

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное
учреждение
высшего профессионального образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича
Столетовых»
(ВлГУ)**

ООО «Новые технологии лазерного термоупрочнения»

Евстюнин Григорий Анатольевич
Петров Александр Васильевич

**Интегрированные технологии
и оптика локализованных структур**
Методические указания к курсовому проектированию

для студентов ВлГУ,
обучающихся по направлению 200500.65 «Лазерная техника и лазерные технологии»

Владимир 2014

Оглавление

1. Организация курсовой работы.....	3
1.1. Цели курсового проектирования	3
1.2. Тематика курсовой работы	3
1.3. Задание на курсовое проектирование.....	4
2. Состав курсовой работы	4
3. Рекомендации по выполнению работы.....	5
3.1. Порядок выполнения	5
3.2. Получение базовой математической модели	6
3.3. Нормировка уравнений.....	8
3.4. Описание формы входного импульса	9
3.5. Получение вычислительной модели	10
3.6. Программная реализация метода SSFM	13
3.7. Проведение вычислительных экспериментов.....	14
3.8. Порядок защиты курсовой работы	17
4. Рекомендательный библиографический список	18
Приложение А. Варианты задания на курсовую работу.....	19
Приложение Б. Пример получения математической и вычислительной моделей	20
Приложение В. Описание переменных, используемых в программе- шаблоне	24

1. Организация курсовой работы

1.1. Цели курсового проектирования

Решение практических задач оптики локализованных структур предполагает, в первую очередь, умение проанализировать возможности получения устойчивых форм оптических импульсов, а также исследовать их поведение при распространении в выбранной нелинейной среде. В большинстве случаев такой анализ невозможен без применения численного моделирования, так как основные уравнения – обобщённое нелинейное уравнение Шрёдингера и уравнения Гинзбурга-Ландау – являются классическими примерами нелинейных дифференциальных уравнений, не имеющих общего аналитического решения. Качественно выполненное моделирование позволяет заранее определить особенности различных режимов работы моделируемого объекта, выявить возможные слабые места, что значительно сокращает расходы (временные, финансовые и др.) при практическом применении оптических солитонов. Поэтому целью курсового проектирования является освоение методики моделирования, используемой при решении практических задач интегрированных оптических технологий.

1.2. Тематика курсовой работы

В рамках курсовой работы студенты должны практически освоить общий методологический подход, используемый в моделировании, на примере решения конкретной прикладной исследовательской задачи, заключающейся в выявлении возможных режимов распространения оптического импульса в нелинейной пространственно-периодической среде. Выполнение работы должно способствовать развитию навыков исследовательской работы, а также закреплению теоретических знаний, полученных в рамках лекционного курса и в ходе выполнения лабораторных работ. Это касается как конкретных численных методов (фурье-метод расщепления по физическим факторам, разностные методы), так и способов их реализации средствами вычислительной техники. Работа выполняется с использованием системы математических и инженерных расчетов MATLAB, поэтому еще одним закрепляемым навыком является умение алгоритмизировать метод решения поставленной задачи.

1.3. Задание на курсовое проектирование

В ходе курсовой работы необходимо исследовать поведение оптического импульса в нелинейном оптическом волокне. При этом подлежат разработке следующие вопросы:

- а) получение математической модели исследуемой системы в соответствии с полученным вариантом задания;
- б) получение вычислительной модели;
- в) алгоритмизация вычислительной модели и её реализация средствами математического программного пакета;
- г) проведение вычислительных экспериментов;
- д) оформление расчётно-пояснительной записки по результатам выполнения работы.

Таблица вариантов задания на курсовое проектирование приведена в Приложении А. Каждый из вариантов определяет параметры светового импульса и характеристики нелинейной среды.

Объём расчётно-пояснительной записки составляет 20-50 страниц машинописного текста, включая рисунки, таблицы и приложения. Её оформление должно соответствовать требованиям ГОСТ и ЕСКД.

2. Состав курсовой работы

Основные требования к расчётно-пояснительной записке устанавливают ГОСТ 2.105-95 ЕСКД и ГОСТ 2.106-96 ЕСКД. Для данной курсовой работы рекомендовано следующее содержание расчётно-пояснительной записки:

1. Титульный лист.
2. Формулировка задания на курсовую работу, включающую информацию о параметрах выданного варианта задания (на бланке установленного образца).
3. Описание процесса получения математической модели.
 - 3.1. Исходное уравнение (с пояснением входящих в него величин).
 - 3.2. Переход в систему координат, связанную с групповой скоростью импульса.
 - 3.3. Нормировка по времени.

- 3.4. Нормировка по амплитуде.
- 3.5. Нормировка пространственных длин.
- 3.6. Нормировка исходного импульса.
4. Описание вычислительной модели.
5. Алгоритм реализации вычислительной модели.
6. Текст M-файла для проведения численных экспериментов (должен быть оформлен в виде приложения).
7. Результаты численных экспериментов (текстовое описание выявленных режимов распространения импульса с иллюстрацией полученными графиками).
8. Вывод по курсовой работе с предложениями о возможностях создания оптических устройств на основе полученных результатов.
9. Библиографический список.

3. Рекомендации по выполнению работы

3.1. Порядок выполнения

1. Получение базовой математической модели: преобразование обобщенного нелинейного уравнения Шрёдингера в соответствии с индивидуальным вариантом задания.
2. Получение безразмерной математической модели:
 - 2.1. Переход к системе пространственно-временных координат, связанной с импульсом (с групповой скоростью импульса).
 - 2.2. Нормировка в уравнении величин, имеющих размерность времени, на длительность входного импульса.
 - 2.3. Нормировка амплитуды на пиковую мощность входного импульса.
 - 2.4. Введение характерных длин процессов, влияющих на изменение формы импульса (дисперсии, фазовой самомодуляции и т.д.).
 - 2.5. Нормировка величин, имеющих размерность длины, на длину, указанную в варианте задания.
 - 2.6. Получение выражения для входного импульса в отнормированной форме.
3. Получение вычислительной модели для решения уравнения фурье-методом расщепления по физическим факторам.

- 3.1. Запись выражений для операторов, описывающих дисперсионные и нелинейные процессы в системе.
- 3.2. Получение вида дисперсионного оператора в частотном представлении.
4. Составление алгоритма численного решения уравнения.
5. Составление программы для решения уравнения с использованием средств системы инженерных расчетов MATLAB.
6. Выполнение вычислительных экспериментов в соответствии с условиями, указанными в варианте задания.
7. Подготовка расчётно-пояснительной записки (с обязательным включением в неё обобщённых результатов экспериментов, проиллюстрированных графиками, демонстрирующими типичные режимы распространения оптического импульса).
8. Демонстрация работы программы преподавателю и защита курсовой работы.

3.2. Получение базовой математической модели

Как известно, одним из основных применений лазерного излучения является использование широкого спектра явлений, возникающих в нелинейных оптических средах. Количество приложений таких явлений огромно: волоконные и солитонные лазеры, параметрические усилители и преобразователи света, формирование неклассических состояний света, оптическая обработка информации, и многие другие направления.

Одним из важнейших классов используемых в перечисленных областях систем является класс нелинейных пространственно-периодических систем. Основные уравнения, описывающие их, оказываются достаточно схожими для различных конкретных систем (будь то туннельно-связанные оптические волокна, дифракционные решетки, оптические волокна с подкруткой и др.). Отличия чаще всего заключаются в коэффициентах, описывающих различные линейные и нелинейные эффекты. В рамках курсовой работы для практического освоения основных этапов математического моделирования рассматривается один из базовых типов таких оптических систем – распространение оптических импульсов в одномодовых волоконных световодах.

Полный вывод основного уравнения распространения для данной системы, начинающийся с уравнений Максвелла, можно найти, например, в [1]. Он довольно длинный, но в результате приводит к следующему уравнению:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \beta_1 \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma |A|^2 A + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial t^3} - a_1 \frac{\partial}{\partial t} (|A|^2 A) - ia_2 A \frac{\partial |A|^2}{\partial t}. \quad (1)$$

Данное уравнение иногда называют обобщенным нелинейным уравнением Шрёдингера (НУШ). Здесь:

A [Вт^{1/2}] – комплексная амплитуда импульса (медленноменяющаяся амплитуда огибающей импульса);

z [м] – координата вдоль оси волокна;

t [с] – время в системе отсчета, связанной с наблюдателем;

$\beta_1, \beta_2, \beta_3$ – коэффициенты дисперсии различного порядка, определяемые свойствами среды и связанные с разложением постоянной распространения моды β в ряд Тейлора вблизи несущей частоты импульса ω_0 :

$$\beta(\omega) = n(\omega) \frac{\omega}{c} = \beta_0 + \beta_1 (\omega - \omega_0) + \frac{\beta_2}{2} (\omega - \omega_0)^2 + \dots;$$

$\beta_1 = 1/v_g$ [с · м⁻¹] – коэффициент, определяющий групповую скорость импульса;

β_2 [с² · м⁻¹] – коэффициент дисперсии групповых скоростей;

β_3 [с³ · м⁻¹] – для сверхкоротких импульсов учитывает дисперсионные эффекты третьего порядка;

v_g [м · с⁻¹] – групповая скорость импульса;

ω_0 [с⁻¹] – несущая частота импульса;

α [м⁻¹] – коэффициент поглощения;

γ [Вт⁻¹ · м⁻¹] – коэффициент нелинейности, $\gamma = n_2 \omega_0 / (c A_{\text{эфф}})$, где

n_2 [м² · Вт⁻¹] – нелинейный показатель преломления оболочки волокна, c [м · с⁻¹] – скорость света, $A_{\text{эфф}} = \pi w^2$ [м²] – эффективная площадь моды, w [м] – параметр гауссовской моды;

$a_1 = 2\gamma/\omega_0$ [с · Вт⁻¹ · м⁻¹] – коэффициент, характеризующий эффект образования ударной волны огибающей импульса;

$a_2 = \gamma T_R$ [с · Вт⁻¹ · м⁻¹] – коэффициент, характеризующий эффект вынужденного комбинационного саморассеяния (самосмещения частоты);

T_R [с] – время, связанное с наклоном линии ВКР-усиления, если предположить, что оно линейно изменяется вблизи несущей частоты.

Для выполнения курсовой работы обобщенное уравнение Шрёдингера является базовым, однако обязательным шагом является его преобразование с учетом выданного варианта задания. Результатом этого преобразования станет исчезновение из уравнения ряда слагаемых в связи с тем, что часть коэффициентов могут иметь нулевое значение. Следует обратить внимание, что в выданном задании коэффициенты a_1 и a_2 могут быть отличны от нуля даже в случае нулевого значения коэффициента нелинейности γ . Это связано с тем, что приведённые выше выражения для коэффициента ударной волны и коэффициента вынужденного комбинационного саморассеяния являются приближенными, и в соответствии с недавними исследованиями (см., например, [2]) данные процессы могут оказывать существенное влияние даже при слабой фазовой самомодуляции.

3.3. Нормировка уравнений

В большинстве случаев обязательной процедурой для математического анализа модели физической системы должна являться нормировка размерных величин. Следует аккуратно зафиксировать все этапы нормировки, чтобы после численного или аналитического исследования математической модели легко вычислить размерные величины, описывающие систему.

Процедура нормировки состоит в том, чтобы выразить значение одной размерной величины через другую величину, имеющую такую же размерность (примером может служить измерение ускорения в единицах постоянной свободного падения). Математически эта процедура состоит в умножении или делении друг на друга параметров, имеющих одинаковую размерность – нормировочного и нормируемого.

В ходе выполнения курсовой работы необходима нормировка величин, имеющих размерности времени, амплитуды импульса и длины. В качестве нормировочных величин следует использовать, соответственно:

- а) полуширину начального импульса T_0 по уровню интенсивности $1/e$ от максимальной;

б) пиковую мощность начального импульса P_0 ;

в) характерную длину процесса, указанную в варианте задания.

При этом в ходе нормировки амплитуды для вариантов, предполагающих наличие потерь излучения, следует эти потери учесть, введя для нормированной амплитуды дополнительный множитель $\exp(\alpha z/2)$.

Особенностью рассматриваемой в работе модели является то, что в большинстве случаев длительность импульса оказывается меньшей времени, в течение которого импульс находится в среде. По этой причине возможно возникновение трудностей с интерпретацией результатов решения, изображаемых в виде графиков зависимости огибающей импульса от координаты и времени. Полезным приемом, позволяющим избежать данных трудностей, может служить переход в систему координат, движущуюся с групповой скоростью импульса и имеющую точку отсчета, совпадающую с максимальной интенсивностью начального импульса. Данный переход выполняется с помощью введения новой временной координаты:

$$T = t - \frac{z}{v_g} = t - \beta_1 z.$$

При выполнении работы переход в новую систему координат должен быть выполнен перед процедурой нормировки уравнения.

3.4. Описание формы входного импульса

При моделировании нестационарных систем обязательным является задание входного распределения интенсивности (амплитуды, мощности) излучения. Классическим случаем, соответствующим большинству реальных оптических систем, является описание световых импульсов, генерируемых лазером, с помощью функции распределения Гаусса («гауссовский импульс»). С использованием введенных выше обозначений форма огибающей такого импульса имеет вид:

$$A(0, t) = \sqrt{P_0} \exp\left(-\frac{t^2}{2T_0^2}\right)$$

Следует отметить, что на практике вместо T_0 также используют полную длительность импульса по уровню половины максимальной его интенсивности T_{FWHM} . Для гауссовского импульса

$$T_{FWHM} = 2\sqrt{\ln 2} T_0 \approx 1,665 T_0.$$

Другой возможной формой импульса является супергауссовский импульс, описываемый выражением:

$$A(0,t) = \sqrt{P_0} \exp\left[-\frac{1+iC}{2} \left(\frac{t}{T}\right)^{2m}\right],$$

где C – параметр частотной модуляции, m – параметр, определяющий крутизну фронта импульса. Случай $m=1$ соответствует случаю гауссовских импульсов с частотной модуляцией. При больших m форма импульса приближается к прямоугольной с резким передним и задним фронтами.

Наконец, еще одной часто используемой формой импульса является солитонная, то есть имеющая огибающую, описываемую функцией гиперболического секанса:

$$A(0,t) = \sqrt{P_0} \operatorname{sech}\left(\frac{t}{T}\right) \exp\left(-\frac{iCt^2}{2T_0^2}\right),$$

где C , как и в предыдущем случае, является коэффициентом частотной модуляции. Для солитонного импульса длительность по уровню половины максимальной интенсивности связана с полушириной T_0 соотношением:

$$T_{FWHM} = 2\ln(1 + \sqrt{2})T_0 \approx 1,763 T_0.$$

Поскольку в выражения для формы начального импульса входят размерные величины, эти выражения также следует подвергнуть процедуре нормировки.

3.5. Получение вычислительной модели

Обобщенное нелинейное уравнение Шрёдингера (1) – это нелинейное дифференциальное уравнение в частных производных, которое, вообще говоря, нельзя решить аналитически, за исключением нескольких частных случаев, когда для решения применим метод обратной задачи рассеяния Захарова-Шабата [3]. Поэтому часто для изучения нелинейных эффектов в световодах необходимо численное моделирование. Для этой цели можно использовать множество численных методов, которые относят либо к разностным, либо к псевдоспектральным. Среди последних одним из наиболее широко используемых методов решения задачи распространения импульсов в нелинейной среде с дисперсией является фурье-метод

расщепления по физическим факторам (SSFM) [1,4]. Относительно большая скорость счета этим методом по сравнению с большинством методов конечных разностей достигается благодаря использованию алгоритма быстрого преобразования Фурье.

Чтобы разобрать принцип метода SSFM, удобно формально записать обобщенное НУШ в виде

$$\frac{\partial A}{\partial z} = (\hat{D} + \hat{N})A, \quad (2)$$

где \hat{D} – дифференциальный оператор, учитывающий дисперсию и поглощение в линейной среде, а \hat{N} – нелинейный оператор, описывающий действие нелинейностей световода на распространение импульса.

$$\hat{D} = -\frac{i}{2}\beta_2 \frac{\partial^2}{\partial T^2} + \frac{1}{6}\beta_3 \frac{\partial^3}{\partial T^3} - \frac{\alpha}{2},$$

$$\hat{N} = i\gamma|A|^2 - \frac{a_1}{A} \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) - ia_2 \frac{\partial |A|^2}{\partial T}.$$

(Здесь и далее будем полагать, что выполнен переход в систему координат, движущуюся с групповой скоростью импульса).

Дисперсия и нелинейность действуют в световоде совместно. Однако в методе SSFM приближенное решение получают, предполагая, что при распространении оптического поля на малое расстояние h в световоде нелинейные и дисперсионные эффекты действуют независимо. Расчет ведется в два шага. Сначала действует только нелинейность, и $\hat{D} = 0$. На втором шаге действует только дисперсия, а $\hat{N} = 0$.

$$A(z+h, T) \cong \exp(h\hat{D})\exp(h\hat{N})A(z, T).$$

Действие оператора $\exp(h\hat{D})$ удобно выполнять в фурье-представлении, следуя формуле:

$$\exp(h\hat{D})B(z, T) = \{F^{-1} \exp[h\hat{D}(i\omega)]F\} B(z, T), \quad (3)$$

где F обозначает оператор фурье-преобразования. $\hat{D}(i\omega)$ можно получить, заменяя дифференциальный оператор $\partial/\partial T$ на $i\omega$, где $\omega = 2\pi/T$ – частота в спектральном представлении. $\hat{D}(i\omega)$ в фурье-представлении есть просто число, поэтому никаких вычислительных проблем, кроме преобразования Фурье, не возникает.

Оценка точности описанного метода основана на учете некоммутативности операторов \hat{D} и \hat{N} и использовании формулы Бейкера-Хаусдор-

фа для двух некоммутирующих операторов. Эта оценка показывает, что метод SSFM имеет точность порядка h^2 .

Увеличение точности до порядка h^3 достигается модификацией итерационной расчетной формулы:

$$A(z+h, T) \cong \exp\left(\frac{h}{2} \hat{D}\right) \exp\left[\int_z^{z+h} \hat{N}(z') dz'\right] \exp\left(\frac{h}{2} \hat{D}\right) A(z, T).$$

Отличие состоит в том, что действие нелинейности учитывается в середине, а не на краю шага. Такой метод называют симметричным. Если шаг h достаточно мал, интеграл можно приближенно записать как $\exp(h\hat{N})$, то есть

$$A(z+h, T) \cong \exp\left(\frac{h}{2} \hat{D}\right) \exp(h\hat{N}) \exp\left(\frac{h}{2} \hat{D}\right) A(z, T).$$

Применять метод SSFM относительно просто. Как показано на рис.1, длина световода делится на множество сегментов, которые не обязательно

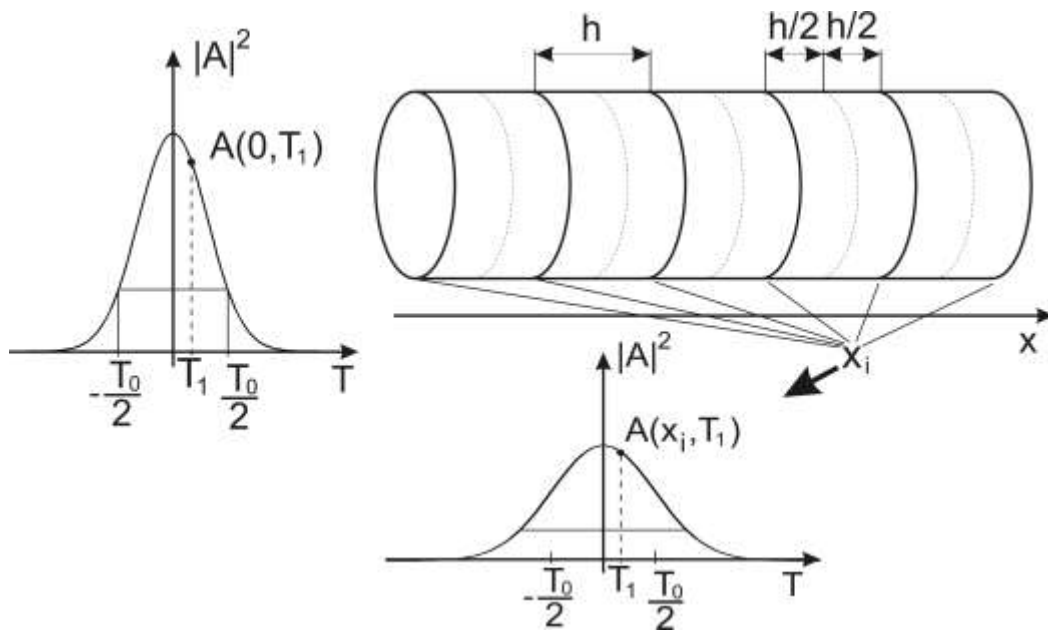


Рис.1

должны быть одинаковой длины. Входной импульс задается набором значений амплитуды огибающей (на рисунке показан график для квадрата модуля амплитуды). В соответствии с итерационной формулой, эти значения изменяются от сегмента к сегменту, давая приближенное решение уравнения. Оптическое поле $A(z, T)$ сначала проходит расстояние $h/2$, на

котором действует только дисперсия групповых скоростей; при этом используется алгоритм быстрого преобразования Фурье [5] и выражение (3). В точке $z + h/2$ поле умножается на нелинейный фактор, который характеризует действие нелинейности на полной длине сегмента h , и, наконец, поле проходит оставшееся расстояние $h/2$, где действует только дисперсия; В результате получается $A(z + h, T)$. Таким образом, предполагается, что нелинейность действует только в средней точке каждого сегмента.

В рамках курсовой работы получение вычислительной модели сводится к записи операторов \hat{D} и \hat{N} во временном представлении и дальнейшем переходе в частотное представление описанным выше способом. Пример получения математической и вычислительной моделей приведён в Приложении Б.

3.6. Программная реализация метода SSFM

В рамках курсовой работы для программной реализации фурье-метода расщепления по физическим факторам следует использовать средства системы математических и инженерных расчетов MATLAB (версии 5.0 и выше) [6]. К основным достоинствам данного программного пакета относятся: простота обработки векторных, матричных и тензорных данных; наличие огромного количества функций, реализующих всевозможные математические методы; развитые средства визуализации результатов расчетов; довольно простой язык программирования.

Для выполнения работы потребуются следующие функции MATLAB:

- `floor()`, отбрасывание дробной части вещественного числа;
- `zeros()`, формирование массива нулей;
- `exp()`, вычисление экспоненты;
- `sech()`, гиперболический секанс;
- `conj()`, вычисление комплексно-сопряженного числа;
- `max()`, поиск максимального значения,
- `pi`, константа π ;
- `fft()`, быстрое преобразование Фурье;
- `ifft()`, обратное быстрое преобразование Фурье;
- `fftshift()`, сдвиг частотных компонент, получаемых в результате дискретного преобразования Фурье;

- `figure`, создание нового окна графического вывода;
- `plot()`, построение двумерных графиков,
- `mesh()`, построение трехмерных графиков в виде сетки;
- `axis()`, настройка (задание масштаба) осей графиков,
- `grid on|off`, включение и отключение координатной сетки на графиках,
- `hold on|off`, включение и отключение режима наложения графиков,
- `title()`, формирование заголовка графика,
- `xlabel()`, `ylabel()`, `zlabel()`, формирование надписей у осей графиков.

Для облегчения разработки программы существует М-файл, содержащий шаблон решения нелинейного уравнения Шрёдингера, нормированного на характерную длину фазовой самомодуляции (его размещение на сервере локальной компьютерной сети сообщает преподаватель). Необходимо, разобравшись с содержимым данного файла, внести изменения, соответствующие выданному варианту задания. Для понимания программы в Приложении В приведено описание используемых в ней переменных.

Модификация программы-шаблона предполагает внесение изменений, соответствующих выданному варианту задания, в следующие выражения:

- выражение для формы исходного импульса;
- выражение для оператора дисперсии;
- выражение для оператора нелинейности.

Могут также потребоваться изменения и в других фрагментах М-файла.

3.7. Проведение вычислительных экспериментов

В ходе численных экспериментов требуется выявить все режимы распространения оптического импульса, возможные в нелинейной среде, описываемой полученной математической моделью. Для этого требуется многократное решение уравнения при различных значениях характеристик исходного оптического импульса и свойств среды. К таковым в общем случае могут относиться:

- а) коэффициенты модуляции исходного импульса t и C ;
- б) длина среды L ;
- в) соотношения характерных длин процессов, происходящих в среде;
- г) постоянная затухания.

Набор подлежащих изменению параметров определяется вариантом задания, но в любом случае необходимо придерживаться общего подхода, используемого при численном моделировании.

Серию расчетов следует начинать с предельных случаев, соответствующих наличию только одного из процессов в среде. Например, задать такие значения коэффициентов, которые описывают действие одной лишь дисперсии второго порядка или одного лишь процесса фазового самовоздействия и т.п.

Получив результат для предельного случая, можно начать изменять один из параметров эксперимента, начав с его предельного значения (например, нулевого) и перебирая ряд значений в рамках всего возможного диапазона для данного параметра.

Необходимо охватить все характерные сочетания параметров эксперимента. При этом из получаемых графиков для импульса и его спектра должны быть отобраны все качественно различные. Нет необходимости включать в пояснительную записку все графики – достаточно ограничиться теми, которые дают наилучшее представление о поведении импульса. В случае если значительное изменение какого-либо параметра не приводит к заметному изменению получаемого решения, это следует отметить в описании результатов экспериментов.

Важными параметрами, во многом определяющими точность и интерпретируемость получаемых результатов, являются: размер временного окна T , количество точек дискретизации временной оси N_t , количество точек на пространственной оси N_z . При проведении экспериментов всегда следует помнить об этом и варьировать данные переменные так, чтобы получать приемлемую точность и время расчета. На рис. 2 и рис. 3 показаны примеры результатов расчета, соответствующих верному и неверному выбору характеристик осей. Рис. 2а демонстрирует пример зависимостей,

(а)

(б)

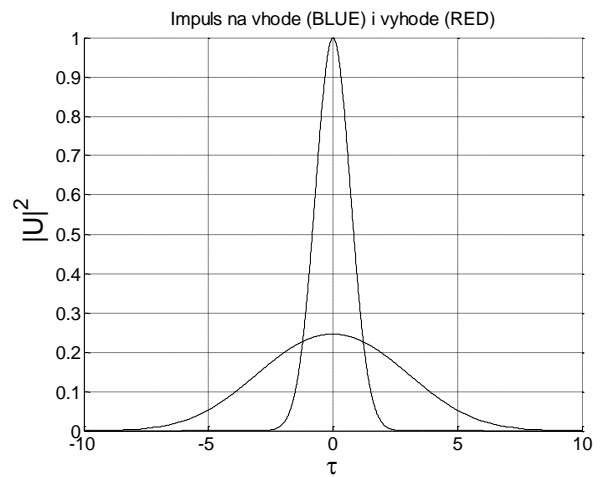
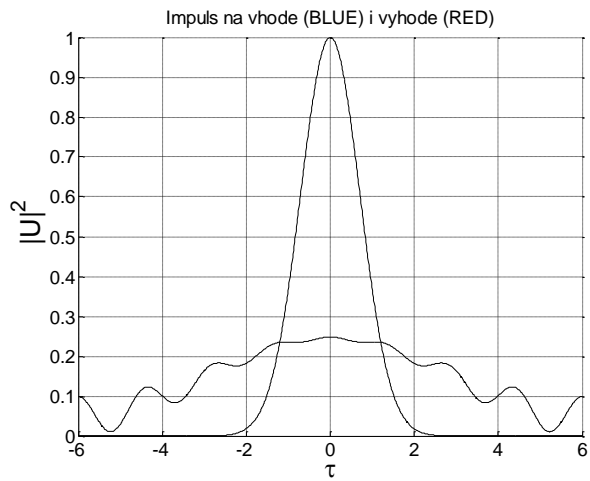
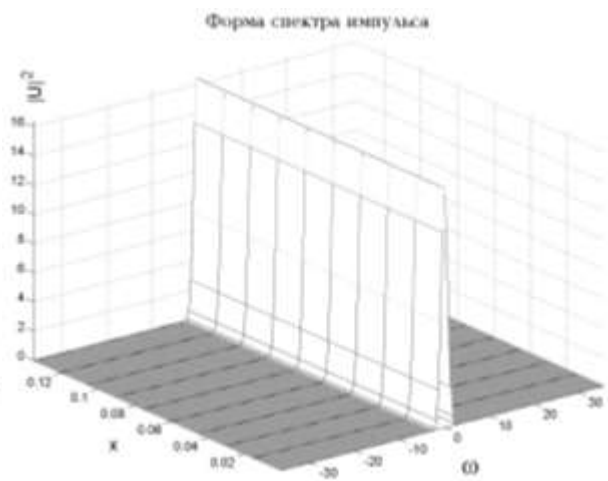
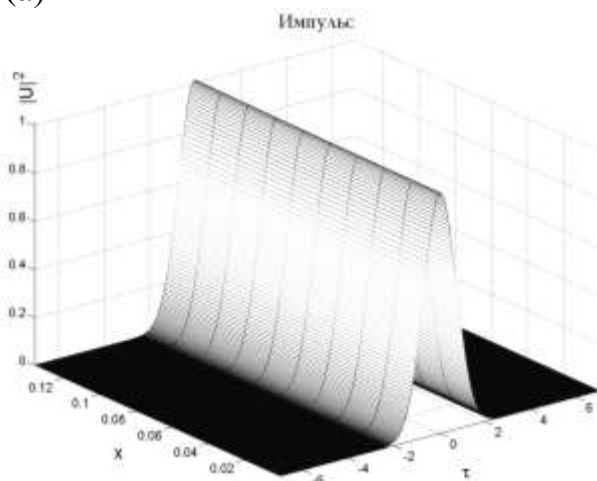


Рис.2

(a)



(б)

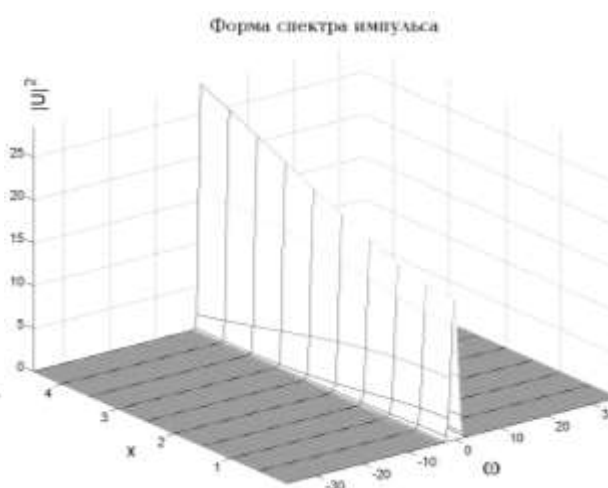
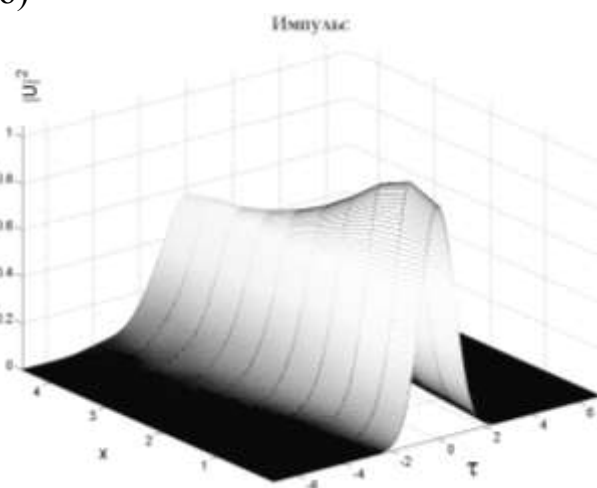


Рис.3

полученных при недостаточном размере временного окна. На рис. 2б временное окно подобрано корректно. Рис. 3а получен при недостаточной длине среды ($L = 0.15$), поскольку не изменяется ни форма импульса, ни его спектр. Результат для правильно выбранной длины ($L = 5$) при тех же параметрах эксперимента показан на рис. 3б.

3.8. Порядок защиты курсовой работы

Для успешной защиты курсовой работы необходимо провести численный эксперимент (или серию экспериментов) для указанных преподавателем параметров системы, продемонстрировать работу разработанной программы, представить расчётно-пояснительную записку и ответить на вопросы. Примерная тематика вопросов:

1. Описать физическую постановку задачи (какие физические системы могут быть описаны рассматриваемыми математическими уравнениями).
2. Описать процедуру нормировки (ее смысл, основные принципы, возможные альтернативные варианты нормировки для полученной модели).
3. Изложить суть и алгоритм фурье-метода расщепления по физическим факторам, продемонстрировать, как получена вычислительная модель для своего варианта задания.
4. Получить разностную схему для решения уравнения и пояснить, какие факторы делают ее применение менее привлекательным, чем использование метода SSFM.
5. Прокомментировать отдельные фрагменты М-файла, созданного для проведения численных экспериментов.
6. По полученным графическим зависимостям продемонстрировать наличие и взаимное влияние различных физических процессов в рассматриваемой системе.
7. По полученным зависимостям для безразмерных величин определить характеристики системы, необходимые для постановки реального физического эксперимента (в случае необходимости предложить обоснованные значения для недостающих параметров).

4. Рекомендательный библиографический список

1. Агравал Г. Нелинейная волоконная оптика: Пер. с англ. – М.: Мир, 1996. – 323 с., ил. ISBN 5-03-002418-2
2. Prokhorov A.V., Korolkova N.V., Arakelian S.M. Nonlinear control of light pulses in doped optical fibers // Laser Physics, 2005, v.15 (3), p.422.
3. Захаров В.Е., Шабат А.Б. Точная теория двумерной самофокусировки и одномерная автомодуляция волн в нелинейных средах // ЖЭТФ, 1971, т.61, с.118.
4. Fisher R.A., Bischel W.K. "Numerical studies of the interplay between self-phase modulation and dispersion for intense plane-wave laser pulses" // J. of Appl.Phys., 1975, v.46, No.11, p.4921.
5. Каханер Д., Моулер К., Нэш С. Численные методы и математическое обеспечение: Пер. с англ. – М.: Мир, 1998. – 575 с., ил. ISBN 5-03-002432-8 (русск.), 0-13-626672-X (англ.)
6. Ануфриев И.Е. Самоучитель MatLab 5.3/6.x. – СПб.: БХВ-Петербург, 2003. – 736 с.: ил. ISBN 5-94157-107-0.

Приложение А

Варианты задания на курсовую работу

В табл. А.1 приведены варианты задания на курсовую работу. Указаны значения параметров среды, форма входного импульса и величина, на которую следует нормировать параметры, имеющие размерность длины. Если указано, что значение коэффициента отлично от нуля, это означает, что в ходе численных экспериментов данный параметр следует изменять в указанном диапазоне (для параметра β_2) или на всей числовой оси (в любом случае рассматривая и нулевое значение). Цифры в графе «Форма входного импульса» имеют следующий смысл:

- 1 – гауссовский импульс;
- 2 – супергауссовский импульс;
- 3 – солитонный импульс.

При проведении численных экспериментов для супергауссовского и солитонного импульсов следует варьировать коэффициенты амплитудной и частотной модуляции. Нормировочные длины обозначены в соответствии с описанным в Приложении Б примером получения математической модели.

Таблица А.1

№ варианта	α	β_2	β_3	γ	a_1	a_2	Форма входного импульса	Нормировочная длина
1	=0	=0	≠0	≠0	≠0	=0	1	L_{D3}
2	≠0	=0	≠0	≠0	=0	=0	1	L_{NL}
3	=0	>0	=0	≠0	≠0	=0	3	L_S
4	≠0	=0	=0	≠0	≠0	=0	3	L_{NL}
5	=0	<0	≠0	=0	≠0	≠0	2	L_{D2}
6	≠0	=0	≠0	=0	≠0	≠0	1	L_{D3}
7	=0	<0	=0	=0	≠0	≠0	2	L_S
8	≠0	>0	=0	=0	≠0	≠0	1	L_{D2}
9	=0	<0	≠0	≠0	=0	≠0	3	L_{ICS}
10	≠0	>0	≠0	≠0	=0	≠0	1	L_{D2}

11	= 0	< 0	= 0	≠ 0	= 0	≠ 0	3	L_{ICS}
12	≠ 0	< 0	= 0	≠ 0	= 0	≠ 0	1	L_{NL}
13	= 0	> 0	≠ 0	= 0	= 0	= 0	2	L_{D2}
14	≠ 0	$\in (-\infty; \infty)$	≠ 0	= 0	= 0	= 0	3	L_{D3}
15	= 0	$\in (-\infty; \infty)$	= 0	= 0	≠ 0	= 0	2	L_S
16	≠ 0	$\in (-\infty; \infty)$	= 0	≠ 0	= 0	≠ 0	3	L_{D2}
17	= 0	> 0	≠ 0	≠ 0	≠ 0	= 0	1	L_{D3}
18	≠ 0	= 0	≠ 0	≠ 0	≠ 0	= 0	3	L_S
19	= 0	< 0	= 0	≠ 0	≠ 0	= 0	2	L_S
20	≠ 0	< 0	= 0	≠ 0	≠ 0	= 0	2	L_{D2}

Приложение Б

Пример получения математической и вычислительной моделей

Исходным уравнением является обобщенное нелинейное уравнение Шрёдингера (1). Будем рассматривать самый общий случай, когда в этом уравнении присутствуют все слагаемые. Перейдем в систему координат, связанную с групповой скоростью v_g импульса. В такой системе координат время будет иметь значение

$$T = t - \frac{z}{v_g} = t - \beta_1 z,$$

а само уравнение примет вид:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2} \beta_2 \frac{\partial^2 A}{\partial T^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma |A|^2 A + \frac{1}{6} \beta_3 \frac{\partial^3 A}{\partial T^3} - a_1 \frac{\partial}{\partial T} (|A|^2 A) - ia_2 A \frac{\partial |A|^2}{\partial T}. \quad (\text{Б.1})$$

Отнормируем уравнение (Б.1) на длительность исходного импульса T_0 . Получим:

$$\frac{\partial A}{\partial z} + \frac{i}{2} \frac{\beta_2}{T_0^2} \frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} + \frac{\alpha}{2} A = i\gamma |A|^2 A + \frac{1}{6} \frac{\beta_3}{T_0^3} \frac{\partial^3 A}{\partial \tau^3} - \frac{a_1}{T_0} \frac{\partial}{\partial \tau} (|A|^2 A) - i \frac{a_2}{T_0} A \frac{\partial |A|^2}{\partial \tau}.$$

Теперь нормируем амплитуду огибающей импульса. Для этого введем безразмерную амплитуду

$$U(z, \tau) = \frac{A(z, \tau)}{\sqrt{P_0}} \exp\left(\frac{\alpha z}{2}\right), \quad (\text{Б.2})$$

где P_0 – пиковая мощность входного импульса. Экспонента в выражении (Б.2) учитывает наличие процессов рассеяния в системе, характеризуемых коэффициентом α . В случае отсутствия подобных процессов экспонента должна отсутствовать. При такой нормировке амплитуды получим:

$$\begin{aligned}
A &= \sqrt{P_0} \exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right) U, \\
\frac{\partial A}{\partial z} &= \sqrt{P_0} \exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right) \frac{\partial U}{\partial z} - \frac{\alpha}{2} U \sqrt{P_0} \exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right), \\
|A|^2 &= P_0 \exp(-\alpha z) |U|^2, \\
|A|^2 A &= P_0 \sqrt{P_0} \exp(-\alpha z) \exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right) |U|^2 U, \\
\frac{\partial A}{\partial \tau} &= \sqrt{P_0} \exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right) \frac{\partial U}{\partial \tau}, \\
\frac{\partial^2 A}{\partial \tau^2} &= \sqrt{P_0} \exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right) \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2}, \\
\frac{\partial^3 A}{\partial \tau^3} &= \sqrt{P_0} \exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right) \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3}, \\
\frac{\partial |A|^2}{\partial \tau} &= P_0 \exp(-\alpha z) \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau}, \\
\frac{\partial}{\partial \tau} (|A|^2 A) &= P_0 \sqrt{P_0} \exp(-\alpha z) \exp\left(-\frac{\alpha z}{2}\right) \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U).
\end{aligned}$$

Используя приведенные выше выражения, можно получить уравнение для безразмерных амплитуд:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{i \beta_2}{2 T_0^2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} &= i \gamma P_0 \exp(-\alpha z) |U|^2 U + \frac{1}{6} \frac{\beta_3}{T_0^3} \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} - \\
&- \frac{a_1}{T_0} P_0 \exp(-\alpha z) \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) - i \frac{a_2}{T_0} P_0 \exp(-\alpha z) U \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau}.
\end{aligned}$$

Введем характерные длины физических процессов в системе:

$$L_{D2} \equiv \frac{T_0^2}{|\beta_2|} - \text{длина дисперсии второго порядка (параметр } \beta_2 \text{ взят по}$$

модулю, так как длина – величина положительная);

$$L_{D3} \equiv \frac{T_0^3}{|\beta_3|} - \text{длина дисперсии третьего порядка;}$$

$L_{NL} \equiv \frac{1}{\gamma P_0}$ – длина фазовой самомодуляции;

$L_S \equiv \frac{T_0}{a_1 P_0}$ – длина образования ударной волны огибающей;

$L_{ICS} \equiv \frac{T_0}{a_2 P_0}$ – длина вынужденного комбинационного саморассеяния.

С учетом введенных обозначений уравнение принимает вид:

$$\frac{\partial U}{\partial z} + \frac{i \operatorname{sgn}(\beta_2)}{2L_{D2}} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} = \frac{i}{L_{NL}} \exp(-\alpha z) |U|^2 U + \frac{\operatorname{sgn}(\beta_3)}{6L_{D3}} \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} -$$

$$- \frac{\exp(-\alpha z)}{L_S} \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) - i \frac{\exp(-\alpha z)}{L_{ICS}} U \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau}.$$

Нормируем величины, имеющие размерность длины, на длину фазовой самомодуляции (на длину, указанную в варианте задания). Получаем:

$$\frac{\partial U}{\partial(z/L_{NL})} + \frac{i \operatorname{sgn}(\beta_2) L_{NL}}{2 L_{D2}} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} =$$

$$= i \frac{L_{NL}}{L_{NL}} \exp\left[-(\alpha L_{NL}) \frac{z}{L_{NL}}\right] |U|^2 U + \frac{\operatorname{sgn}(\beta_3) L_{NL}}{6 L_{D3}} \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} -$$

$$- \frac{L_{NL}}{L_S} \exp\left[-(\alpha L_{NL}) \frac{z}{L_{NL}}\right] \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) - i \frac{L_{NL}}{L_{ICS}} \exp\left[-(\alpha L_{NL}) \frac{z}{L_{NL}}\right] U \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau}.$$

Введем еще ряд обозначений:

$$x \equiv \frac{z}{L_{NL}}, \quad \tilde{\alpha} \equiv \alpha L_{NL}, \quad \mu_{ND2} \equiv \frac{L_{NL}}{L_{D2}}, \quad \mu_{ND3} \equiv \frac{L_{NL}}{L_{D3}}, \quad \mu_{NS} \equiv \frac{L_{NL}}{L_S}, \quad \mu_{NI} \equiv \frac{L_{NL}}{L_{ICS}}.$$

После этого получим окончательный вид безразмерной математической модели системы:

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{i}{2} \operatorname{sgn}(\beta_2) \mu_{ND2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} =$$

$$= i \exp(-\tilde{\alpha} x) |U|^2 U + \frac{1}{6} \operatorname{sgn}(\beta_3) \mu_{ND3} \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} - \quad (\text{Б.3})$$

$$- \mu_{NS} \exp(-\tilde{\alpha} x) \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) - i \mu_{NI} \exp(-\tilde{\alpha} x) U \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau}.$$

Отнормируем входной импульс. В системе координат, связанной с импульсом, форма огибающей описывается следующим образом:

$$U(0, T) = \exp\left[-\frac{1+iC}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^{2m}\right] - \text{супергауссовский импульс};$$

$$U(0, T) = \operatorname{sech}\left(\frac{T}{T_0}\right) \exp\left[-\frac{iC}{2}\left(\frac{T}{T_0}\right)^2\right] - \text{солитонный импульс}.$$

После нормировки на длительность исходного импульса эти выражения принимают вид:

$$U(0, \tau) = \exp\left(-\frac{1+iC}{2}\tau^{2m}\right) - \text{супергауссовский импульс};$$

$$U(0, \tau) = \operatorname{sech}(\tau) \exp\left(-\frac{iC}{2}\tau^2\right) - \text{солитонный импульс}.$$

Теперь найдем выражения, необходимые для проведения численных экспериментов (получим вычислительную модель). Для этого требуется выразить операторы дисперсии и нелинейности, используемые в фурье-методе расщепления по физическим факторам.

Запишем безразмерное уравнение распространения (Б.3) в виде (2):

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} = & \left[-\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(\beta_2) \mu_{ND2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{6} \operatorname{sgn}(\beta_3) \mu_{ND3} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3} + \right. \\ & \left. + i \exp(-\tilde{\alpha} x) |U|^2 - \frac{\mu_{NS}}{U} \exp(-\tilde{\alpha} x) \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) - i \mu_{NI} \exp(-\tilde{\alpha} x) \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau} \right] U. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем операторы дисперсии и нелинейности:

$$\begin{aligned} \hat{D} &= -\frac{i}{2} \operatorname{sgn}(\beta_2) \mu_{ND2} \frac{\partial^2}{\partial \tau^2} + \frac{1}{6} \operatorname{sgn}(\beta_3) \mu_{ND3} \frac{\partial^3}{\partial \tau^3}, \\ \hat{N} &= i \exp(-\tilde{\alpha} x) |U|^2 - \frac{\mu_{NS}}{U} \exp(-\tilde{\alpha} x) \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) - i \mu_{NI} \exp(-\tilde{\alpha} x) \frac{\partial |U|^2}{\partial \tau} = \\ &= \left[\frac{\partial |U|^2}{\partial \tau} = U \frac{\partial U^*}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial U}{\partial \tau}; \quad \frac{\partial (|U|^2 U)}{\partial \tau} = U \left(U \frac{\partial U^*}{\partial \tau} + 2U^* \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) \right] = \\ &= i \exp(-\tilde{\alpha} x) |U|^2 - \\ &- \mu_{NS} \exp(-\tilde{\alpha} x) \left(U \frac{\partial U^*}{\partial \tau} + 2U^* \frac{\partial U}{\partial \tau} \right) - i \mu_{NI} \exp(-\tilde{\alpha} x) \left(U \frac{\partial U^*}{\partial \tau} + U^* \frac{\partial U}{\partial \tau} \right). \end{aligned}$$

Наконец, записываем оператор дисперсии в частотном представлении:

$$\hat{D}(i\omega) = \left[\frac{\partial}{\partial \tau} \rightarrow i\omega \right] = \frac{i}{2} \operatorname{sgn}(\beta_2) \mu_{ND2} \omega^2 - \frac{i}{6} \operatorname{sgn}(\beta_3) \mu_{ND3} \omega^3.$$

После получения последних выражений, фактически, являющихся вычислительной моделью системы, можно приступить к программной их реализации и выполнению численных экспериментов.

Приложение В

Описание переменных, используемых в программе-шаблоне

Таблица В.1

Имя	Размер	Описание
mcf	1×1	Коэффициент амплитудной модуляции m
ccf	1×1	Коэффициент частотной модуляции C
T	1×1	Размер временного окна – диапазона безразмерного времени, в рамках которого ведется поиск решения
Nt	1×1	Количество точек дискретизации временной оси (значение данного параметра должно быть равно степени двойки)
dT	1×1	Шаг дискретизации временной оси
L	1×1	Длина среды
Nz	1×1	Количество точек дискретизации пространственной оси
h	1×1	Шаг дискретизации пространственной оси
koeff	1×1	Коэффициент «прореживания» точек дискретизации пространственной оси (в массивы результатов расчета fun и res попадают решения, соответствующие пространственным срезам, чей номер кратен значению koeff)
sgn1	1×1	Знак дисперсии второго порядка
muFD2	1×1	Отношение длины фазовой самомодуляции к характерной длине дисперсии второго порядка

Продолжение табл. В.1

Имя	Размер	Описание
muFD3	1×1	Отношение длины фазовой самомодуляции к характерной длине дисперсии третьего порядка
muFS	1×1	Отношение длины фазовой самомодуляции к характерной длине образования ударной волны огибающей
muFICS	1×1	Отношение длины фазовой самомодуляции к характерной длине вынужденного комбинационного саморассеяния
alpha	1×1	Постоянная затухания
i	–	Счетчик (вспомогательная переменная)
ii	–	Счетчик (вспомогательная переменная)
kk	1×1	Счетчик пространственных срезов
kk2	1×1	Счетчик пространственных срезов, для которых решение уравнения заносится в результирующий массив fun (вспомогательная переменная)
x	1×1	Текущая пространственная координата
time	$1 \times Nt$	Вектор точек дискретизации оси времени
fun	$(\text{floor}(Nz/\text{koeff})) \times Nt$	Массив вычисленных значений амплитуды огибающей импульса
res	$(\text{floor}(Nz/\text{koeff})) \times Nt$	Массив вычисленных значений квадрата модуля амплитуды огибающей импульса
OMEGA	1×1	Размер частотного окна, соответствующего временному окну, определяемому значением переменной T
dom	1×1	Шаг дискретизации оси частот
om	$1 \times Nt$	Вектор точек дискретизации оси частот
omscale	$1 \times Nt$	Вектор точек дискретизации оси частот, используемый при построении графиков
D	$1 \times Nt$	Вектор значений оператора дисперсии $\hat{D}(i\omega)$

Продолжение табл. В.1

Имя	Размер	Описание
De	$1 \times Nt$	Вектор значений $\exp\left[\frac{h}{2}\hat{D}(i\omega)\right]$
ffun	$1 \times Nt$	Вектор значений амплитуды огибающей в частотном представлении (для текущего пространственного среза)
temp	$1 \times Nt$	Вектор значений амплитуды огибающей в частотном представлении (для текущего пространственного среза) после действия оператора дисперсии
curfun	$1 \times Nt$	Вектор значений амплитуды огибающей во временном представлении в начале расчетного сегмента среды до действия оператора дисперсии
curfun2	$1 \times Nt$	Вектор значений амплитуды огибающей во временном представлении в середине расчетного сегмента среды после учета действия оператора дисперсии
curfun3	$1 \times Nt$	Вектор значений амплитуды огибающей во временном представлении в середине расчетного сегмента среды после учета действия оператора нелинейности
dif	$1 \times Nt$	Вектор значений $\partial A / \partial t$ в середине расчетного сегмента после учета действия оператора дисперсии (необходимо для вычисления оператора нелинейности)
difc	$1 \times Nt$	Вектор значений $\partial(A^*) / \partial t$ в середине расчетного сегмента после учета действия оператора дисперсии (необходимо для вычисления оператора нелинейности)
NL	$1 \times Nt$	Вектор значений оператора нелинейности
sptemp	$Nt \times (\text{floor}(Nz/\text{koeff}))$	Вспомогательная матрица для получения спектра импульса

Окончание табл. В.1

Имя	Размер	Описание
sptemp2	$(\text{floor}(Nz/\text{koeff})) \times Nt$	Вспомогательная матрица для получения спектра импульса
spectr	$Nt \times (\text{floor}(Nz/\text{koeff}))$	Вспомогательная матрица для получения спектра импульса
spres	$(\text{floor}(Nz/\text{koeff})) \times Nt$	Матрица спектра импульса
tscale	$1 \times Nt$	Шкала времени для построения графиков
zscale	$1 \times \text{floor}(Nz'/\text{koeff})$	Пространственная шкала для построения графиков