

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
 Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
 высшего образования  
**«Владимирский государственный университет  
 имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»**  
 (ВлГУ)

УТВЕРЖДАЮ

Проректор  
по образовательной деятельности

А.А.Панфилов

« 17 » 05 2016г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ**

«АЛГЕБРА И ТЕОРИЯ ЧИСЕЛ»

Направление подготовки «44.03.05 Педагогическое образование»

Профиль/программа подготовки «Физика. Математика»

Уровень высшего образования БАКАЛАВРИАТ

Форма обучения ОЧНАЯ

Семестр	Трудоемкость зач. ед./ час.	Лекции, час.	Практич. занятия, час.	Лаборат. работы, час.	СРС, час.	Форма промежу- точного контро- ля (экс./зачет)
1	4/144	18	36		54	экзамен-36ч.
2	2/72	18	18		9	экзамен- 27ч.
3	3/108	18	36		54	зачет
4	2/72	18	36		18	зачет с оценкой
Итого	11/396	72	126		135	63

Владимир 2016

*А.А.Панфилов*

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целями освоения дисциплины (модуля) являются изучение основных алгебраических структур и прививание общей алгебраической культуры, необходимой для дальнейшего изучения университетских математических и физических дисциплин и обеспечивающих будущему учителю глубокое понимание основ школьного курса математики.

*Цели изучения дисциплины:*

познакомить студентов с кругом задач классической и современной алгебры и теории чисел;

прояснить роль алгебраических понятий во взаимосвязи с другими математическими дисциплинами;

сформировать у студентов элементы математической культуры, которые смогут обеспечить ясное понимание смысла и значения разделов математики, изучаемых в школе;

*Задачи изучения дисциплины:*

научить студентов проявлять самостоятельность и творческий подход в овладении математическими дисциплинами;

научить студентов оперировать с классическими понятиями алгебры и теории чисел: решать алгебраические уравнения и системы уравнений, решать задачи, связанные с линейной зависимостью и линейной независимостью системы векторов, задачи, связанные с приводимостью и неприводимостью многочленов над различными числовыми полями; на примере темы «Квадратичные формы» познакомить студентов с разделами современной алгебры и рассмотреть некоторые задачи из этих разделов.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина относится к вариантивному блоку учебного плана. С курса алгебры и теории чисел начинается математическое образование. Ее изучение основывается на таких математических понятиях, как множество, многочлен, функция, рассматриваемых в школьном курсе математики, и продолжает развитие идей и методов данного курса. Поэтому для успешного усвоения курса «Алгебра и теория чисел» необходимо знание основных формул, изучаемых в школьной алгебре, свойств элементарных функций, умение решать квадратные уравнения, знание основных значений тригонометрических функций.

Курс «Алгебра и теория чисел» имеет связи с различными математическими дисциплинами. Знания, полученные в этом курсе, используются в аналитической геометрии, математическом анализе, функциональном анализе, дифференциальной геометрии и топологии, дифференциальных уравнениях, дискретной математике и математической логике, теории

чисел, методах оптимизации и др. Так раздел «Линейные векторные пространства» тесно связан с курсом «Геометрия», который дает для данного раздела многочисленные примеры. В свою очередь геометрия активно использует понятия линейно-зависимой и линейно-независимой системы векторов, которые изучаются в курсе алгебры и теории чисел. Умение оперировать комплексными числами и знание тригонометрической формы комплексного числа необходимы для изучения курса «Теория функций комплексного переменного».

### **3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

В результате освоения дисциплины обучающийся должен демонстрировать следующие результаты образования: ПК-1,11.

Выпускник должен обладать следующими профессиональными компетенциями (ПК): способностью разрабатывать и реализовывать учебные программы базовых и элективных курсов в различных образовательных учреждениях (ПК-1);

готовностью использовать систематизированные теоретические и практические знания для определения и решения исследовательских задач в области образования (ПК-11).

В результате курса алгебры и теории чисел студент должен знать следующие методы, факты, свойства, применяемые при решении алгебраических задач

*Алгебра, алгебраические системы.*

Умение определять характеристики множества (группа, кольцо, поле)

Умение работать в кольце классов вычетов.

*Системы линейных уравнений. Определители.*

Владение общими приемами при решении систем линейных уравнений

Применение метода последовательного исключения неизвестных.

Вычисление определителей произвольного порядка.

Знание теоремы Лапласа и ее применение для вычисления определителей.

Использование правила Крамера для решения систем лнн. уравнений общего вида.

*Поле комплексных чисел.*

Умение приводить к тригонометрической форме комплексных чисел.

Владение формулой Муавра.

Извлечение корней из комплексных чисел.

*Арифметические пространства и линейные уравнения.*

Умение определять базис и ранг конечной системы векторов.

Элементарные преобразования матриц.

Применения критерия совместности системы линейных уравнений.

Знание свойств решений систем линейных уравнений.

*Алгебра матриц*

Применение операций над матрицами.

Вычисление обратной матрицы

Нахождение ранга матрицы

Записи и решение квадратных систем линейных уравнений в матричной форме.

*Векторные пространства.*

Умение определять базис, размерность векторного пространства и координаты вектора.

Определять изоморфизм векторных пространств.

Решение неравенства Коши – Буняковского и определения угла между векторами.

*Линейные преобразования.*

Выделение ядра и образа линейного оператора.

Умение определять матрицу оператора в различных базисах.

Нахождение собственных векторов и значений линейных операторов.

*Кольцо многочленов от одной переменной. Теория делимости.*

Деление на двучлен  $x - a$  и корни многочлена.

Применение алгоритма Евклида для многочленов.

Разложение многочленов на неприводимые множители.

Применение формул Виета для решения уравнений произвольной степени.

Решение уравнений третьей и четвертой степени.

Вычисление целых и рациональные корни многочленов. Критерий неприводимости

Деленштейна.

*Многочлены от нескольких переменных.*

Владение всеми способами выражение симметрического многочлена через основные симметрические.

Умение использовать связь симметрических многочленов и формул Виета.

Вычисление результата и дискриминанта многочлена.

*Алгебраические числа.*

Освобождение знаменателя от иррациональности с помощью алгебраических чисел

Геометрические построения циркулем и линейкой и разрешимость уравнений в радикалах. Построение правильных многоугольников.

### *Группы. Подгруппы.*

Построение циклической группы  $\alpha$ .

Определение изоморфизма и гомоморфизма групп.

Выделение смежных классов.

Определение различных элементов в фактор-группе.

### *Кольца. Покольца*

Знание основных свойств кольца и умение применять их к множествам

Нахождение идеалов колец, фактор-кольца.

Умение находить разложение многочленов на неприводимые множители в кольце многочленов.

**В результате изучения дисциплины студент должен знать:** Основные понятия и методы решения систем линейных уравнений. Понятие линейной независимости системы векторов, базиса системы векторов. Алгебраические операции с матрицами, ранг матрицы, понятия обратной и обратной матриц. Подстановки и их знаки. Определители, их свойства. Векторные пространства: базис и размерность; подпространства; сумма и пересечение подпространств; прямые суммы. Билинейные и квадратичные формы; приведение квадратичной формы к нормальному виду; положительно определенные квадратичные формы. Линейные операторы: собственные векторы и собственные значения. Понятия группы, кольца, поля. Основы теории чисел.

**В результате изучения дисциплины студент должен уметь:** решать системы линейных уравнений методом Гаусса; находить сумму и произведение матриц, ранг матрицы; обратную матрицу; вычислять определитель, пользуясь определением, приводя матрицу к диагональному виду, раскладывая его по строке (столбцу); решать системы линейных уравнений по формулам Крамера; устанавливать линейную зависимость или независимость систем векторов; применять векторную алгебру к решению задач; вычислять собственные значения и векторы линейных операторов.

**В результате изучения дисциплины студент должен владеть:** способами ориентации в профессиональных источниках информации (журналы, сайты, образовательные порталы и т.д.); способами взаимодействия с другими субъектами образовательного процесса; различными средствами коммуникации в профессиональной педагогической деятельности; способами совершенствования профессиональных знаний и умений путем использования возможностей информационной среды образовательного учреждения, региона, области, страны.

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Общая трудоемкость дисциплины составляет 11 зачетных единиц, 396 часов.

№	Раздел (тема) дисциплины	Семестр	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)					Объем учебной работы, с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости (по неделям семестра), форма промежуточной аттестации (по семестрам)
			Неделя семестра	Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	Контрольные работы		
1	Алгебра матриц. Операции над матрицами	1	2	4			7	2/33	
2	Теория определителей. Определители 2-го и 3-го порядков. Определители произвольного порядка.	1	2	8			8	2/20	рейтинг-контроль 1
3	Свойства определителей. Теорема Лапласа.	1	2	4			8	2/33	
4	Вычисление обратной матрицы. Определитель произведения матриц.	1	2	2			6	1/25	
5	Ранг матрицы. Теорема Кронекера-Кэпелли	1	2	4			6	2/33	рейтинг-контроль 2
6	Записи и решение квадратных систем линейных	1	2	4			6	2/33	

уравнений в матричной форме. Правило Крамера								
Системы линейных уравнений. Метод последовательного исключения неизвестных	1	2	4			6	2/33	рейтинговый контроль 2
Поле комплексных чисел. Тригонометрическая форма комплексных чисел. Формула Муавра. Корни из комплексных чисел и многоугольни деления круга	1	4	6			7	2/20	
РСЕГО	1	18	36			54	15/27	экзамен
Кольцо многочленов от одной переменной. Теория делимости. Деление на двучлен $x - a$ и корни многочлена. Схема Горнера. Теорема Безу.	2	2	4			1	2/33	
Деление с остатком и алгоритм Евклида. Разложение многочленов на неприводимые	2	2	2			1	1/25	рейтинговый контроль 1

нимые множители.								
Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел. Формулы Виета.	2	2	2			1	1/25	
Уравнения третьей и четвертой степени. Целые и рациональные корни многочленов. Критерий неприводимости Эйзенштейна.	2	2	1			1	1/33	
Рациональные дроби, разложение на простейшие дроби.	2	2	1			1	1/33	рейтинг-контроль 2
Многочлены от нескольких переменных. Основная теорема о симметрических многочленах.	2	2	1			1	2/33	
Симметрические многочлены и формулы Виета.	2	2	2			1	1/25	рейтинг-контроль 3
Результант, Дискриминант многочлена.	2	2	1			1	1/33	
Системы алгебраических уравнений от нескольких	2	2	1			1	1/33	



равенств.								
<b>ВСЕГО</b>	<b>2</b>	<b>18</b>	<b>18</b>		<b>9</b>		<b>11/31</b>	экзамен
Группы. Циклические группы.	3	2	6		4		2/25	
Группы симметрий правильных многоугольников.								
Подгруппы.								
Поля. Подполя.	3	2	2		2		1/25	
Линейные операторы. Ядро и образ линейного оператора. Действия над линейными операторами.	3	2	4		3		2/33	
Матрица линейного оператора в различных базисах.	3	2	4		9		2/33	рейтинг-контроль 1
Инвариантные подпространства.	3	2	6		9		2/25	
Объемные вектора и значения линейных операторов								
Билинейные и квадратичные формы. Линейные формы. Билинейные. Преобразование матрицы билинейной формы при переходе к новому базису	3	4	6		9		3/30	рейтинг-контроль 2

Квадратичные формы. Приведение в каноническому виду – методы Лагранжа и Якоби	3	2	6		9		2/25	
Закон инерции квадратичных форм. Определенные формы	3	2	2		9		1/25	рейтинг-контроль 3
<b>ВСЕГО</b>	3	18	36		54		13/24	зачет
Делимость и простые числа. Теорема о делении с остатком. НОД чисел. Алгоритм Евклида. Простые числа. Основная теорема арифметики. основное свойство простого числа.	4	2	2		6		1/25	
Целые систематические числа. Существование и единственность значения целой дроби	4	2	2		6		1/25	Рейтинг №1
Теория сравнений. Обратности и их свойства. Классы чисел по данному модулю. Когда и поле классов вы-	4	2	4		6		2/33	

четов. Системы вычетов								
Функция Эйлера. Теорема Эйлера и Ферма. Применение теорем Эйлера и Ферма. Сравнения и системы сравнений с неизвестной величиной	4	2	6			6	2/25	
Сравнения первой степени. Системы сравнений. Сравнения по простому модулю. Сравнения по степени простого числа	4	2	4			6	2/33	
Двузначные сравнения по простому модулю. Сравнения высших степеней. Применение целых дробей к решению сравнений	4	2	4			6	2/33	Рейтин- контроль №2
Квадратичные вычеты и невычеты. Критерий Эйлера. Символ Лежандра	4	2	4			6	2/33	
Редукция сравнения по составному модулю к сравнению по степени	4	2	6			6	2/25	

простого числа и сравнению по простому модулю. Показатели чисел в классах по данному модулю. Число классов с заданным модулем. Теорема о существовании первообразного корня по простому модулю. Индексы чисел и классов по данному модулю								
Арифметические приложения теории сравнений	4	2	4			6	2/33	Рейтинг-контроль №2
ВСЕГО	4	18	36			18	16/30	ачет с оценкой
Итого		72	126			135	55/28	

## 5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

При реализации программы дисциплины «Алгебра и теория чисел» используются различные методы изложения лекционного материала в зависимости от конкретной темы – вводная, установочная, подготовительная лекции, лекции с применением техники обратной связи, лекция-беседа. С целью проверки усвоения студентами необходимого теоретического минимума, проводятся экспресс - тесты по лекционному материалу в письменной форме. Практические занятия предназначены для освоения и закрепления теоретического материала, изложенного на лекциях. Практические занятия направлены на приобретение навыка решения конкретных задач, расчетов на основе имеющихся теоретических и фактических знаний. На коллоквиумах обсуждаются теоретические вопросы изучаемого курса. Консультации представляют собой своеобразную форму проведения лекционных занятий, основным содержанием которых является разъяснение отдельных, часто наиболее сложных или практически значимых вопросов изучаемой программы. Самостоятельная работа студентов направлена на закрепление полученных навыков и на приобретение новых теоретических и фактических знаний, выполняется в читальном зале библиотеки и в домашних условиях, подкрепляется учебно- методическим и информационным обеспечением (учебники, учебно-методические пособия, конспекты лекций). Практикуется самостоятельная работа по постановке и решению индивидуальных оригинальных прикладных задач. Студенты готовятся к участию в ежегодной студенческой олимпиаде по математике. Для активизации образовательной деятельности с целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся, используются формы проблемного, контекстного, индивидуального и междисциплинарного обучения.

## 6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Текущий контроль - рейтинг-контроль №1,2,3 в 1-4 семестрах

Промежуточная аттестация - экзамен (1,2,сем),зачет (3 сем), зачет с оценкой (4 сем)

### 1 семестр

#### Текущий контроль

#### Задания к контрольным работам

#### Контрольная работа № 1. (Рейтинг №1)

**ТЕМА:** Определители

**Постановка задачи:** Понятие перестановки, знака алгебраического дополнения. Вычисление определителя

#### Ход работы:

1. Подберите  $k, l$  так, чтобы перестановка: :

#### Вариант 1.

$48k25117$  была четной.

#### Вариант 2.

$634k7121$  была нечетной

2. Выясните, какие из следующих произведений являются членами 7-го порядка и укажите знак члена определителя:

**Вариант 1.**

a)  $a_{43}a_{53}a_{63}a_{15}a_{23}a_{34}a_{71}$ ,

b)  $a_{23}a_{67}a_{54}a_{16}a_{35}a_{41}a_{72}$ .

**Вариант 2.**

a)  $a_{15}a_{28}a_{74}a_{36}a_{61}a_{43}$ ,

b)  $a_{72}a_{16}a_{33}a_{55}a_{27}a_{61}a_{44}$ .

3. Вычислите определитель, пользуясь только определением:

**Вариант 1.**

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 5 & 6 & 0 \\ 0 & 7 & 8 & 0 \end{vmatrix}$$

**Вариант 2.**

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Как изменится определитель  $n$ -го порядка, если:

**Вариант 1.**

$i$ -ю строку переставить на последнее место, а  $(i+1)$ -ю и все последующие строки передвинуть вверх, сохраняя их расположение?

**Вариант 2.**

• его строки записать в обратном порядке?

**Контрольная работа № 2. (Рейтинг №2)**

**ТЕМА:** Матрицы. Ранг матриц. Системы линейных уравнений

**Постановка задачи:** Понятие матрицы, обратной матрицы. Решение систем линейных уравнений с выделением общего, частного, фундаментального и базисного решений

**Ход работы:**

1. Найти решение системы линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} -x + 5y - 5z = -5 \\ -7x + 3y + 5z = 8 \\ x - 7y - 9z = -3 \end{cases}$$

2. Найти решение матричного уравнения:

$$X \times \begin{vmatrix} 2 & -3 & 4 \\ -9 & -9 & -3 \\ 4 & -5 & -6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 & -1 \\ 3 & 6 & -2 \\ 1 & -8 & -5 \end{vmatrix}$$

3. Найти общее и частное решения системы неоднородных линейных уравнений методом последовательного исключения неизвестных.  
 Найти общее и фундаментальные решения системы однородных линейных уравнений, соответствующей неоднородной исходной системе.  
 Выразить общее решение неоднородной системы через общее решение однородной системы.

$$\begin{cases} 4x_1 + 13x_2 + 23x_3 = 113 \\ -21x_1 - 9x_2 - 14x_3 = 95 \\ 33x_1 + 21x_2 + 22x_3 = -107 \\ -3x_1 + 27x_2 + 2x_3 = -66 \end{cases}$$

### Рейтинг-контроль № 3.

ТЕМА: Комплексные числа

Постановка задачи: Операции над полем комплексных чисел. Геометрическая интерпретация комплексных чисел

Ход работы:

1. Вычислите

а)  $\frac{(2+i)^3 - (1-2i)^3}{(1+2i)^3 - (2+3i)^2}$

б)  $\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^m$

в)  $\frac{(1-i)^{n+2}}{(1+i)^n}$

г)  $\sqrt{\frac{1-i}{i+\sqrt{3}}}$

2. Решить уравнение

а)  $z \cdot \bar{z} + 2(z + \bar{z}) = 3i + 1$

б)  $x^2 + (1+2i)x + 3+i = 0$

3. Решить систему для комплексных  $x$  и  $y$

$$\begin{cases} ix + (1+i)y = 3+i \\ (1-i)x + (6+i)y = 4 \end{cases}$$

4. Определить геометрическое место точек (построить и описать)

$$\begin{cases} 1 < |z - 2i| \leq 2 \\ \frac{\pi}{3} < \arg z < \pi \end{cases}$$

### Тестовый рейтинг-контроль

1. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 3 \end{array} \right)$$

Тогда система линейных уравнений:

- А) определенная;  
 Б) неопределенная;  
 В) несовместная;  
 Г) имеет 3 решения.

2. Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид

$$\left( \begin{array}{cccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 & 0 \end{array} \right)$$

Тогда общее решение системы линейных уравнений содержит:

- А) 3 главных и 1 свободное неизвестное;  
 Б) 2 главных и 2 свободных неизвестных;  
 В) 1 главное и 3 свободных неизвестных;  
 Г) не содержит свободных неизвестных.

3. Дана матрица  $A$  с параметром  $a$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & a \\ 2 & 2 & 2 & a \\ 3 & 3 & 3 & a \end{pmatrix}$$

Тогда ранг матрицы  $A$  равен:

- А) 2 при любом значении  $a$ ;  
 Б) 2 при  $a = 0$ ;  
 В) 1 при любом значении  $a$ ;  
 Г) 1 при  $a = 0$ .

Расширенная матрица системы линейных уравнений имеет вид

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 5 & a & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & a-1 & a-2 \end{array} \right)$$

Тогда система несовместна при:

- А)  $a = 0$ ;  
 Б)  $a = 1$ ;  
 В)  $a = 2$ ;  
 Г) при любом значении  $a$ .

4. Дано множество решений системы однородных линейных уравнений

$x = \{(2x_1; x_2; x_1-x_2; -x_2; -x_1) | x_1, x_2 \in \mathbb{R}\}$ . Тогда фундаментальная система решений содержит:

- А) 1 вектор;  
 Б) 2 вектора;  
 В) 3 вектора;  
 Г) 4 вектора.

5. Если в определителе  $d$  четвертого порядка все элементы умножить на 2, а затем определитель транспонировать, то полученный определитель будет равен:

- А)  $2d$ ;  
 Б)  $-2d$ ;  
 В)  $16d$ ;  
 Г)  $-16d$ .

6. Если в определителе  $d$  третью строку умножить на 3 и к ней прибавить пятую строку, умноженную на 5, то полученный определитель будет равен:

- А)  $15d$ ;  
 Б)  $3d$ ;  
 В)  $d$ ;  
 Г)  $5d$ .

7. Коэффициент при  $a$  в определителе

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a \\ -4 & 2 & 5 \end{vmatrix} \text{ равен:}$$

- А) 10;  
 Б) 2;  
 В) -10;  
 Г) -2.

8. Дан определитель  $d =$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}. \text{ Тогда значение вы-}$$

ражения

$$(a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}) + (a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}),$$

где  $A_{ij}$  – алгебраическое дополнение элемента  $a_{ij}$ :

- А)  $d$ ;  
 Б) 0;  
 В)  $2d$ ;  
 Г)  $-d$ .



9. Определитель  $d = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

равен:

- А) 0;  
 Б)  $2 \circ 5 \circ 6 \circ 1 = 60$ ;  
 В)  $2 \circ 4 \circ 5 \circ 6 = 240$ ;  
 Г)  $3 \circ 5 \circ 6 \circ 4 = 360$ .

10. Дано матричное уравнение  $ABX = C^{-1}$ , где  $A, B, C$  – невырожденные квадратные матрицы одного порядка. Тогда:

- А)  $X = C^{-1}A^{-1}B^{-1}$ ;  
 Б)  $X = A^{-1}C^{-1}B^{-1}$ ;  
 В)  $X = A^{-1}B^{-1}C^{-1}$ ;  
 Г)  $X = B^{-1}A^{-1}C^{-1}$ .

11. Элемент  $c_{33}$  произведения матриц  $A$  и  $B$  подходящего размера равен сумме произведений элементов:

- А) 3-й строки матрицы  $A$  и 3-й строки матрицы  $B$ ;  
 Б) 3-го столбца матрицы  $A$  и 3-й строки матрицы  $B$ ;  
 В) 3-й строки матрицы  $A$  и 3-го столбца матрицы  $B$ ;  
 Г) 3-го столбца матрицы  $A$  и 3-го столбца матрицы  $B$ .

12. Дано матричное уравнение  $AXB = C$ , где  $A, B, C$  – невырожденные квадратные матрицы одного порядка. Тогда:

- А)  $X = CA^{-1}B^{-1}$ ;  
 Б)  $X = A^{-1}CB^{-1}$ ;  
 В)  $X = A^{-1}B^{-1}C$ ;  
 Г)  $X = B^{-1}A^{-1}C$ .

13. В верном равенстве  $A_{52}B_{mn}C_{34} = D_{pq}$  значения  $m, n, p, q$  равны:

- А)  $m = 5, n = 3, p = 4, q = 2$ ;  
 Б)  $m = 2, n = 3, p = 5, q = 4$ ;  
 В)  $m = 5, n = 2, p = 2, q = 4$ ;  
 Г)  $m = 2, n = 4, p = 5, q = 4$ .

14. Дана матрица  $A = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ . Тогда матрица, обратная матрице  $A$ , равна:

А)  $\begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ ;

Б)  $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ ;

В)  $-\frac{1}{8} \begin{pmatrix} -4 & 6 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ ;

Г)  $\frac{1}{8} \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 4 & -4 \end{pmatrix}$ .

15. Значение  $i^{127}$  равно:

- А)  $i$ ;  
 Б)  $-i$ ;  
 В)  $1$ ;  
 Г)  $-1$ .

16. Алгебраическая форма числа

$\frac{1+3i}{2+i}$  имеет вид:

- А)  $1+i$ ;  
 Б)  $1-i$ ;  
 В)  $-1+i$ ;  
 Г)  $-1-i$ .

17. Модуль комплексного числа  $z = 3 - 4i$  равен:

- А) 25;  
 Б) 5;  
 В) 7;  
 Г)  $\sqrt{7}$ .

18. Произведение  $(1-2i)(2+i)$  равно:

- А)  $4-3i$ ;  
 Б)  $4+3i$ ;  
 В)  $-4-3i$ ;  
 Г)  $-4+3i$ .

19. Значение  $i^{1320}$  равно:

- А)  $i$ ;  
 Б)  $-i$ ;  
 В)  $1$ ;  
 Г)  $-1$ .

20. Тригонометрическая форма числа  $z = \sqrt{3} + i$  имеет вид:

А)  $2(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3})$ ;

Б)  $2(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6})$ ;

В)  $2(\sin \frac{\pi}{3} + i \cos \frac{\pi}{3})$ ;

Г)  $2(\cos(-\frac{\pi}{6}) + i \sin(-\frac{\pi}{6}))$ .

21. Тригонометрическая форма числа  $z = -1 + i$  имеет вид:

А)  $\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right);$

Б)  $\sqrt{2} \left( \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right);$

В)  $2 \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right);$

Г)  $\sqrt{2} \left( \sin \frac{3\pi}{4} + i \cos \frac{3\pi}{4} \right).$

22. Значения  $\sqrt[4]{\cos \pi + i \sin \pi}$  равны:

$z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4};$

$z_2 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4};$

А)  $z_3 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4};$

$z_4 = \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4};$

Б)

$z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4};$

$z_2 = \cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4};$

$z_3 = \cos \frac{9\pi}{4} + i \sin \frac{9\pi}{4};$

$z_4 = \cos \frac{13\pi}{4} + i \sin \frac{13\pi}{4};$

$z_1 = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4};$

В)  $z_2 = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2};$

$z_3 = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4};$

$z_4 = \cos \pi + i \sin \pi;$

Г)

$z_1 = \cos 4\pi + i \sin 4\pi;$

$z_2 = -\cos 4\pi - i \sin 4\pi;$

$z_3 = \cos \pi + i \sin \pi;$

$z_4 = -\cos \pi - i \sin \pi.$

23. Значение  $(1 + i)^{20}$  равно (использовать формулу Муавра):

А)  $-2^{10};$

Б)  $2^{10};$

В)  $-2^{10} i;$

Г)  $2^{10} i.$

24. Значение  $(\sqrt{3} + i)^{12}$  равно (использовать формулу Муавра):

А)  $2^{12};$

Б)  $-2^{12};$

В)  $2^{12} i;$

Г)  $-2^{12} i.$

### Вопросы к экзамену по курсу «Алгебра и теория чисел»

#### Семестр I

1. Метод последовательного исключения неизвестных.
2. Теорема о ненулевых решениях однородных систем.
3. Определители второго порядка.
4. Определители третьего порядка.
5. Подстановки. Четность и знак подстановки.
6. Определение определителя произвольного порядка.
7. Свойства определителей 1-3.
8. Свойства определителей 4-6.
9. Вычисление определителей с помощью элементарных преобразований.

10. Определитель Вандермонда.
11. Миноры и алгебраические дополнения.
12. Теорема Лапласа.
13. Разложение определителя по строке и столбцу.
14. Правило Крамера.
15. Ненулевые решения квадратных однородных систем линейных уравнений.
16. Комплексные числа в алгебраической форме.
17. Геометрическое представление комплексных чисел и операций над ними.
18. Тригонометрическая форма комплексных чисел.
19. Формула Муавра.
20. Корни из комплексных чисел.
21. Многочлены деления круга.
22. Элементарные преобразования матриц.
23. Вычисление ранга матрицы.
24. Критерий совместности системы линейных уравнений.
25. Равенство рангов строк и столбцов матрицы.
26. Свойства решений систем линейных однородных уравнений.
27. Фундаментальная система решений однородных систем.
28. Общее решение неоднородных систем линейных уравнений.
29. Операции над матрицами, их свойства.
30. Понятие обратной матрицы.
31. Элементарные матрицы.
32. Условия обратимости матриц.
33. Вычисление обратной матрицы с помощью элементарных преобразований.
34. Определитель произведения матриц.
35. Необходимые и достаточные условия равенства нулю определителя.
36. Теорема о ранге матрицы.
37. Формула обратной матрицы, использующая алгебраические дополнения.
38. Записи и решение квадратных систем линейных уравнений в матричной форме

### ***Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов***

Особое место в овладении данным курсом отводится самостоятельной работе, которая заключается в следующем: –самостоятельное изучение части теоретического материала, тео-

реческая подготовка к практическим занятиям, систематическое выполнение домашних заданий, выполнение индивидуальных заданий.

*Темы (рекомендуемая литература, формы контроля)*

1 Матрицы и их основные виды. Диагональная матрица. Симметричная и кососимметричная матрица. Операции над матрицами. Сложение, вычитание умножение матриц.

\*Перестановочные матрицы. учебники 1,3 Задачи №1.15-1.19 из литер. [5] Опрос

2. Свойство операций над матрицами. Транспонированная матрица. Обратная матрица.

\*Ортогональная матрица. Определители 2 и 3 порядков. Свойства определителей. учебники

3,4 Задачи №1.20-1.23 из литер. [5] Опрос

3 Минор элемента матрицы. Алгебраическое дополнение элемента матрицы. Определитель  $n$ -ого порядка. Теорема Лапласа. \*Простейшие матричные уравнения. учебники 1 – 5 Индивидуальные задания Защита самот. работы

4 Системы линейных алгебраических уравнений. Несовместная и совместная системы. Определенная и неопределенная системы. Частное и общее решение системы. Эквивалентные системы. Методы решения системы  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными Теорема Крамера. Метод обратной матрицы. \*Ранг матрицы. Базисные строки и столбцы. учебники 1-4 Задачи №2.11-2.15 из литер. [5] Конспект

5 Элементарные преобразования над матрицами. Метод Гаусса. Расширенная матрица системы. Тривиальные и нетривиальные решения системы. Базисные и свободные переменные. \*Фундаментальная совокупность решений. Теорема Кронекера - Капелли. 2.3 Задачи №2.16-2.20 из литер. [5] Защита самот. работы

*Контрольные вопросы для самостоятельной оценки качества освоения дисциплины*

1. Понятие матрицы. Алгебраические операции над матрицами: умножение на число, сложение, умножение матриц. Свойства.

2. Определитель квадратной матрицы. Основные свойства определителей.

3. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о разложении определителя по элементам строки и столбца.

4. Обратная матрица. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы. Алгоритм вычисления обратной матрицы при помощи элементарных преобразований. Нахождение обратной матрицы в терминах определителей.

5. Система линейных уравнений (СЛУ) с  $n$  переменными (общий вид). Элементарные преобразования СЛУ. Метод Гаусса решения системы  $m$ - линейных уравнений с  $n$ - переменными. Теорема об определенности СЛУ.

6. Правило Крамера решения системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными.
7. Решение СЛУ матричным методом. Матричные уравнения.
8. Понятие векторного пространства. Примеры.
9. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Свойства.
10. Базис системы векторов. Теорема о числе векторов базисов одной и той же системы векторов.
11. Ранг матрицы. Метод окаймляющих миноров. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Примеры.
12. Базис и размерность векторного пространства. Свойства размерности векторного пространства.
13. Фундаментальная система решений однородной СЛУ.
14. Критерий совместности системы линейных уравнений (Теорема Кронекера – Капелли) Условия определенности и неопределенности совместной системы линейных уравнений. Пример.
15. Понятие и представление комплексных чисел. Геометрическое изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами: сложение, вычитание, умножение, деление.
16. Извлечение корней из комплексных чисел. Корни многочленов.

## 2 семестр

### Рейтинг-контроль № 1

ТЕМА: Многочлены от одной переменной

Постановка задачи: Деление многочлена на двучлен с помощью схемы Горнера. Теория делимости многочленов. Определение НОДа многочленов с помощью алгоритма Евклида

#### Ход работы:

1. Пользуясь схемой Горнера, разложить многочлен  $f(x)$  по степеням  $x - x_0$ :

#### Вариант 1

$$f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 - 4x + 1, x_0 = -1$$

Ответ:

$$f(x) = (x+1)^4 - 2(x+1)^3 - 3(x+1)^2 + 4(x+1) + 1$$

#### Вариант 2

$$f(x) = x^4 - 8x^3 - 24x^2 - 50x + 90, x_0 = 2$$

ОТВЕТ:

$$f(x) = (x-2)^4 - 18(x-2) + 38$$

2. Найти наибольший общий делитель многочленов:

**Вариант 1.**

$$f(x) = x^6 - 7x^4 + 8x^3 - 7x + 7,$$

$$g(x) = 3x^5 - 7x^3 + 3x^2 - 7$$

Ответ: НОД( $f, g$ ) =  $x^3 + 1$

**Вариант 2.**

$$f(x) = x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5.$$

$$g(x) = x^5 + x^2 - x + 1$$

Ответ:

$$\text{НОД}(f, g) = x^3 - x + 1$$

3. Отделить кратные множители многочлена:

**Вариант 1.**

$$x^5 - 10x^3 - 20x^2 - 15x - 4$$

Указание: применить теорему о кратных корнях уравнения, использовать алгоритм Евклида для нахождения НОД( $f, f'$ ).

Ответ:

$$(x+1)^4(x-4)$$

**Вариант 2.**

$$x^5 - 6x^4 + 16x^3 - 24x^2 + 20x - 8$$

Ответ:

$$(x-2)(x^2 - 2x + 2)$$

4. Построить многочлены наименьшей степени с вещественными коэффициентами по данным корням:

**Вариант 1**

Тройной корень  $2-3i$

Ответ:

$$f(x) = (x^3 - 4x + 13)^3 = x^9 - 12x^5 + 87x^4 - 376x^3 + 1131x^2 - 2028x + 2197$$

**Вариант 2.**

Двойной корень  $i$ , простой  $-1-i$ .

Ответ:

$$f(x) = (x^2 + 2x + 2)(x^2 + 1)^2 = x^6 + 2x^5 + 4x^4 + 4x^3 + 5x^2 + 2x + 2$$

**Рейтинг-контроль № 2.**

**ТЕМА:** Решение уравнений высоких степеней. Рациональные корни многочлена

**Постановка задачи:** Процедура нахождения рациональных корней многочлена с помощью соответствующей теоремы и по формулам Виета. Локализация корней многочлена по теореме Штурма

**Ход работы:**

1. Найти рациональные корни многочленов:

**Вариант 1**

a)  $f(x) = x^4 - 2x^3 - 8x^2 + 13x - 24$ ,

b)  $f(x) = 6x^4 + 19x^3 - 7x^2 - 26x + 12$ .

Ответ:

a)  $x_1 = -3$ ;

b)  $x_1 = -3, x_2 = \frac{1}{2}$ .

2.

**Вариант 1.**

Определить  $\lambda$  так, чтобы один из корней уравнения  $x^3 - 7x + \lambda$  равнялся удвоенному другому.

Указание: составить систему уравнений, используя формулы Виета.Ответ:

$\lambda = \pm 6$

3 Разложить на множители многочлен или доказать их неприводимость над полем  $\mathbb{Q}$ :**Вариант 1.**

$$f(x) = x^4 - 3x^3 + 2x^2 + 3x - 9$$

Ответ:

$$f(x) = (x^2 - 2x + 3)(x^2 - x - 3)$$

4. Составить систему Штурма и отделить корни многочлена:

**Вариант 1**

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 1$$

$$f(x) = x^4 - 2x^3 - 7x^2 + 8x + 1,$$

$$f_1(x) = 2x^3 - 3x^2 - 7x + 4,$$

Ответ:  $f_2(x) = 17x^2 - 17x - 8,$

$$f_3(x) = 2x - 1,$$

$$f_4(x) = 1.$$

**Вариант 2**

a)  $f(x) = x^4 + 4x^3 - 2x^2 - 12x + 9$ ,

b)  $f(x) = 10x^4 - 13x^3 + 15x^2 - 18x + 24$ .

ОТВЕТ:

a)  $x_1 = x_2 = 1, x_3 = x_4 = -3$ ;

b) рациональных корней нет

**Вариант 2.**

Сумма двух корней уравнения

$$2x^3 - x^2 - 7x + \lambda$$

равна 1. Определить  $\lambda$ .Ответ:

$\lambda = -3$

**Вариант 2.**

$$f(x) = x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 23x - 12.$$

Ответ:

$$f(x) = (x^2 - x - 4)(x^2 + 5x + 3)$$

**Вариант 2.**

$$f(x) = x^4 - 4x^2 + x + 1$$

четыре вещественных корня в интервалах  $(-3, -2), (-1, 0), (1, 2), (3, 4)$ .

Ответ:

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 1,$$

$$f_1(x) = 4x^2 - 8x + 1,$$

$$f_2(x) = 8x^2 - 3x - 4,$$

$$f_3(x) = 87x - 28,$$

$$f_4(x) = 1.$$

четыре вещественных корня в интервалах

$(-3, -2)$ ,  $(-1, 0)$ ,  $(0, 1)$ ,  $(1, 2)$ .

### Рейтинг-контроль № 3.

**ТЕМА:** Симметрические многочлены

**Постановка задачи:** Связь симметрических многочленов с формулами Виета, основная теорема о симметрических многочленах. Решение систем уравнений от двух неизвестных

**Ход работы:**

1. Найти значение симметрического многочлена  $f(x)$  от корней многочлена  $g(x)$ :

$$f(x) = x_1^3(x_2 + x_3) + x_2^3(x_1 + x_3) + x_3^3(x_1 + x_2) \quad g(x) = x^3 - x^2 - 4x + 1;$$

2. Найти решения системы уравнений:

$$5y^2 - 6xy + 5x^2 - 16 = 0$$

$$y^2 - xy + 2x^2 - y - x - 4 = 0$$

3. Выразить через основные симметрические многочлены:

**Вариант 1**

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1^2 + x_2^2)(x_1^2 + x_3^2)(x_2^2 + x_3^2)$$

**Вариант 2.**

$$f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2)^2(x_1 - x_3)^2(x_2 - x_3)^2$$

Указание: составить таблицу из системы показателей, соответствующей высшему члену данного многочлена, перейти к тождеству с неопределёнными коэффициентами

Ответ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 2\sigma_1^3 \sigma_3 - 2\sigma_2^3 + 4\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - \sigma_3^3$$

Ответ:

$$f(x_1, x_2, x_3) = \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 4\sigma_1^3 \sigma_3 - 4\sigma_2^3 + 18\sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 - 27\sigma_3^3$$

4. При каком значении  $\lambda$  многочлены имеют общий корень:

**Вариант 1.**

$$x^3 - \lambda x + 2 \quad \text{и} \quad x^3 + \lambda x + 2?$$

**Вариант 2.**

$$x^3 + \lambda x^2 - 9 \quad \text{и} \quad x^3 + \lambda x - 3?$$

Указание: Вычислить  $R(f(x), g(x))$  и приравнять его к нулю.



Тестовая рейтинг-контроль

1. Используя схему Горнера, получаем, что остаток от деления многочлена
- a.  $f(x) = x^4 - 3x^2 + x + 5$  на двучлен  $x - 2$  равен:
- b. А) 0;
- c. Б) 12;
- d. В) 11;
- e. Г) 3.
2. Используя схему Горнера, получаем, что остаток от деления многочлена
- a.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x - 2$  на двучлен  $x - 1$  равен:
- b. А) 0;
- c. Б) 1;
- d. В) -1;
- e. Г) 2.
3. Используя схему Горнера, получаем, что остаток от деления многочлена
- a.  $f(x) = x^3 - 2x^2 + x - 2$  на двучлен  $x - 2$  равен:
- b. А) 0;
- c. Б) 2;
- d. В) 11;
- e. Г) -2.
4. Используя схему Горнера, получаем, что остаток от деления многочлена
- a.  $f(x) = x^3 - 3x^2 + 5x - 15$  на двучлен  $x - 3$  равен:
- b. А) 1;
- c. Б) 0;
- d. В) -1;
- e. Г) 5.
5. Используя схему Горнера, получаем, что остаток от деления многочлена
- a.  $f(x) = x^4 - 2x^2 + 2x - 12$  на двучлен  $x - 2$  равен:
- b. А) 0;
- c. Б) 6;
- d. В) -6;
- e. Г) -8.
6. Из теоремы Виета следует, что приведенный (нормированный) многочлен 4-й степени с корнями  $x_1 = 2$  - кратности 2,  $x_2 = 3$ ,  $x_3 = -1$  имеет вид:
- a. А)  $x^4 - 6x^3 + 9x^2 + 4x - 12$ ;
- b. Б)  $x^4 - 6x^3 + 8x^2 + 4x - 12$ ;
- c. В)  $x^4 - 6x^3 + 9x^2 - 4x - 12$ ;
- d. Г)  $x^4 - 6x^3 + 12x^2 + 4x - 12$ .
7. Из теоремы Виета следует, что приведенный (нормированный) многочлен 3-й степени с корнями  $x_1 = i$ ,  $x_2 = -i$ ,  $x_3 = 3$  имеет вид:
- a. А)  $x^3 - 3x^2 + x + 3$ ;
- b. Б)  $x^3 - 3x^2 + x - 3$ ;
- c. В)  $x^3 + 3x^2 + x - 3$ ;
- d. Г)  $x^3 - 3x^2 - x - 3$ .
8. Из теоремы Виета следует, что приведенный (нормированный) многочлен 4-й степени с корнями  $x_1 = 1$  - кратности 2,  $x_2 = 2$ ,  $x_3 = 3$  имеет вид:
- a. А)  $x^4 + 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$ ;
- b. Б)  $x^4 - 7x^3 + 18x^2 - 17x + 6$ ;
- c. В)  $x^4 - 7x^3 + 17x^2 - 17x + 6$ ;
- d. Г)  $x^4 - 7x^3 + 17x^2 + 17x + 6$ .
9. Из теоремы Виета следует, что приведенный (нормированный) многочлен 4-й степени с корнями  $x_1 = 2$  - кратности 2,  $x_2 = 1$  - кратности 2 имеет вид:

- a. А)  $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x + 4$ ;  
 б. Б)  $x^4 - 6x^3 + 12x^2 - 12x + 4$ ;  
 в. В)  $x^4 - 6x^3 + 13x^2 + 12x + 4$ ;  
 г. Г)  $x^4 - 6x^3 + 13x^2 - 12x - 4$ .

10. Из теоремы Виета следует, что приведенный (нормированный) многочлен 4-й степени с корнями  $x_1 = 1$  – кратности 3,  $x_2 = 2$  имеет вид:

- a. А)  $x^4 - 5x^3 + 7x^2 - 7x + 2$ ;  
 б. Б)  $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 5x + 2$ ;  
 в. В)  $x^4 - 5x^3 + 9x^2 - 7x + 2$ ;  
 г. Г)  $x^4 - 5x^3 + 9x^2 + 7x + 2$ .

11. Разложение на неприводимые множители над полем  $\mathbb{R}$  многочлена наименьшей степени с действительными коэффициентами и корнями  $x_1 = 1 + i$  и  $x_2 = 2$  имеет вид:

- a. А)  $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x - 2)$ ;  
 б. Б)  $f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x - 2)$ ;  
 в. В)  $f(x) = (x^2 - 2x - 1)(x - 2)$ ;  
 г. Г)  $f(x) = (x^2 - 2x - 2)(x - 2)$ .

12. Разложение на неприводимые множители над полем  $\mathbb{R}$  многочлена наименьшей степени с действительными коэффициентами и корнями  $x_1 = 2i$  и  $x_2 = 3$  имеет вид:

- a. А)  $f(x) = (x^2 - 4)(x - 3)$ ;  
 б. Б)  $f(x) = (x^2 + 4)(x - 3)$ ;  
 в. В)  $f(x) = (x^2 + 4)(x + 3)$ ;  
 г. Г)  $f(x) = (x^2 - 4)(x + 3)$ .

13. Разложение на неприводимые множители над полем  $\mathbb{R}$  многочлена наименьшей степени с действительными коэффициентами

и корнями  $x_1 = i$  и  $x_2 = -3$  имеет вид:

- a. А)  $f(x) = (x^2 + 1)(x + 3)$ ;  
 б. Б)  $f(x) = (x^2 - 1)(x + 3)$ ;  
 в. В)  $f(x) = (x + 1)(x - 1)(x + 3)$ ;  
 г. Г)  $f(x) = (x^2 + 1)(x - 3)$ .

14. Разложение на неприводимые множители над полем  $\mathbb{R}$  многочлена наименьшей степени с действительными коэффициентами и корнями  $x_1 = -i$  и  $x_2 = 5$  имеет вид:

- a. А)  $f(x) = (x^2 + 1)(x + 5)$ ;  
 б. Б)  $f(x) = (x^2 + 1)(x - 5)$ ;  
 в. В)  $f(x) = (x^2 - 1)(x - 5)$ ;  
 г. Г)  $f(x) = (x^2 - 1)(x + 5)$ .

15. Разложение на неприводимые множители над полем  $\mathbb{R}$  многочлена наименьшей степени с действительными коэффициентами и корнями  $x_1 = 1 - i$  и  $x_2 = 1$  имеет вид:

- a. А)  $f(x) = (x^2 + 1)(x - 1)$ ;  
 б. Б)  $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x + 1)$ ;  
 в. В)  $f(x) = (x^2 - 2x + 2)(x - 1)$ ;  
 г. Г)  $f(x) = (x^2 - 2x + 1)(x - 1)$ .

16. Рациональные корни  $\frac{p}{q}$  многочлена  $f(x) = 3x^3 - 11x - 2$  находятся среди чисел:

- a. А)  $\frac{p}{q} = \pm 3, \pm \frac{3}{2}, \pm \frac{1}{2}$ ;  
 б. Б)  $\frac{p}{q} = \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm 2$ ;  
 в. В)  $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}$ ;  
 г. Г)  $\frac{p}{q} = \pm 2, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{1}{3}$ .

17. Рациональные корни  $\frac{p}{q}$  многочлена  $f(x) = x^4 - 3x^3 + x - 3$  находятся среди чисел:

- a. А)  $\frac{p}{q} = \pm 3;$
- b. Б)  $\frac{p}{q} = \pm \frac{1}{3}, \pm 1;$
- c. В)  $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 3;$
- d. Г)  $\frac{p}{q} = \pm 1, 3.$

18. Рациональные корни  $\frac{p}{q}$  многочлена  $f(x) = 8x^3 - 4x + 1$  находятся среди чисел:

- a. А)  $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8};$
- b. Б)  $\frac{p}{q} = \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm 1;$
- c. В)  $\frac{p}{q} = \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8};$
- d. Г)  $\frac{p}{q} = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}.$

19. Рациональные корни  $\frac{p}{q}$  многочлена  $f(x) = 2x^3 + x^2 - 9x - 2$  находятся среди чисел:

- a. А)  $\frac{p}{q} = \pm 2;$
- b. Б)  $\frac{p}{q} = -1, \pm 2;$
- c. В)  $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{2};$
- d. Г)  $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm \frac{1}{2}.$

20. Рациональные корни  $\frac{p}{q}$  многочлена  $f(x) = 2x^3 - 4x - 8$  находятся среди чисел:

- a. А)  $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm \frac{1}{4}, \pm \frac{1}{8};$
- b. Б)  $\frac{p}{q} = \pm 8, \pm 4, \pm 2;$
- c. В)  $\frac{p}{q} = \pm 1, \pm 2, \pm 4, \pm 8, \pm \frac{1}{2};$
- d. Г)  $\frac{p}{q} = -1, -2, -4, -8, -\frac{1}{2}.$

### Вопросы к экзамену по курсу «Алгебра и теория чисел»

#### Семестр 2

1. Операции над многочленами. Степень многочлена.
2. Деление на двучлен  $x - a$  и корни многочлена.
3. Схема Горнера.
4. Теорема Безу. Число корней многочлена.
5. Разложение многочленов по степеням двучлена  $x - a$ .
6. Кратные корни многочленов и их отделение.
7. Теорема о делении многочленов с остатком.
8. Алгоритм Евклида вычисления наибольшего общего делителя.
9. Разложение многочленов на неприводимые множители.
10. Алгебраическая замкнутость поля комплексных чисел.

11. Разложение многочленов на линейные множители над полем комплексных чисел.  
Формулы Виета.
12. Сопряженность мнимых корней многочленов с вещественными коэффициентами и разложение многочленов на поле действительных чисел на неприводимые множители первой и второй степеней.
13. Уравнения третьей степени.
14. Уравнения четвертой степени.
15. Проблема локализации корней многочлена.
16. Целые и рациональные корни многочленов с рациональными коэффициентами. 27.  
Критерий неприводимости Эйзенштейна.
17. Рациональные дроби: разложение на простейшие дроби.
18. Интерполяция: формула Лагранжа.
19. Основная теорема о симметрических многочленах.
20. Метод неопределенных коэффициентов.
21. Симметрические многочлены и формулы Виета.
22. Связь алгебраических соотношений, корней и коэффициентов многочленов.
23. Результат многочленов
24. Дискриминант многочлена.
25. Исключение неизвестной из системы двух уравнения с двумя неизвестными.
26. Простое алгебраическое расширение поля.
27. Освобождение от алгебраической иррациональности в знаменателе.
28. Геометрические построения циркулем и линейкой и разрешимость уравнений в радикалах.
29. Построение правильных многоугольников.

### ***Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов***

Особое место в овладении данным курсом отводится самостоятельной работе, которая заключается в следующем: –самостоятельное изучение части теоретического материала, теоретическая подготовка к практическим занятиям, систематическое выполнение домашних заданий, выполнение индивидуальных заданий.

*Темы (рекомендуемая литература, формы контроля)*

1 Матрицы и их основные виды. Диагональная матрица. Симметричная и кососимметричная матрица. Операции над матрицами. Сложение, вычитание умножение матриц.

\*Перестановочные матрицы. учебники 1,3 Задачи №1.15-1.19 из литер. [5] Опрос

2. Свойство операций над матрицами. Транспонированная матрица. Обратная матрица.  
\*Ортогональная матрица. Определители 2 и 3 порядков. Свойства определителей. учебники  
3.4 Задачи №1.20-1.23 из литер. [5] Опрос
- 3 Минор элемента матрицы. Алгебраическое дополнение элемента матрицы. Определитель  $n$ -ого порядка. Теорема Лапласа. \*Простейшие матричные уравнения. учебники 1 – 5 Индивидуальные задания Защита самост. работы
- 4 Системы линейных алгебраических уравнений. Несовместная и совместная системы. Определенная и неопределенная системы. Частное и общее решение системы. Эквивалентные системы. Методы решения системы  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными Теорема Крамера. Метод обратной матрицы. \*Ранг матрицы. Базисные строки и столбцы. учебники 1-4 Задачи №2.11-2.15 из литер. [5] Конспект
- 5 Элементарные преобразования над матрицами. Метод Гаусса. Расширенная матрица системы. Тривиальные и нетривиальные решения системы. Базисные и свободные переменные. \*Фундаментальная совокупность решений. Теорема Кронекера - Капелли. 2.3 Задачи №2.16-2.20 из литер. [5] Защита самост. работы

*Контрольные вопросы для самостоятельной оценки качества освоения дисциплины*

1. Понятие матрицы. Алгебраические операции над матрицами: умножение на число, сложение, умножение матриц. Свойства.
2. Определитель квадратной матрицы. Основные свойства определителей.
3. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о разложении определителя по элементам строки и столбца.
4. Обратная матрица. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы. Алгоритм вычисления обратной матрицы при помощи элементарных преобразований. Нахождение обратной матрицы в терминах определителей.
5. Система линейных уравнений (СЛУ) с  $n$  переменными (общий вид). Элементарные преобразования СЛУ. Метод Гаусса решения системы  $m$ - линейных уравнений с  $n$ - переменными. Теорема об определенности СЛУ.
6. Правило Крамера решения системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными.
7. Решение СЛУ матричным методом. Матричные уравнения.
8. Понятие векторного пространства. Примеры.
9. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Свойства.
10. Базис системы векторов. Теорема о числе векторов базисов одной и той же системы векторов.

11. Ранг матрицы. Метод окаймляющих миноров. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Примеры.
12. Базис и размерность векторного пространства. Свойства размерности векторного пространства.
13. Фундаментальная система решений однородной СЛУ.
14. Критерий совместности системы линейных уравнений (Теорема Кронекера – Капелли) Условия определенности и неопределенности совместной системы линейных уравнений. Пример.
15. Понятие и представление комплексных чисел. Геометрическое изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами: сложение, вычитание, умножение, деление.
16. Извлечение корней из комплексных чисел. Корни многочленов.

### 3 семестр

#### Рейтинг-контроль № 1.

ТЕМА: Линейные операторы

Постановка задачи: Определение линейного оператора. Образ и ядро линейного оператора. Базис линейного оператора и линейные преобразования в базисе

#### Ход работы:

1. Будет ли оператор линейным? Определить его матрицу в базисе  $e$ .

а)  $\varphi(x) = (x_1, x_1, x_2 - 1)$ .

б)  $\varphi(x) = (x_1 + 2x_2 - 3x_3, x_1 - x_2 + x_3, 2x_1 + x_2 + x_3)$

2. Определить образ и ядро линейного преобразования, имеющего матрицу в базисе  $e$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

3. Выяснить, можно ли привести матрицу линейного преобразования к диагональному виду. Если да, то найти базис.

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

4. Найти собственные значения и собственные векторы линейного оператора, если

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Линейное преобразование в базисе  $e$  имеет матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Найти его матрицу в базисе

$$f_1 = (2, 3, 1)$$

$$f_2 = (3, 4, 1)$$

$$f_3 = (1, 2, 2)$$

### Рейтинг-контроль № 2.

ТЕМА: Билинейные и квадратичные формы

**Постановка задачи:** Понятие квадратичной формы, приведение формы к каноническому виду методами Якоби и Лагранжа

#### Ход работы:

1. Привести квадратичную форму

$Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2xz + 2yz$  к каноническому виду методом Лагранжа. Записать связь новых и старых переменных.

2. Привести квадратичную форму

$\Lambda(x, x) = x_1^2 + 3x_1x_2 + x_2^2$  к каноническому виду ортогональным преобразованием. Записать матрицу этого преобразования

3. Записать жорданову форму матрицы  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -15 \\ 1 & 1 & -5 \\ 1 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

4. Привести квадратичную форму

$Q(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 2xz + 2yz$  к каноническому виду методом Якоби. Записать связь новых и старых переменных.

### Рейтинг-контроль № 3.

ТЕМА: Квадратичные формы. Закон инерции

**Постановка задачи:** Понятие квадратичной формы и способы ее записи.

накоопределенность квадратичных форм, критерии положительной и отрицательной определенностей

#### Ход работы:

1. Доказать, что квадратичная форма

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = 6\tilde{\sigma}_1^2 + 5\tilde{\sigma}_2^2 + 7\tilde{\sigma}_3^2 - 4\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 + 4\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_3$$

положительно определена

2. При каких значениях  $a$  и  $b$  квадратичная форма будет отрицательно определенной?

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \tilde{\sigma}_1^2 + a\tilde{\sigma}_2^2 + a\tilde{\sigma}_3^2 + 2\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 + 2\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_3.$$

3. При каких значениях  $a$  и  $b$  квадратичная форма будет положительно определенной?

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \tilde{\sigma}_1^2 + a\tilde{\sigma}_2^2 + a\tilde{\sigma}_3^2 + 2\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_2 + 2\tilde{\sigma}_1\tilde{\sigma}_3 + 2\tilde{\sigma}_2\tilde{\sigma}_3.$$

4. Определить знакоопределенность следующей квадратичной форм.

$$\varphi(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2) = \tilde{a}_1^2 + \tilde{a}_1 \tilde{a}_2 + \tilde{a}_2^2 = \left(\tilde{a}_1 + \frac{\tilde{a}_2}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \tilde{a}_2\right)^2$$

5. Записать матрицу квадратичной формы

$$\varphi(x_1, x_2, x_3) = \tilde{a}_1^2 - 6x_1x_2 - 8x_1x_3 + 7\tilde{a}_2^2 + 4x_2x_3 - 5\tilde{a}_3^2$$

и найти ее ранг

### Тестовая рейтинг-контроль

1. Оператор (отображение)  $\varphi$  называется линейным, если выполняются два условия:

А)  $\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b});$

$\varphi(\bar{a}\bar{b}) = \varphi(\bar{a})\varphi(\bar{b});$

Б)  $\varphi(k\bar{a}) = k\varphi(\bar{a});$

$\varphi(\bar{a}\bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b});$

В)  $\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b});$

$\varphi(0\bar{a}) = 0;$

Г)  $\varphi(\bar{a} + \bar{b}) = \varphi(\bar{a}) + \varphi(\bar{b});$

$\varphi(\lambda\bar{a}) = \lambda\varphi(\bar{a}).$

2. Линейный оператор  $\varphi$  переводит вектор  $\bar{a} = (1, 1)$  в вектор  $(2, 2)$ , а вектор

$\bar{b} = (-1, 1)$  в вектор  $(1, 1)$ . Тогда

сумма  $\bar{a} + \bar{b} = (0, 2)$  переходит в вектор:

А)  $(1, 1);$

Б)  $(3, 3);$

В)  $(1, 3);$

Г)  $(2, 0).$

3. Оператор  $\varphi$  называется тождественным, если он:

А) любой вектор переводит в нулевой вектор;

Б) любой вектор переводит в противоположный вектор;

В) любой вектор переводит сам в себя;

Г) любой вектор переводит в его зеркальное отражение относительно прямой.

4. Из нижеприведенных операторов линейным является оператор:

А)  $\varphi(x_1, x_2) = (x_1, 0);$

Б)  $\varphi(x_1, x_2) = (kx_1, 1);$

В)  $\varphi(x_1, x_2) = (5, 5);$

Г)  $\varphi(x_1, x_2) = (x_1^2, x_2).$

5. Оператор  $\varphi$ , переводящий вектор  $(x_1, x_2)$  в вектор  $(x_1+k, x_2+k)$  будет линейным при  $k$  равном:

А) 1;

Б) -1;

В) 0;

Г) такого  $k$  не существует

### Вопросы к зачету по курсу «Алгебра и теория чисел»

#### Семестр 3

1. Определение линейных операторов; примеры операторов.
2. Ядро и образ линейного оператора.
3. Операции над линейными операторами.
4. Матрица линейного оператора.
5. Изменение координат вектора при переходе от одного базиса к другому.
6. Матрица оператора в различных базисах: подобие матриц.
7. Собственные вектора и значения.



8. Характеристическое уравнение.
9. Линейные операторы с простым спектром и приведение матриц к диагональному виду.
10. Операторы и числа Фибоначчи.
11. Квадратичные и билинейные формы
12. Метод Лагранжа
13. Метод Якоби.
14. Группы, подгруппы
15. Кольца. Поля

### *Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов*

Особое место в овладении данным курсом отводится самостоятельной работе, которая заключается в следующем: –самостоятельное изучение части теоретического материала, теоретическая подготовка к практическим занятиям, систематическое выполнение домашних заданий, выполнение индивидуальных заданий.

*Темы (рекомендуемая литература, формы контроля)*

1 Матрицы и их основные виды. Диагональная матрица. Симметричная и кососимметричная матрица. Операции над матрицами. Сложение, вычитание умножение матриц.

\*Перестановочные матрицы. учебники 1,3 Задачи №1.15-1.19 из литер. [5] Опрос

2 Свойства операций над матрицами. Транспонированная матрица. Обратная матрица.

\*Ортогональная матрица. Определители 2 и 3 порядков. Свойства определителей.учебники 3,4 Задачи №1.20-1.23 из литер. [5] Опрос

3 Минор элемента матрицы. Алгебраическое дополнение элемента матрицы. Определитель  $n$ -ого порядка. Теорема Лапласа. \*Простейшие матричные уравнения. учебники 1 – 5 Индивидуальные задания Защита самост. работы

4 Системы линейных алгебраических уравнений. Несовместная и совместная системы. Определенная и неопределенная системы. Частное и общее решение системы. Эквивалентные системы. Методы решения системы  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными Теорема Крамера. Метод обратной матрицы. \*Ранг матрицы. Базисные строки и столбцы. учебники 1-4 Задачи №2.11-2.15 из литер. [5] Конспект

5 Элементарные преобразования над матрицами. Метод Гаусса. Расширенная матрица системы. Тривиальные и нетривиальные решения системы. Базисные и свободные переменные. \*Фундаментальная совокупность решений. Теорема Кронекера - Капелли. 2.3 Задачи №2.16-2.20 из литер. [5] Защита самост. работы

*Контрольные вопросы для самостоятельной оценки качества освоения дисциплины*

1. Понятие матрицы. Алгебраические операции над матрицами: умножение на число, сложение, умножение матриц. Свойства.
2. Определитель квадратной матрицы. Основные свойства определителей.
3. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о разложении определителя по элементам строки и столбца.
4. Обратная матрица. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы. Алгоритм вычисления обратной матрицы при помощи элементарных преобразований. Нахождение обратной матрицы в терминах определителей.
5. Система линейных уравнений (СЛУ) с  $n$  переменными (общий вид). Элементарные преобразования СЛУ. Метод Гаусса решения системы  $m$ - линейных уравнений с  $n$ - переменными. Теорема об определенности СЛУ.
6. Правило Крамера решения системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными.
7. Решение СЛУ матричным методом. Матричные уравнения.
8. Понятие векторного пространства. Примеры.
9. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Свойства.
10. Базис системы векторов. Теорема о числе векторов базисов одной и той же системы векторов.
11. Ранг матрицы. Метод окаймляющих миноров. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Примеры.
12. Базис и размерность векторного пространства. Свойства размерности векторного пространства.
13. Фундаментальная система решений однородной СЛУ.
14. Критерий совместности системы линейных уравнений (Теорема Кронекера – Капелли) Условия определенности и неопределенности совместной системы линейных уравнений. Пример.
15. Понятие и представление комплексных чисел. Геометрическое изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами: сложение, вычитание, умножение, деление.
16. Извлечение корней из комплексных чисел. Корни многочленов.

## 4 семестр

### **Рейтинг-контроль № 1.**

**ТЕМА:** Теория делимости в кольце целых чисел

**Постановка задачи:** В ходе изучения теории чисел студент должен знать основные свойства и алгоритмы делимости в кольце  $Z$ : знание НОДа, НОКа целых чисел, владение алгоритмом Евклида, признаки делимости.

### Ход работы:

1. Число  $a$  кратно числу 6. Докажите, что  $a^2 - 12a$  кратно числу 36.
2. Докажите, что разность между трёхзначным числом и числом, записанном теми же цифрами, но в обратном порядке, делится на 99.
3. Докажите, что  $(7^n - 6 \cdot 2^n) : 5$ , если  $n$  - натуральное число.
4. Натуральное число  $a$  оканчивается цифрой 4 и на 4 не делится. Докажите, что разность  $a - 14$  делится на 20.
5. Число  $a$  при делении на 5 даёт остаток 3. Какой остаток получится при делении числа  $6a^2 - 3a$  на 15?
6. Найдите остаток от деления  $10! - 49$  на 42.
7. Чётные числа  $a$  и  $b$ , не кратные 6, при делении на 6 имеют разные остатки. Докажите, что сумма  $a + b$  делится на 6.
8. Докажите, что квадрат любого числа делится на 9, либо при делении на 3 даёт остаток 1.
9. Найдите НОД чисел  $30n + 25$  и  $20n + 15$ , где  $n \in \mathbb{N}$ .
10. С помощью алгоритма Евклида найдите НОД и НОК чисел 456 и 41232.
11. Докажите, что при любом целом  $a$  число  $a(a^3 - 125a^2 + 4)$  кратно 120.
12. Решите систему уравнений в натуральных числах 
$$\begin{cases} x + y = 150, \\ \text{НОД}(x, y) = 30. \end{cases}$$

### Рейтинг-контроль № 2.

**ТЕМА:** Теория сравнений с арифметическими приложениями.

**Постановка задачи:** Умение решать сравнения и системы сравнений, производить разложения квадратичных иррациональностей в непрерывные дроби, производить иные вычисления из основ теории чисел. Решение сравнений первой степени и их систем; решение сравнений с помощью цепных дробей. Решение в целых числах уравнений первой степени с двумя неизвестными при помощи сравнений

### Ход работы:

1. Решить сравнения:

#### **Вариант 1**

$$a) 3x \equiv 6 \pmod{9};$$

$$b) 16x \equiv 9 \pmod{23};$$

$$c) 243x \equiv 271 \pmod{317}.$$

#### Ответ:

$$a) x_1 \equiv 2 \pmod{9}, x_2 \equiv 5 \pmod{9};$$

$$b) x \equiv 2 \pmod{23};$$

$$c) x \equiv 112 \pmod{317}.$$

#### **Вариант 2**

$$a) 4x \equiv 12 \pmod{18};$$

$$b) 15x \equiv 16 \pmod{29};$$

$$c) 139x \equiv 118 \pmod{239}.$$

#### ОТВЕТ:

$$a) x_1 \equiv 2 \pmod{9}, x_2 \equiv 5 \pmod{9};$$

$$b) x \equiv 3 \pmod{23};$$

$$c) x \equiv 147 \pmod{239}.$$

2. Решите систему сравнений:

**Вариант 1.**

$$\begin{cases} x \equiv 3 \pmod{5}; \\ x \equiv 2 \pmod{7}; \\ x \equiv 4 \pmod{9}. \end{cases}$$

Ответ:

$$x \equiv 58 \pmod{315}.$$

**Вариант 2.**

$$\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{3}; \\ x \equiv 5 \pmod{7}; \\ x \equiv 9 \pmod{11}. \end{cases}$$

Ответ:

$$x \equiv -2 \pmod{231}.$$

3. Разложите многочлен  $f(x)$  на множители по модулю  $m$ :**Вариант 1.**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 + 7x^3 + x - 9, \\ m &= 13. \end{aligned}$$

Ответ:

$$f(x) \equiv (x-1)^2(x-2)^2 \pmod{13}$$

**Вариант 2.**

$$\begin{aligned} f(x) &= x^4 - 3x^3 - x + 3, \\ m &= 7. \end{aligned}$$

Ответ:

$$f(x) \equiv (x-1)(x-2)(x^2-2) \pmod{7}.$$

4. Найдите остаток при делении :

**Вариант 1**

$$13^{1154} - 23 \cdot 16^{285} + 22^{17} \text{ на } 15$$

**Вариант 2.**

$$29^{2129} - 34^{1431} + 29 \cdot 41 \cdot 6^{231} \text{ на } 31$$

### Рейтинг-контроль 3

**ТЕМА:** Квадратичные вычеты и невычеты. Критерий Эйлера. Символ Лежандра.

**Постановка задачи.** Решение сравнения второй степени: сведение сравнений второй степени к двучленному сравнению; двучленные сравнения по простому модулю; квадратичные вычеты и невычеты; число решений сравнения; критерий Эйлера для квадратичных вычетов и невычетов. Символ Лежандра и его свойства; закон взаимности квадратичных вычетов.

**Ход работы.**

1. Вычислить символ Лежандра  $\left(\frac{62}{47}\right)$ .
2. Найти первообразный корень по модулю 17 и составить таблицу индексов.
3. Решить неопределенное уравнение  $13x + 23y = 107$
4. Построить системы квадратичных вычетов по простому модулю 57
5. Найти все первообразные корни по модулю 11 и построить таблицу индексов
6. Найдите показатель, которому принадлежит 5 по модулю 61.
7. Составить таблицу индексов по модулю  $m$ , взяв за основание первообразный корень  $g$ :  
 $m=27, g=2$ .
8. С помощью таблиц из задачи 3 решите сравнения :  
а)  $5x \equiv 13 \pmod{27}$ ;  
б)  $x \equiv 10 \pmod{27}$ .

### Тестовый рейтинг-контроль

1. Остаток от деления числа (-5) на число 3 равен:
  - а. А) -1;
  - б. Б) 2;
  - в. В) -2;
  - г. Г) 1.
2. Остаток от деления числа (-10) на число 7 равен:
  - а. А) 4;
  - б. Б) -3;
  - в. В) 2;
  - г. Г) -4.
3. Остаток от деления числа 12 на число (-5) равен:
  - а. А) -3;
  - б. Б) 2;
  - в. В) -2;
  - г. Г) 3.
4. Остаток от деления числа (-14) на число (-3) равен:
  - а. А) -2;
  - б. Б) 2;
  - в. В) -1;
  - г. Г) 1.

5. Остаток от деления числа  $(-12)$  на число  $(-7)$  равен:
- a. А) 2;
  - b. Б) -2;
  - c. В) 5;
  - d. Г) -5.
6. НОД чисел  $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$  и  $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$  равен:
- a. А) 2;
  - b. Б) 3;
  - c. В) 7;
  - d. Г) 14.
7. НОК чисел  $70 = 2 \cdot 5 \cdot 7$  и  $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$  равно:
- a. А) 210;
  - b. Б) 630;
  - c. В) 2940;
  - d. Г) 294.
8. НОД чисел  $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$  и  $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$  равен:
- a. А) 11;
  - b. Б) 2;
  - c. В) 12;
  - d. Г) 22.
9. НОК чисел  $110 = 2 \cdot 5 \cdot 11$  и  $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$  равно:
- a. А) 220;
  - b. Б) 726;
  - c. В) 330;
  - d. Г) 770.
10. НОД чисел  $66 = 2 \cdot 3 \cdot 11$  и  $42 = 2 \cdot 3 \cdot 7$  равен:
- a. А) 4;
  - b. Б) 2;
  - c. В) 6;
  - d. Г) 12.
11. Ровно три простых числа содержится в последовательности:
- a. А) 1, 3, 5, 7, 9;
  - b. Б) 1, 3, 4, 5, 6;
  - c. В) 3, 5, 6, 9, 10;
  - d. Г) 4, 5, 6, 7, 9.
12. Простых чисел больше, чем составных, в последовательности:
- a. А) 1, 2, 3, 4, 5;
  - b. Б) 3, 4, 5, 6, 8;
  - c. В) 1, 2, 4, 5, 6;
  - d. Г) 1, 3, 5, 6, 8.
13. Простых чисел меньше, чем составных, в последовательности:
- a. А) 1, 2, 3, 4, 5;

- c. В) 0,25;
- d. Г) -0,75.

22. Дробная часть числа 4,48 равна:

- a. А) 0,48;
- b. Б) -0,52;
- c. В) -0,48;
- d. Г) 0,52.

23. Дробная часть числа (-10,55) равна:

- a. А) -0,55;
- b. Б) 0,45;
- c. В) 0,55;
- d. Г) -0,45.

24. Дробная часть числа 2,43 равна:

- a. А) 0,57;
- b. Б) -0,57;
- c. В) 0,43;
- d. Г) -0,43.

25. Дробная часть числа (-5,17) равна:

- a. А) -0,17;
- b. Б) 0,17;
- c. В) -0,83;
- d. Г) 0,83.

26. 66. Количество делителей  $\tau(n)$  числа  $n = 75 = 3 \circledast 5^2$  равно:

- 27. А) 4;
- 28. Б) 5;
- 29. В) 6;
- 30. Г) 3.

31. 67. Количество делителей  $\tau(n)$  числа  $n = 100 = 2^2 \circledast 5^2$  равно:

- 32. А) 6;
- 33. Б) 7;
- 34. В) 8;
- 35. Г) 9.

36. 68. Количество делителей  $\tau(n)$  числа  $n = 72 = 2^3 \circledast 3^2$  равно:

- 37. А) 6;
- 38. Б) 10;
- 39. В) 8;
- 40. Г) 12.

41. 69. Количество делителей  $\tau(n)$  числа  $n = 56 = 2^3 \circledast 7$  равно:

- 42. А) 8;
- 43. Б) 5;
- 44. В) 7;
- 45. Г) 6.

46. 70. Количество делителей  $\tau(n)$  числа  $n = 63 = 3^2 \circledast 7$  равно:

- 47. А) 12;

48. Б) 9;
49. В) 6;
50. Г) 4.
51. Числа 15 и 30 сравнимы по модулю:  
 а. А) 11;  
 б. Б) 5;  
 в. В) 6;  
 д. Г) 8.
52. Числа 12 и 18 сравнимы по модулю:  
 а. А) 3;  
 б. Б) 5;  
 в. В) 7;  
 д. Г) 9.
53. Числа 22 и 14 сравнимы по модулю:  
 а. А) 9;  
 б. Б) 8;  
 в. В) 7;  
 д. Г) 6.
54. Числа 38 и 28 сравнимы по модулю:  
 а. А) 6;  
 б. Б) 8;  
 в. В) 10;  
 д. Г) 12.
55. Числа 26 и 12 сравнимы по модулю:  
 а. А) 8;  
 б. Б) 7;  
 в. В) 6;  
 д. Г) 5.
56. Полную систему вычетов по модулю 7 образует следующий набор:  
 а. А)  $\overline{14}, \overline{1}, \overline{9}, \overline{-4}, \overline{4}, \overline{12}, \overline{27}$ ;  
 б. Б)  $\overline{0}, \overline{1}, \overline{-2}, \overline{10}, \overline{24}$ ;  
 в. В)  $\overline{9}, \overline{8}, \overline{1}, \overline{3}, \overline{-5}, \overline{-4}, \overline{2}, \overline{16}$ ;  
 д. Г)  $\overline{21}, \overline{28}, \overline{2}, \overline{-3}, \overline{7}, \overline{-5}, \overline{6}$ .
57. Полную систему вычетов по модулю 6 образует следующий набор:  
 а. А)  $\overline{0}, \overline{-1}, \overline{2}, \overline{-3}, \overline{4}, \overline{-5}$ ;  
 б. Б)  $\overline{10}, \overline{11}, \overline{12}, \overline{13}, \overline{14}$ ;  
 в. В)  $\overline{18}, \overline{17}, \overline{16}, \overline{15}, \overline{21}, \overline{24}, \overline{25}$ ;  
 д. Г)  $\overline{1}, \overline{7}, \overline{2}, \overline{8}, \overline{3}, \overline{9}$ .
58. Полную систему вычетов по модулю 5 образует следующий набор:



- a. А)  $\overline{10}, \overline{15}, \overline{-2}, \overline{0}, \overline{3}$ ;
- b. Б)  $\overline{-1}, \overline{-2}, \overline{-3}, \overline{-4}$ ;
- c. В)  $\overline{20}, \overline{21}, \overline{2}, \overline{33}, \overline{34}$ ;
- d. Г)  $\overline{0}, \overline{1}, \overline{2}, \overline{-3}, \overline{-4}, \overline{5}, \overline{6}$ .

59. Полную систему вычетов по модулю 4 образует следующий набор:

- a. А)  $\overline{8}, \overline{13}, \overline{6}, \overline{15}$ ;
- b. Б)  $\overline{-4}, \overline{-3}, \overline{-2}, \overline{1}, \overline{2}$ ;
- c. В)  $\overline{2}, \overline{4}, \overline{6}$ ;
- d. Г)  $\overline{0}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}$ .

60. Полную систему вычетов по модулю 3 образует следующий набор:

- a. А)  $\overline{18}, \overline{10}, \overline{20}$ ;
- b. Б)  $\overline{1}, \overline{2}, \overline{3}, \overline{4}, \overline{5}$ ;
- c. В)  $\overline{-2}, \overline{0}$ ;
- d. Г)  $\overline{1}, \overline{19}, \overline{21}$ .

61. Число СІХ в десятичной системе счисления равно:

- a. А) 509;
- b. Б) 19;
- c. В) 59;
- d. Г) 109.

62. Основание системы счисления  $g$  в девятеричной системе счисления изображается числом:

- a. А) 9;
- b. Б) 10;
- c. В) 11;
- d. Г) 01.

63. В семеричной системе счисления верно записано число:

- a. А)  $2360_7$ ;
- b. Б)  $35721_7$ ;
- c. В)  $608512_7$ ;
- d. Г)  $29561_7$ .

64. 84. Равенство  $26 = 101x$  имеет место в системе счисления с основанием:

- 65. А) 3;
- 66. Б) 5;
- 67. В) -5;
- 68. Г) 4.

69. 85. Верный результат сложения  $34807_9 + 8765_9$  равен:

- 70. А)  $45731_9$ ;
- 71. Б)  $44562_9$ ;
- 72. В)  $54374_9$ ;
- 73. Г)  $44673_9$ .

## Вопросы к зачету с оценкой по курсу «Алгебра и теория чисел»

### *Семестр 4*

1. Свойства делимости. Теорема о делении с остатком.
2. Наибольший общий делитель. Алгоритм Евклида.
3. Теорема о линейной форме НОД.
4. Наименьшее общее кратное. Формула для нахождения НОК.
5. Простые числа. Бесконечность множества простых чисел.
6. Решето Эратосфена. Распределение простых чисел в натуральном ряду.
7. Основная теорема арифметики. Каноническое представление числа.
8. Сумма и число натуральных делителей числа.
9. Понятие сравнимости чисел по модулю. Эквивалентные определения.
10. Свойства сравнений.
11. Классы вычетов и системы вычетов.
12. Приведенная система вычетов. Признак приведенной системы вычетов.
13. Кольцо классов вычетов.
14. Функция Эйлера.
15. Теоремы Эйлера и Ферма и их применение.
16. Сравнения первой степени с одним неизвестным. Условия разрешимости и способы решений.
17. Конечные цепные дроби. Подходящие дроби. Формулы для вычисления подходящих дробей.
18. Свойства подходящих дробей. Решение сравнений с помощью цепных дробей.
19. Алгебраические сравнения произвольной степени с одним неизвестным.
20. Теорема Вильсона. Критерий простоты.
21. Решение алгебраических сравнений по составному модулю и модулю  $P$
22. Квадратичные вычеты. Критерий Эйлера.
23. Символ Лежандра, его свойства и применение.
24. Порядок числа по модулю. Свойства порядка числа.
25. Индексы и их применение.
26. Проверка правильности арифметических действий. Вывод признаков делимости.
27. Определение длины периода дроби.

### *Учебно-методическое обеспечение самостоятельной работы студентов*

Особое место в овладении данным курсом отводится самостоятельной работе, которая

заключается в следующем: –самостоятельное изучение части теоретического материала, теоретическая подготовка к практическим занятиям, систематическое выполнение домашних заданий, выполнение индивидуальных заданий.

*Темы (рекомендуемая литература, формы контроля)*

1 Матрицы и их основные виды. Диагональная матрица. Симметричная и кососимметричная матрица. Операции над матрицами. Сложение, вычитание умножение матриц.

\*Перестановочные матрицы. учебники 1,3 Задачи №1.15-1.19 из литер. [5] Опрос

2. Свойство операций над матрицами. Транспонированная матрица. Обратная матрица.

\*Ортогональная матрица. Определители 2 и 3 порядков. Свойства определителей. учебники 3.4 Задачи №1.20-1.23 из литер. [5] Опрос

3 Минор элемента матрицы. Алгебраическое дополнение элемента матрицы. Определитель  $n$ -ого порядка. Теорема Лапласа. \*Простейшие матричные уравнения. учебники 1 –

5 Индивидуальные задания Защита самост. работы

4 Системы линейных алгебраических уравнений. Несовместная и совместная системы. Определенная и неопределенная системы. Частное и общее решение системы. Эквивалентные системы. Методы решения системы  $n$  уравнений с  $n$  неизвестными Теорема

Крамера. Метод обратной матрицы. \*Ранг матрицы. Базисные строки и столбцы. учебники 1-4 Задачи №2.11-2.15 из литер. [5] Конспект

5 Элементарные преобразования над матрицами. Метод Гаусса. Расширенная матрица системы. Тривиальные и нетривиальные решения системы. Базисные и свободные переменные. \*Фундаментальная совокупность решений. Теорема Кронекера - Капелли. 2.3 Задачи №2.16-2.20 из литер. [5] Защита самост. работы

*Контрольные вопросы для самостоятельной оценки качества освоения дисциплины*

1. Понятие матрицы. Алгебраические операции над матрицами: умножение на число, сложение, умножение матриц. Свойства.

2. Определитель квадратной матрицы. Основные свойства определителей.

3. Миноры и алгебраические дополнения. Теорема о разложении определителя по элементам строки и столбца.

4. Обратная матрица. Теорема о существовании и единственности обратной матрицы. Алгоритм вычисления обратной матрицы при помощи элементарных преобразований. Нахождение обратной матрицы в терминах определителей.

5. Система линейных уравнений (СЛУ) с  $n$  переменными (общий вид). Элементарные преобразования СЛУ. Метод Гаусса решения системы  $m$ - линейных уравнений с  $n$ - переменными. Теорема об определенности СЛУ.

6. Правило Крамера решения системы  $n$  линейных уравнений с  $n$  переменными.
7. Решение СЛУ матричным методом. Матричные уравнения.
8. Понятие векторного пространства. Примеры.
9. Линейная зависимость и независимость системы векторов. Свойства.
10. Базис системы векторов. Теорема о числе векторов базисов одной и той же системы векторов.
11. Ранг матрицы. Метод окаймляющих миноров. Вычисление ранга матрицы с помощью элементарных преобразований. Примеры.
12. Базис и размерность векторного пространства. Свойства размерности векторного пространства.
13. Фундаментальная система решений однородной СЛУ.
14. Критерий совместности системы линейных уравнений (Теорема Кронскера – Капелли) Условия определенности и неопределенности совместной системы линейных уравнений. Пример.
15. Понятие и представление комплексных чисел. Геометрическое изображение комплексных чисел. Действия над комплексными числами: сложение, вычитание, умножение, деление.
16. Извлечение корней из комплексных чисел. Корни многочленов.

#### 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

№ п/п	Название и выходные данные (автор, вид издания, издательство, издания, количество страниц)	Год издания	Количество экземпляров в библиотеке университета	Наличие в электронной библиотеке ВлГУ	Количество студентов, использующих указанную литературу	Обеспеченность студентов литературой, %
1	2	3	4	5	6	7
<b>Основная литература</b>						
1	Л.В. Веселова, О.Е. Тихонов Алгебра и теория чисел [Электронный ресурс] : учебное пособие / Л.В. Веселова, О.Е. Тихонов. - Казань : Издательство КНИТУ, 2014. -	2014		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785788216362.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785788216362.html</a>	20	100%
2	Ильян В.А., Ким Г.Д. Линейная алгебра и аналитическая геометрия [Электронный ресурс] : учебник / В.А. Ильян, Г.Д. Ким. - М. : Проспект, 2015 - 225с	2015		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785392163397.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785392163397.html</a>	20	100%
3	В.И. Антонов, М.В. Лагунова, Н.И. Лобкова, Ю.Д. Максимов, В.М. Семёнов, Ю.А. Хватов Линейная алгебра и аналитическая геометрия. Опорный кон-	2015		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN978539">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN978539</a>	20	100%

	спект [Электронный ресурс] : учеб. пособие / В.И. Антонов, М.В. Лагунова, Н.И. Лобкова, Ю.Д. Максимов, В.М. Семёнов, Ю.А. Хватов. - М. : Проспект, 2015 – 144с			2168934.html		
4	Н.Д. Золотарёва [и др.]; под ред. М. В. Федотова Алгебра. Углубленный курс с решениями и указаниями [Электронный ресурс] / Н.Д. Золотарёва и др.; под ред. М. В. Федотова. - М. : БИНОМ, 2015 – 240с	2015		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996328017.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996328017.html</a>	20	100%
<b>Дополнительная литература</b>						
1	Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. Линейная алгебра и геометрия. [Электронный ресурс] / Шафаревич И.Р., Ремизов А.О. - М. : ФИЗМАТЛИТ, 2009.- 512 с	2009		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111393.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922111393.html</a>	20	100%
2	Гельфанд И.М., Шень А. Алгебра. [Электронный ресурс] / Гельфанд И.М., Шень А. - 2-е изд., испр. и дополн. - М.: МЦНМО, 2009. -144 с	2009		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940574507.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785940574507.html</a>	20	100%
3	Кочетова Ю.В., Ширишова Е.Е. Алгебра. Конечномерные пространства. Линейные операторы [Электронный ресурс] : курс лекций / Ю.В. Кочетова, Е.Е. Ширишова. - М. : Прометей, 2013. – 80 с	2013		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785704224549.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785704224549.html</a>	20	100%
4	Епихин В.Е. Алгебра и теория пределов. Элективный курс [Электронный ресурс] / Епихин В.Е. - М. : БИНОМ, 2012. – 352 с	2012		ЭБС «Консультант студента» <a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996309573.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785996309573.html</a>	20	100%

#### **Интернет-ресурсы:**

<https://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D0%B0>

[http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC%D1%8B\\_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D1%8B\\_%D0%B8\\_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%B8\\_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB](http://neerc.ifmo.ru/wiki/index.php?title=%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC%D1%8B_%D0%B0%D0%BB%D0%B3%D0%B5%D0%B1%D1%80%D1%8B_%D0%B8_%D1%82%D0%B5%D0%BE%D1%80%D0%B8%D0%B8_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%B5%D0%BB)

<http://www.mccme.ru/free-books/pdf/alfutova.pdf>

видеокурс -

[www.intuit.ru/studies/courses/616/472/info](http://www.intuit.ru/studies/courses/616/472/info)

Примеры по курсу -

<http://www.exponenta.ru/educat/class/courses/student/la/examples.asp> тесты для самоконтроля  
- [fen.distant.ru/test/math/3/test-3.htm](http://fen.distant.ru/test/math/3/test-3.htm)

учебник -

<http://wwwcdl.bmstu.ru/fn1/LinAlg.pdf>

учебное пособие -

<http://www.resolventa.ru/metod/student/linalg.htm>

#### **Периодические издания:**

1. Научно-популярный физико-математический журнал "Квант"

<http://kvant.mccme.ru/key.htm>

2. Журнал "Известия Российской академии наук. Серия математическая"

[http://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=im&option\\_lang=rus](http://www.mathnet.ru/php/journal.phtml?jrnid=im&option_lang=rus)

3. Сибирский математический журнал

<http://www.emis.de/journals/SMZ/attention.htm>

4. Журнал «Математические заметки»

<http://www.ams.org/mathscinet/search/journaldoc.html?jc=MATZA1>

5. Журнал вычислительной математики и математической физики.

6. Вестник Самарского государственного технического университета. Серия физико-математические науки

## **8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

учебные аудитории для проведения лекционных и семинарских занятий, средства мультимедиа

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению 44.03.05 «Педагогическое образование» профиль « Физика. Математика. »

Рабочую программу составил Куранова Наталья Юрьевна

*Н.Ю. Куранова*



Рецензент

(представитель работодателя) МАОУ Гимназия №3, Мартьянова Г.И.  
(место работы, должность, ФИО, подпись)

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры \_\_\_\_\_

Протокол № 9 от 15.05.2016 года

Заведующий кафедрой *В. Кунин*

(ФИО, подпись)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления 44.03.05 «Педагогическое образование» профиль « Физика. Математика. »

Протокол № 3 от 17.03.16 года

Председатель комиссии директор ПИ Артамонова М. В.

*М.В. Артамонова*

(ФИО, подпись)

**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ  
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)**

Рабочая программа одобрена на 2017/18 учебный год

Протокол заседания кафедры № 1 от 4.09.17 года

Заведующий кафедрой Ю.С.Ф.

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год

Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года

Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_