го класса уже содержит параграф „Какие бывают числа" (гл. 2, § 2), в котором с опережением перечисляются все числовые множества от натуральных до комплексных с краткими пояснениями и сообщением, что все они будут изучены в свое время; вводятся понятия „логарифм числа" (гл. 3, § 2), „квадратный корень" (гл. 12, § 3).

Числовая линия, как никакая другая, постоянно экспериментируется.

Обилие школьных учебников затрудняет работу студентов, учителей, учащихся и их родителей. Общественность выступает за уменьшение их числа, но пока бизнес-сообщество упорно противодействует. Наличие их большого числа не только не привело к повышению качества знаний, а, напротив, к его снижению, о чем свидетельствуют результаты ИГА и ЕГЭ. Попутно отметим, по данным ВЦИОМ 62 % россиян считают, что с введением ЕГЭ качество знаний учащихся резко ухудшилось (Владимирские ведомости. 2014. № 178).

С учебно-методическими комплектами (учебник, книга для учителя, дидактические материалы, задачник-тренажер и др.) студент может ознакомиться в ресурсах Интернета на сайте: http://www.alleng.ru/edu/math1.htm

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Башмаков, М. И.* Изучение алгебры в 7 – 9 классах : кн. для учителя / М. И. Башмаков. – М. : Просвещение, 2007. – 208 с. – ISBN 5-09-014123-1.

2. *Виленкин, Н. Я.* Математика 4 – 5 классы. Теоретические основы / Н. Я. Виленкин. – М. : Просвещение, 1974. – 224 с.

3. *Денищева, Л. О.* Разработка педагогических тестов по математике / Л. О. Денищева, Т. А. Корешкова, Т. Г. Михалева. – М. : ВАКО, 2014. – 192 с. – ISBN 978-5-408-01481-1.

4. Изучение алгебры в 7 – 9 классах : кн. для учителя / Ю. М. Колягин [и др.]. – М. : Просвещение, 2004. – 286 с. – ISBN 5-09-013101-7.

5. *Истомина, Н. Б.* Методические рекомендации к учебникам «Математика» для 5 – 6 классов / Н. Б. Истомина. – М. : Ассоциация XXI век, 2001. – 208 с. – ISBN 5-89308-077-7.

6. Лабораторные и практические работы по методике преподавания математики : учеб. пособие для студентов физ.-мат. специальностей пед. ин-тов / Е. И. Лященко [и др.] ; под ред. Е. И. Лященко. – М. : Просвещение, 1988. – 223 с. – ISBN 5-09-000600-8.

7. *Лященко, Е. И.* Методика обучения математике в 4 – 5 классах / Е. И. Лященко, А. А. Мазаник. – Минск : Народная асвета, 1976. – 222 с.

8. *Макарычев, Ю. Н.* Изучение алгебры в 7 – 9 классах : кн. для учителя / Ю. Н. Макарычев [и др.] ; под ред. С. А. Теляковского. – М. : Просвещение, 2006. – 254 с. – ISBN 5-09-015463-5.

9. Математика. Методические рекомендации к учебнику 5 класса : кн. для учителя / С. Б. Суворова [и др.]. – М. : Просвещение, 1999. – 141 с. – ISBN 5-09-008678-8.

10. Математика. Методические рекомендации к учебнику 6 класса : кн. для учителя / С. Б. Суворова [и др.]. – М. : Просвещение, 2000. – 128 с. – ISBN 5-7107-3151-X.

11. *Кадилова, С. Н.* Математика. 7 класс. Методическое пособие к учебному комплекту под редакцией Г. В. Дорофеева «Математика 7» / С. Н. Кадилова, Т. В. Колесникова, А. Н. Тернопол. – М. : Дрофа, 2001. – 176 с. – ISBN 5-7107-4898-6.

12. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика : учеб. пособие для студентов пед. ин-тов по физ.-мат. специальностям / А. Я. Голох [и др.] ; сост. В. И. Мишин. – М. : Просвещение, 1987. – 416 с.

13. Методика преподавания математики в средней школе: частная методика : учеб. пособие для студентов физ.-мат. фак. пед. ин-тов / Ю. М. Колягин [и др.]. – М. : Просвещение, 1977. – 480 с.

14. Методика и технология обучения математике. Курс лекций : пособие для вузов / под науч. ред. Н. Л. Стефановой, Н. С. Подходовой. – М. : Дрофа, 2005. – 416 с. – ISBN 5-7107-7414-6.

15. *Мордкович, А. Г.* Алгебра. 7 – 9 кл. Методическое пособие для учителя / А. Г. Мордкович. – М. : Мнемозина, 2000. – 143 с. – ISBN 5-87441-170-4.

16. Планирование обязательных результатов обучения математике / Л. О. Денищева [и др.] ; сост. В. В. Фирсов. – М. : Просвещение, 1989. – 237 с. – ISBN 5-09-000601-6.

17. Повышение вычислительной культуры учащихся : пособие для учителя / П. Б. Ройтман [и др.]. – М. : Просвещение, 1985. – 48 с.

18. Преподавание алгебры в 6 – 8 классах : сб. ст. / сост.: Ю. Н. Макарычев, Н. Г. Миндюк. – М. : Просвещение, 1980. – 230 с.

19. Примерные программы по учебным предметам. Математика 5 – 9 классы : проект. – М. : Просвещение, 2011. – 64 с. – (Стандарт второго поколения). – ISBN 978-5-09-025245-4.

20. Сборник нормативных документов. Математика / сост.: Э. Д. Днепров, А. Г. Аркадьев. – М. : Дрофа, 2009. – 128 с. – ISBN 978-5-358-04767-9.

21. Теоретические основы обучения математике в средней школе : учеб. пособие / Т. А. Иванова [и др.] ; под ред. проф. Т. А. Ивановой. – Н. Новгород : НГПУ, 2003. – 203 с. – ISBN 5-85219-087-X.

22. Федеральный перечень учебников математики на 2015/16 учебный год. – URL: http://www.vestnik.edu.ru/ (дата обращения: 18.06.2015).

23. Фундаментальное ядро содержания общего образования / под ред. В. В. Козлова, А. М. Кондакова. – М. : Просвещение, 2011. – 59 с. – (Стандарты второго поколения). – ISBN 978-5-09-025234-8.

24. *Черновой, Е. В.* Технология подготовки урока в современной информационной образовательной среде : пособие для учителя / Е. В. Черновой. – М. : Просвещение, 2014. – 56 с. – ISBN 978-5-09-031957-7.

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ ... 3

Глава 1. УЧЕНИЕ О ЧИСЛОВЫХ СИСТЕМАХ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ ... 15

1.1. „Числа и вычисления” как одна из основных содержательно-методических линий образовательной области „Математика” ... 15

1.2. Общие теоретические и методические основы изучения числовых систем ... 17

Глава 2. МЕТОДИКА ИЗУЧЕНИЯ РАЗЛИЧНЫХ ВИДОВ ЧИСЕЛ ... 22

2.1. Натуральные числа и нуль ... 22

2.2. Дробные числа ... 39

2.3. Отрицательные числа и множество рациональных чисел ... 59

2.4. Иррациональные числа и множество действительных чисел ... 68

2.5. Мнимые числа и множество комплексных чисел ... 76

Глава 3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ ПРАКТИКА И ЕЁ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЕ В ПРОЦЕССЕ ИЗУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКИ ... 79

3.1. Методика изучения приближенных вычислений ... 79

3.2. Вычислительная техника и возможности ее использования в школьном обучении: прошлое и настоящее ... 86

3.3. Формирование вычислительных умений ... 96

ЗАКЛЮЧЕНИЕ ... 106

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ ... 108

Учебное издание

ПОКРОВСКИЙ Владимир Павлович

МЕТОДИКА ОБУЧЕНИЯ МАТЕМАТИКЕ: ЧИСЛОВАЯ СОДЕРЖАТЕЛЬНО-МЕТОДИЧЕСКАЯ ЛИНИЯ

Учебно-методическое пособие

Редактор Е. В. Невская

Технический редактор Н. В. Тупицына

Корректор В. С. Теверовский

Компьютерная верстка Л. В. Макаровой

Подписано в печать 11.09.15.
Формат 60×84/16. Усл. печ. л. 6,51. Тираж 50 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.