

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
 Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
 высшего образования  
 «Владимирский государственный университет  
 имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
 (ВлГУ)



УТВЕРЖДАЮ  
 Проректор  
 по образовательной деятельности

А.А.Панфилов

« 26 » 08 20 19 г.

**РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ  
 «МАТЕМАТИКА»**

Направление подготовки: 38.03.01 «Экономика»

Профиль/программа подготовки: «Экономика предприятий и организаций»

Уровень высшего образования: бакалавриат

Форма обучения: очная

Семестр	Трудоемкость зач. ед./ час.	Лекции, час.	Практич. занятия, час.	Лаборат. работы, час.	СРС, час.	Форма промежуточной аттестации (экзамен/зачет/зачет с оценкой)
1	5 / 180	36	36		36	Зачет
2	3 / 108	36	36		81	Экзамен (27)
Итого	8 / 288	72	72		117	Зачет, Экзамен (27)

## 1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью освоения дисциплины «Математика» является формирование у студентов навыков логического мышления; практических навыков использования математических методов и формул, а также ознакомление с основами теоретических знаний по классическим разделам математики и подготовка в области построения и использования различных математических моделей.

Задачи:

- получение основного представления о математических методах для решения задач измерения в экономике, в частности, с использованием современных информационных технологий;
- освоение современных методов и математического инструментария решения задач в экономике.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина «Математика» относится к базовой части учебного плана.

Пререквизиты дисциплины: дисциплина опирается на знание предметов основной образовательной программы среднего (полного) общего образования: математика.

## 3. ПЛАНИРУЕМЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Планируемые результаты обучения по дисциплине, соотнесенные с планируемыми результатами освоения ОПОП

Код формируемых компетенций	Уровень освоения компетенции	Планируемые результаты обучения по дисциплине, характеризующие этапы формирования компетенций (показатели освоения компетенции)
<b>ОПК-2.</b> Способность осуществлять сбор, анализ и обработку данных, необходимых для решения профессиональных задач.	Частичное	<b>Знать</b> количественные и качественные методы анализа при принятии управленческих решений. <b>Уметь</b> применять количественные и качественные методы анализа при принятии маркетинговых управленческих решений. <b>Владеть</b> инструментами количественного и качественного анализа для принятия управленческих решений и построения экономических и финансовых моделей.
<b>ОПК-3.</b> Способность выбрать инструментальные средства для обработки экономических данных в соответствии с поставленной задачей, проанализировать результаты расчетов и обосновать полученные выводы.	Частичное	<b>Знать</b> количественные и качественные методы анализа при принятии управленческих решений. <b>Уметь</b> применять количественные и качественные методы анализа при принятии маркетинговых управленческих решений. <b>Владеть</b> инструментами количественного и качественного анализа для принятия управленческих решений и построения экономических и финансовых моделей.

#### 4. ОБЪЕМ И СТРУКТУРА ДИСЦИПЛИНЫ

Трудоёмкость дисциплины составляет 8 зачетных единиц, 288 часа.

№ п/п	Наименование тем и/или разделов/тем дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах)				Объем учебной работы с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости, форма промежуточной аттестации (по семестрам)
				Лекции	Практические занятия	Лабораторные работы	СРС		
1	Аналитическая геометрия и линейная алгебра	1	1-4	8	8		8	8 / 50%	
2	Введение в анализ	1	5-6	4	4		4	4 / 50%	Рейтинг-контроль 1
3	Дифференциальное исчисление функций одной переменной	1	7-10	8	8		8	4 / 50%	Рейтинг-контроль 2
4	Применение дифференциального исчисления для исследования функций и построения графиков	1	11-12	8	8		8	8 / 50%	
5	Неопределенный интеграл	1	13-18	8	8		8	8 / 50%	Рейтинг-контроль 3
<b>Всего за 1 семестр:</b>				<b>36</b>	<b>36</b>		<b>36</b>	<b>36 / 50%</b>	<b>Зачет</b>
6	Определенный интеграл	2	1-4	8	8		18	8 / 50%	
7	Функции нескольких переменных	2	5-6	4	4		9	4 / 50%	Рейтинг-контроль 1
8	Ряды	2	7-10	8	8		18	8 / 50%	Рейтинг-контроль 2
9	Обыкновенные дифференциальные и разностные уравнения	2	11-18	16	16		36	16 / 50%	Рейтинг-контроль 3
<b>Всего за 2 семестр:</b>				<b>36</b>	<b>36</b>		<b>81</b>	<b>36 / 50%</b>	<b>Экзамен (27)</b>
<b>Итого по дисциплине</b>				<b>72</b>	<b>72</b>		<b>117</b>	<b>72 / 50%</b>	<b>Зачет, Экзамен (27)</b>

#### Содержание лекционных занятий по дисциплине

##### 1 СЕМЕСТР

##### **Раздел 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ**

1.1. Прямоугольная и аффинная системы координат. Метод координат.

1.2. Комплексные числа, действия с ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа.

Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексного числа. Формула Эйлера. Показательная форма записи комплексного числа. Корни из комплексных чисел.

1.3. Векторы. Линейные операции над векторами. Направляющие косинусы и длина вектора. Условие коллинеарности двух векторов.

1.4. Скалярное произведение векторов и его свойства. Длина вектора и угол между двумя векторами. Условие ортогональности двух векторов.

1.5. Система векторов. Разложение вектора по системе векторов. Линейная зависимость и независимость, базисы и ранг системы векторов. Пространство  $R^n$ . Ортогональность.

1.6. Матрицы. Действия с матрицами. Обратная матрица. Ранг матрицы.

1.7. Определители. Свойства определителей. Алгебраические дополнения и миноры. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу).

1.8. Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли. Формулы Крамера.

1.9. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений.

1.10. Общее решение системы линейных уравнений в векторной форме.

1.11 Уравнение линий плоскости. Различные формы уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

1.12 Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола, их геометрические свойства и уравнения.

1.13. Уравнения плоскости и прямой в прямоугольной системе координат. Условия параллельности и перпендикулярности. Углы между двумя плоскостями, между двумя прямыми, между прямой и плоскостью. Прямые и плоскости в аффинном пространстве.

1.14. Поверхности второго порядка. Геометрические свойства этих поверхностей, исследование их формы методом сечений.

1.15. Евклидово пространство. Неравенство Коши-Буняковского. Ортогональный базис. Процесс ортогонализации. Разложение вектора по ортогональному базису.

1.16. Собственные значения и собственные векторы матриц и их свойства. Теорема о базисе пространства  $R^n$  из собственных векторов матрицы. Собственные векторы симметрической матрицы.

1.17. Квадратичные формы  $R^n$ . Понятие канонический базис. Условие Якоби. Положительно и отрицательно определенные квадратичные формы. Критерий Сильвестра.

## **Раздел 2. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ**

2.1 Множества. Операции над множествами. Числовые множества. Грани множеств. Множества в  $R^n$ . Выпуклые множества и их свойства. Соответствие множеств. Счетные и несчетные множества. Отношения. Отношения тождества и упорядоченности.

2.2. Функция. Функциональное отношение. Соответствие. Способы задания. Основные элементарные функции, их свойства и графики.

2.3. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Свойства сходящихся последовательностей.

2.4. Алгебраические композиции числовых последовательностей и их пределы. Композиции с неопределенностью. Признаки существования предела монотонной ограниченной последовательности. Первый и второй замечательные пределы. Лемма Кантора. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Признак Больцано-Коши.

2.5. Монотонные функции. Композиция и суперпозиция функций. Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности. Пределы монотонных функций. Непрерывность функций в точке. Непрерывность основных элементарных функций. Типы разрывов.

2.6. Сравнение бесконечно малых функций.

2.7. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений.

## **Раздел 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ**

3.1. Производная функции, ее геометрический смысл и смысл в прикладных задачах (скорость, плотность). Эластичность функции.

3.2. Правила нахождения производной. Производная сложной и обратной функции. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически.

3.3. Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции и его геометрический смысл.

3.4. Производные и дифференциалы высших порядков.

3.5. Теоремы Ферма, Роля, Лагранжа, Коши, их применение. Правило Лопиталья.

3.6. Многочлен и формула Тейлора. Представление функций  $\exp(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\sigma$  по формуле Тейлора.

#### **Раздел 4. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЯ ИХ ГРАФИКОВ**

- 4.1. Условия монотонности функции. Экстремумы функции, необходимое условие. Достаточные условия. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.
- 4.2. Исследование выпуклости функции. Точки перегиба.
- 4.3. Асимптоты графика функции.
- 4.4. Общая схема исследования функции и построения ее графика.
- 4.5. Уравнение касательной и нормали к плоской кривой в данной точке.

#### **Раздел 5. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

- 5.1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства. Таблица интегралов.
- 5.2. Методы интегрирования. Замена переменной, интегрирование по частям. Интегрирование рациональных выражений, тригонометрических функций, некоторых иррациональных функций. Понятие о неберущихся интегралах.

### **2 СЕМЕСТР**

#### **Раздел 6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

- 6.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл, его геометрический смысл и свойства.
- 6.2. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов.
- 6.3. Замена переменной в определенном интеграле, интегрирование по частям.
- 6.4. Приложения определенных интегралов.
- 6.5. Несобственные интегралы. Интегрирование неограниченных функций и по бесконечному промежутку. Несобственные интегралы от положительных функций. Признаки сравнения.
- 6.6. Двойной и тройной интегралы, их свойства. Вычисление кратных интегралов повторным интегрированием.

#### **Раздел 7. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

- 7.1. Функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции. Непрерывность.
- 7.2. Частные производные. Полный дифференциал, его геометрический смысл, связь с частными производными, применение в приближенных вычислениях.
- 7.3. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. Независимость смешанных производных от порядка дифференцирования.
- 7.5. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области.
- 7.6. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Примеры применений при поиске оптимальных решений.

#### **Раздел 8. РЯДЫ**

- 8.1. Понятие числового ряда и его сходимости. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости. Свойства сходящихся рядов.
- 8.2. Признаки сходимости рядов: общий признак, признак сравнения, признак Коши, признак Даламбера, интегральный признак Коши.
- 8.3. Понятие знакопеременного ряда, абсолютно сходящегося ряда, условно сходящегося ряда. Теорема Дирихле. Теорема Римана.
- 8.4. Понятие знакопеременного ряда. Признак Лейбница.
- 8.5. Понятие функционального ряда. Область сходимости. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса.
- 8.6. Свойства равномерно сходящихся рядов.
- 8.7. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости и способы его определения. Свойства степенных рядов.

8.8. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов.

8.9. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение рядов к приближенным вычислениям.

## **Раздел 9. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

9.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия: определение, решение, общее решение, частное решение дифференциального уравнения первого порядка. Теорема Коши о существовании и единственности решения (без доказательства). Интегральная кривая. Начальные условия. Задача Коши. Особые точки. Геометрический смысл уравнения первого порядка. Элементы качественного анализа.

9.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Виды уравнений и методы решения. Уравнения с разделяющимися переменными. Неполные уравнения. Линейные уравнения, однородные и неоднородные.

9.3. Дифференциальные уравнения второго порядка. Основные понятия. Теорема Коши о существовании и единственности решения (без доказательства). Задача Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка.

9.4. Дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные уравнения, однородные и неоднородные.

9.5. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Краевая задача.

9.6. Дифференциальные уравнения высших порядков. Система уравнений первого порядка. Нормальная форма. Теорема Коши. Задача Коши и краевая задача для уравнения  $n$ -го порядка. Линейные уравнения  $n$ -го порядка. Линейные уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.

9.7. Линейные обыкновенные разностные уравнения. Основные понятия. Сетки и сеточные функции. Однородные и неоднородные уравнения. Свойства решений.

9.8. Решение линейных обыкновенных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Примеры. Системы линейных разностных уравнений первого порядка.

## **Содержание практических занятий по дисциплине**

### **1 СЕМЕСТР**

#### **РАЗДЕЛ 1. ЭЛЕМЕНТЫ ЛИНЕЙНОЙ АЛГЕБРЫ И АНАЛИТИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ.**

Решение задач по темам.

Тема 1.1. Комплексные числа, действия с ними. Изображение комплексных чисел на плоскости. Модуль и аргумент комплексного числа. Алгебраическая и тригонометрическая формы записи комплексного числа. Формула Эйлера. Показательная форма записи комплексного числа. Корни из комплексных чисел. Векторы. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов и его свойства. Длина вектора и угол между двумя векторами. 1.5. Система векторов. Разложение вектора по системе векторов.

Тема 1.2. Матрицы. Действия с матрицами. Обратная матрица. Ранг матрицы. Определители. Свойства определителей. Алгебраические дополнения и миноры. Вычисление определителя разложением по строке (столбцу). Системы линейных уравнений. Метод Гаусса. Теорема Кронекера-Капелли. Формулы Крамера.

Тема 1.3. Однородные системы линейных уравнений. Фундаментальная система решений. Общее решение системы линейных уравнений в векторной форме. Уравнение линий плоскости. Различные формы уравнения прямой на плоскости. Угол между прямыми. Расстояние от точки до прямой.

Тема 1.4. Кривые второго порядка: окружность, эллипс, гипербола, парабола, их геометрические свойства и уравнения. Уравнения плоскости и прямой в прямоугольной системе координат. Условия параллельности и перпендикулярности. Углы между двумя плоскостями, между двумя прямыми, между прямой и плоскостью. Прямые и плоскости в аффинном пространстве. Поверхности второго порядка. Геометрические свойства этих поверхностей, исследование их формы методом сечений.

## **РАЗДЕЛ 2. ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ.**

Решение задач по темам.

Тема 2.1. Функция. Функциональное отношение. Соответствие. Способы задания. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Числовые последовательности. Предел числовой последовательности. Бесконечно малые и бесконечно большие величины. Свойства сходящихся последовательностей. Алгебраические композиции числовых последовательностей и их пределы. Композиции с неопределенностью. Признаки существования предела монотонной ограниченной последовательности. Первый и второй замечательные пределы. Лемма Кантора. Теорема Больцано-Вейерштрасса. Признак Больцано-Коши.

Тема 2.2. Предел функции в точке. Предел функции в бесконечности. Пределы монотонных функций. Непрерывность функций в точке. Непрерывность основных элементарных функций. Типы разрывов. Свойства функций, непрерывных на отрезке: ограниченность, существование наибольшего и наименьшего значений, существование промежуточных значений.

## **РАЗДЕЛ 3. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ.**

Решение задач по темам.

Тема 3.1. Производная функции, ее геометрический смысл и смысл в прикладных задачах (скорость, плотность). Эластичность функции. Правила нахождения производной.

Тема 3.2. Производная сложной и обратной функции. Дифференцирование функций, заданных неявно и параметрически.

Тема 3.3. Понятие функции, дифференцируемой в точке. Дифференциал функции и его геометрический смысл. Производные и дифференциалы высших порядков.

Тема 3.4. Теоремы Ферма, Роля, Лагранжа, Коши, их применение. Правило Лопиталья. Многочлен и формула Тейлора. Представление функций  $\exp(x)$ ,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x)$ ,  $\ln(1+x)$ ,  $(1+x)^\sigma$  по формуле Тейлора.

## **РАЗДЕЛ 4. ПРИМЕНЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИЙ И ПОСТРОЕНИЯ ИХ ГРАФИКОВ.**

Решение задач по темам.

Тема 4.1. Условия монотонности функции. Экстремумы функции, необходимое условие. Достаточные условия.

Тема 4.2. Отыскание наибольшего и наименьшего значений функции, дифференцируемой на отрезке.

Тема 4.4. Исследование выпуклости функции.

Тема 4.5. Точки перегиба. Асимптоты графика функции. Общая схема исследования функции и построения ее графика. Уравнение касательной и нормали к плоской кривой в данной точке.

## **РАЗДЕЛ 5. НЕОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ.**

Решение задач по темам.

Тема 5.1. Первообразная функция. Неопределенный интеграл и его свойства.

Тема 5.2. Таблица интегралов.

Тема 5.3. Методы интегрирования. Замена переменной, интегрирование по частям.

Тема 5.4. Интегрирование рациональных выражений, тригонометрических функций, некоторых иррациональных функций. Понятие о неберущихся интегралах.

## **2 СЕМЕСТР**

## **РАЗДЕЛ 6. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ**

Решение задач по темам.

Тема 6.1. Задачи, приводящие к понятию определенного интеграла. Определенный интеграл, его геометрический смысл и свойства.

Тема 6.2. Формула Ньютона-Лейбница, ее применение для вычисления определенных интегралов. Замена переменной в определенном интеграле, интегрирование по частям.

Тема 6.3. Приложения определенных интегралов. Несобственные интегралы. Интегрирование неограниченных функций и по бесконечному промежутку. Несобственные интегралы от положительных функций. Признаки сравнения.

Тема 6.4. Двойной и тройной интегралы, их свойства. Вычисление кратных интегралов повторным интегрированием.

### **РАЗДЕЛ 7. ФУНКЦИИ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ**

Решение задач по темам.

Тема 7.1. Функции нескольких переменных. Область определения. Предел функции. Непрерывность. Частные производные. Полный дифференциал, его геометрический смысл, связь с частными производными, применение в приближенных вычислениях. Частные производные и полные дифференциалы высших порядков. Независимость смешанных производных от порядка дифференцирования.

Тема 7.2. Экстремумы функции нескольких переменных. Необходимое условие экстремума. Наибольшее и наименьшее значения функции в ограниченной замкнутой области. Условный экстремум. Метод множителей Лагранжа. Примеры применений при поиске оптимальных решений.

### **РАЗДЕЛ 8. РЯДЫ**

Решение задач по темам.

Тема 8.1. Понятие числового ряда и его сходимости. Критерий Коши сходимости числового ряда. Необходимое условие сходимости. Свойства сходящихся рядов. Признаки сходимости рядов: общий признак, признак сравнения, признак Коши, признак Даламбера, интегральный признак Коши.

Тема 8.2. Понятие знакопеременного ряда, абсолютно сходящегося ряда, условно сходящегося ряда. Теорема Дирихле. Теорема Римана. Понятие знакочередующегося ряда. Признак Лейбница.

Тема 8.3. Понятие функционального ряда. Область сходимости. Критерий Коши равномерной сходимости. Признак Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов.

Тема 8.4. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости и способы его определения. Свойства степенных рядов. Интегрирование и дифференцирование степенных рядов. 8.9. Ряды Тейлора и Маклорена. Применение рядов к приближенным вычислениям.

### **РАЗДЕЛ 9. ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ И РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ**

Решение задач по темам.

Тема 9.1. Дифференциальные уравнения первого порядка. Основные понятия: определение, решение, общее решение, частное решение дифференциального уравнения первого порядка. Теорема Коши о существовании и единственности решения (без доказательства). Интегральная кривая. Начальные условия. Задача Коши. Особые точки. Геометрический смысл уравнения первого порядка. Элементы качественного анализа.

Тема 9.2. Дифференциальные уравнения первого порядка. Виды уравнений и методы решения. Уравнения с разделяющимися переменными. Неполные уравнения. Линейные уравнения, однородные и неоднородные.

Тема 9.3. Дифференциальные уравнения второго порядка. Основные понятия. Теорема Коши о существовании и единственности решения (без доказательства). Задача Коши. Уравнения, допускающие понижение порядка.

Тема 9.4. Дифференциальные уравнения второго порядка. Линейные уравнения, однородные и неоднородные.

Тема 9.5. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Краевая задача.

Тема 9.6. Дифференциальные уравнения высших порядков. Система уравнений первого порядка. Нормальная форма. Теорема Коши. Задача Коши и краевая задача для уравнения  $n$ -го порядка. Линейные уравнения  $n$ -го порядка. Линейные уравнения  $n$ -го порядка с постоянными коэффициентами.

Тема 9.7. Линейные обыкновенные разностные уравнения. Основные понятия. Сетки и сеточные функции. Однородные и неоднородные уравнения. Свойства решений.



Тема 9.8. Решение линейных обыкновенных разностных уравнений с постоянными коэффициентами. Примеры. Системы линейных разностных уравнений первого порядка.

## 5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В преподавании дисциплины «Математика» используются разнообразные образовательные технологии как традиционные, так и с применением активных и интерактивных методов обучения.

Активные и интерактивные методы обучения:

- интерактивные лекции (по всем темам).

## 6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

### 1 СЕМЕСТР

#### Текущий контроль успеваемости

#### Рейтинг-контроль 1

1. Сформулируйте определение понятия “система координат” на прямой, на плоскости, в пространстве.
2. Что называется базисом системы координат на прямой, на плоскости, в пространстве?
3. Что называется вектором?
4. Как задать вектор, определить его длину, направление и проекции в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости, в пространстве?
5. Что называется декартовой ортонормированной системой координат на плоскости, в пространстве?
6. Запишите формулу разложения вектора на составляющие в декартовой прямоугольной системе координат на плоскости, в пространстве.
7. Что называется радиусом-вектором?
8. Задайте точку и нарисуйте её положение на прямой, на плоскости, в пространстве.
9. Задайте координаты четырех вершин треугольной пирамиды и нарисуйте положение пирамиды в пространстве.
10. Запишите формулу расстояния между двумя точками на плоскости, в пространстве.
11. Что называется скалярным произведением двух векторов; скалярное произведение – это число или вектор?
12. Запишите формулу скалярного произведения через координаты перемножаемых векторов.
13. Как определить угол между двумя векторами с помощью скалярного произведения?
14. Каковы способы задания прямой, запишите различные формы уравнения прямой на плоскости.
15. Каковы способы задания плоскости, запишите различные формы уравнения плоскости в пространстве.
16. Какие векторы называются коллинеарными, компланарными?
17. Что называется матрицей?
18. Что называется определителем матрицы?
19. Как вычислить определитель 2-го, 3-го и  $n$ -го порядка методом разложения по элементам любой строки и любого столбца?
20. Что называется векторным произведением двух векторов; векторное произведение – это число или вектор?
21. Запишите формулу векторного произведения через координаты перемножаемых векторов.
22. Как определить площадь треугольника с помощью векторного произведения, каковы должны быть исходные данные?
23. Что называется смешанным произведением трех векторов; смешанное произведение – это число или вектор?
24. В чем состоит геометрический смысл смешанного произведения трех векторов?

25. Запишите формулу смешанного произведения через координаты перемножаемых векторов.
26. Запишите условие компланарности трех векторов с помощью смешенного произведения.
27. Выведите уравнение плоскости с помощью условия компланарности трех векторов.
28. Как определить объем треугольной пирамиды с помощью смешанного произведения трех векторов?
29. Запишите уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки; в чем состоит смысл коэффициентов этого уравнения?
30. Каковы способы задания прямой в пространстве?
31. Запишите условие коллинеарности двух векторов.
32. Запишите канонические уравнения прямой в пространстве.

### Рейтинг-контроль 2

1. Что называется кривыми линиями второго порядка?
2. Запишите общие уравнения кривых линий второго порядка.
3. Что называется окружностью, в чём состоит основное свойство окружности?
4. Запишите каноническое уравнение окружности.
5. Как по виду канонического уравнения окружности установить координаты центра окружности и радиус?
6. Что называется эллипсом, в чем состоит основное свойство эллипса?
7. Какие точки плоскости называются фокусами эллипса?
8. Запишите соотношение между длинами большой и малой полуосей эллипса и расстоянием от центра эллипса до фокуса.
9. Запишите каноническое уравнение эллипса.
10. Как по виду уравнения эллипса установить координаты его центра и длины большой и малой полуосей?
11. Что называется гиперболой, в чем состоит основное свойство гиперболы?
12. Какие точки плоскости называются фокусами гиперболы?
13. Запишите соотношение между длинами действительной и мнимой полуосей гиперболы и расстоянием от центра гиперболы до фокуса.
14. Запишите каноническое уравнение гиперболы.
15. Как по виду уравнения гиперболы установить координаты её центра и длины действительной и мнимой полуосей?
16. Запишите уравнение асимптот гиперболы.
17. Что называется параболой, в чем состоит основное свойство параболы?
18. Какая точка плоскости называется фокусом параболы?
19. Что называется директрисой параболы, запишите уравнение директрисы.
20. Запишите каноническое уравнение параболы.
21. Как по виду уравнения параболы установить координаты вершины параболы и положение директрисы на плоскости?
22. Запишите общее уравнение окружности, эллипса, гиперболы и параболы.
23. При каких условиях из общего уравнения окружности, эллипса, гиперболы, параболы получаем общее уравнение окружности, общее уравнение эллипса, общее уравнение гиперболы, общее уравнение параболы?
24. Выполните преобразование общего уравнения окружности к виду канонического уравнения окружности.
25. Выполните преобразование общего уравнения эллипса к виду канонического уравнения эллипса.
26. Выполните преобразование общего уравнения гиперболы к виду канонического уравнения гиперболы.
27. Выполните преобразование общего уравнения параболы к виду канонического уравнения параболы.

### Рейтинг-контроль 3

1. Что называется аффинной, или общей декартовой, системой координат в трехмерном пространстве?
2. Что называется базисом аффинной системы координат?
3. Что называется координатной плоскостью?
4. Какую проблему позволяет решить система координат?
5. Что называется аффинными координатами точки пространства?
6. Как, используя линейные операции над векторами, разложить радиус-вектор произвольной точки пространства на составляющие по координатным осям?
7. Что называется декартовой косоугольной системой координат?
8. В каком случае аффинная система координат становится прямоугольной ортонормированной системой координат?
9. Запишите условие, при котором на трех векторах, как на сторонах, можно построить параллелепипед.
10. Запишите условие, при котором три вектора образуют базис системы координат.

### Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (зачет)

#### Вопросы к зачету

1. Матрицы. Действия над матрицами.
2. Определители. Свойства определителей.
3. Обратная матрица.
4. Ранг матрицы.
5. Системы линейных уравнений.
6. Теорема Кронекера-Капелли.
7. Формулы Крамера. Метод Гаусса.
8. Векторы. Линейные операции над векторами.
9. Проекция вектора на ось. Разложение вектора по ортам координатных осей.
10. Модуль вектора. Направляющие косинусы.
11. Действия над векторами, заданными проекциями.
12. Скалярное произведение векторов и его свойства.
13. Векторное произведение векторов и его свойства.
14. Смешанное произведение векторов и его свойства.
15. Система координат на плоскости. Преобразование системы координат.
16. Уравнения прямой на плоскости.
17. Множества. Числовые множества. Множество действительных чисел.
18. Числовые промежутки. Окрестность точки.
19. Функция. Способы задания функций. Основные характеристики функций.
20. Обратная функция. Сложная функция.
21. Последовательности. Числовая последовательность.
22. Предел числовой последовательности.
23. Предел функции в точке. Односторонние пределы.
24. Бесконечно большая функция. Бесконечно малые функции.
25. Признаки существования пределов. Первый и второй замечательные пределы.
26. Сравнение бесконечно малых функций. Эквивалентные бесконечно малые.
27. Непрерывность функций в точке. Непрерывность в интервале и на отрезке.
28. Точки разрыва функций и их классификация.
29. Производная функции. Физический и геометрический смысл производной.
30. Связь между непрерывностью и дифференцируемостью функции.
31. Производная суммы, разности, произведения и частного функций.
32. Производная сложной и обратной функций.
33. Производные основных элементарных функций.

## Самостоятельная работа студентов

### Вопросы и задачи

**Раздел 1.** Метод координат. Комплексные числа, действия с ними. Векторы. Линейные операции над векторами. Скалярное произведение векторов и его свойства. Система векторов. Разложение вектора по системе векторов. Матрицы. Действия над матрицами. Обратная матрица. Ранг матрицы. Определители. Свойства определителей.

**Раздел 2.** Функции. Основные элементарные функции, их свойства и графики. Свойства функций непрерывных на отрезке.

**Раздел 3.** Производная функции ее геометрический и физический смысл. Производная суммы, произведения и частного. Ее геометрический смысл и смысл в прикладных задачах.

### Упражнение 1

1-10. Даны вершины  $A_1(x_1, y_1, z_1)$ ,  $A_2(x_2, y_2, z_2)$ ,  $A_3(x_3, y_3, z_3)$ ,  $A_4(x_4, y_4, z_4)$ , пирамиды.

Найти:

- длину ребра  $A_1A_2$ ;
  - угол между ребрами  $A_1A_2$  и  $A_1A_4$ ;
  - уравнение грани  $A_1A_2A_3$  и ее площадь;
  - уравнения высоты, опущенной из вершины  $A_4$  на грань  $A_1A_2A_3$ .
- $A_1(3,2,1)$ ,  $A_2(1,3,2)$ ,  $A_3(2,0,-1)$ ,  $A_4(4,-2,3)$ .
  - $A_1(2,-1,8)$ ,  $A_2(3,4,4)$ ,  $A_3(2,-1,2)$ ,  $A_4(6,1,6)$ .
  - $A_1(8,5,0)$ ,  $A_2(-3,7,-5)$ ,  $A_3(-4,1,3)$ ,  $A_4(-2,1,-4)$ .
  - $A_1(0,1,-1)$ ,  $A_2(3,-4,4)$ ,  $A_3(6,-1,3)$ ,  $A_4(5,2,-1)$ .
  - $A_1(3,2,-3)$ ,  $A_2(3,-1,1)$ ,  $A_3(0,2,-2)$ ,  $A_4(4,-2,3)$ .
  - $A_1(0,6,-1)$ ,  $A_2(3,-8,2)$ ,  $A_3(4,-1,0)$ ,  $A_4(2,1,-4)$ .
  - $A_1(2,-3,2)$ ,  $A_2(0,5,4)$ ,  $A_3(5,6,1)$ ,  $A_4(-2,1,3)$ .
  - $A_1(6,-2,0)$ ,  $A_2(6,2,-1)$ ,  $A_3(2,-1,4)$ ,  $A_4(-2,7,4)$ .
  - $A_1(1,4,-2)$ ,  $A_2(-3,0,3)$ ,  $A_3(8,0,1)$ ,  $A_4(1,-4,0)$ .
  - $A_1(1,8,2)$ ,  $A_2(4,-1,2)$ ,  $A_3(-1,5,3)$ ,  $A_4(3,3,-3)$ .

### Упражнение 2

11–20. Составить уравнение множества точек, для каждой из которых выполняется следующее условие:

- Сумма квадратов расстояний до точек  $A(1;1)$  и  $B(-3;3)$  равна 20.
- Сумма квадратов расстояний до точек  $A(3;-3)$ ,  $B(1;1)$  и  $C(-1;1)$  равна 28.
- Сумма квадратов расстояний до точек  $A(3;-3)$ ,  $B(-1;1)$ ,  $C(-1;0)$  и  $D(2;-4)$  равна 58.
- Квадрат расстояния до точки  $A(0;3)$ , на 3 больше квадрата расстояния до оси абсцисс.
- Сумма расстояний до точек  $A(6;0)$  и  $O(0;0)$  равна 10.
- Квадрат расстояния до точки  $A(2;0)$  на 16 больше квадрата расстояния до оси координат.
- Сумма квадратов расстояний до сторон прямоугольника, образованного прямыми  $x = 0$ ,  $x - 4 = 0$ ,  $x - 2 = 0$ , равна 20.
- Расстояние до точки  $A(0;3)$  равно расстоянию до оси абсцисс.
- Разность расстояний до точек  $A(0;10)$  и  $O(0;0)$  равна 8.
- Расстояние до точки  $A(2;0)$  равно расстоянию до оси ординат.

### Упражнение 3

21-30. Даны векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d}$  в некотором базисе. Показать, что векторы  $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$  образуют базис, и найти координаты вектора  $\bar{d}$  в этом базисе. Систему линейных уравнений решить методом Крамера.

- $\bar{a}(7;3;0)$ ,  $\bar{b}(4;1;1)$ ,  $\bar{c}(-7;1;12)$ ,  $\bar{d}(-11;8;5)$ .
- $\bar{a}(2;0;3)$ ,  $\bar{b}(-9;2;10)$ ,  $\bar{c}(-4;2;10)$ ,  $\bar{d}(-1;-2;-10)$ .
- $\bar{a}(1;2;2)$ ,  $\bar{b}(5;-2;-7)$ ,  $\bar{c}(0;5;-1)$ ,  $\bar{d}(-2;6;-6)$ .

- |                          |                      |                     |                        |
|--------------------------|----------------------|---------------------|------------------------|
| 24. $\bar{a}(-2;3;1)$ ,  | $\bar{b}(2;6;7)$ ,   | $\bar{c}(4;-1;0)$ , | $\bar{d}(6;-3;-5)$ .   |
| 25. $\bar{a}(1;3;1)$ ,   | $\bar{b}(1;-8;2)$ ,  | $\bar{c}(0;-5;3)$ , | $\bar{d}(3;-8;2)$ .    |
| 26. $\bar{a}(2;5;-1)$ ,  | $\bar{b}(-1;2;-6)$ , | $\bar{c}(-2;1;1)$ , | $\bar{d}(-11;-5;-1)$ . |
| 27. $\bar{a}(-1;4;3)$ ,  | $\bar{b}(5;0;1)$ ,   | $\bar{c}(-1;4;4)$ , | $\bar{d}(-7;8;7)$ .    |
| 28. $\bar{a}(3;3;2)$ ,   | $\bar{b}(1;2;3)$ ,   | $\bar{c}(1;-1;4)$ , | $\bar{d}(4;-1;7)$ .    |
| 29. $\bar{a}(-2;-1;1)$ , | $\bar{b}(2;3;0)$ ,   | $\bar{c}(-4;2;3)$ , | $\bar{d}(-10;-9;3)$ .  |
| 30. $\bar{a}(1;5;1)$ ,   | $\bar{b}(-2;5;4)$ ,  | $\bar{c}(3;-1;2)$ , | $\bar{d}(4;19;9)$ .    |

## 2 СЕМЕСТР

### Текущий контроль успеваемости

#### Рейтинг-контроль 1

1. Запишите алгоритм решения системы линейных уравнений методом Гаусса, используя два элементарных преобразования системы: деление уравнений на коэффициенты при неизвестных и вычитание уравнений.
2. В каких случаях находит применение метод Гаусса решения системы линейных уравнений?
3. Что мы понимаем под эквивалентными системами линейных уравнений?
4. Какие преобразования системы линейных уравнений называются элементарными?
5. К системе какого вида имеет своей целью приведение заданной системы линейных уравнений методом Гаусса?
6. Как решается система линейных уравнений треугольного вида, полученная из исходной методом Гаусса?
7. В чем заключается проверка полученного решения системы линейных уравнений?
8. Существует ли возможность, если "да", то опишите её, решения системы линейных уравнений методом Гаусса в компактном виде без переписывания обозначений самих неизвестных?
9. Какие системы линейных уравнений называются определенными, неопределенными?
10. Какие системы линейных уравнений называются совместными, несовместными?
11. Запишите вид противоречивого уравнения.
12. Позволяет ли метод Гаусса обнаружить противоречивое уравнение и сделать заключение о несовместности системы линейных уравнений?
13. В чем состоит жорданово преобразование системы линейных уравнений?
14. Опишите метод Жордана–Гаусса решения системы линейных уравнений.
15. Какое неизвестное в системе линейных уравнений называется разрешающим?
16. Что называется разрешенным уравнением в системе линейных уравнений, решаемых методом Жордана–Гаусса?
17. Что называется разрешенной системой линейных уравнений?

#### Рейтинг-контроль 2

1. Сформулируйте определение понятия "функция".
2. Запишите определение понятия "функция" в символической логической форме.
3. Какие формы записи используют для обозначения функции?
4. Что называется областью определения функции, независимой переменной (аргументом), областью значений функции, зависимой переменной?
5. В каком случае аргумент называют прообразом, а значение функции образом?
6. Запишите выражение прообраза через образ.
7. Что называется обратной функцией?
8. Что называется графиком функции?
9. Приведите примеры функций.
10. Что называется основными элементарными функциями?
11. Что называется суперпозицией функций?
12. Что называется элементарной функцией?

13. Что называется конечной и бесконечно удаленной точкой числовой оси?
14. Что называется окрестностью конечной и бесконечно удаленной точки, как её обозначить символически?
15. Что называется числовой функцией, числовой последовательностью?
16. Что называется пределом числовой последовательности, как его обозначить символически?
17. Что называется бесконечно малой числовой последовательностью?
18. Сформулируйте определение предела функции по Гейне (в терминах последовательностей).
19. Запишите определение предела функции по Гейне в логической символической форме.
20. Пользуясь определением предела функции по Гейне, ответить на вопрос: существует или нет предел заданной функции  $f(x)$  в точке  $x_0$ , если существует, то найти его значение:

$$1) f(x) = \frac{2x^2 + x - 3}{x - 1}, \quad x_0 = 1, \quad 2) f(x) = \sin \frac{1}{x}, \quad x_0 = 0.$$

21. Сформулируйте определение предела функции по Коши в общем случае (в терминах окрестностей).
22. Сформулируйте определение конечного предела функции по Коши в конечной точке (в терминах неравенств) ( $(\varepsilon - \delta)$  – определение).
23. Запишите определение предела функции по Коши в логической символической форме.
24. Сформулируйте определение конечного предела функции по Коши в бесконечно удаленной точке (в терминах неравенств).
25. Сформулируйте определение бесконечного предела функции по Коши в конечной точке (в терминах неравенств).
26. Пользуясь определением предела функции по Коши, доказать справедливость выражений:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (2x + 3) = 5, \quad 2) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin x}{x} = 0, \quad 3) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\pm \sqrt{x}) = \infty.$$

27. Запишите и объясните символическое обозначение одностороннего предела функции в точке слева и справа.
28. Являются ли эквивалентными определения предела функции по Гейне и по Коши и различна ли целесообразность их применения?
29. Что называется бесконечно большой и бесконечно малой функцией?
30. Приведите пример бесконечно большой и бесконечно малой функции.
31. Сформулируйте теорему существования конечного предела функции в точке.
32. Сформулируйте основные теоремы о пределах, используемые для нахождения предела функции.
33. Запишите формулы двух замечательных пределов.
34. Какие локальные свойства функции в точке исследуются с помощью предела?
35. Какие выражения при нахождении предела функции не имеют смысла и называются неопределенными?
36. Объясните простейшие приёмы раскрытия неопределенностей, используемые при нахождении предела функции.
37. Найдите пределы:

$$1) \lim_{x \rightarrow 1} (2x^3 - 3x^2 + 2x - 1),$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x^3 + x^2 - 3}{3x^4 - x^3 - x^2 + 8},$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 1}{x - 1},$$

$$4) \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{6x^3 + 5x^2 - 2}{x^3 + 2x + 15},$$

$$5) \lim_{x \rightarrow -3} \frac{2x^2 + 5x - 3}{x^2 - 9},$$

$$6) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{4+x} - \sqrt{4-x}}{x},$$

$$7) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 3x}{x^2},$$

$$8) \lim_{x \rightarrow 0} \ln \frac{\sin x}{x},$$

$$9) \lim_{x \rightarrow \infty} \left( \frac{2+x}{x-3} \right)^x.$$

### Рейтинг-контроль 3

1. Сформулируйте определение непрерывной в точке функции, запишите условие непрерывности.
2. В каком случае символы предела и функции можно поменять местами?
3. Сформулируйте теоремы о непрерывности основной элементарной функции и элементарной функции в каждой точке области определения.
4. Что называется точкой разрыва функции?
5. Что называется точкой разрыва 1-го рода, приведите пример.
6. Что называется скачком функции в точке, приведите пример.
7. Что называется точкой устранимого разрыва, приведите пример.
8. Что называется точкой разрыва 2-го рода, приведите пример.
9. Что называется неэлементарной функцией, приведите пример.

### Промежуточная аттестация по итогам освоения дисциплины (экзамен)

#### Вопросы к экзамену

1. Комплексные числа.
2. Неопределенный интеграл. Основные понятия и свойства.
3. Метод интегрирования подстановкой.
4. Метод непосредственного интегрирования.
5. Метод интегрирования по частям.
6. Рациональные функции.
7. Интегрирование рациональных дробей.
8. Интегрирование тригонометрических функций.
9. Интегрирование иррациональных функций.
10. Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Геометрический смысл определенного интеграла.
11. Формула Ньютона – Лейбница. Интегрирование в симметричных пределах.
12. Несобственные интегралы.
13. Вычисление площадей плоских фигур.
14. Вычисление длины дуги плоской кривой.
15. Вычисление площади поверхности.
16. Вычисление объема тела.
17. Функции нескольких переменных.
18. Дифференциальные уравнения. Основные понятия.
19. Уравнения с разделяющимися переменными.
20. Однородные дифференциальные уравнения.
21. Линейные уравнения. Уравнение Бернулли.
22. Уравнения в полных дифференциалах.
23. Уравнения Лагранжа и Клеро.
24. Уравнения, допускающие понижение порядка.
25. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка.
26. Интегрирование дифференциальных уравнений второго порядка.
27. Интегрирование линейных обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка с постоянными коэффициентами.
28. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка.
29. Линейные неоднородные дифференциальные уравнения второго порядка со специальной правой частью.
30. Числовые ряды.

### Самостоятельная работа студентов

#### Вопросы и упражнения

**Раздел 4.** Определенный интеграл как предел интегральной суммы. Основные свойства определенного интеграла. Производная интеграла по переменному верхнему пределу. Формула

Ньютона-Лейбница. Вычисление определенного интеграла: интегрирование по частям и подстановкой. Приближенное вычисление определенного интеграла: формулы прямоугольников, трапеций и Симпсона. Несобственные интегралы. Использование понятия определенного интеграла в экономике.

**Раздел 5.** Числовые ряды. Сходимость и сумма ряда. Необходимое условие сходимости. Действия со сходящимися рядами. Числовые ряды с положительными членами. Достаточные признаки. Условные сходимости математические: сравнения, Даламбера, радикальный признак Коши, интегральный признак Коши. Знакопеременные ряды. Абсолютная и условная сходимости. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.

Функциональные ряды. Область сходимости. Понятие равномерной сходимости. Теорема сходимости Чебышева. Теорема Вейерштрасса. Свойства равномерно сходящихся рядов. Степенные ряды. Теорема Абеля. Радиус сходимости. Основные свойства степенных рядов. Разложение функций в степенные ряды. Ряд Тейлора и Маклорена. Применение степенных рядов к приближенным вычислениям.

**Раздел 6.** Основные понятия. Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными. Однородные дифференциальные уравнения первого порядка. Линейные дифференциальные уравнения первого порядка. Дифференциальные уравнения, допускающие понижение порядка. Линейные дифференциальные уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами. Использование дифференциальных уравнений в экономической динамике.

### Упражнение 1

31–40. Применяя метод Гаусса исключения неизвестных, решить систему линейных уравнений. Сделать проверку найденного решения.

$$31. \begin{cases} 4x_1 + 2x_2 - x_3 - 3x_4 = 11, \\ x_1 - 6x_3 + 9x_4 = -8, \\ 3x_1 + 4x_2 - 3x_3 + x_4 = 10, \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 - 2x_4 = 0. \end{cases}$$

$$32. \begin{cases} 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 2x_4 = -11, \\ 4x_1 - 2x_2 + x_3 - 7x_4 = -8, \\ x_1 + 4x_2 + 3x_3 - 5x_4 = 8, \\ x_2 + 6x_3 + 5x_4 = 13. \end{cases}$$

$$33. \begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 8, \\ -2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 7, \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 - x_4 = -3, \\ 5x_1 + 6x_2 + 2x_3 - x_4 = 1. \end{cases}$$

$$34. \begin{cases} 3x_1 + x_2 - x_4 = 0, \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 2x_4 = 10, \\ x_1 + 4x_2 - 2x_3 + x_4 = -3, \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 = 6. \end{cases}$$

$$35. \begin{cases} x_1 + 5x_2 - 3x_3 - 2x_4 = 12, \\ 4x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 = 2, \\ 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = -18, \\ x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 = -10. \end{cases}$$

$$36. \begin{cases} 2x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 = -3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 11, \\ 3x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = -2, \\ 5x_1 + 3x_2 + 6x_3 - 2x_4 = -5. \end{cases}$$

$$37. \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 5x_3 + 3x_4 = 1, \\ 5x_1 - 9x_3 - 5x_4 = -9, \\ 6x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 10, \\ x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = -4. \end{cases}$$

$$38. \begin{cases} 4x_1 + 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 18, \\ 3x_1 + 2x_2 - 3x_3 + 2x_4 = 15, \\ x_1 + 7x_2 - 6x_3 + 4x_4 = 13, \\ x_1 + x_2 + 3x_3 - 3x_4 = 5. \end{cases}$$

$$39. \begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = -4, \\ 3x_1 + x_2 - 7x_3 + x_4 = -27, \\ -2x_1 - x_2 + x_3 - 5x_4 = 0, \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 10. \end{cases}$$

$$40. \begin{cases} 3x_1 - 2x_2 + x_3 + x_4 = -8, \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = -11, \\ -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ 2x_1 - x_2 + 6x_3 - 3x_4 = 9. \end{cases}$$

### Упражнение 2

41–50. Найти:

$$41. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{14x^2 - 3}{3x^2 + x + 4},$$

$$\text{ б) } \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^3 + 1}{x^2 + 8x + 7},$$

$$\text{ в) } \lim_{x \rightarrow 4} \frac{2x^2 - 9x + 4}{\sqrt{5-x} - \sqrt{x-3}}.$$

$$42. \text{ а) } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1-x^2}{3x^2 + x + 1},$$

$$\text{ б) } \lim_{x \rightarrow -2} \frac{3x^2 + 11x + 10}{2x^2 + 5x + 2},$$

$$\text{ в) } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{5x}.$$



43. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{8x^4 - x^3 + 2}{6x^4 - 2x^2 + 3}$ ,	б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^3 + 8}{x^2 - x - 6}$ ,	в) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{\sqrt{x} - 2}{3x^2 - 11x - 4}$ .
44. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + x - 4x^3}{1 + x^2 + 8x^3}$ ,	б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^2 + 2x - 3}$ ,	в) $\lim_{x \rightarrow -4} \frac{4 + x}{\sqrt{1 - 6x} - 5}$ .
45. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 3x - x^2}{4x^2 + 3x - 1}$ ,	б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2 + x - 2}$ ,	в) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 2x - 3}{\sqrt{2x + 1} - \sqrt{x + 4}}$ .
46. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - x + 5x^3}{2 + x^2 + x^3}$ ,	б) $\lim_{x \rightarrow -3} \frac{4x^2 + 13x + 3}{x^2 + x - 6}$ ,	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3 - \sqrt{x + 9}}{\sqrt{x + 1} - 1}$ .
47. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 + 4x - 3}{5x^2 + 3x + 4}$ ,	б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$ ,	в) $\lim_{x \rightarrow 5} \frac{\sqrt{x - 1} - 2}{x - 5}$ .
48. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{7x^2 - 4x + 2}{3 - 2x + 5x^2}$ ,	б) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - x}$ ,	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x + 1} - 1}{2x}$ .
49. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - x + 1}{7x^2 + x - 2}$ ,	б) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 2x}{x^2 - 4x + 4}$ ,	в) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x + 8} - 3}{3x - 3}$ .
50. а) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4 - 7x^2}{3x^2 - 4x + 5}$ ,	б) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2 + x - 2}{4 - x^2}$ ,	в) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{\sqrt{x^2 + 16} - 4}$ .

### Упражнение 3

51-60. Задана функция  $y = f(x)$ . Найти все точки разрыва функции, если они существуют. Построить график функции.

51. $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 1, \\ x^2, & 1 \leq x \leq 2, \\ 3x - 2, & x > 2. \end{cases}$	52. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^2, & x < 1, \\ x + 1, & 1 \leq x \leq 0, \\ 1 - x, & x > 0. \end{cases}$	53. $f(x) = \begin{cases} x - 1, & x < 0, \\ x^2 - 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 1 - x, & x > 1. \end{cases}$
54. $f(x) = \begin{cases} 1 - 2x, & x < -1, \\ x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{2}{x}, & x > 1. \end{cases}$	55. $f(x) = \begin{cases} x^2, & x < -1, \\ x + 2, & -1 \leq x \leq 1, \\ 2x, & x > 1. \end{cases}$	56. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}, & x < -1, \\ -x, & -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{2}{x}, & x > 1. \end{cases}$
57. $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x < 0, \\ -x + 2, & 0 \leq x \leq 2, \\ x, & x > 2. \end{cases}$	58. $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & x < 0, \\ 1 - 2x, & 0 \leq x \leq 2, \\ x - 2, & x > 2. \end{cases}$	59. $f(x) = \begin{cases} 1 - x, & x < 1, \\ 2x, & 1 \leq x \leq 2, \\ 8 - x^2, & x > 2. \end{cases}$
60. $f(x) = \begin{cases} x + 1, & x < -1 \\ x^2 - 1, & -1 \leq x \leq 2, \\ 2x, & x > 2. \end{cases}$		

Самостоятельная работа студента состоит в выполнении заданий типового расчета, оформляемого отдельным отчетом и защищаемого студентом. Методические указания и задания можно найти по ссылке: <http://e.lib.vlsu.ru/bitstream/123456789/6570/1/00707.pdf>.

Фонд оценочных средств для проведения аттестации уровня сформированности компетенций обучающихся по дисциплине оформляется отдельным документом.

## 7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

### 7.1. Книгообеспеченность

Наименование литературы: автор, название, вид издания, издательство	Год издания	КНИГООБЕСПЕЧЕННОСТЬ	
		Количество экземпляров изданий в библиотеке ВлГУ в соответствии с ФГОС ВО	Наличие в электронной библиотеке ВлГУ
1	2	3	4
Основная литература			
1. Краткий курс высшей математики [Электронный ресурс] / Балдин К.В. - М. : Дашков и К. - 512 с. - ISBN 978-5-394-02103-9.	2018		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785394021039.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785394021039.html</a>
2. Высшая математика в вопросах и ответах [Электронный ресурс] : учеб.пособие / Л.В. Крицков, под ред. В.А. Ильина. - М. : Проспект - 176 с. - ISBN 978-5-392-14372-6.	2016		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785392143726.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785392143726.html</a>
3. Высшая математика. Руководство к решению задач. Т. 1 [Электронный ресурс] / Лунгу К.Н., Макаров Е.В - М. : ФИЗМАТЛИТ - 216 с. - ISBN 978-5-9221-1500-1.	2018		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922115001.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922115001.html</a>
Дополнительная литература			
1. Высшая математика. Руководство к решению задач. Ч. 2. [Электронный ресурс] / Лунгу К. Н., Макаров Е. В. - М. : ФИЗМАТЛИТ - 384 с. - ISBN 978-5-9221-0756-3.	2018		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922107563.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785922107563.html</a>
2. Высшая математика [Электронный ресурс] / С.Н. Дорофеев. - М. : Мир и образование, - 592 с.: ил. - (Полный конспект лекций). - ISBN 978-5-94666-622-0.	2016		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785946666220.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785946666220.html</a>
3. Высшая математика. Краткий курс [Электронный ресурс]: учеб.пособие / Лакерник А.Р. - М. : Логос,- 528 с. - (Новая университетская библиотека). - ISBN 978-5-98704-523-7.	2018		<a href="http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785987045237.html">http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785987045237.html</a>

### 7.2. Периодические издания

1. Известия вузов. Математика
2. Математическое моделирование.
3. Дифференциальные уравнения.
4. Успехи математических наук.

### 7.3. Интернет-ресурсы

1. Образовательный математический сайт - <http://www.exponenta.ru/>
2. Математическая энциклопедия - <http://allmath.com/>
3. Образовательные ресурсы – [window.edu.ru/](http://window.edu.ru/)

## 8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ

Для реализации данной дисциплины имеются специальные помещения для проведения занятий лекционного и практического типа. Практические работы проводятся в лаборатории численных методов (405-3).

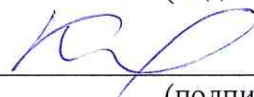
Перечень используемого лицензионного программного обеспечения:

1. Microsoft Excel
2. Maple
3. MATLAB


Рабочую программу составил:  
д.ф.-м.н., профессор Малафеева А.А.

  
\_\_\_\_\_  
(подпись)

Рецензент (представитель работодателя):  
зам. директора по развитию ООО «Баланс» Кожин А. В.

  
\_\_\_\_\_  
(подпись)

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры ФАиП  
Протокол № 1а от 26.08.2019 года  
Заведующий кафедрой: к.ф.-м.н., доцент Бурков В. Д.

  
\_\_\_\_\_  
(подпись)

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления  
38.03.01 «Экономика».

Протокол № 1 от 26.08.2019 года  
Председатель комиссии: д.э.н., профессор П.Н. Захаров

  
\_\_\_\_\_  
(подпись)

**ЛИСТ ПЕРЕУТВЕРЖДЕНИЯ  
РАБОЧЕЙ ПРОГРАММЫ ДИСЦИПЛИНЫ**

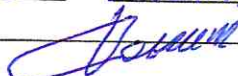
Рабочая программа одобрена на 2020/2021 учебный год  
Протокол заседания кафедры № 1 от 02.09.2020 года  
Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_



Рабочая программа одобрена на 2021/2022 учебный год  
Протокол заседания кафедры № 1 от 30.08.2021 года  
Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_



Рабочая программа одобрена на 2022/2023 учебный год  
Протокол заседания кафедры № 10 от 24.06.2022 года  
Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_



Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год  
Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года  
Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год  
Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года  
Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_

Рабочая программа одобрена на \_\_\_\_\_ учебный год  
Протокол заседания кафедры № \_\_\_\_\_ от \_\_\_\_\_ года  
Заведующий кафедрой \_\_\_\_\_