

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)
Институт прикладной математики и информатики био- и нанотехнологий
Кафедра физики и прикладной математики

Прохоров Алексей Валерьевич
Аракелян Сергей Мартиросович

Интегрированные технологии и оптика локализованных структур

Методические указания для самостоятельной работы студентов

Направление 200500.62 «Лазерная техника и лазерные технологии»

(шифр направления, название)

Владимир-2014 г.

| | |
|---|----|
| ВВЕДЕНИЕ | 3 |
| Тема 1. Уравнение Гинзбурга-Ландау пятого порядка | 9 |
| Тема 2. Область существования устойчивых импульсов | 11 |
| Тема 3 Редукция к системе обыкновенных дифференциальных уравнений | 17 |
| Тема 4. Модель и формализм описания атомно-оптических взаимодействий в оптически-плотных средах | 19 |
| Тема 5. Основное управляющее уравнение для атомно-оптических взаимодействий | 22 |
| Список литературы | 28 |

ВВЕДЕНИЕ

В рамках самостоятельной работы по дисциплине «Интегрированные технологии и оптика локализованных структур» студент должен более глубоко по сравнению с основным теоретическим курсом изучить вопросы физики локализованных оптических структур и способов их моделирования.

В настоящих методических указаниях приведены основные материалы для самостоятельного освоения. Контроль их освоения осуществляется прежде всего в ходе защиты курсовой работы по дисциплине.

Помимо изучения изложенного ниже материала, предполагается знакомство с дополнительными источниками, приведёнными в списке литературы, что также позволит более успешно справиться с практическим заданием, выдаваемым для курсового проектирования.

Концепция диссипативных солитонов – фундаментальное расширение теорий солитонов в консервативных и интегрируемых системах. Она состоит из трех частей, то есть стандартная теория солитонов, развиваемая с 1960-ых годов, следствия из нелинейной теории динамики и работы Пригожина относительно систем, далеких от равновесия и самоорганизации (см. рис. 1.1). Это основные три источника и три составляющих компоненты этой новой парадигмы. Физически говоря, главная часть стандартной теории солитонов связана с балансом между дисперсией и нелинейностью, которая позволяет существовать стационарным ограниченными решениям. Для диссипативных систем, нужно заметить, что важный баланс - между усилением и потерями – это условие необходимо для того, чтобы солитоны были постоянными образованиями. Даже малейшая разбалансировка приведет к решению, или бесконечно увеличивающемуся, если будет преобладать усиление, или полностью исчезающему из-за потерь. Таким образом, вместо одного баланса,

мы должны рассмотреть сложный баланс между несколькими физическими явлениями.

Вторая часть концепции диссипативных солитонов – нелинейная динамика – говорит нам о том, что солитон надо рассматривать как неподвижную точку бесконечномерной динамической системы. Свойства стабильности неподвижных точек непосредственно определяют стабильность солитона. Неподвижные точки могут быть преобразованы в предельные циклы при определенных значениях параметров системы, и затем, солитон становится пульсирующим образованием. Дальнейшие преобразования могут включать нерегулярное поведение траектории, таким образом, создавая хаотические солитоны. Поэтому, нелинейная динамика говорит нам о том, что возможны бифуркации солитона и хаотическая эволюция солитонов. Так как мы рассматриваем бесконечномерные динамические системы, есть огромное разнообразие типов солитонов и их бифуркаций.



Рис.1.1. Три источника и три составляющих концепции диссипативных солитонов

Наконец, третья часть концепции – теория систем, далеких от равновесия – говорит нам о том, что солитоны являются самоорганизованными формированиями, требующими непрерывной поставки энергии. Как только эта поставка заканчивается, диссипативный солитон прекращает существовать. Говоря простым

языком, самоорганизация - конвергенция определенных начальных условий к локализованному решению системы, которое является устойчивым для данного набора внешних параметров. Таким образом, конечное состояние определяется согласно физическим законам, а не согласно начальному условию. Для бесконечномерных динамических систем, устойчивое решение может быть очень сложным. Это не обязательно гладкая функция с единственным максимумом и экспоненциально убывающими хвостами. Кроме того, может быть несколько устойчивых решений, существующих для одного набора параметров. Это может даже случиться в случае относительно простого уравнения, например, как комплексное уравнение Гинзбурга-Ландау пятого порядка. Большинство процессов в природе управляют намного более сложные динамические факторы. Таким образом, стационарные решения этих систем могут быть значительно более сложными.

С этой точки зрения, идея относительно самоорганизации позволяет нам расширять понятие диссипативных солитонов к высоко сложным объектам, таких как видов животных и формирования жизни непосредственно. То как далеко мы можем пойти в распространение наших принципов в этом направлении, зависит только от нашего воображения. Так же система может сходиться к решению не обязательно постоянному, а, например, к предельному циклу или странному аттрактору в бесконечномерном фазовом пространстве. Много биологических процессов, типа сердечных ударов и распространения нервного импульса были описаны, используя простое математическое моделирование.

Есть существенное различие между солитонами в гамильтоновых системах и в диссипативных. В гамильтоновых системах, решения для солитона появляются в результате баланса между дифракцией (или дисперсией) и нелинейностью. Дифракция расширяет луч, в то время как нелинейность фокусирует и делает его более узким. Баланс между этими двумя явлениями приводит к постоянным решениям. Они обычно образуют однопараметрическое семейство. В системах с усилением и потерями, чтобы иметь

постоянные решения, усиление и потери должны быть уравновешены. Два баланса приводят к решениям, которые постоянны. Форма, амплитуда и ширина являются постоянными и зависят от параметров уравнения. Этот случай представлен качественно на рис. 1.2. Для телекоммуникационных приложений, жесткость солитона может обеспечить эффективное подавление шума и остановить любое изменение параметров солитона.

Ясно, что стационарные диссипативные солитоны можно рассматривать как стационарные решения бесконечномерной динамической системы. Таким образом, их параметры зафиксированы. Эти формирования устойчивы при распространении, если параметры системы выбраны в соответствующих областях. Вообще, диссипативные солитоны не обязательно постоянны. Другими словами, стационарные решения не единственные объекты, которые могут существовать в таких системах. Например, предельный цикл - другой более сложный объект, который может существовать в фазовом пространстве динамической системы. Это соответствует пульсирующему солитону, где параметры изменяются периодически [13]. Эти солитоны обычно существуют в регионах пространства параметров, которые являются смежными с таковыми для стационарных солитонов. Однако, даже в этом случае, особенности солитона установлены, то есть, период пульсаций и форм в специфических пунктах периода весь установлен, так как они - функции параметров системы. Возможен вариант, при котором диссипативный солитон может быть хаотический [13]. Если солитон является хаотическим, то характеристики этого хаотического поведения также даются параметрами системы.



Рис. 1.2. Качественное различие между солитонными решениями в гамильтоновых и диссипативных системах

Другая простая качественная картина представлена на рис. 1.3. Чтобы быть стационарными, солитоны в диссипативных системах должны иметь области, где они получают энергию из внешнего источника, так же как и области, где энергия рассеивается в окружающую среду. Стационарный солитон - результат динамического процесса непрерывного обмена энергией с окружающей средой и его перераспределением между различными частями солитона. Как только это перераспределение энергии заканчивается, солитон исчезает. В этом смысле, диссипативный солитон больше походит на живое существо чем объект неодушевленного мира. Это как вид в биологии, который является фиксированным (или изолированным) по своим свойствам.

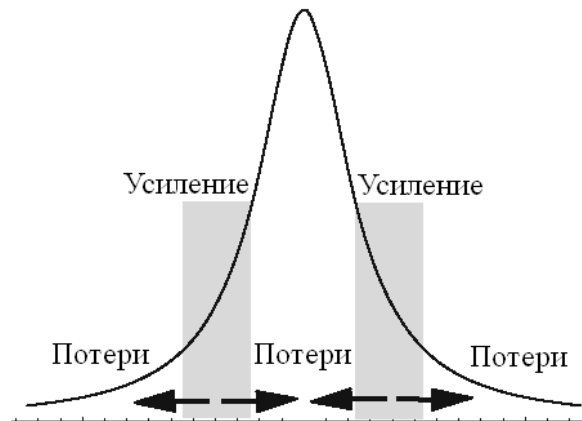


Рис. 1.3. Качественное описание солитонов в диссипативных системах

Таким образом, мы только что описали, хотя бы кратко, основные краеугольные камни мощного понятия диссипативного солитона, и показали их схематично на рис. 1.1, 1.2 и 1.3. Такие динамические системы имеют бесконечное число степеней свободы и, конечно, они могут иметь бесчисленное число решений для солитона с бесчисленным числом бифуркаций между ними. Как правило, эти системы неинтегрируемые, что означает, что точные решения в их полной сложности могут быть изучены только численным образом. Чтобы описывать особенности бифуркаций солитона аналитически, мы нуждаемся в приближениях и небольшом количестве методов, чтобы уменьшить размерность динамической системы. Эти методы могут помочь, до некоторой степени, в описании постоянных или пульсирующих солитонов и их бифуркаций по ограниченному диапазону параметров системы. Однако, они не могут использоваться как полная замена для строгих исследований решений. Только самые характерные особенности солитонов, наряду с отдельными бифуркациями, могут быть определены таким образом. Для полной картины, мы все еще нуждаемся в численном моделировании.

ТЕМА 1. УРАВНЕНИЕ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ ПЯТОГО ПОРЯДКА

В той форме, как оно используется в нелинейной оптике, уравнение Гинзбурга-Ландау (УГЛ) пятого порядка имеет вид

$$i\psi_\xi + \frac{D}{2}\psi_{\tau\tau} + |\psi|^2\psi = i\delta\psi + i\varepsilon|\psi|^2\psi + i\beta\psi_{\tau\tau} + i\mu|\psi|^4\psi - \nu|\psi|^4\psi, \quad (1.1)$$

где τ — "медленное" время, ξ — нормированная длина распространения, δ , β , ε , μ и ν — действительные постоянные (мы не требуем их малости), ψ — комплексное поле. В частном случае оптического волокна, который мы рассматривали выше, физический смысл этих величин следующий: ψ — комплексная огибающая электрического поля, δ — постоянная дополнительной линейной накачки на несущей частоте, β — коэффициент спектральной фильтрации ($\beta > 0$), ε описывает *нелинейные* процессы накачки или абсорбции, μ представляет собой постоянную при поправочном члене высшего порядка к нелинейному усилению/абсорбции, ν — коэффициент при квадратичной поправке к нелинейному показателю преломления, то есть нелинейность представляет собой квадратичную зависимость от интенсивности. Параметр D определяет знак дисперсионного члена: $D = +1$ соответствует аномальной дисперсии, а $D = -1$ — нормальной. Первый случай не нуждается в пояснениях, последний может относиться, например, к случаю распространения солитона в волоконном лазере на основе неодимового усилителя. Уравнение (1.1) записано таким образом, что если в правой части стоит нуль, то мы получаем обычное НУШ. С помощью этого уравнения можно описать и многие другие неравновесные процессы, как то: процессы в лазерах, конвекцию двухкомпонентной жидкости, процессы переноса фазы и др.

Если коэффициенты δ , β , ε , μ в правой части малы, а $\nu = 0$, то можно строить солитоноподобные решения уравнения (1.1), применяя к солитонным решениям НУШ теорию возмущений. Однако такой подход не может отразить все свойства солитоноподобных импульсов и дать все области их существования в пространстве пара-

метров. Важный шаг к полному пониманию свойств комплексного УГЛ — это построение точных решений. Они помогают предсказывать поведение решения при произвольных начальных условиях. Мы рассмотрим здесь УГЛ как третьего, так и пятого порядков, и для обоих случаев с помощью одной и той же процедуры построим солитонные решения.

Кубическое УГЛ хорошо изучено (напр., Хокинг и Стюартсон, 1972; Перейра и Стенфло, 1977; Нозаки и Бекки, 1984). Его локализованное решение общего вида при заданном наборе параметров имеет фиксированную амплитуду. Аккуратное исследование решений с фиксированной амплитудой показывает, что при определенных значениях параметров, соответствующих некоторой особой линии на плоскости (β, ε) , эти решения становятся сингулярными (Афанасьев, 1995).

Однако, хотя решений с фиксированной амплитудой здесь не существует, но возникает новый класс решений — класс *солитонов с произвольной амплитудой*.

Уравнение пятого порядка также рассматривалось в ряде публикаций методами численного моделирования, теории возмущений и аналитически. В случае субкритических бифуркаций ($\varepsilon > 0$) численно было показано существование солитоноподобных решений (Туал и Фаув, 1988; Бранд и Дейслер, 1989). Качественный анализ областей существования локализованных решений был выполнен в работе Хаким и др. (1990) для всей области существования коэффициентов от нуля до бесконечности. Аналитический подход, основанный на редукции уравнения (1.1) к динамической системе третьего порядка, был развит в работе Саарлоса и Хоенберга (1990, 1992). Он позволяет получить точные решения уравнения пятого порядка.

Наиболее полное математическое исследование точных решений УГЛ пятого порядка на основе Пенлеве-анализа и символьных вычислений выполнено в работе Марка и др. (1994). Общий подход, использованный авторами, состоит в сведении процедуры решения дифференциального уравнения к чисто алгебраической задаче. Множество решений, полученных на этом пути, включает в себя локали-

зованные решения, источники, стоки и фронты. Широкое разнообразие возможных типов решений требует отдельного тщательного анализа решений каждого класса. Это одна из причин, по которой мы сосредоточились здесь исключительно на локализованных решениях. Мы приводим здесь явный вид и классификацию всех решений этого ограниченного класса.

ТЕМА 2. ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ УСТОЙЧИВЫХ ИМПУЛЬСОВ

Устойчивые импульсы — наиболее интересные объекты оптики. Именно их генерируют лазерные системы, и именно они являются битами информации в оптических волоконных системах. Поэтому чрезвычайно важно знать, при каких физических характеристиках системы мы можем ожидать существования подобных устойчивых импульсов. Иными словами, необходимо знать те значения коэффициентов уравнения, при которых оно имеет устойчивые локализованные решения. Это должна быть такая область в пространстве параметров, где широкий класс начальных условий будет приводить к формированию стационарного импульса, представляющего собой устойчивое локализованное решение УГЛ пятого порядка.

О первом получении строго устойчивого локализованного решения впервые было сообщено в работе Туала и Фаува (1988). В пространстве параметров ими были найдены некоторые точки, где существуют устойчивые импульсы. Грубая оценка положения границы, разделяющей фронты и локализованные решения УГЛ, была сделана Хакимом с соавторами (1990). Однако, как мы видели, между этими классами нет четкой границы. Ван Саарлосом и Хоенбергом (1992) было найдено, что для некоторых значений параметров одновременно существует большое разнообразие фронтов и локализованных решений.

В этом разделе мы представляем численные результаты, полученные в работе Сото-Креспо и др. (1996), которые позволяют узнать значения коэффициентов (δ , β , ε , μ , ν) УГЛ пятого порядка (то

есть выделяют некоторую область в пространстве параметров), где существуют устойчивые импульсы.

Сформулируем сначала те ограничения, которые следует наложить на параметры при поиске устойчивых импульсов. Очевидно, что для стабилизации частоты солитона параметр β должен быть неотрицательным. Коэффициент линейной накачки δ должен быть нулевым или отрицательным, чтобы обеспечить устойчивость фона. В этом случае для $\mu = 0$ устойчивые импульсы могут существовать только при ε , лежащих выше кривой S . Чтобы предотвратить коллапс импульса, следует выбрать $\mu < 0$. Параметр ν может иметь любой знак.

Численно выйти на устойчивый импульс при решении уравнения (1.1) можно, взяв в качестве начальных условий гауссиан произвольной амплитуды и ширины (Сото-Креспо и др., 1996). Форма начального импульса не так уж важна. Если решение сходится к какому-то стационарному, его можно рассматривать как устойчивое решение, а набор параметров, при которых проводился расчет, можно считать принадлежащим области существования такого солитонного решения.

На рис. 1.4 представлены три примера солитонных решений, найденных таким методом. Соответствующие значения коэффициентов следующие: $\beta = 0.5$, $\delta = \nu = \mu = -0.1$ при ε равном 0.38 (сплошная кривая), 0.52 (точечная кривая) и 0.66 (пунктирная кривая). Систематически повторяя такие вычисления для других наборов параметров, в полном пространстве параметров можно построить области, где возможно устойчивое распространение импульсов.

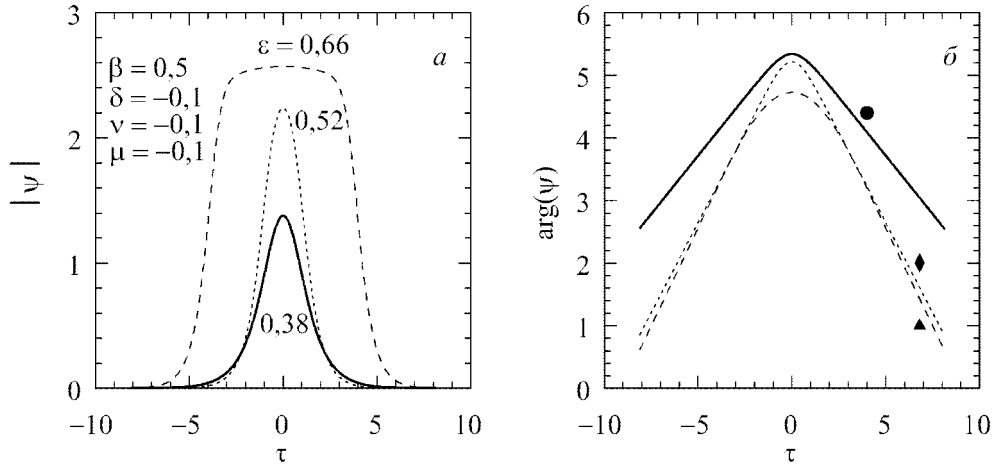


Рис. 1.4. Солитонные решения, найденные численно для ($\beta = 0.5$, $\delta = \nu = \mu = -0.1$ при ε равном 0.38 (сплошная кривая), 0.52 (точечная кривая) и 0.66 (пунктир), (а) — амплитуда ψ — фаза $\arg(\psi)$. Кругок, ромб и треугольник, с помощью которых соответственно помечены случаи $\varepsilon = 0.38, 0.52, 0.66$, будут использованы на последующих рисунках для обозначения местоположения этих решений в пространстве параметров

Области (β, ε) -плоскости, где численно были найдены солитонные решения, представлены на рис. 1.5. Разная штриховка областей соответствует разным значениям параметра μ . Нижняя кривая (нанесенная пунктиром) — это кривая S. Она показана для того, чтобы провести некоторые сравнения с выводами, сделанными на основе аналитических решений. Прежде всего, заметим, что области существования устойчивых импульсов расположены всегда выше кривой S, а нижняя граница области устойчивости (сплошная кривая) почти "параллельна" кривой S. Расстояние между кривой S и нижней границей области устойчивости зависит от параметров δ , μ и ν . Для малых δ , μ и ν это расстояние мало. При фиксированных ν и δ с ростом $|\mu|$ заштрихованная область становится шире, но нижняя граница при этом поднимается выше. При δ стремящемся к нулю и фиксированных μ и ν нижняя граница приближается к S. Мы будем счи-

тять далее, что при нулевом S область неустойчивости ограничена кривой S .

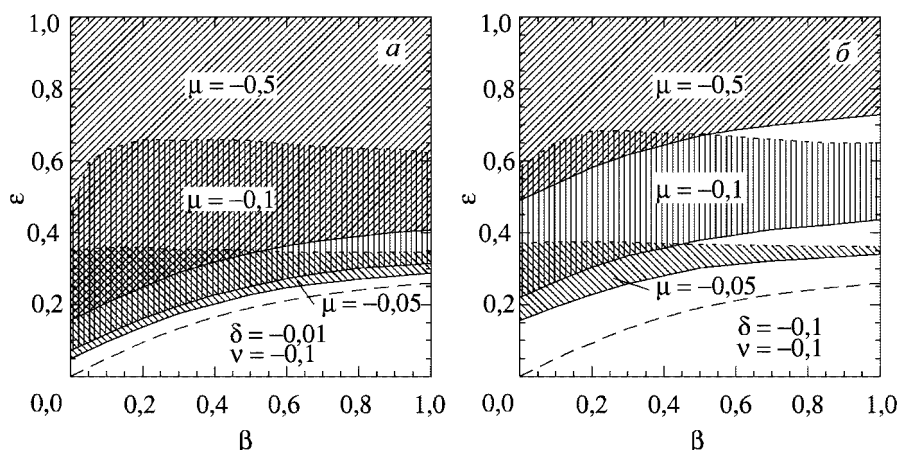


Рис. 1.5. Области устойчивых локализованных решений на плоскости (β, ε) . Области с разным значением параметра μ по-разному заштрихованы. Все области расположены выше кривой S (пунктирная кривая). При этом $\nu = -0.1$ и (а) $\delta = -0.01$, (б) $\delta = -0.1$

Рисунок 1.5 представляет приблизительную схему того, как изменяется область существования устойчивых импульсов на плоскости (β, ε) с изменением μ и δ . В стационарных импульсах накачка и диссипация должны быть уравновешены. Для тех систем, параметры которых лежат ниже границы заштрихованных областей, импульсы при распространении затухают. Поток энергии, подпитывающий первоначальный импульс благодаря положительному β , меньше, чем обратный поток, вызванный линейными ($\beta < 0$, $\delta > 0$) и нелинейными ($\mu < 0$) потерями. На верхней границе протекают другие процессы. В общем случае верхняя граница на (β, ε) -диаграмме совпадает с кривой, на которой фронты имеют нулевую скорость. Выше этой кривой два фронта широкого импульса расходятся, ниже — сходятся, образуя в итоге устойчивый импульс. Таким образом, устойчивые импульсы существуют лишь ниже этой линии.

Теперь рассмотрим другие плоские сечения тех областей пространства параметров, где найдены устойчивые локализованные ре-

шения. На рис. 1.6а показаны области существования устойчивых импульсов на плоскости (ν, ε) при фиксированных μ , δ и β , конкретные значения которых указаны на рисунке. Видно, что ширина полосы устойчивости с ростом ν быстро растет. Пунктиром на рис. 1.6 показана линия, на которой при тех же параметрах существуют точные аналитические решения. Довольно интересно, что эта линия тоже почти параллельна верхней границе области устойчивых импульсов, но смещена от нее на некоторое расстояние. Это означает, что при значении параметров между этими линиями аналитические решения неустойчивы.

На рис. 1.6б показана область устойчивых импульсов на плоскости (μ, ε) при фиксированных значениях параметров ν , δ и β . С ростом $|\mu|$ интервал допустимых значений параметра ε расширяется, а значение ε в центре этого интервала возрастает. Это последнее наблюдение, кроме всего прочего, указывает на то, что возрастание нелинейных потерь пятого порядка должно компенсироваться ростом накачки третьего порядка. При $\mu \approx -0.04$ ширина полосы становится исчезающе малой. Пунктиром нанесена линия, в каждой точке которой для данных значений $(\delta, \nu, \beta) = (-0.1, -0.1, 0.5)$ существуют точные аналитические решения. Видно, что они тоже не попадают в область устойчивых импульсов. Однако в этом случае расстояние между областью устойчивых импульсов и пунктирной линией с ростом μ возрастает, а при $\mu \rightarrow -0.04$ устремляется к нулю. Инкремент нарастания неустойчивости соответствующих аналитических решений для этих значений μ становится пренебрежимо малым.

А как зависит область существования устойчивых импульсов от величины δ ? Эта зависимость для фиксированных μ , ν и β показана на рис. 1.7. Для расчета были взяты следующие значения параметров: $\nu = \mu = -0.01$, $\beta = -0.5$. Видно, что с падением коэффициента линейной накачки интервал допустимых значений ε растет, причем с ростом $|\delta|$ среднее значение ε увеличивается. Это значит, что большие линейные потери должны быть скомпенсированы ростом нелинейной

накачки третьего порядка (если остальные параметры постоянны). При заданных выше значениях параметров μ , ν и β значение для ε равно единице, которое лежит выше заштрихованной области.

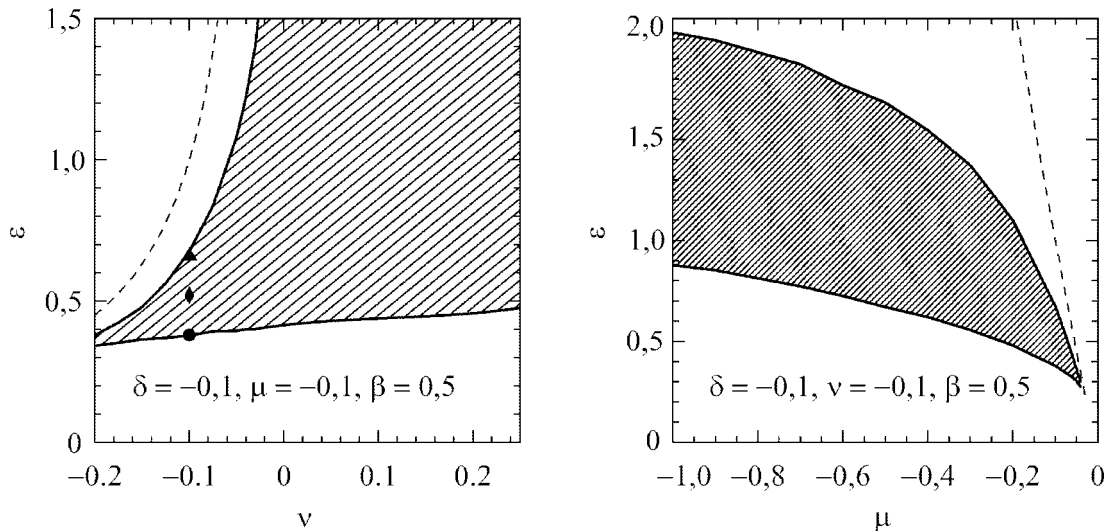


Рис. 1.6. Область устойчивых импульсов на плоскостях (ν, ε) (слева) и (μ, ε) (справа). Здесь $\beta = 0.5$ и $\delta = -0.1$. Пунктиром нанесена линия, где существуют аналитические решения. Условными символами (кружок, ромб и треугольник) показано положение решений, изображенных на рис. 1.4.

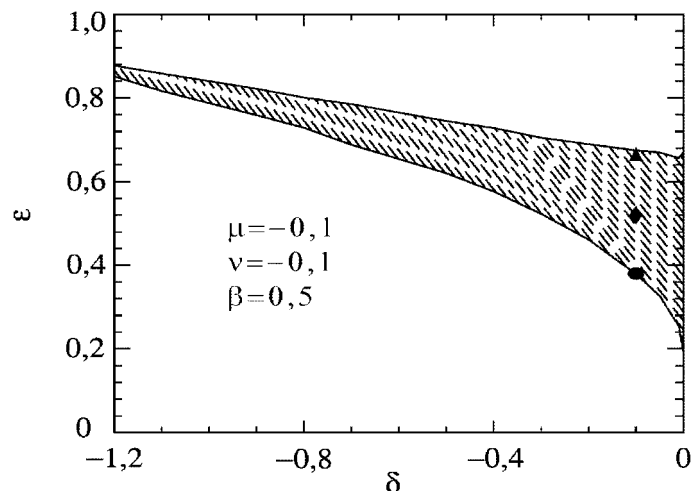


Рис. 1.7. Область устойчивых импульсов на плоскости (δ, ε) . Здесь $\beta = 0.5$ и $\nu = \mu = -0.1$. Аналитическое решение для этих параметров существует при $\varepsilon = 1$. Три значка — кружок, ромбик и треугольник — показывают положение решений, представленных на рис. 1.4

ТЕМА 3 РЕДУКЦИЯ К СИСТЕМЕ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Аналитические решения УГЛ можно найти лишь для определенных комбинаций параметров. Одним из способов отыскания стационарных решений уравнения является сведение его к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Итак, ищем решения в виде

$$\psi = a(t) \text{Exp}[i\phi(t) - i\omega\xi], \quad (1.2)$$

где a и ϕ — действительные функции аргумента $t = \tau - v\xi$, v — скорость импульса, а ω — нелинейный сдвиг постоянной распространения. Подставляя (1.2) в (1.1), мы получаем уравнение, связывающее функции a и ϕ . Разделив в уравнении действительную и мнимую части, приходим к следующей системе двух обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \left(\omega - \frac{1}{2} D\phi'^2 + \beta\phi'' + v\phi' \right) a + 2\beta\phi'a' + 2\beta\phi'a' + \frac{1}{2} Da'' + a^3 + va^5 = 0, \\ \left(-\delta + \beta\phi' + \frac{1}{2} D\phi'' \right) a + (D\phi' - v)a' - \beta a'' - \varepsilon a^3 - \mu a^5 = 0, \end{cases} \quad (1.3)$$

где каждый штрих означает дифференцирование по t . Систему можно преобразовать к виду

$$\begin{cases} \omega a + v \frac{M}{a} - \frac{DM^2}{2a^3} + \frac{\beta M'}{a} + \frac{1}{2} Da'' + a^3 + va^5 = 0, \\ -\delta a - va' + \beta \frac{\beta M'}{a^3} + \frac{DM'}{2a} - \beta a'' - \varepsilon a^3 - \mu a^5 = 0, \end{cases}$$

где $M = a^2\phi'$.

Разделяя переменные, получим

$$\begin{aligned}
M' &= \frac{2(D\delta - 2\beta\omega)}{1+4\beta^2} a^2 + \frac{2(D\varepsilon - 2\beta)}{1+4\beta^2} a^4 + \frac{2(D\mu - 2\beta\nu)}{1+4\beta^2} a^6 - \\
&\quad - \frac{4\beta\nu}{1+4\beta^2} M + \frac{2D\nu}{1+4\beta^2} ay, \\
y' &= \frac{M^2}{a^3} - \frac{2(D\omega + 2\beta\delta)}{1+4\beta^2} a - \frac{2(D + 2\beta\varepsilon)}{1+4\beta^2} a^3 - \frac{2(D\nu + 2\beta\mu)}{1+4\beta^2} a^5 - \\
&\quad - \frac{4\beta\nu}{1+4\beta^2} y - \frac{2D\nu}{1+4\beta^2} \frac{M}{a}, \\
a' &= y. \tag{1.4}
\end{aligned}$$

Эта система содержит все стационарные и трансляционные решения. Параметры ν и ω являются собственными значениями системы (1.4). На плоскости (M, a) локализованные решения имеют вид замкнутых кривых, начинающихся и заканчивающихся в начале координат.

Если нас интересуют только неподвижные решения ($\nu = 0$), то систему (1.4) можно упростить:

$$\begin{aligned}
M' &= \frac{2(D\delta - 2\beta\omega)}{1+4\beta^2} a + \frac{2(D\varepsilon - 2\beta)}{1+4\beta^2} a^4 + \frac{2(D\mu - 2\beta\nu)}{1+4\beta^2} a^6 + \frac{2D\nu}{1+4\beta^2} ay, \\
y' &= \frac{M^2}{a^3} - \frac{2(D\omega + 2\beta\delta)}{1+4\beta^2} a - \frac{2(D + 2\beta\varepsilon)}{1+4\beta^2} a^3 - \frac{2(D\nu + 2\beta\mu)}{1+4\beta^2} a^5, \\
a' &= y.
\end{aligned}$$

Эту систему обыкновенных дифференциальных уравнений можно решить численно. Для малых a асимптотическое поведение ее решений задается формулами

$$\begin{aligned}
M &= \frac{D\delta - 2\beta\omega}{g(1+4\beta^2)} a_0^2 \text{Exp}(2g\tau), \\
a &= a_0 \text{Exp}(g\tau),
\end{aligned}$$

где постоянная g может быть получена из следующего биквадратного уравнения:

$$g^4 + \frac{2(D\omega + 2\beta\delta)}{1 + 4\beta^2} g^2 - \frac{(D\delta - 2\beta\omega)^2}{(1 + 4\beta^2)^2} = 0.$$

Именно:

$$g^2 = \pm \sqrt{\frac{\omega^2 + \delta^2}{1 + 4\beta^2}} g^2 - \frac{D\omega + 2\beta\delta}{1 + 4\beta^2} = 0.$$

Используя асимптотические выражения, центральную часть локализованного решения можно найти методом стрельбы, как это было сделано в приведенных ниже примерах.

ТЕМА 4. МОДЕЛЬ И ФОРМАЛИЗМ ОПИСАНИЯ АТОМНО-ОПТИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ В ОПТИЧЕСКИ-ПЛОТНЫХ СРЕДАХ

Рассмотрим ансамбль N материальных частиц-излучателей A и бесконечного набора мод квантованного электромагнитного поля F . При этом будем считать, что частицы A (далее двухуровневые атомы) неподвижны и взаимодействуют друг с другом только через поле F . Гамильтониан такой системы в общем виде запишется как

$$H = H_0 + V,$$

$$H_0 = \sum_A H_A + \sum_F H_F, V = \sum_A \sum_F V_{AF},$$

где H_A и H_F - операторы Гамильтона свободных частиц и V_{AF} - оператор их взаимодействия. Эволюция и все свойства многочастичной системы описываются полным оператором плотности $\rho(t)$, который подчиняется уравнению фон Неймана:

$$i\hbar \frac{d}{dt} \rho - [H, \rho] = 0. \quad (1.5)$$

Для определения характеристик атома и поля потребуется нахождения решения для редуцированных одночастичных матриц плотности ρ_A и ρ_F . Редуцирование определяется как взятие следа по неполному числу частиц системы. Такие укороченные матрицы плотности нормируются таким образом, что свертка по их частицам равна единице. В начальный момент времени $t = 0$ предполагается, что атомы и поле не взаимодействуют и полная матрица плотности системы $\rho(0)$ может быть факторизована, что используется для задания начальных условий $\rho_A(0)$ и $\rho_F(0)$. Уравнение фон Неймана идентично цепочке Боголюбова-Борна-Грина-Кирквуда-Ивона (ББГКИ) для редуцированных матриц плотности и корреляционных операторов [15]. Путем последовательного взятия частичных свертки и использования следующего общего определения корреляций

$$\begin{aligned} \rho_{AF} &= \rho_A \rho_F + g_{AF}, \\ \rho_{AFF'} &= \rho_A \rho_F \rho_{F'} + g_{AF} \rho_{F'} + g_{FF'} \rho_A + g_{AFF'}. \end{aligned}$$

уравнение (1.5) заменяется бесконечной цепочкой кинетических уравнений. Первые два типа уравнений описывают эволюцию одночастичных матриц:

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{d}{dt} \rho_A - [\bar{H}_A, \rho_A] &= \sum_F Tr_F [V_{AF}, g_{AF}], \\ i\hbar \frac{d}{dt} \rho_F - [\bar{H}_F, \rho_F] &= \sum_A Tr_A [V_{AF}, g_{AF}]. \end{aligned}$$

Здесь введены эффективные операторы Гамильтона

$$\bar{H}_A = H_A + \sum_F \langle V_{AF} \rangle_F,$$

$$\bar{H}_F = H_F + \sum_A \langle V_{AF} \rangle_A,$$

в которых под суммами учитываются потенциалы «самосогласованных полей». Символом $\langle \dots \rangle_S$ обозначается усреднение по частицам вида S , то есть $\langle \hat{X} \rangle_S = Tr_S \langle \hat{X} \rho_S \rangle$. Связь одной частицы с системой также выражена в правых частях уравнений через оператор корреляции атом-поле, который в свою очередь подчиняется уравнению

$$i\hbar \frac{d}{dt} g_{AF} - [\bar{H}_A + \bar{H}_F, g_{AF}] = I_{AF} + L_{AF} + \Pi_{AF} + C_{ABF'}, \quad (1.6)$$

где

$$I_{AF} = [\bar{V}_{AF}, \rho_A \rho_F],$$

$$L_{AF} = [V_{AF}, g_{AF}] - \rho_A Tr_A [V_{AF}, g_{AF}],$$

$$\Pi_{AF} = \sum_{F \neq F'} Tr_{F'} [V_{AF'}, \rho_A g_{FF'}] + \sum_{A \neq A'} Tr_{A'} [V_{A'F}, g_{AA'F}],$$

$$C_{AS'F} = \sum_{F \neq F'} Tr_{F'} [V_{AF'}, g_{AFF'}] + \sum_{A \neq A'} Tr_{A'} [V_{A'F}, g_{AA'F}],$$

и введен эффективный оператор взаимодействия, учитывающий самосогласованные поля:

$$\bar{V}_{AF} = V_{AF} - \langle V_{AF} \rangle_F - \langle V_{AF} \rangle_A.$$

Штрихованные индексы обозначают разные частицы одного сорта. Уже на этом тапе цепочка может быть оборвана с целью получения замкнутой системы уравнений, учитывающей коллективные эффекты. В рассматриваемом случае малым параметром, по которому эта операция может быть осуществлена, является константа связи атома с полевой модой в операторе V_{AF} . Приближение

$L_{AF} = \Pi_{AF} = C_{ASF}' = 0$ обеспечивает замкнутость системы уравнений и позволяет получить независимое управляющее уравнение для матрицы плотности атома, учитывающее радиационное затухание и атомные переходы, индуцируемые некогерентным полем. Однако, как будет показано ниже, для решения спектроскопической задачи требуется вычисление корреляционного оператора также с учетом релаксации. Для этого приближение должно быть расширено частичным учетом корреляции g_{AFF}' , то есть $C_{ASF}' = C_{ASF}' \neq 0$. Тогда (1.6) запишется как

$$i\hbar \frac{d}{dt} g_{AF} - [\bar{H}_A + \bar{H}_F, g_{AF}] = [\bar{V}_{AF}, \rho_A \rho_F] + \sum_{F' \neq F} Tr_{F'} [V_{AF'}, g_{AFF}'].$$

Трехчастичная корреляция будет находиться из приближенного уравнения

$$i\hbar \frac{d}{dt} g_{AFF}' - [\bar{H}_A + \bar{H}_F + \bar{H}_{F'}, g_{AF}] = [\bar{V}_{AF'}, \rho_F g_{AF}].$$

Эта замкнутая система будет основой для построения теории на данном этапе. Следует отметить, что для корректного учета радиационных поправок для характерных констант необходимо полностью учитывать Π_{AF} и C_{ASF}' . При этом количество уравнений в системе увеличится за счет учета корреляций между частицами одного сорта. Система, используемая для решения текущей задачи, аналогична обобщенному борновскому приближения второго рода [15].

ТЕМА 5. ОСНОВНОЕ УПРАВЛЯЮЩЕЕ УРАВНЕНИЕ ДЛЯ АТОМНО-ОПТИЧЕСКИХ ВЗАИМОДЕЙСТВИЙ

Для набора двухуровневых атомов и поля операторы Гамильтона свободных частиц запишутся

$$H_A = \hbar \omega_A \sigma_z,$$

$$H_F = \hbar\omega_k \hat{a}_{k,s}^+ \hat{a}_{k,s},$$

где ω_A – частота атомного перехода и σ_z – атомный оператор инверсии, $\hat{a}_{k,s}^+$ и $\hat{a}_{k,s}$ соответственно операторы рождения и уничтожения полевой моды частоты ω_k и волновым вектором k $k = \omega_k / c$. Взаимодействие будет рассматриваться в пределе электрического дипольного приближения

$$V_{AF} = -\mathbf{d}_A \cdot \mathbf{E}_{k,s}(\mathbf{r}_A),$$

где

$$\mathbf{d}_A = d(\sigma^- + \sigma^+) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_A),$$

есть оператор дипольного момента перехода атома в точке \mathbf{r}_A с понижающим и повышающим σ^- и $\beta\sigma^+$. В операторе электрического поля

$$\hat{E}_{k,s}(\mathbf{r}) = i\sqrt{\frac{2\pi\hbar\omega_k}{V}} \boldsymbol{\varepsilon}_{k,s} \hat{a}_{k,s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} + H.c.$$

учтены две независимы поляризации $\boldsymbol{\varepsilon}_{k,s}$ и обозначен объем квантования V . Учет действия внешнего возбуждающего поля производится путем определения начальных условий для матрицы плотности ρ_F , а именно

$$\rho_F(0) = |\alpha_{k,s}\rangle\langle\alpha_{k,s}|,$$

где $|\alpha_{k,s}\rangle$ – когерентное состояния поля.

Для модели бистабильности вследствие взаимодействия атома с выделенной локальной фононной модой [8,9] гамильтониан приобретает следующие дополнительные слагаемые

$$H_{\chi} = \hbar\omega_{\chi}b_{\chi}^{+}b_{\chi},$$

$$V_{A\chi} = \eta\sigma_z(b_{\chi}^{+} + b_{\chi}).$$

Однако далее подробно приводится вывод уравнений для взаимодействия с эффективным локальным электрическим полем. В силу очевидного подобия выкладок для прочих моделей бистабильности приводится лишь окончательный результат.

С целью получения независимого управляющего уравнения для ρ_A здесь можно воспользоваться стандартными приемами квантовой оптики. Используя формальные решения для ρ_F и g_{AF} в представлении взаимодействия получим:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\tilde{\rho}_A &= \frac{i}{\hbar}[\hat{d}_A^t \cdot E_{eff}^t, \tilde{\rho}_A] + \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \left\{ \left[\hat{d}_A^t, G_{tt}^+, \hat{d}_A^{t'} \tilde{\rho}_A \right] + \left[\hat{d}_A^t, \tilde{\rho}_A G_{tt}^-, \hat{d}_A^{t'} \right] + \right. \\ &\left. + \frac{i}{\hbar} \int_0^t dt' \left\{ \left[\hat{d}_A^{t'}, W_{tt}, \left[\hat{d}_A^{t'}, \tilde{\rho}_A \right] \right] \right\} \right\}, \end{aligned}$$

где индексы t и t' обозначают явные временные зависимости в данном представлении. Здесь и далее опускаются все члены более старшего порядка, чем квадрат константы связи в V_{AF} . Первый коммутатор в правой части описывает взаимодействие атома с эффективным или локальным полем. Как показано в [16]:

$$E_{eff} = E_0(r_A) + \int_{\Sigma-\delta} dr_A' \int dr_A \int_0^t dt' G_{AA',tt'} \zeta(r_A) \left\langle \hat{d}_A^{t'} \right\rangle, \quad (1.7)$$

где $E_0(r_A)$ - внешнее поле, следующее из начальных условий. Множитель в подынтегральном выражении $G_{AA',tt'}$ обозначает гриновский тензор электромагнитного поля:

$$G_{AA',tt'} \equiv G(r_A - r_{A'}, t - t') = \frac{1}{\hbar} \frac{V}{(2\pi)^3} \int dk \langle [\hat{E}_{k,s}(r_A, t), \hat{E}_{k,s}(r_{A'}, t')] \rangle,$$

а $\zeta(r_A)$ определяет распределение плотности атомов в образце. Интегрирование по пространству производится в пределах объема образца Σ за вычетом малой области δ вокруг рассматриваемого атома A . Необходимость такой процедуры отражает свойство цепочки ББККИ, где в потенциале самосогласованного поля, действующего на атом, не учитывается влияния атома на самого себя. Далее первый интеграл в уравнении (1.7) описывает радиационное затухание. В коммутаторах присутствуют положительно- и отрицательно-частотные части функции Грина, взятые в пределе $r_{A'} \rightarrow r_A$, то есть $G_{tt'} = G(r_A - r_A, t - t')$. Последний член описывает переходы под действием некогерентного поля.

Выражение для локального поля (1.7) не учитывает особенность функции Грина в нуле [17, 18]. Однако если записать полный тензор с дельта-функциональной особенностью и разделить интегрирование по макро и микро объемам Σ и δ , то выражение для локального поля для однородной и изотропной среды излучателей может быть существенно упрощено:

$$E_{eff} = E_0 + \int_{\Sigma} dr_{A'} \int_0^t dt' G_{AA',tt'} P_{A',t'} + \frac{4\pi}{3} P.$$

Здесь была введена плотность макроскопической поляризации $P = \zeta \langle \hat{d}_A^t \rangle$. Так как два первых выражения справа по определению дают среднее максвелловское поле, то получаем полное соответствие

эффективного поля, возбуждающего атом в уравнениях, локальному полю Лоренца:

$$E_{eff} = E_M + \frac{4\pi}{3} P.$$

Таким образом, использование ББГКИ позволяет последовательно и согласованно описывать взаимодействие плотных систем излучателей с внешним полем, исходя только из основных фундаментальных постановочных предположений.

Теперь для получения уравнений бистабильности основное управляющее уравнение может быть записано в шредингеровском представлении и без учета последнего слагаемого, то есть в пренебрежении перерассеянием, что может быть справедливо для оптически тонких сред. Принимая приближение вращающейся волны, вводя обозначения для отстройки от резонанса $\Delta = \omega_A - \omega_L$, где ω_L - частота излучения лазера и эффективную частоту Раби

$$\Omega = \Omega_0 + \varepsilon \langle \sigma^+ \rangle, \quad \Omega_0 = \frac{d \cdot E}{\hbar}, \quad \varepsilon = \frac{\zeta 4\pi |d|^2}{3\hbar} = \pi \zeta k^{-3} \gamma,$$

а также вычисляя скорость спонтанного распада для атома в свободном пространстве

$$\gamma = \frac{2}{\hbar} \text{Im} \{ d \cdot G_{AA}^\omega \cdot d \} = \frac{4|d|^2 k^3}{3\hbar}$$

и пренебрегая величиной лэмбовского сдвига окончательно получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \rho_A = & -i\Delta [\sigma_z, \rho_A] + i\Omega^* [\sigma^+, \rho_A] + i\Omega [\sigma^-, \rho_A] - \\ & - \frac{\gamma}{2} \{ [\sigma^+, \sigma^- \rho_A] - [\sigma^-, \rho_A \sigma^+] \}. \end{aligned}$$

Записывая систему уравнений для компонент ρ_{11} , ρ_{22} и ρ_{21} матрицы плотности ρ_A и учитывая ее свойства при разрешении системы относительно $R = \rho_{11} - \rho_{22}$ в стационарном пределе получим уравнение для инверсии населенностей. Однако с целью общности описания без приведения точного вывода обобщим уравнение бистабильности на случай тонких пленок или наличия поглощающей фоновой среды, когда

$$\Omega = \Omega_0 + (\varepsilon - i\gamma_c) \langle \sigma^+ \rangle,$$

где γ_c - скорость коллективной релаксации. С учетом такой эффективной частоты Раби уравнение для инверсии запишется

$$\begin{aligned} & \left(\varepsilon^2 + \frac{\gamma_c}{4} \right) R^3 - \left(2\varepsilon\Delta - \frac{\gamma_c}{2} + \varepsilon^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right) R^2 + \\ & + \left(2\varepsilon\Delta - \frac{\gamma_c}{2} + \Delta^2 + \frac{\gamma^2}{4} + 2\Omega_0^2 \right) R - \left(\Delta^2 + \frac{\gamma^2}{4} \right) = 0. \end{aligned}$$

Анализ его решений хорошо известен. Таким образом, развитый формализм позволяет описывать атомную подсистему в случае, когда имеет место бистабильный отклик, без использования феноменологических процедур и минимуме предположений при постановке задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1996 – 323 с.
2. Ахмедиев Н. Н., Анкевич А. Солитоны. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2003. – 304 с.
3. Говорухин В. Н. Численный анализ динамических систем: Учеб. пособие. – Ростов-на-Дону.: Наука, 2009. – 81 с.
4. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 с.
5. Марсден Дж., Мак-Кракен М. Бифуркации рождения цикла и её приложения. – М.: Мир, 1980. – 366 с.
6. Задорожный В.Н. Высшая математика для технических университетов. V. Дифференциальные уравнения: Учеб. пособие. – Томск: Изд-во Томского политехнического университета, 2007. – 396 с.
7. Постнов Д. Э., Павлов А. Н., Астахов С. В. Методы нелинейной динамики: Учеб. пособие. – Саратов: 2008. – 120 с.
8. В.Н. Цытович, Г.Е. Морфилл, В.Х. Томас. Комплексная плазма: IV. Теория комплексной плазмы. Приложения. Физика плазмы. 2004. Т.30. №10. С.877-929.
9. В.Е. Фортов, С.А. Храпак, А.Г. Храпак, В.И. Молотков, О.Ф. Петров. Пылевая плазма. УФН. 2004. Т.174. №5. С.495-544.
10. Akhmediev, N., Ankiewicz, A. (eds.): *Dissipative Solitons*. Lect. Notes Phys. V. 661. Springer, Heidelberg (2005).
11. N. Akhmediev and A. Ankiewicz, Solitons around us: Integrable, Hamiltonian and dissipative systems, in *Optical Solitons: Theoretical and Experimental Challenges*, Edited by K. Porsezian and V.C. Kurakose, (Springer, Berlin-Heidelberg, 2003).
12. N. Akhmediev and A. Ankiewicz, Solitons of the complex Ginzburg–Landau equation, in *Spatial Solitons 1*, Edited by S. Trillo and W.E. Toruellas, (Springer, Berlin-Heidelberg, 2001).

- 13 N. Akhmediev and A. Ankiewicz, Dissipative Solitons in the Complex Ginzburg–Landau and Swift-Hohenberg Equations.
14. W. Chang, A. Ankiewicz, J. M. Soto-Crespo, and N. Akhmediev Dissipative soliton resonances, Phys. Rev. E 76, 016607 (2007).
15. F. Ciccarello, A. Napoli, A. Messina, et al. J. of Opt. B 6 S118 (2004).
16. V.E. Fortov, A.V. Ivlev, S.A. Khrapak, A.G. Khrapak, G.E.Morfill. Complex (dusty) plasmas. Current status, open issues, perspectives. Physics Reports. 2005. V.421.
17. O. Ishihara. Complex plasma: dusts in plasma. J. Phys. D: Appl. Phys. 2007. V.40.
18. U. Kortshagen. Nonthermal plasma synthesis of semiconductor nanocrystals. J. Phys. D: Appl. Phys. 2009. V.42. 113001.
19. A.I. Maimistov, Evolution of solitary waves which are approximately solitons of a nonlinear Schrodinger equation, J. Exp. Theor. Phys. 77, 727 (1993).
20. S.V. Vladimirov, K. Ostrikov. Dynamic self-organization phenomena in complex ionized gas systems: new paradigms and technological aspects. Physics Reports. 2004. V.393.