

**Министерство образования и науки Российской Федерации**  
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение  
высшего образования  
**«Владимирский государственный университет  
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»  
(ВлГУ)**

Институт машиностроения и автомобильного транспорта  
Кафедра «Технология машиностроения»

**Методические указания**

к выполнению лабораторных работ по дисциплине  
**«МЕХАНИКА И ТЕХНОЛОГИИ»**  
**(часть 1)**

для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению  
27.03.05 «Инноватика»

Составитель:  
доцент кафедры ТМС Федотов О.В.

Владимир 2016

Методические указания, содержащие рекомендации по выполнению лабораторных работ по дисциплине «Механика и технологии» для студентов ВлГУ, обучающихся по направлению 27.03.05 «Инноватика».

Настоящие методические указания составлены в соответствии с требованиями ФГОС ВО и ОПОП направления подготовки 27.03.05 «Инноватика», рабочей программы дисциплины «Механика и технологии». В качестве рекомендаций для организации эффективной работы студентов использованы методические пособия ведущих ВУЗов России.

Рекомендации предназначены для студентов очной и заочной форм обучения.

Рассмотрены и одобрены на заседании  
НМС направления 27.03.05  
Протокол № 1 от 01.09.2016 г.  
**Рукописный фонд кафедры ТМС ВлГУ**

# Лабораторная работа № 1

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ И ИССЛЕДОВАНИЙ ОПОР СОСТАВНОЙ КОНСТРУКЦИИ

**Цель работы:** Изучить способы решения задач по определению реакций связей составной конструкции.

**Содержание работы:**

1. Краткая теория.
2. Способы определения реакций связей составной конструкции.
3. Исследование изменения реакции заданной опоры в зависимости от параметров действия сил.
4. Последовательность выполнения лабораторной работы
5. Контрольные вопросы.

**Приборы и принадлежности:** Макет конструкции, линейка, транспортир.

### 1. Краткая теория.

Плоская система сил. Связи и реакции

Если твердое тело соприкасается с другими телами, которые тем или иным образом ограничивают свободу его перемещения, то такие тела по отношению к рассматриваемому называются связями, а само рассматриваемое тело называется несвободным. Действие связей на несвободные тела характеризуется силами, которые называются реакциями связей. Основные их виды представлены на рис. 1.1.

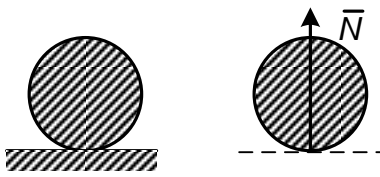
Проекция силы на ось

Проекция вектора силы на ось – алгебраическая величина, равная произведению модуля силы на косинус угла между направлением силы и положительным направлением оси (рис. 1.2).

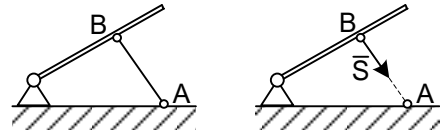
$$F_x = ab = AB_1 = F \cos \alpha .$$

1. Проекция положительна, если  $0 \leq \alpha < 90^\circ$ .
2. Проекция отрицательна, если  $90^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ .
3. Проекция равна нулю, если  $\alpha = 90^\circ$ .

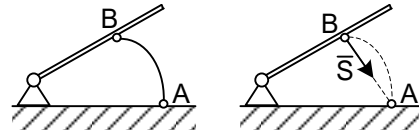
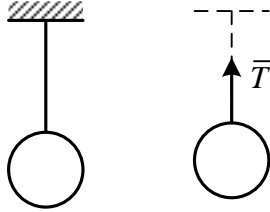
Гладкая поверхность



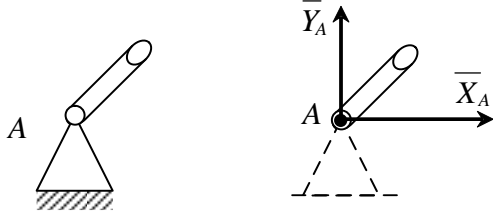
Невесомый стержень  
(прямолинейный и криволинейный)



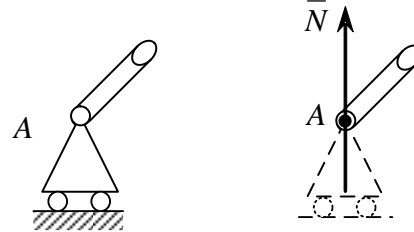
Нить, трос



Неподвижный шарнир



Подвижный шарнир



Жесткая заделка

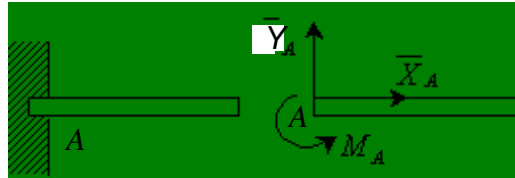


Рис. 1.1

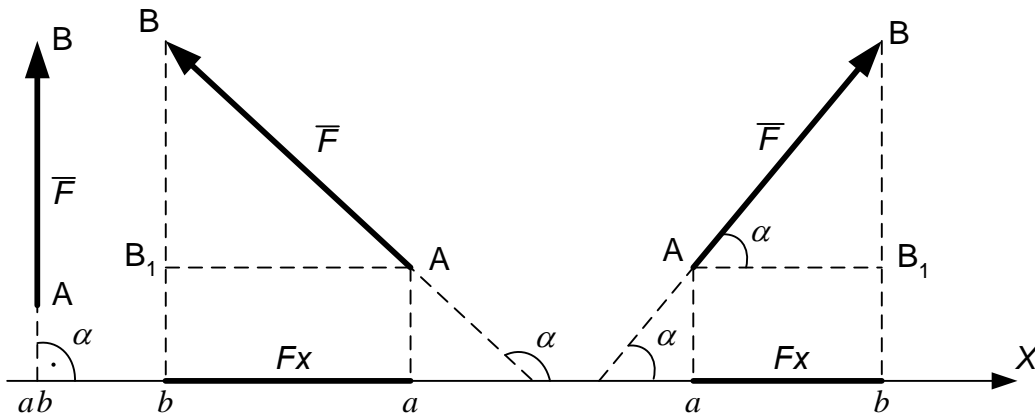


Рис.1.2

## Момент силы относительно точки

Момент силы  $\vec{F}$  относительно точки  $O$  для плоской системы сил – это алгебраическая величина, равная произведению модуля силы  $\vec{F}$  на кратчайшее расстояние  $h$  от точки  $O$  до линии действия силы  $\vec{F}$ , которое называется плечом силы (рис. 1.3).

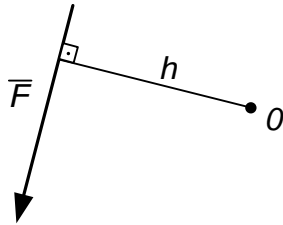


Рис. 1.3

$$m_0(\vec{F}) = Fh.$$

Момент силы относительно точки равен нулю, если линия действия силы проходит через эту точку, при этом  $h = 0$ .

Если сила  $\vec{F}$  стремится повернуть тело вокруг точки  $O$  против хода часовой стрелки, то момент силы положительный, если же по ходу часовой стрелки, то момент силы отрицательный.

## Пара сил.

Система двух равных по модулю параллельных и противоположно направленных сил  $\vec{F}$  и  $\vec{F}'$  называется парой сил (рис. 1.4).

Момент пары сил – это алгебраическая величина, равная произведению модуля одной из сил пары на кратчайшее расстояние между линиями действия сил  $h$ , которое называется плечом

$$M = Fh.$$

Момент пары сил положительный, если она стремится повернуть тело против хода часовой стрелки, и отрицательный, если по ходу часовой стрелки.

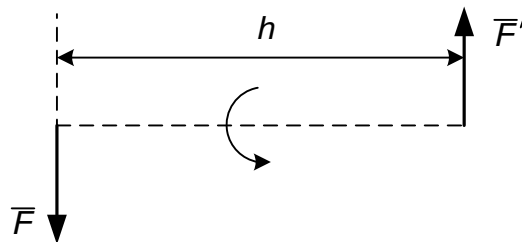


Рис. 1.4

## Свойства пар сил.

1. Алгебраическая сумма проекций пары сил на любую ось равна нулю.
2. Алгебраическая сумма моментов сил, составляющих пару относительно произвольной точки плоскости, не зависит от выбора этой точки и равна моменту пары.

## Распределенные силы

В статике рассматривают силы, приложенные к твердому телу в какой-либо его точке, которые называются сосредоточенными.

В действительности обычно силы бывают приложены к какой-либо части объема тела или его поверхности, а иногда к некоторой части линии. Такую нагрузку называют распределенной. Она характеризуется интенсивностью  $q$  (рис. 1.5, 1.6).

При решении задач распределенную нагрузку заменяют сосредоточенной силой – равнодействующей  $Q$ .

а) Равномерно распределенная нагрузка (рис. 1.5).

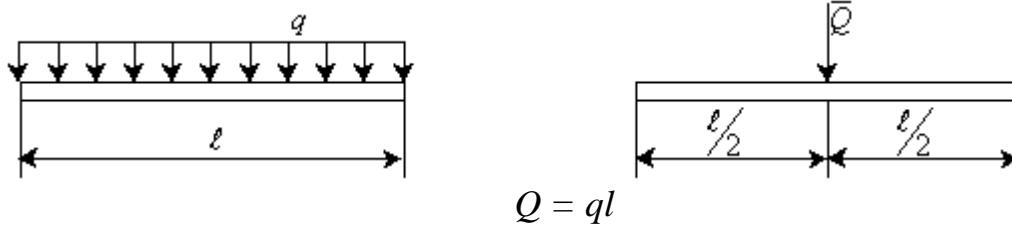


Рис. 1.5

б) Распределенная нагрузка, изменяющаяся по линейному закону (рис. 1.6).

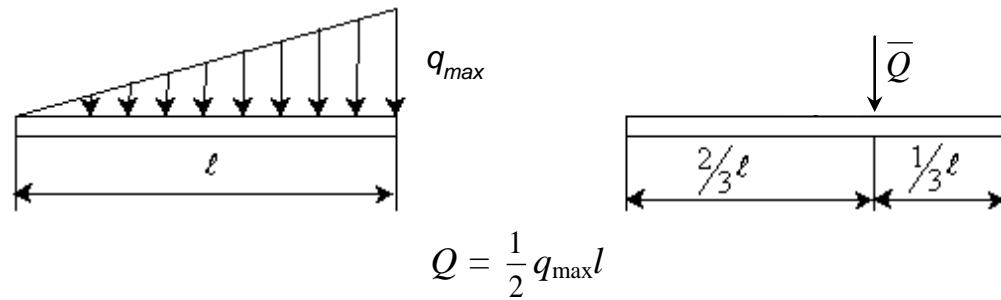


Рис. 1.6

## 1. Способы определения реакций связей составной конструкции.

Дана конструкция (рис. 1.7), состоящая из двух балок  $AC$  и  $CD$ , соединенных в точке  $C$  с помощью шарнира. Вся эта система соединена с неподвижной опорой с помощью неподвижного шарнира в точке  $A$  и двух шарнирно-подвижных опор в точке  $B$  и точке  $D$ .

Требуется определить реакции связей в точках  $A, B, D, C$ .

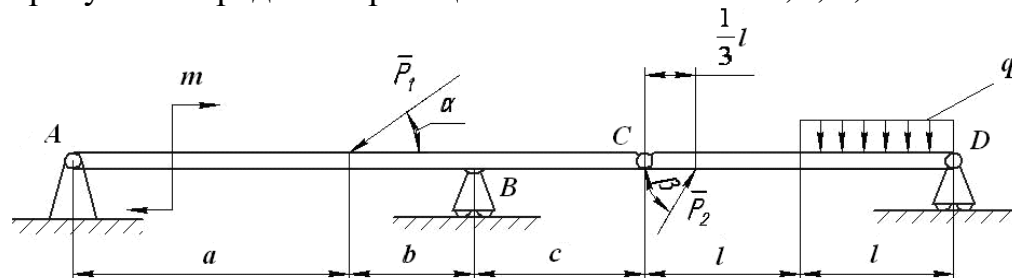


Рис. 1.7

## I способ

Заданную конструкцию разделяем на два тела  $AC$  и  $CD$ , нарушая внутреннюю связь в точке  $C$  и внешние связи в точках  $A, B, D$ . Кроме заданных сил, прикладываем к каждому телу реакции отброшенных связей: Внутренних в точке  $C$  и внешних в точках  $A, B, D$ .

Реакции шарнирно-неподвижной опоры  $A$  и цилиндрического шарнира  $C$  по направлению неизвестны, поэтому их раскладываем на две составляющие вдоль положительных направлений осей:  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A$  – в точке  $A$ ;  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  – в точке  $C$ . Реакции шарнирно-подвижных опор  $B$  и  $D$  направлены перпендикулярно к опорной плоскости и обозначены  $\bar{R}_B$  и  $\bar{R}_D$ . Получаем два объекта равновесия: балка  $AC$  и балка  $CD$ . (рис.1.8, 1.9)

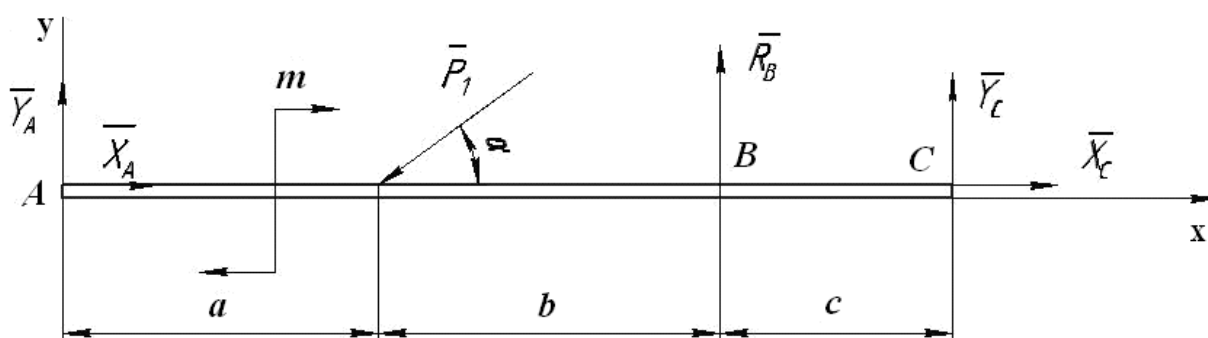


Рис. 1.8

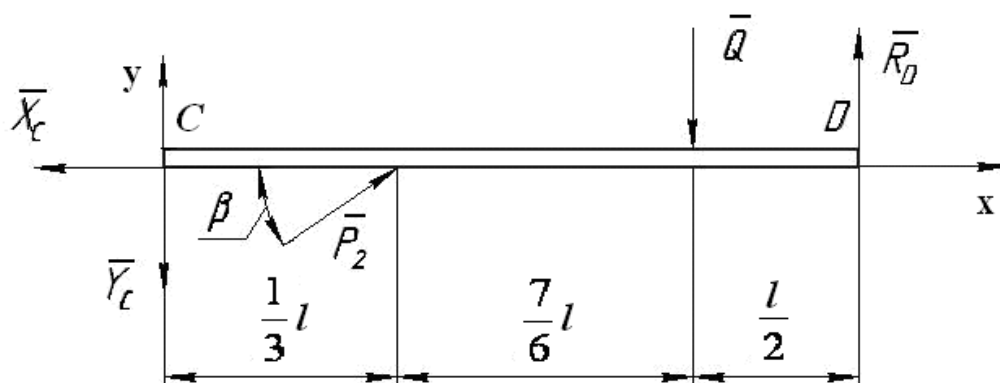


Рис. 1

При составлении расчетной схемы нужно учесть, что распределенную нагрузку заменяем сосредоточенной силой  $Q = q \cdot l$ . Прикладываем этот вектор в середине отрезка действия распределенной нагрузки.

Таким образом, вся конструкция содержит шесть неизвестных -  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_D, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$ , для определения которых необходимо иметь шесть уравнений равновесия.

Так как каждый объект находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил, то для них можно составить по три уравнения равновесия.

При составлении уравнений равновесия можно использовать одну из систем уравнений равновесия:

$$\begin{array}{lll}
 1) \quad \Sigma F_{ix} = 0; & 2) \quad \Sigma M_A = 0; & 3) \quad \Sigma M_A = 0; \\
 \quad \Sigma F_{iy} = 0; & \quad \Sigma M_B = 0; & \quad \Sigma M_B = 0; \\
 \quad \Sigma M_A = 0; & \quad \Sigma F_{ix} = 0; & \quad \Sigma M_C = 0;
 \end{array}$$

Уравнения (1) называются основными уравнениями равновесия плоской системы сил. Центр моментов и направление координатных осей для этой системы уравнений можно выбрать произвольно без каких-либо ограничений.

При составлении уравнений (2), нужно учесть, что ось  $x$ , на которую проектируются силы, не должна быть перпендикулярна к прямой, соединяющей точки  $A$  и  $B$ .

В системе уравнений равновесия (3) точки  $A, B, C$ , не должны лежать на одной прямой. Для данной конструкции такая система не подходит.

В результате для объектов  $AB$  и  $CD$  получаем систему, состоящую из 6-ти уравнений равновесия, что соответствует шести неизвестным. Задача статически определена. Решаем полученную систему уравнений и определяем неизвестные  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_D, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$ .

## II способ.

Рассматриваем вначале равновесие всей конструкции, нарушая внешние связи (опоры  $A, B, D$ ), заменяя их действие реакциями  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_D$  и не нарушая шарнир  $C$  (внутренняя связь). Составляем расчетную схему, которая показана на рис. 1.10.

Полученный объект содержит четыре неизвестных реакции связей и находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил, для которой можно составить только три уравнения равновесия. Этих уравнений не достаточно для определения четырех неизвестных.

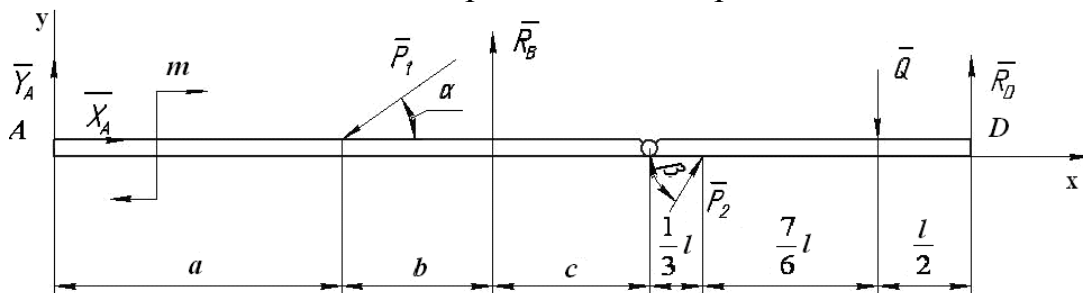


Рис. 1.10

Для их определения разделим конструкцию на две балки, нарушая цилиндрический шарнир  $C$ . Рассмотрим равновесие менее нагруженной балки, прикладывая все заданные силы, а также составляющие реакции  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  цилиндрического шарнира. (рис. 1.11)



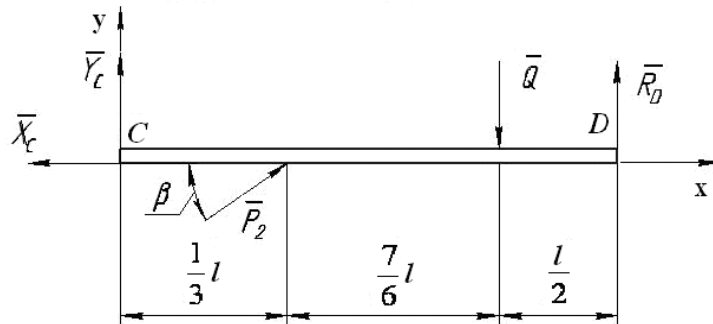


Рис. 1.11.

Для вновь полученной расчетной схемы тоже составили три уравнения равновесия. Таким образом, окончательно получаем систему из шести уравнений равновесия, решая которую, определим все шесть неизвестных  $\bar{X}_A, \bar{Y}_A, \bar{R}_B, \bar{R}_D, \bar{X}_C, \bar{Y}_C$ .

## 2. Исследование изменения реакции заданной опоры в зависимости от параметров действия сил.

Допустим надо проанализировать изменение реакции шарнира С при варьировании угла  $\alpha$  рис. 1.10 в пределах  $0 \leq \alpha < \pi$  с интервалом  $30^\circ$ .

Для этого решаем систему из шести составленных уравнений равновесия, из которых для заданного варианта получаем выражения составляющих  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  реакции шарнира С.

$$X_C = 0,5 \sin \alpha - 0,868$$

$$Y_C = -1,6 \sin \alpha + 0,2612$$

Давая параметру  $\alpha$  последовательные значения  $0, 30, \dots, 180$ , находим соответствующие им значения реакций  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  и полную реакцию шарнира

$$R_C = \sqrt{X_C^2 + Y_C^2}$$

График изменения величин  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$  и  $R_C$  приведен на рис.1.13.

Анализируя графики, можно отметить, что реакция  $Y_C$  достигает максимального значения  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 180^\circ$ , а минимального – при  $\alpha = 90^\circ$ . Реакция  $X_C$  достигает максимального значения при  $\alpha = 90^\circ$ . Максимальное значение полной реакции  $R_C$  шарнира С в расчетном диапазоне  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$  достигается при  $\alpha = 90^\circ$ , а минимальное значение – при  $\alpha = 0$  и  $\alpha = 180^\circ$ .

## 3. Последовательность выполнения лабораторной работы.

4.1. Построить в масштабе заданную схему рис.1.13 конструкции по макету с указанием внешней нагрузки, которую следует взять из таблицы №1 по варианту, выданному преподавателем.

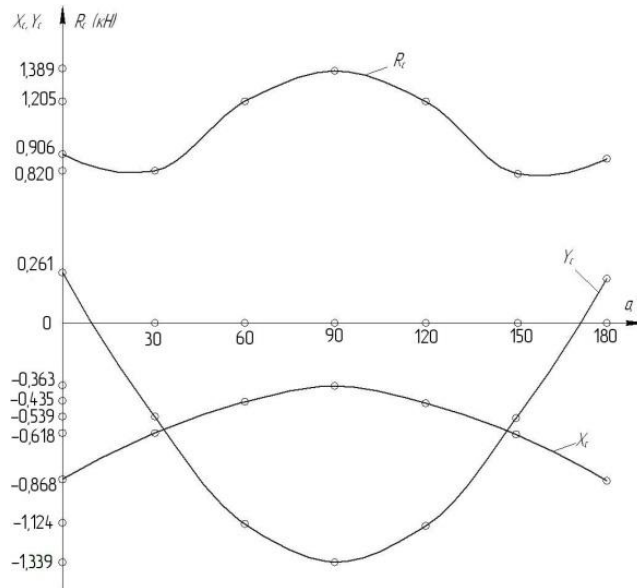


Рис. 1.12

- 4.2. Определить реакции всех связей по первому способу.
- 4.3. Определить реакции всех связей по второму способу.
- 4.4. Результаты вычислений занести в таблицу 1.1.
- 4.5. Сделать вывод: какой из способов оказался более простым.
- 4.6. Проанализировать изменение реакции опоры, заданной преподавателем, при варьировании параметра  $\alpha$  и  $\beta$  в пределах  $0 \leq \alpha \leq 180^\circ$  с интервалом  $30^\circ$ .
- 4.7. По результатам расчета построить графики изменения составляющих заданной реакции  $X$ ,  $Y$  и полной реакции  $R$  в функции углов  $\alpha$  и  $\beta$ .
- 4.8. Выполнить внеаудиторное задание по варианту, выданному преподавателем. Схемы конструкций представлены на рис. 1.1а – 1.30а.

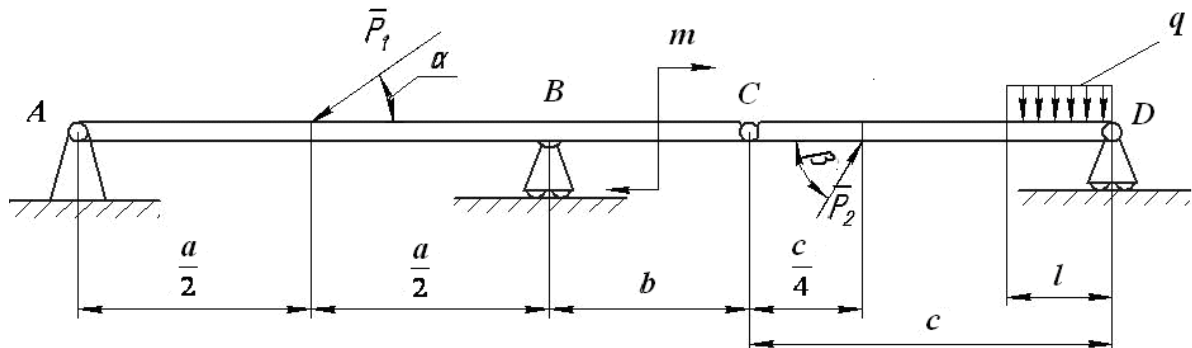


Рис. 1.13.

Таблица 1.1

Дано											Определить (Н)					
№ варианта	$P_1$ Н	$P_2$ Н	$t$ Н·м	$\alpha$ град	$\beta$ град	$a$ м	$b$ м	$c$ м	$l$ м	$q$ Н/м	$R_B$	$R_D$	$X_C$	$Y_C$	$X_A$	$Y_A$
1	2	3	2	30	45	0,8	0,5	0,6	0,30	2						
2	4	4	4	45	30	0,6	0,7	0,7	0,20	4						
3	6	5	1	60	135	0,4	0,8	0,5	0,25	3						
4	8	6	3	180	90	0,2	0,8	0,4	0,20	5						
5	5	7	5	135	60	0,1	0,7	0,3	0,15	4						
6	3	8	2	90	135	0,7	0,3	0,2	0,10	3						
7	7	9	4	60	180	0,3	0,7	0,5	0,25	6						
8	9	3	1	45	30	0,5	0,4	0,8	0,40	5						
9	5	2	3	30	45	0,5	0,3	0,7	0,30	2						
10	3	5	2	135	60	0,8	0,2	0,6	0,20	4						

#### 4. Контрольные вопросы.

- 5.1 Что называется связью? Перечислите основные типы связей.
- 5.2 Дайте определение реакции связи.
- 5.3 Дайте понятие проекции силы на ось.
- 5.4 Что называется моментом силы относительно точки?
- 5.5 Какие условия и уравнения равновесия произвольной плоской системы сил?
- 5.6 Что такое пара сил и чему равен её момент?

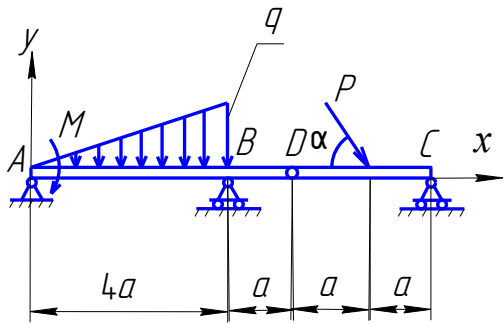


Рис. 1.1а

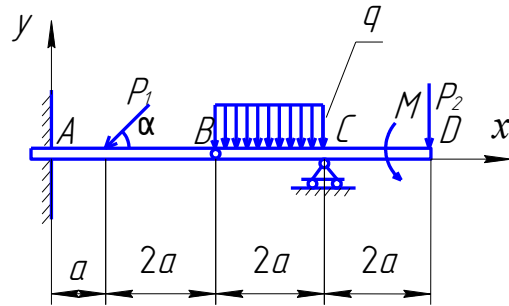


Рис. 1.2а

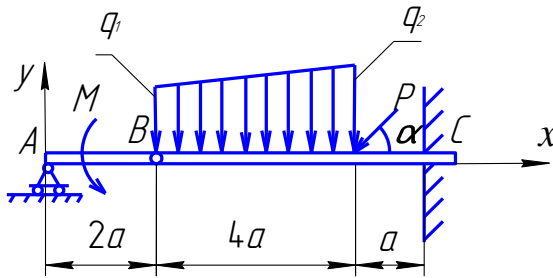


Рис. 1.3а

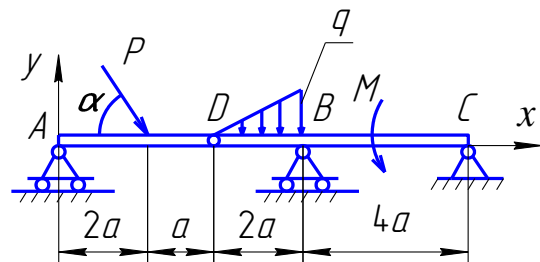


Рис. 1.4а

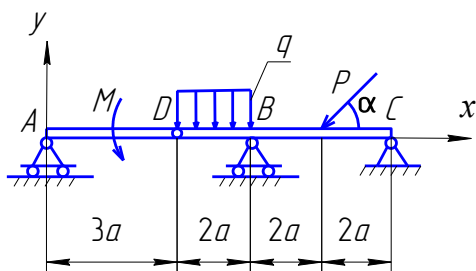


Рис. 1.5а

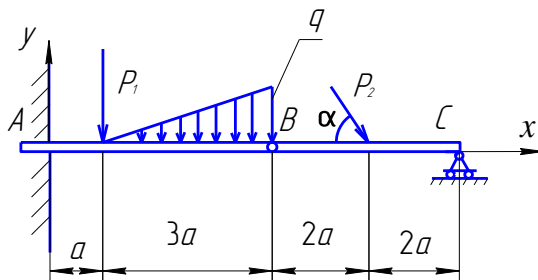


Рис. 1.6а

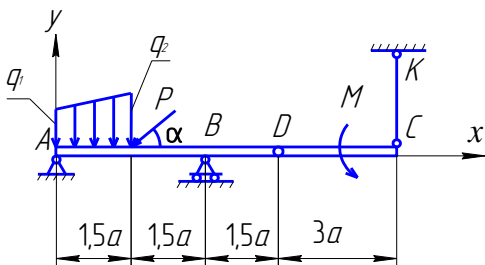


Рис. 1.7а

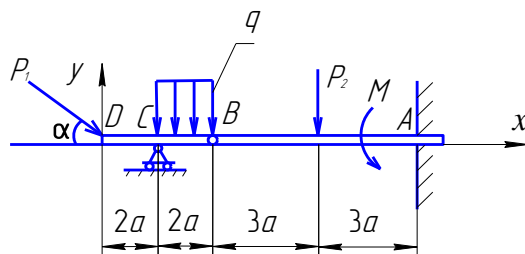


Рис. 1.8а

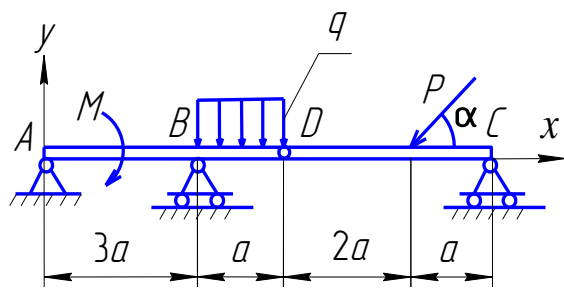


Рис. 1.9а

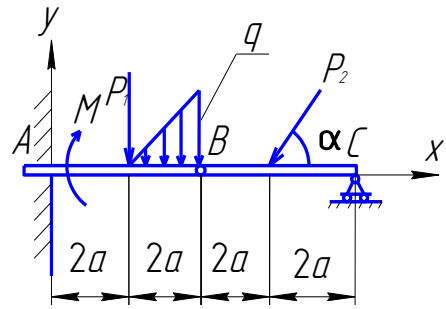


Рис. 1.10а

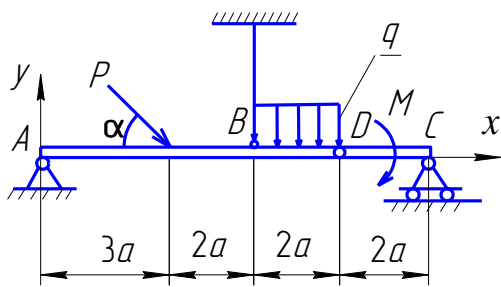


Рис. 1.11а

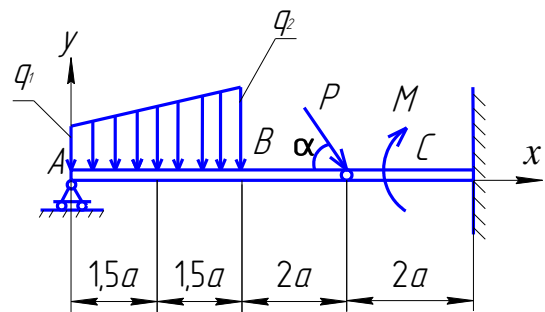


Рис. 1.12а

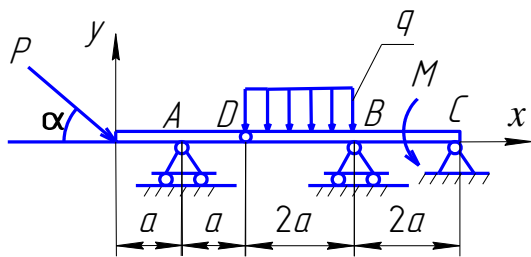


Рис. 1.13а

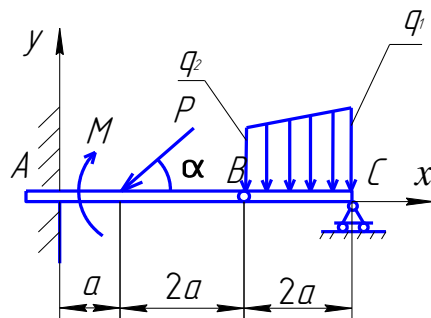


Рис. 1.14а

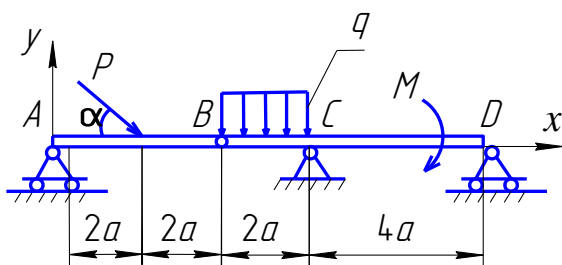


Рис. 1.15а

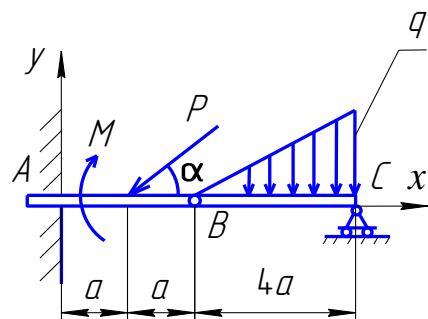


Рис. 1.16а

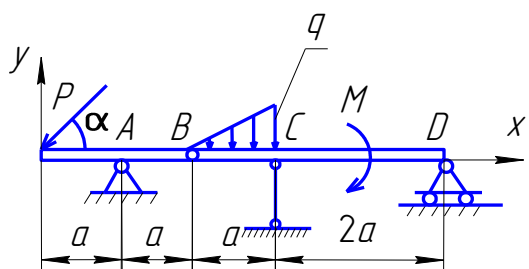


Рис. 1.17а

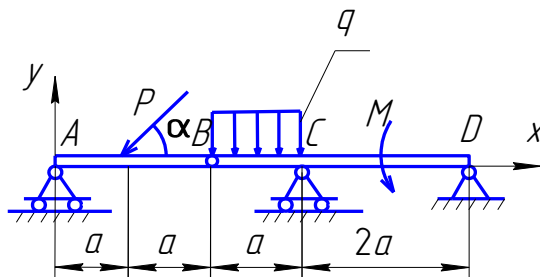


Рис. 1.18а

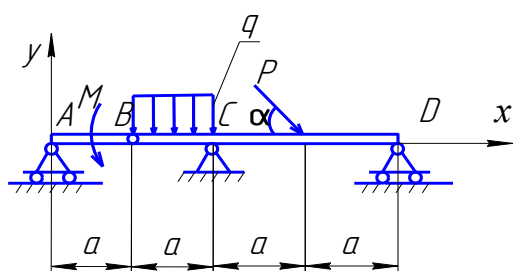


Рис. 1.19а

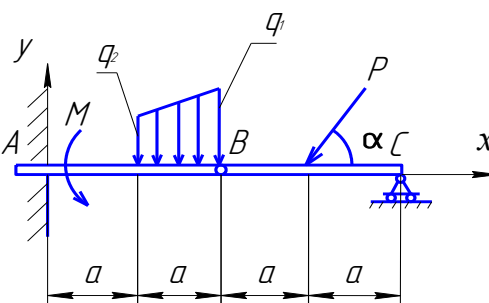


Рис. 1.20а

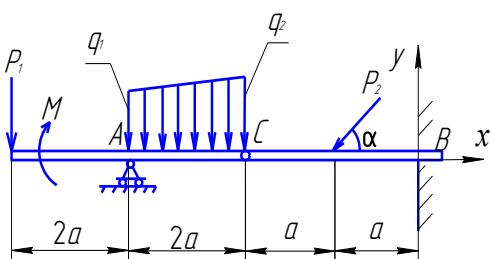


Рис. 1.21а

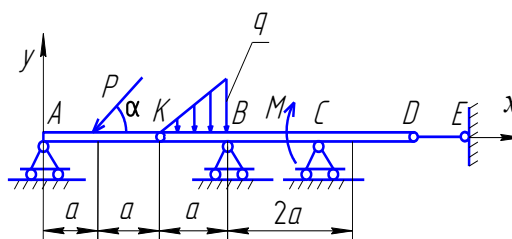


Рис. 1.22а

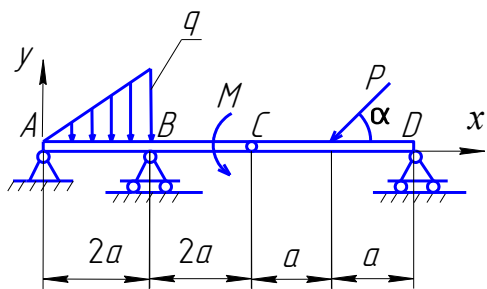


Рис. 1.23а

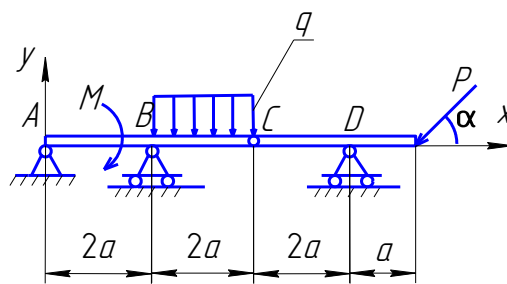


Рис. 1.24а

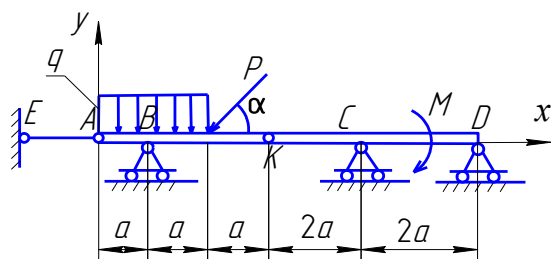


Рис. 1.25а

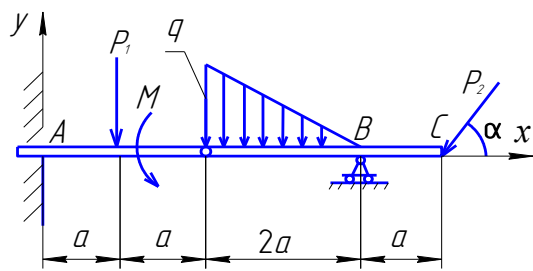


Рис. 1.26а

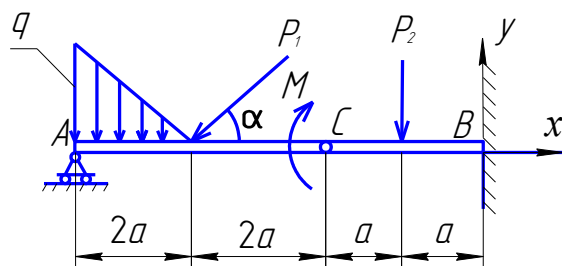


Рис. 1.27а

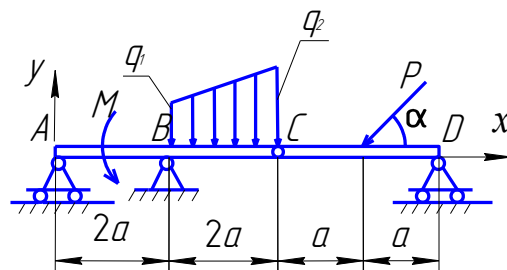


Рис. 1.28а

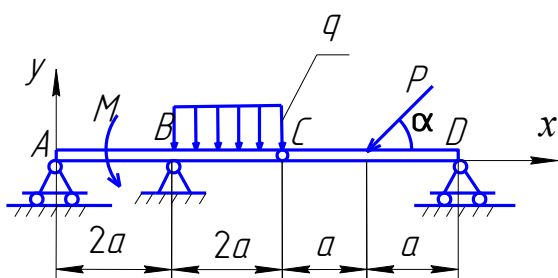


Рис. 1.29а

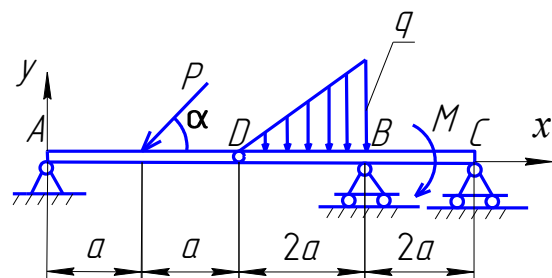


Рис. 1.30а

## Лабораторная работа № 2

### КИНЕМАТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА АНАЛИТИЧЕСКИМИ И ГРАФИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

**Цель работы:** Изучить аналитические и графические способы определения кинематических характеристик плоского механизма.

**Содержание работы:**

1. Краткая теория
2. Методы определения скоростей и ускорений точек плоского механизма.
3. Последовательность выполнения лабораторной работы.
4. Контрольные вопросы.

**Приборы и принадлежности:** Макет механизма, линейка, циркуль, транспортир.

#### 1. Краткая теория

Плоскопараллельным движением твердого тела называется такое движение, при котором все точки тела перемещаются в плоскостях, параллельных некоторой неподвижной плоскости, называемой плоскостью движения. Изучение плоскопараллельного движения твердого тела сводится к изучению движения плоской фигуры тела в её плоскости.

Плоскопараллельное движение тела можно рассматривать как сумму двух движений: поступательного движения плоской фигуры вместе с произвольной точкой, принятой за полюс и вращения вокруг полюса.

Другие теоретические будут рассмотрены по ходу выполнения лабораторной работы.

#### 2. Методы определения скоростей и ускорений точек плоского механизма.

В кинематике плоско-параллельного движения скорости и ускорения точек плоского механизма определяются разными способами.

##### 2.1. *Определение скоростей точек*

- а) Метод выбора полюса
- б) С помощью мгновенного центра скоростей.



в) По теореме о проекции скоростей на ось, соединяющую две точки плоской фигуры.

г) С помощью плана скоростей.

а) *Определение скоростей точек методом выбора полюса.*

Рассмотрим движение плоской фигуры (рис. 23.1).

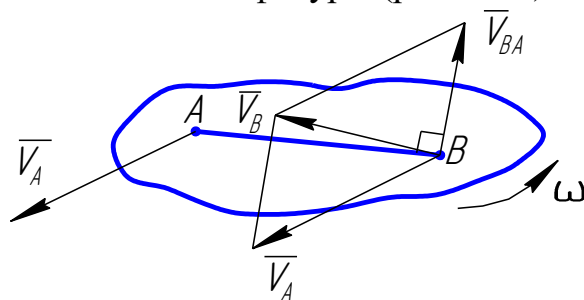


Рис. 21

По теореме о скоростях точек плоской фигуры найдём:

$$\overline{V_B} = \overline{V_A} + \overline{V_{BA}},$$

где  $\overline{V_B}$  - искомая скорость точки  $B$ ,  $\overline{V_A}$  - известная скорость точки  $A$ , принятой за полюс,  $\overline{V_{BA}}$  - вращательная скорость точки  $B$  вокруг полюса  $A$ , равная по модулю произведению угловой скорости плоской фигуры на расстояние от точки до полюса и направленная перпендикулярно к отрезку прямой  $BA$  в сторону мгновенного вращения фигуры, т.е.

$$V_{BA} = \omega \cdot BA, \quad \overline{V_{BA}} \perp BA$$

Скорость точки  $B$  изображается диагональю параллелограмма, построенного при точке  $B$  на скорости  $\overline{V_A}$ , перенесенной в точку  $B$  и скорости

$$\overline{V_{BA}} \text{ (рис. 3.1)}$$

б) *Метод определения скоростей точек с помощью мгновенного центра скоростей.*

При движении плоской фигуры в каждый момент времени существует точка тела, скорость которой равна нулю. Эта точка называется мгновенным центром скоростей и обозначается символом  $C_V$ .

Мгновенный центр скоростей находится на пересечении перпендикуляров, восстановленных к векторам скоростей точек тела. На рис. 2.2, 2.3 представлены схемы плоских механизмов, для которых дано:

$\omega_1$  – угловая скорость вращения кривошипа  $OA$ ,

$\omega_3$  – угловая скорость вращения звеньев  $O_1A=l_1$ ,  $O_2B=l_3$

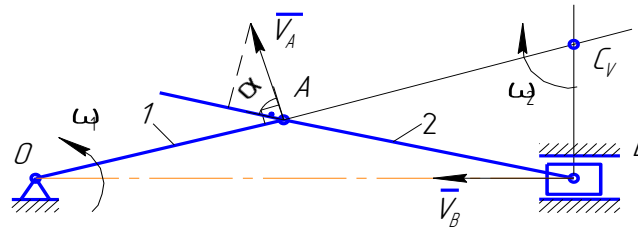


Рис. 2.2

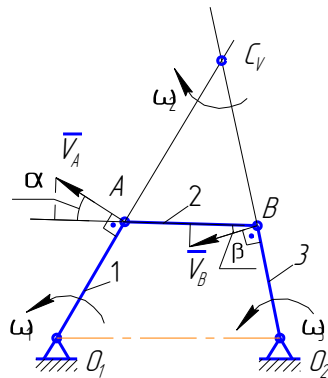


Рис. 2.3

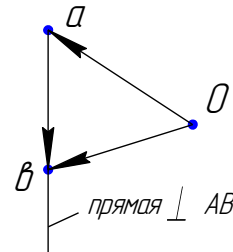


Рис.2.4

Определяем скорость точки  $A$  по известной формуле  $V_A = \omega_1 \cdot O_1A = \omega_1 \cdot l_1$ . Проводим  $\overline{V_A} \perp O_1A$  в направлении  $\omega_1$ . Затем показываем прямые направления скоростей точек  $B$ . На рис. 3.2 вдоль направляющих ползуна  $B$ , на рис. 3.3 - перпендикулярно звену  $O_2B$ . На пересечении перпендикуляров к векторам  $\overline{V_A}$  и  $\overline{V_B}$  найдём положение мгновенного центра скоростей  $C_V$  звена  $AB$ , совершающего плоскопараллельное движение. Потом определяем:

$$\omega_2 = \frac{V_A}{AC_V}; V_B = \omega_2 \cdot BC_V; \omega_3 = \frac{V_B}{O_2B} = \frac{V_B}{l_3};$$

в) *Определение скоростей точек по теореме о проекции скоростей.*

Согласно теореме о равенстве проекций скоростей точек  $A$  и  $B$  на прямую  $AB$  можно записать:  $V_A \cdot \cos\alpha = V_B \cdot \cos\beta$ , откуда:  $V_B = V_A \cdot \frac{\cos\alpha}{\cos\beta}$

г) *Определение скоростей точек плоской фигуры с помощью плана скоростей.*

Рассмотрим механизм на рис. 2.3 для точки  $B$  запишем формулу  $\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{V}_{BA}$ . Строим из произвольно выбранного центра  $O$  в масштабе вектор  $\vec{Oa}$  по величине и направлению равный  $\vec{V}_A$  (рис. 2.4). Из точки  $O$  проводим прямую направления  $\vec{V}_B$  перпендикулярно звену  $O_2B$ .

Из точки  $a$  проводим прямую направления вектора  $\vec{V}_{BA}$  перпендикулярно звену  $AB$ . В точке пересечения прямых получим точку  $b$ .

Отрезок  $\vec{Ob}$  - соответствует на плане скорости точки  $B$ , а  $\vec{ab}$  - скорости точки  $B$  во вращении вокруг полюса  $A$  ( $\vec{V}_{BA}$ ).

Измеряя отрезки  $\vec{Ob}$  и  $\vec{ab}$  и умножая на масштаб скорости  $\mu_V$  находим:  $V_B = \mu_V \cdot Ob$ ;  $V_{BA} = \mu_V \cdot ab$ . Зная, что  $V_{BA} = \omega_2 \cdot AB$ , определим  $\omega_2 = \frac{V_{BA}}{AB}$ .

## 2.2 Определение ускорений

- Метод выбора полюса (аналитический и графический способы)
- С помощью мгновенного центра ускорений

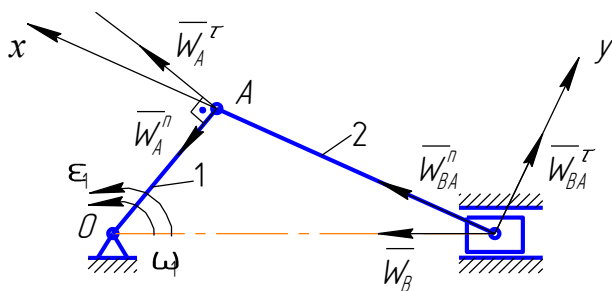


Рис. 2.5

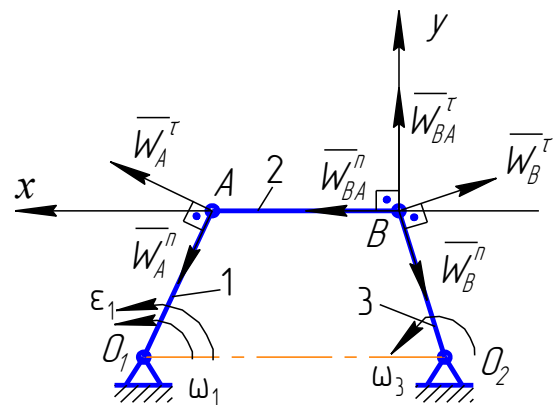


Рис. 23.6

- Определение ускорений точек методом выбора полюса.

Рассмотрим плоские механизмы на рис. 2.5, 2.6, для которых данные взять из рис. 2.2, 2.3 и дополнительно  $\varepsilon_1$  - угловое ускорение кривошипа  $O_1A$ . За полюс выбираем точку  $A$ .

Для точки  $B$  на рис. 2.5 по теореме об ускорениях запишем

$$\overline{W}_B = \overline{W}_A + \overline{W}_{BA}; \quad \overline{W}_B = \overline{W}_A^n + \overline{W}_A^\tau + \overline{W}_{BA}^n + \overline{W}_{BA}^\tau \quad (2.1)$$

Модули ускорений равны:  $\overline{W}_A^n = \omega_1^2 \cdot l_1$ ;  $\overline{W}_A^\tau = \varepsilon_1 \cdot l_1$ ;  $\overline{W}_{BA}^n = \omega_2^2 \cdot l_2$ ;

$$\overline{W}_{BA}^\tau = \varepsilon_2 \cdot l_2;$$

Для точки  $B$  на рис. 3.5 также по теореме об ускорениях будем иметь:

$$\overline{W}_B = \overline{W}_A^n + \overline{W}_A^\tau + \overline{W}_{BA}^n + \overline{W}_{BA}^\tau,$$

Так как  $\overline{W}_B = \overline{W}_B^n + \overline{W}_B^\tau$ , то получим

$$\overline{W}_A^n + \overline{W}_A^\tau = \overline{W}_B^n + \overline{W}_B^\tau + \overline{W}_{BA}^n + \overline{W}_{BA}^\tau \quad (2.2)$$

Найдём модули ускорений

$$W_B^n = \omega_3^2 \cdot l_3; \quad W_B^\tau = \varepsilon_3 \cdot l_3; \quad W_B = \sqrt{(W_B^n)^2 + (W_B^\tau)^2}.$$

Уравнения (2.1) и (2.2) можно решить аналитически, проектируя их на оси  $x$  и  $y$ , (рис. 2.5, 2.6), показав при точках  $A$  и  $B$  векторы ускорений без масштаба. При этом  $\overline{W}_A^\tau \perp O_1A$  и направлен в сторону  $\varepsilon_1$ ,  $\overline{W}_A^n$  направлено вдоль  $AO_1$  к оси  $O_1$ ,  $\overline{W}_{BA}^\tau \perp BA$  предположительно направлено в любую сторону,  $\overline{W}_{BA}^n$  направлено вдоль звена  $AB$  к полюсу  $A$ ,  $\overline{W}_B^\tau \perp O_2B$  и предположительно направлено в любую сторону,  $\overline{W}_B^n$  направлено вдоль  $O_2B$  к оси  $O_2$ .

Из полученных уравнений сможем определить в первом случае  $W_B$ ,

$W_{BA}^\tau$  и затем  $\varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^\tau}{AB}$ , а во втором -  $W_B^\tau$ ,  $W_{BA}^\tau$  и потом

$$W_B = \sqrt{(W_B^n)^2 + (W_B^\tau)^2}, \quad \varepsilon_{AB} = \frac{W_{BA}^\tau}{AB}.$$

Решим уравнение (2.1) графическим способом построением плана ускорений (рис.2.7).

Строим при точке  $B$  в масштабе известные по модулю векторы  $\overline{W}_A^n$ ,  $\overline{W}_A^\tau$ ,  $\overline{W}_{BA}^n$ , откладывая их последовательно.

Затем проводим прямые направления ускорений  $\overline{W}_B$  вдоль направляющих ползуна  $B$  и  $\overline{W}_{BA}^\tau$  перпендикулярно  $AB$  из конца вектора  $W_{BA}^n$

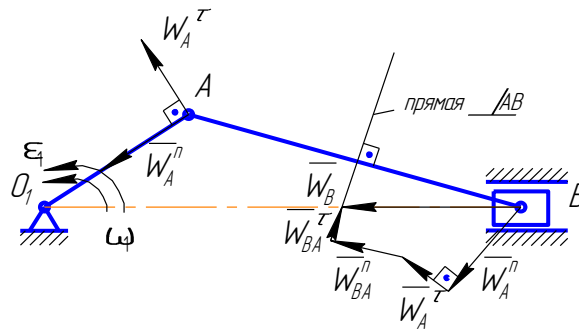


Рис. 2.7

В точке пересечения этих прямых получим  $\overline{W}_B$ .

Измеряя длину вектора  $\overline{W}_B$  и умножая на масштаб  $\mu_W$ , найдём модуль ускорения точки  $B$ , т.е.  $W_B = \mu_W \overline{W}_B$

Аналогично решим графически уравнение (2.2) (рис.2.8)

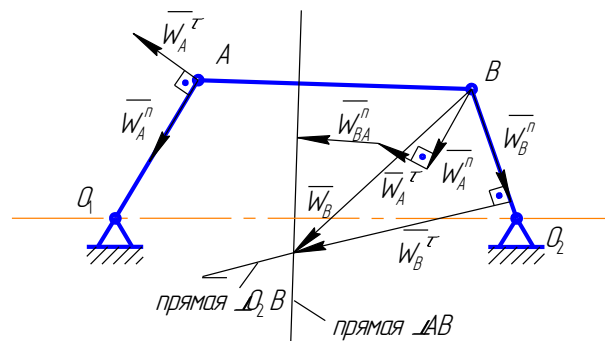


Рис. 2.8

Строим в масштабе известные по величине векторы ускорений правой части уравнения (2.2)  $\overline{W}_A^n$ ,  $\overline{W}_A^\tau$ ,  $\overline{W}_{BA}^n$  и прямую направления вектора  $\overline{W}_{BA}^\tau \perp BA$ , а также известный по величине вектор  $\overline{W}_B^n$  левой части уравнения и прямую направления  $W_B^\tau$ . Точку пересечения прямых соединим с точкой  $B$  и получим вектор  $\overline{W}_B$ . Измерив его и умножив на масштаб  $\mu_W$ , определим модуль ускорения точки  $B$ .

б) *Определение ускорений точек с помощью мгновенного центра ускорений.*

Мгновенным центром ускорений называется точка плоской фигуры, ускорение которой в данный момент равно нулю. Он обозначается символом  $C_w$ .

Положение мгновенного центра ускорений определяется формулами по заданным  $\overline{W}_A$ ,  $\varepsilon$  и  $\omega$ .

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{|\varepsilon|}{\omega^2}; \quad AC_w = \frac{W_A}{\sqrt{\varepsilon^2 + \omega^4}}.$$

Откладывая угол  $\alpha$  от вектора ускорения  $\overline{W}_A$  в сторону углового ускорения  $\varepsilon$ , проводим полупрямую, на которой на расстоянии  $AC_w$  находится мгновенный центр ускорений  $C_w$  (рис. 2.9).

Ускорение произвольной точки  $B$  определяется из пропорции:

$$\frac{W_A}{W_B} = \frac{AC_w}{BC_w}, \text{ откуда } W_B = W_A \frac{BC_w}{AC_w}.$$

Вектор  $\overline{W}_B$  проводим под углом  $\alpha$ , отложенным от отрезка  $BC_w$  противоположно направлению углового ускорения  $\varepsilon$ .

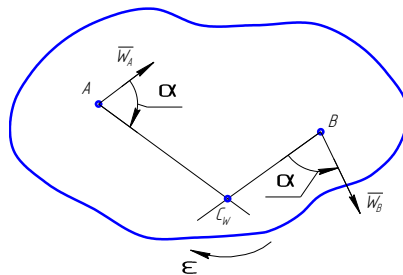


Рис. 2.9

### 3. Последовательность выполнения лабораторной работы.

- 3.1. Построение механизма. Для этого взять из сложного механизма три первых звена, начиная с ведущего, для которого заданы кинематические характеристики, измерить длины звеньев  $l_1$ ,  $l_2$ ,  $l_3$ , отложив угол  $\alpha^0$  по своему варианту. Выбрав соответствующий масштаб, построить механизм.

- 3.2. Определить скорость точки, принадлежащей одновременно первому и второму звеньям. Затем определить скорость точки, принадлежащей одновременно звеньям 2 и 3 и угловые скорости  $\omega_2, \omega_3$ . теми методами, которые приведены в теоретической части лабораторной работы.
- 3.3. Определить ускорения тех же точек, которые указаны во 2-ом пункте и угловые ускорения 2-ого и 3-ого звеньев, методами, перечисленными выше.  
Результаты вычислений занести в таблицу 2.1.
- 3.4. Выполнить внеаудиторное задание по варианту схемы плоского механизма (рис. 2.1а – 2.30а), выданному преподавателем и таблице 2.2.

Таблица 2.1

	$\alpha$ , град	$l_1$ , см	$l_2$ , см	$l_3$ , см	$\omega_1$ , с <sup>-1</sup>	$\varepsilon_1$ , с <sup>-2</sup>	$V_A$ см/с	$V_B$ см/с	$\omega_2$ с <sup>-1</sup>	$\omega_3$ , с <sup>-1</sup>	$W_A$ , см/с <sup>2</sup>	$W_B$ , см/с <sup>2</sup>	$\varepsilon_2$ , с <sup>-2</sup>	$\varepsilon_3$ , с <sup>-2</sup>
Мгновенный центр скорости														
Теорема о проекц. скорости														
План скоростей														
Аналитич. определение ускорения														
Графическое определение ускорения														
Мгновенный центр ускорений														

#### 4. Контрольные вопросы

- 4.1. Какое движение тела называется плоскопараллельным?

4.2. Определение скоростей точек тела при плоскопараллельном движении.

4.3. Что такое мгновенный центр скоростей, способы его определения?

4.4. Определение скоростей точек тела с помощью мгновенного центра скоростей.

4.5. Определение ускорений точек тела при плоскопараллельном движении.



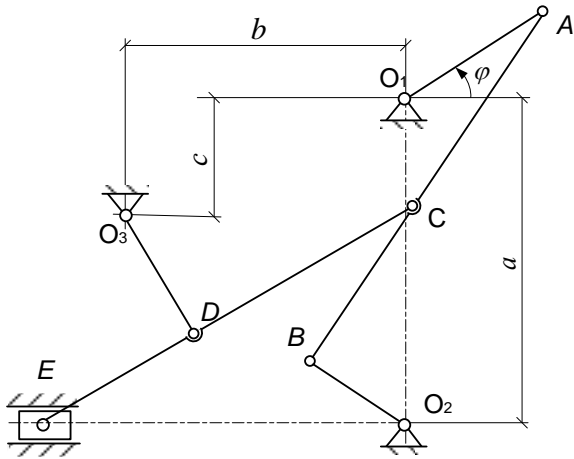


Рис. 2.1 а

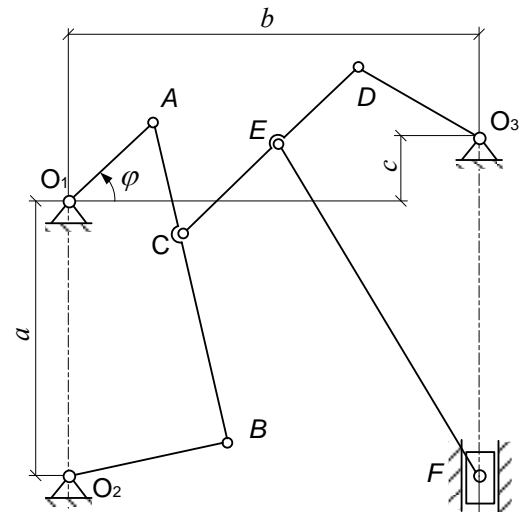


Рис. 2.2 а

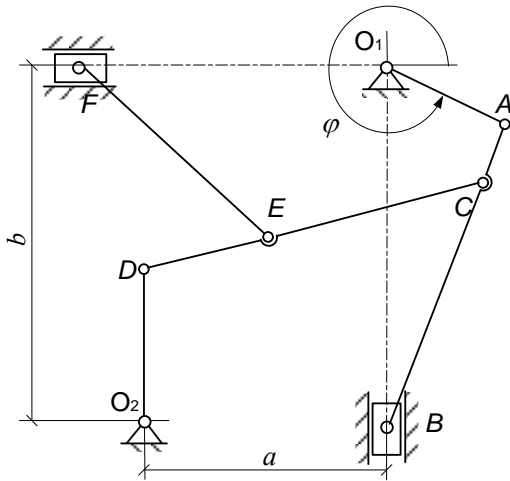


Рис. 2.3 а

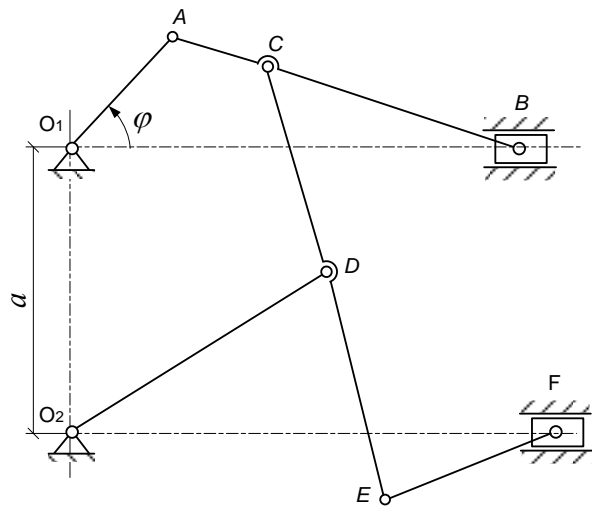


Рис. 2.4 а

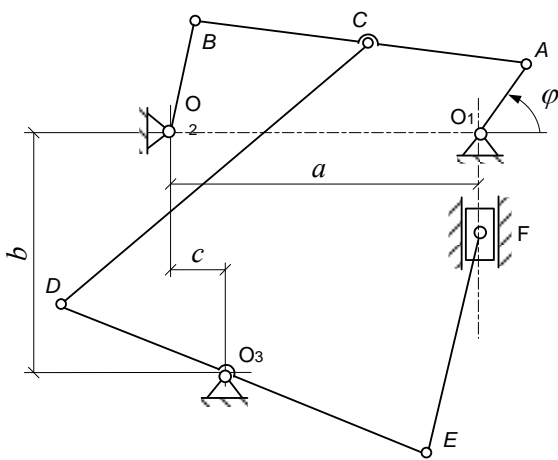


Рис. 2.5 а

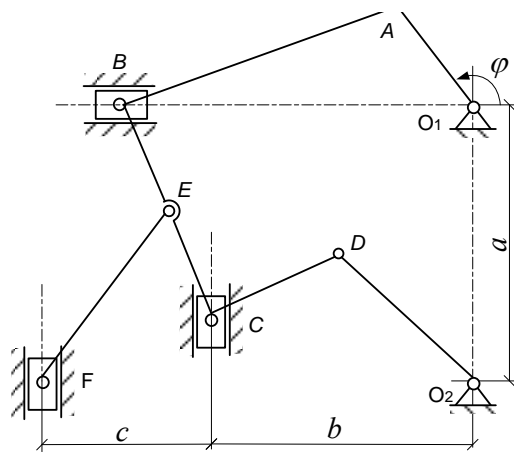


Рис. 2.6 а

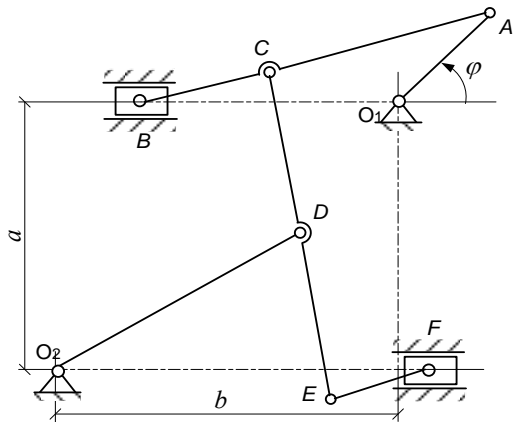


Рис. 2.7 а

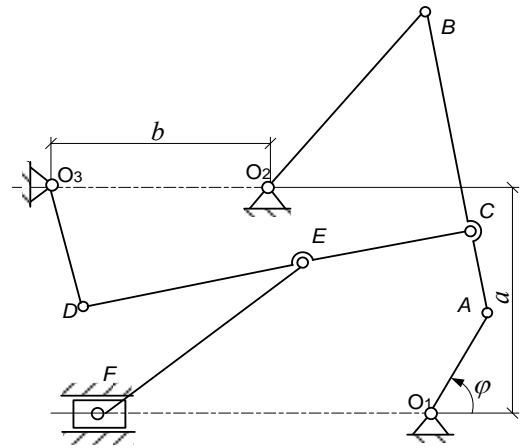


Рис. 2.8 а

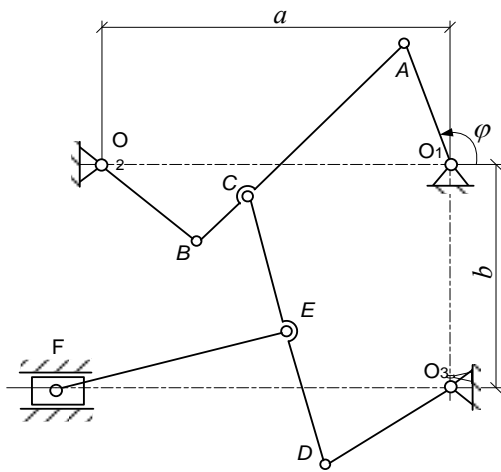


Рис. 2.9 а

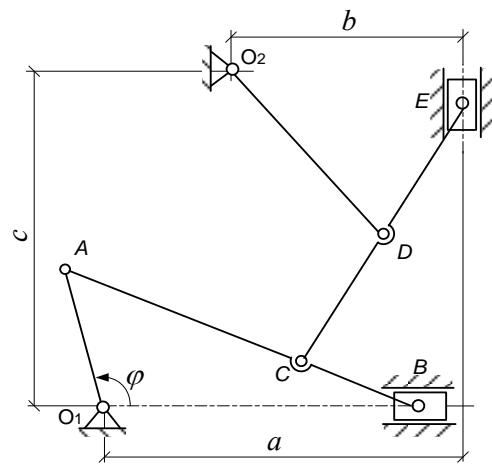


Рис. 2.10 а

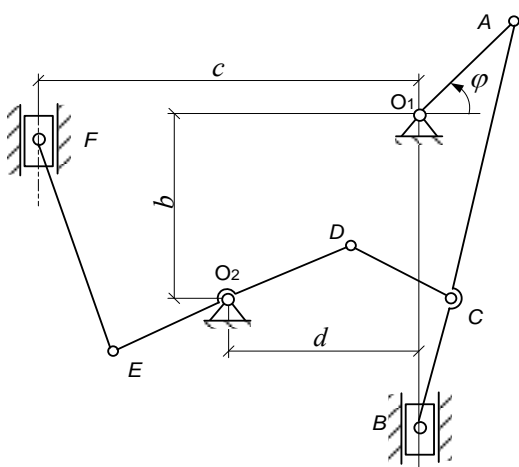


Рис. 2.11 а

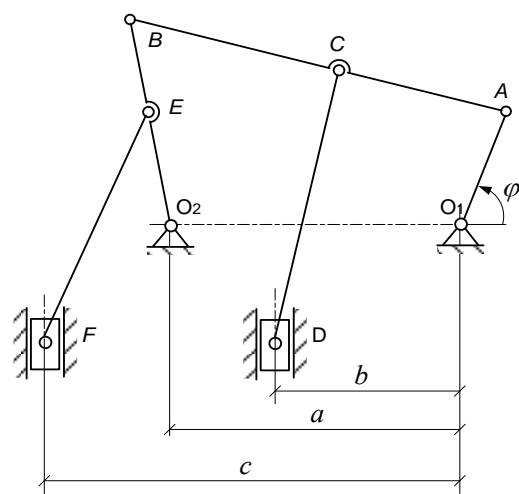


Рис. 2.12 а

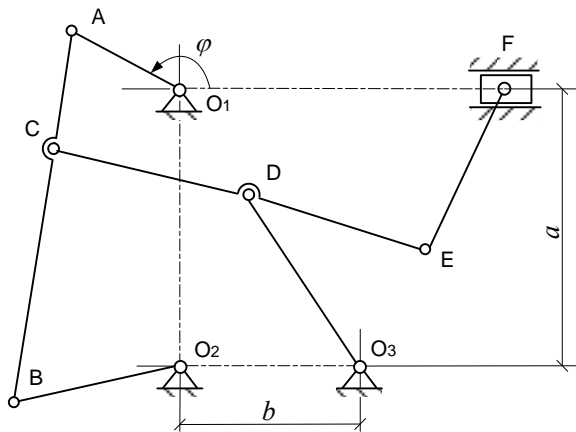


Рис. 2.13 а

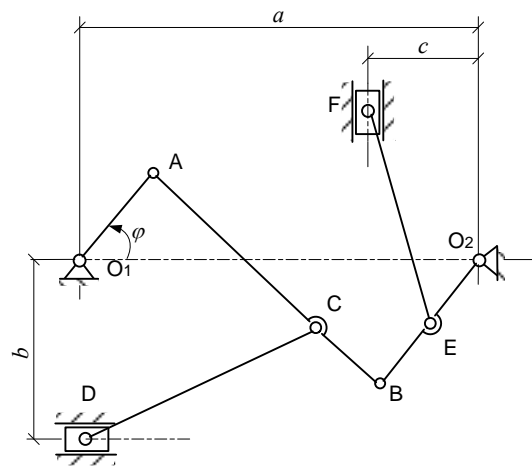


Рис. 2.14 а

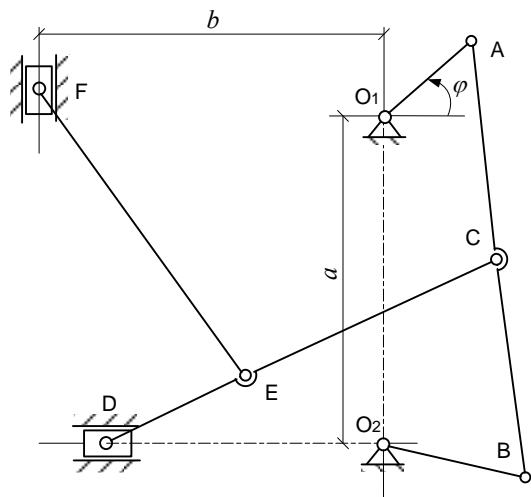


Рис. 2.15 а

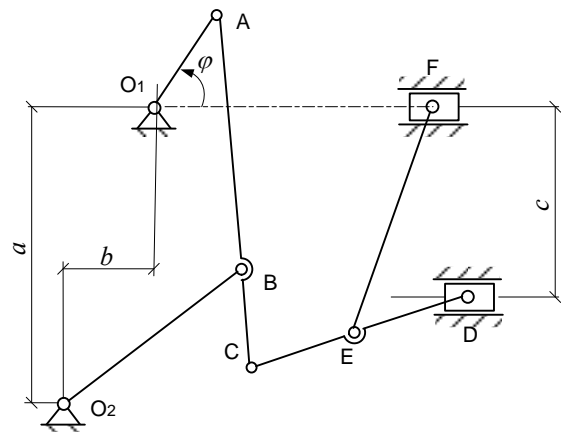


Рис. 2.16 а

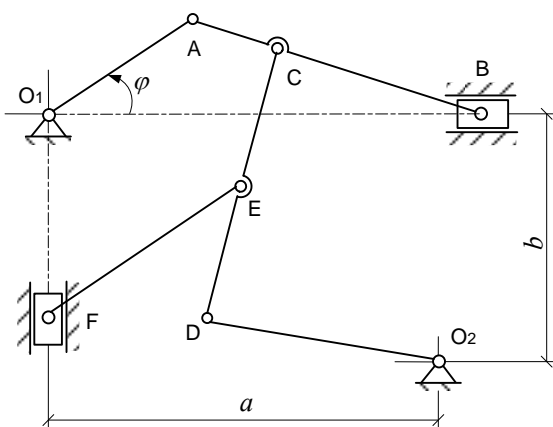


Рис. 2.17 а

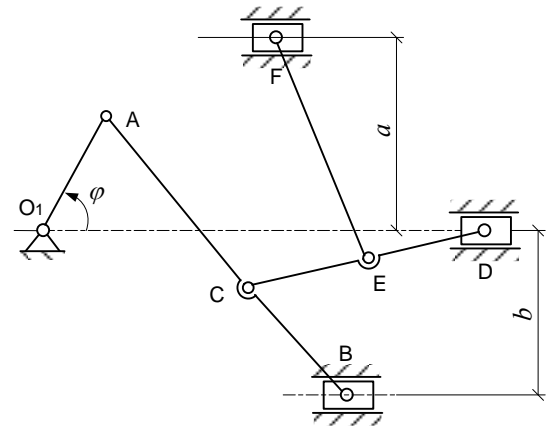


Рис. 2.18 а

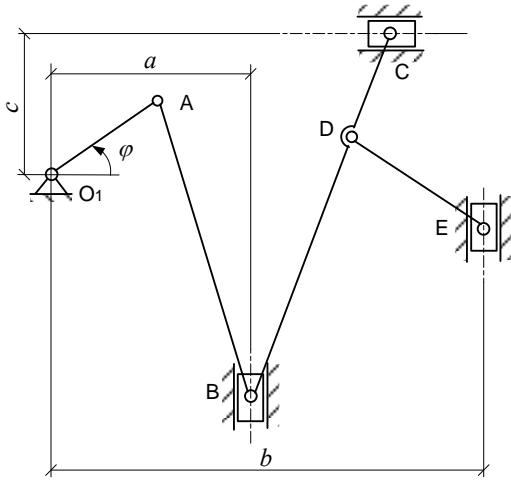


Рис. 2.19 а

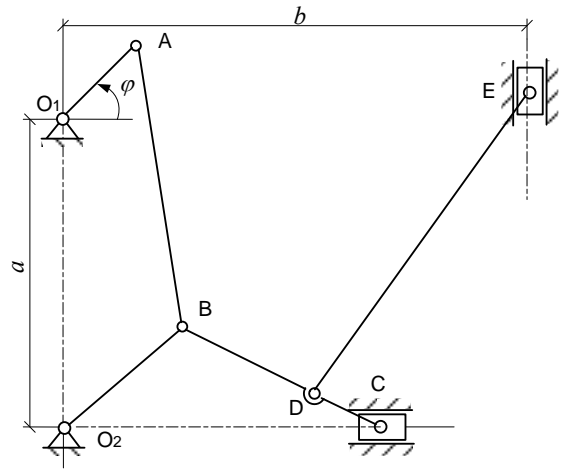


Рис. 2.20 а

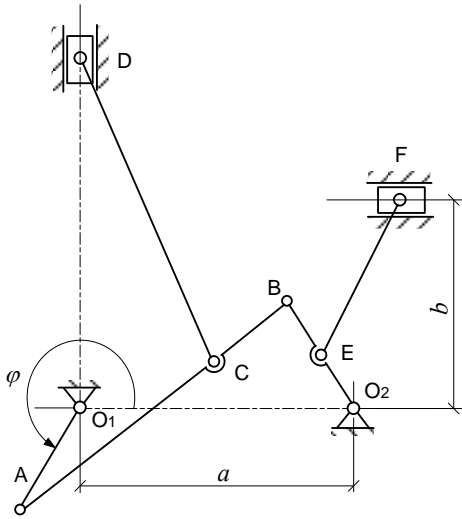


Рис. 2.21 а

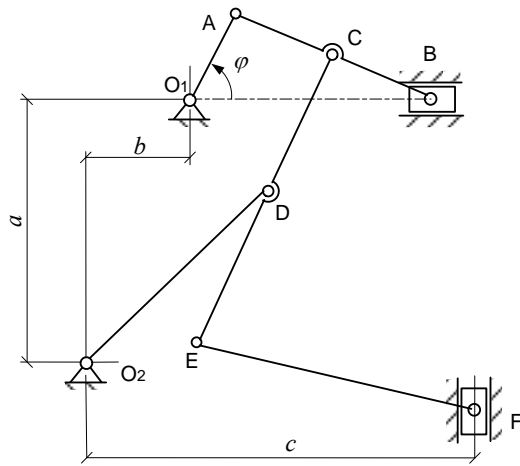


Рис. 2.22 а

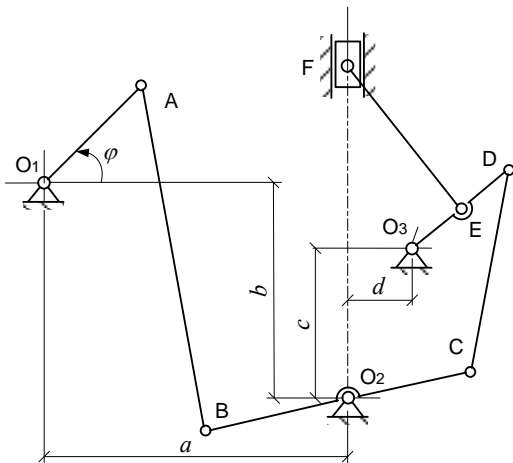


Рис. 2.23 а

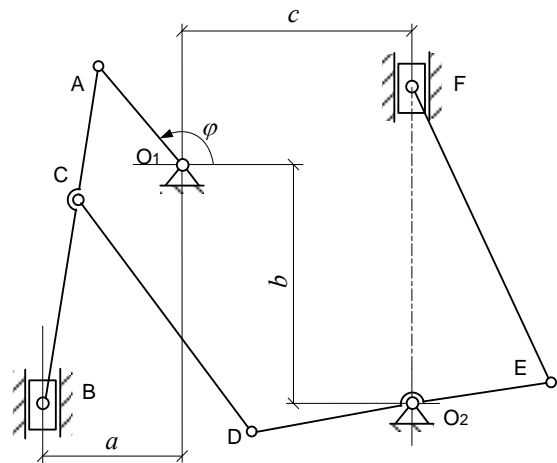


Рис. 2.24 а

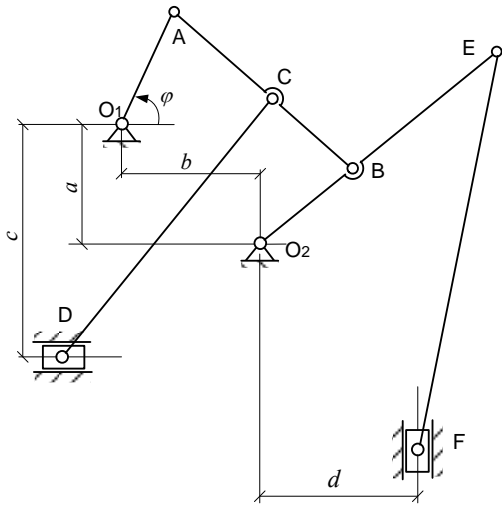


Рис. 2.25 а

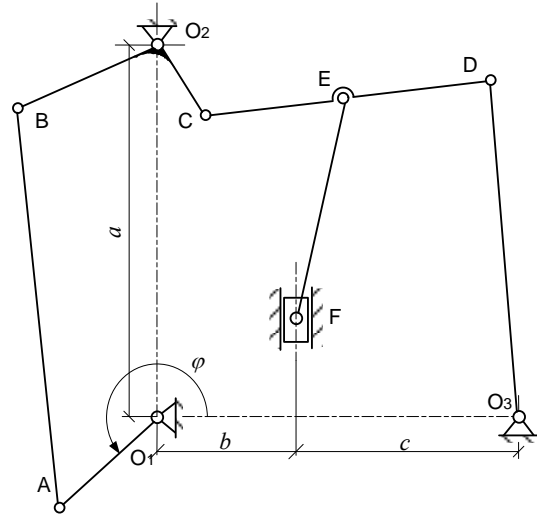


Рис. 2.26 а

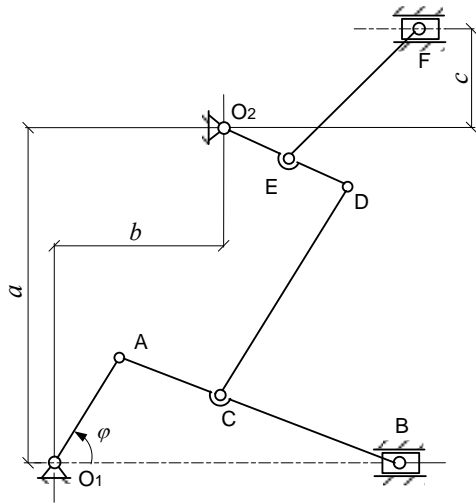


Рис. 2.27 а

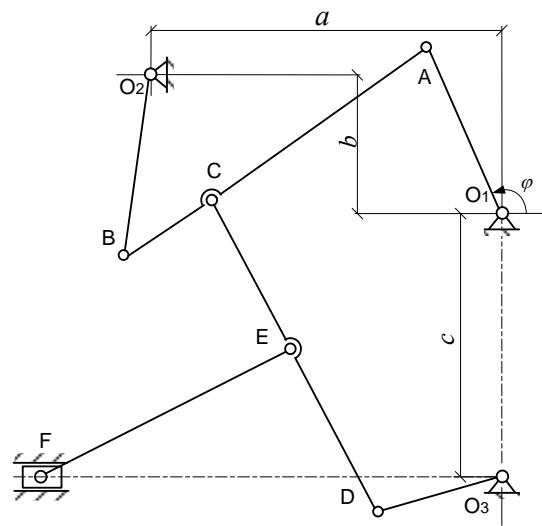


Рис. 2.28 а

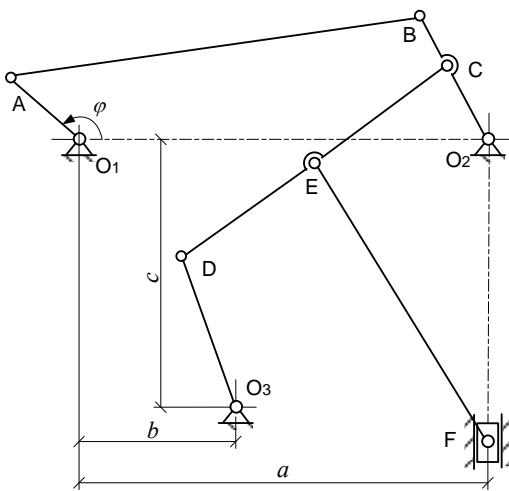


Рис. 2.29 а

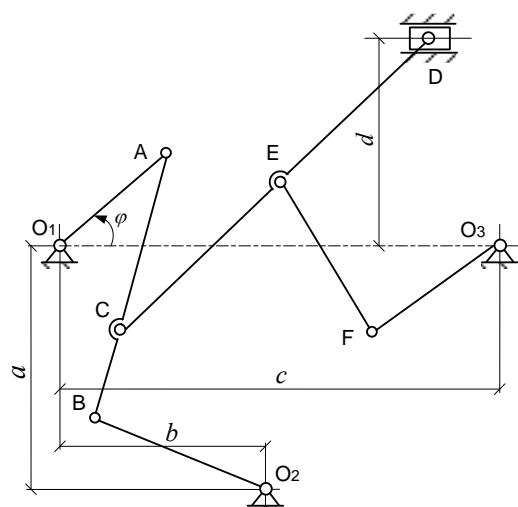


Рис. 2.30 а

Таблица 2.2

номер варианта	Расстояние, см				Длина звеньев, см											
	<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	$O_1A$	$O_2B$	$O_2D$	$O_3D$	<i>AB</i>	<i>BC</i>	<i>CD</i>	<i>CE</i>	<i>DE</i>	<i>EF</i>	$O_2E$	
<b><i>a</i></b>																
0	60	78	21	-	22	30	-	35	72	24	35	70	-	-	-	
1	50	90	15	-	20	28	-	25	63	42	64	32	-	73	-	
2	63	75	-	-	30	-	34	-	64	48	84	56	-	56	-	
3	51	-	-	-	25	-	60	-	81	54	43	86	-	45	-	
4	73	45	8	-	18	24	-	23	80	40	60	-	69	50	-	
5	57	62	50	-	26	-	40	-	86	56	32	28	-	44	-	
6	50	83	-	-	32	-	50	-	90	30	36	72	-	41	-	
7	48	38	-	-	24	40	-	26	60	40	72	36	-	52	-	
8	100	45	-	-	28	35	-	24	90	30	62	31	-	62	-	
9	105	64	28	-	23	-	50	-	99	33	35	70	-	-	-	
<b><i>b</i></b>																
0	52	40	104	52	26		41	-	63	21	92		46	48	-	
1	66	40	98	-	21	39	-	-	82	41	56	-	-	58	19	
2	50	41	-	-	20	25	-	34	60	45	65	86	-	46	-	
3	92	44	30	-	21	31	-	-	70	25	60	-	-	48	20	
4	62	38	-	-	22	26	-		76	38	66	99	30	-	-	
5	37	21	30	-	19	44	-	-	66	22	62	31	-	37	-	
6	81	55	-	-	25	-	56	-	69	46	44	32	-	41	-	
7	45	37	-	-	26	-	-	-	93	31	60	30	-	55	-	
8	44	108	33	-	25	-	-	-	72	92	23	-	45	-	-	
9	64	120	-	-	24	40	-	-	50	52	13	-	90	-	-	
<b><i>в</i></b>																
0	90	50	-	-	22	32	-	-	90	30	71	-	-	45	16	
1	60	17	113		22	-	60	-	64	32	34	68	-	60	-	
2	78	56	30	10	25	46	-	26	78	69	36	-	13	42	-	
3	32	50	53	-	23	-	30	-	72	48	45	-	50	60	-	
4	23	54	42	32	24	19	57	-	64	32	64	-	-	63	30	
5	61	36	66	-	25	31	-	61	60	-	82	41	-	46	20	
6	61	42	18	-	24	-	32	-	81	27	46	-	-	52	16	
7	83	17	45	-	25	30	-	24	78	26	60	30	-	65	-	
8	82	42	52	-	23	28	-	26	88	-	72	36	-	54	-	
9	50	34	95	-	21	-	31	-	78	26	32	-	62	58	31	

# Лабораторная работа № 3

## ПРИМЕНЕНИЕ ПРИНЦИПА ДАЛАМБЕРА ДЛЯ ОПРЕДЕЛЕНИЯ РЕАКЦИЙ СВЯЗЕЙ ПЛОСКОГО МЕХАНИЗМА

**Цель работы:** Изучение теоретического материала и применение принципа Даламбера для решения задач динамики.

**Содержание работы:**

1. Краткая теория.
2. Определение реакций связей плоского механизма с помощью принципа Даламбера.
3. Последовательность выполнения работы.
4. Контрольные вопросы.

**Приборы и принадлежности:** Макет механизма, линейка, циркуль, транспортир.

### 1. Краткая теория.

#### 1.1. Принцип Даламбера для механической системы

Принцип Даламбера позволяет решать задачи исследования динамики материальной системы методами статики, составлением уравнений равновесия, учитывая силы инерции точек системы.

Согласно принципу Даламбера, главный вектор всех сил (внешних, внутренних, условно приложенных сил инерции точек) и главный момент их относительно любого неподвижного центра будут равны нулю:

$$\begin{aligned}\bar{R}' &= \sum \bar{F}_i^{(e)} + \sum \bar{F}_i^{(i)} + \sum \bar{F}_i^{(un)} = 0, \\ \bar{M}_o &= \sum \bar{M}_o(\bar{F}_i^{(e)}) + \sum \bar{M}_o(\bar{F}_i^{(i)}) + \sum \bar{M}_o(\bar{F}_i^{(un)})\end{aligned}$$

Учитывая, что  $\sum \bar{F}_i^{(i)} = 0$  и  $\sum \bar{M}_o(\bar{F}_i^{(i)}) = 0$ , окончательно получим:

$$\begin{aligned}\bar{R}' &= \sum \bar{F}_i^{(e)} + \sum \bar{F}_i^{(un)} = 0, \\ \bar{M}_o &= \sum \bar{M}_o(\bar{F}_i^{(e)}) + \sum \bar{M}_o(\bar{F}_i^{(un)}) = 0\end{aligned}$$

Таким образом, принцип Даламбера исключает внутренние силы и упрощает решение задач.

Следует научиться находить главный вектор  $\bar{R}'_{un}$  и главный момент  $\bar{M}_o^{un}$  сил инерции.

#### 1.2. Приведение сил инерции точек твердого тела к простейшему виду.

а) Твердое тело совершает поступательное движение (рис. 3.1)

Силы инерции приводятся к равнодействующей  $\bar{R}_{ин}$ , приложенной к центру масс «С» твердого тела. Равнодействующая равна по модулю произведению массы твердого тела  $M$  на ускорение  $\bar{W}$  любой его точки и направлена противоположно этому ускорению.

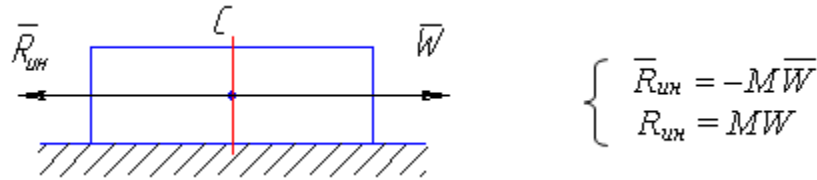


Рис. 3.1

б) Твердое тело совершает вращение вокруг неподвижной оси, перпендикулярной к плоскости материальной симметрии (рис. 3.2).

При приведении сил инерции точек тела к центру ее вращения «O» получим силу, приложенную в этом центре, и пару сил, лежащую в плоскости симметрии.

Сила равна главному вектору, направленному противоположно ускорению центра масс

$$\bar{R}'_{ин} = -M\bar{W}_C,$$

где  $\bar{W}_C$  - ускорение центра масс.

Модуль главного вектора равен  $R'_{ин} = MW_C$

Момент пары сил равен главному моменту сил инерции относительно оси вращения, перпендикулярный к плоскости симметрии и по модулю равный

$$M_Z^{ин} = J_Z \varepsilon,$$

где  $J_Z$  - момент инерции относительно оси вращения,

$\varepsilon$  - угловое ускорение твердого тела.

$M_Z^{ин}$  направлен противоположно угловому ускорению  $\varepsilon$ .

Если твердое тело совершает вращение вокруг неподвижной оси, которая является главной центральной осью инерции (рис. 3.3), то  $R'_{ин}=0$ , т.к.  $W_C=0$ , и силы инерции точек тела приводятся к паре сил, лежащей в плоскости материальной симметрии тела, момент которой равен по модулю  $M_{CZ} = J_{CZ} \varepsilon$  и направлен противоположно угловому ускорению  $\varepsilon$

в) Тело совершает плоскопараллельное движение (рис. 3.4).

Если твердое тело, имеющее плоскость материальной симметрии, движется параллельно этой плоскости, то силы инерции точек тела приводятся к силе, приложенной в центре масс и равной главному вектору сил инерции  $\bar{R}'_{ин}$ , и к паре сил, лежащей в плоскости симметрии, величина момента которой определяется формулой:



$$M_C^{UH} = J_C \varepsilon.$$

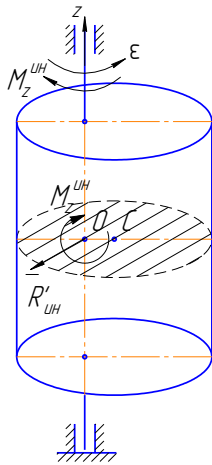


Рис. 3.2

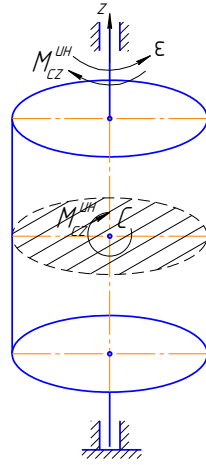


Рис. 3.3

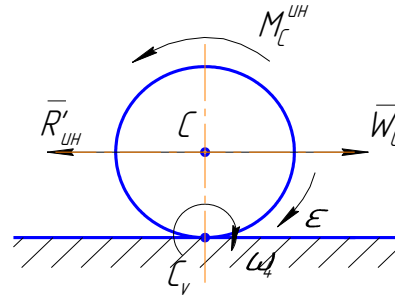


Рис. 3.4

$M_C^{UH}$  направлен противоположно угловому ускорению  $\varepsilon$ .

$$\bar{R}'_{UH} = -M \bar{W}_C.$$

$\bar{R}'_{UH}$  направлен противоположно ускорению центра масс и по модулю равен  $R'_{UH} = M W_C$

## 2. Определение реакций связей плоского механизма с помощью принципа Даламбера.

### Пример 1.

Рассмотрим макет плоского механизма (рис. 3.5), для которого известно:

$\omega_{OA} = \omega_0$  — угловая скорость кривошипа (ведущего звена);

$\varepsilon_{OA} = \varepsilon_0$  — угловое ускорение ведущего звена;

$OA = l_1$ ;  $AB = l_2$ ;

$P_1$  — вес ведущего звена;

$P_2$  — вес ползуна.

Весом шатуна  $AB$  пренебречь. Ведущее звено  $OA$  считать однородным стержнем. Требуется определить реакции оси  $O$  и направляющих ползуна  $B$ .

Вначале выполнения работы, если ранее в предыдущих разделах не определялись кинематические характеристики механизма, требуется определить ускорение точки  $C$  (центра масс ведущего звена) и точки  $B$  (ползуна).

Для точек  $A$  и  $C$  ускорения найдем по известным формулам:

$$\bar{W}_A = \bar{W}_A^n + \bar{W}_A^r; W_A^n = \omega_0^2 l_1; W_A^r = \varepsilon_0 l_1.$$

$$\bar{W}_C = \bar{W}_C^n + \bar{W}_C^\tau; W_C^n = \omega_0^2 \cdot \frac{l_1}{2}; W_C^\tau = \varepsilon_0 \cdot \frac{l_1}{2}.$$

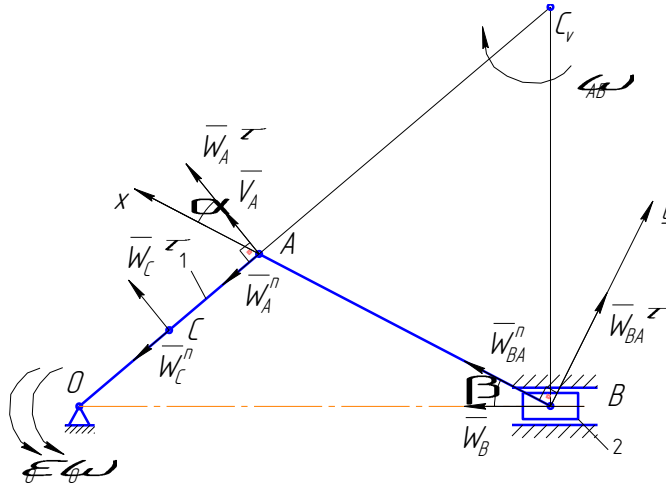


Рис. 3.5.

Ускорение точки В найдем, принимая точку А за полюс, по теореме об ускорениях точек тела при плоском движении.

$$\bar{W}_B = \bar{W}_A^n + \bar{W}_A^\tau + \bar{W}_{BA}^n + \bar{W}_{BA}^\tau; (1)$$

$$W_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot BA; W_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot BA; \omega_{AB} = \frac{V_A}{AC_v}; V_A = \omega_0 l_1.$$

Проектируя равенство (1) на ось х (рис. 1), получим:

$$W_B \cos\beta = W_A^\tau \cos\alpha + W_A^n \sin\alpha + W_{BA}^n, \text{ откуда находим}$$

$$W_B = \frac{W_A^\tau \cos\alpha + W_A^n \sin\alpha + W_{BA}^n}{\cos\beta}.$$

Так как механизм строили в масштабе, все размеры  $AC_v, \alpha, \beta$  замеряем с чертежа.

После определения ускорений можно перейти к непосредственному решению задач.

На данную систему (плоский механизм) (рис. 3.6) действуют силы тяжести ведущего звена  $\bar{P}_1$ , ползуна  $\bar{P}_2$ , реакции оси  $\bar{Y}_O, \bar{X}_O$ , реакция направляющих  $\bar{N}_2$ . Добавляем силы инерции. Ведущее звено совершает вращательное движение. Силы инерции приводим к точке  $O$  на оси вращения. Главный вектор сил инерции ведущего звена состоит из двух векторов, равных по модулю:

$$R_{ин1}^n = m_1 W_C^n = \frac{P_1}{g} \omega_0^2 \cdot \frac{l_1}{2};$$

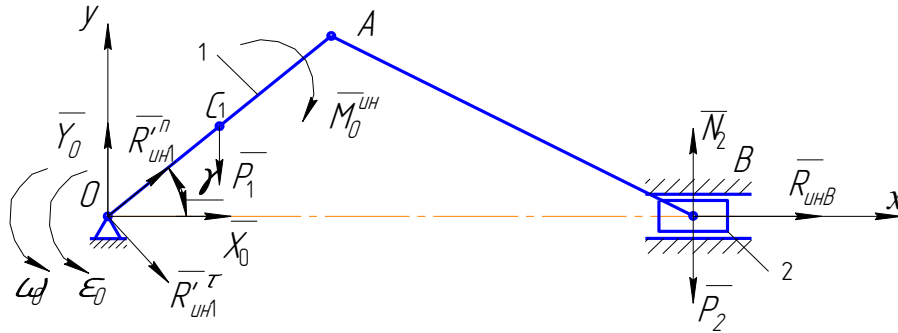


Рис. 3.6.

$$R_{UH1}^{\tau} = m_1 W_C^{\tau} = \frac{P_1}{g} \varepsilon_0 \cdot \frac{l_1}{2}. \text{ Эти составляющие направлены в противоположные стороны соответствующим ускорениям центра масс звена.}$$

Главный момент сил инерции относительно оси вращения  $O$  равен:

$$M_O^{UH} = J_O \varepsilon_0; J_O = \frac{P_1 l_1^2}{3g}; M_0^{UH} = \frac{P_1 l_1^2}{3g} \varepsilon_0.$$

Направляем его в сторону, противоположную направлению углового ускорения.

Ползун  $B$  совершает поступательное движение. Силы инерции этого тела приводятся к равнодействующей, равной по модулю:  $R_{UH2} = m_2 W_B$ . Вектор  $\bar{R}_{UH2}$  направлен в противоположную сторону вектору ускорения точки  $B$ .

Для полученной системы сил (рис.6) составляем уравнения равновесия.

$$\sum F_{ix} = 0: X_O + R_{UH1}^n \cos \gamma + R_{UH1}^{\tau} \sin \gamma + R_{UH2} = 0 \quad (3.1)$$

$$\sum F_{iy} = 0: Y_O + R_{UH1}^n \sin \gamma - R_{UH1}^{\tau} \cos \gamma - P_1 - P_2 + N_2 = 0 \quad (3.2)$$

$$\sum M_O = 0: -P_1 \frac{l}{2} \cos \gamma - M_1^{UH} - P_2 \cdot OB + N \cdot OB = 0 \quad (3.3)$$

Решая систему уравнений, найдем из уравнения (3.1) найдём  $X_O$ , из уравнения (3.3) –  $N$ , из уравнения (3.2) –  $Y_O$ .

### Пример 2.

В данном примере плоский механизм (рис. 3.7) включает в себя звенья, которые совершают вращательное движение ( $O_1 A$ ;  $O_2 B$ ) и плоскопараллельное ( $AB$ ).

В этом случае изменяется определение ускорений точек механизма.

Дано:  $\omega_0$ ;  $\varepsilon_0$ ;  $O_1 A = l_1$ ;  $O_2 B = l_2$ ;  $AB = l_3$ ,  $P_1$  – вес звена  $O_1 A$ ,  $P_2$  – вес звена  $O_2 B$ . Весом звена  $AB$  пренебречь. Все звенья – однородные стержни.

Размеры звеньев замеряем на макете механизма.

Требуется определить реакции в осях  $O_1$  и  $O_2$ .

Сначала определим ускорения  $W_{C_1}^n, W_{C_1}^\tau, W_B^n, W_B^\tau, W_{C_2}^n, W_{C_2}^\tau$  (рис. 3.7)

По изученным ранее методам определения кинематических характеристик точек тел при различных видах движения определяем:

$$V_A = \omega_O l_1; \omega_{AB} = \frac{V_A}{AC_V}; V_B = \omega_{AB} \cdot BC_V = \frac{V_A \cdot BC_V}{AC_V}; \omega_{O_2B} = \frac{V_B}{l_2}.$$

Переходим к определению ускорений:

$$\bar{W}_A = \bar{W}_A^n + \bar{W}_A^\tau; W_A^n = \omega_O^2 l_1; W_A^\tau = \epsilon_O l_1.$$

$$\bar{W}_{C_1} = \bar{W}_{C_1}^n + \bar{W}_{C_1}^\tau; W_{C_1}^n = \omega_O^2 \cdot \frac{l_1}{2}; W_{C_1}^\tau = \epsilon_O \frac{l_1}{2}.$$

$$\bar{W}_B = \bar{W}_B^n + \bar{W}_B^\tau; W_B^n = \omega_{O_2B}^2 \cdot l_2; W_B^\tau = \epsilon_{O_2B} l_2;$$

$$\begin{aligned} \bar{W}_B &= \bar{W}_A^n + \bar{W}_A^\tau + \bar{W}_{BA}^n + \bar{W}_{BA}^\tau; \text{ ИЛИ} \\ \bar{W}_B^n + \bar{W}_B^\tau &= \bar{W}_A^n + \bar{W}_A^\tau + \bar{W}_{BA}^n + \bar{W}_{BA}^\tau \\ W_{BA}^n &= \omega_{AB}^2 \cdot l_3; W_{BA}^\tau = \epsilon_{AB} l_3. \end{aligned} \quad (3.4)$$

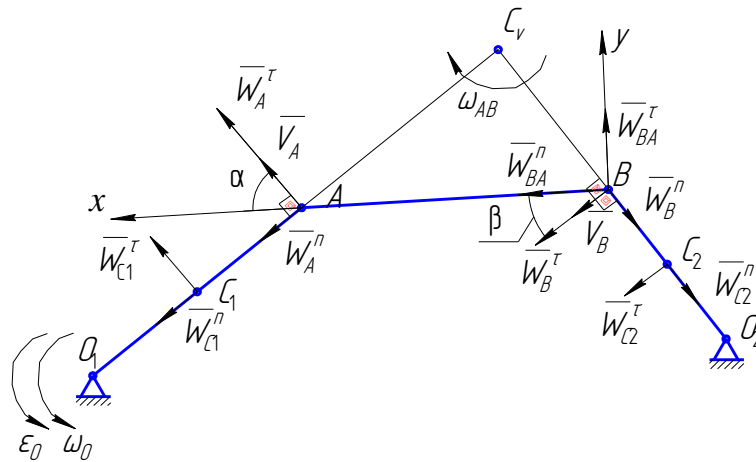


Рис. 3.7.

Проектируем равенство (4.4) на ось  $x$  для определения  $W_B^\tau$ , имеем:

$$-W_B^n \sin\beta + W_B^\tau \cos\beta = W_A^n \sin\alpha + W_A^\tau \cos\alpha + W_{BA}^n,$$

откуда определяем  $W_B^\tau$ , а затем  $\epsilon_{O_2B}$ .

$$W_B^\tau = \frac{W_A^n \sin\alpha + W_A^\tau \cos\alpha + W_{BA}^n + W_B^n \sin\beta}{\cos\beta}, \quad \epsilon_{BO_2} = \frac{W_B^\tau}{l_2}.$$

Теперь найдем ускорение центра масс  $C_2$

$$\bar{W}_{C2} = \bar{W}_{C2}^n + \bar{W}_{C2}^\tau; W_{C2}^n = \omega_{O2B}^2 \cdot \frac{l_2}{2}; W_{C2}^\tau = \epsilon_{O2B} \cdot \frac{l_2}{2}.$$

Таким образом, определили необходимые ускорения, которые потребуются для определения приведенных сил инерции.

Все размеры и углы берем с чертежа методом замера, так как механизм строится в масштабе.

Переходим к определению реакций в осях  $O_1$  и  $O_2$  с помощью принципа Даламбера (рис. 3.8, 3.9, 3.10).

Чертежи рисуем в более крупном масштабе.

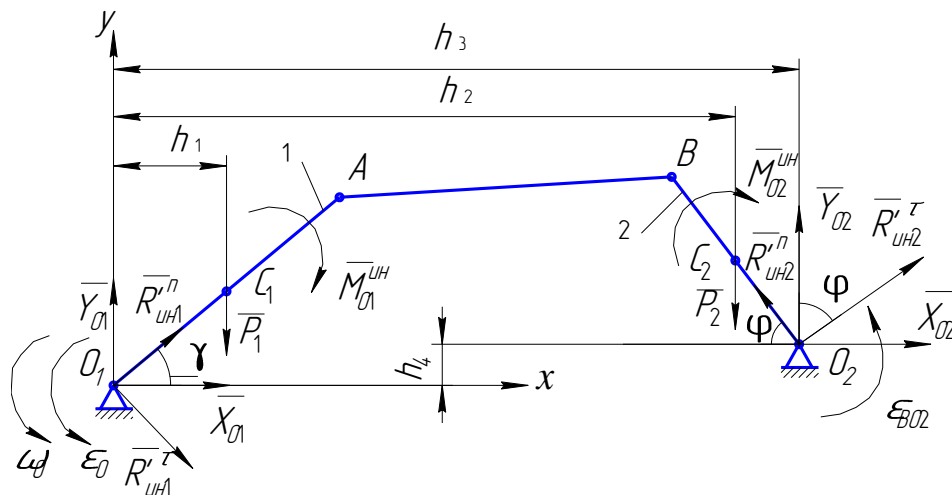


Рис. 3.8.

На данную систему (рис. 3.8) действуют силы тяжести  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$ , приложенные в центрах тяжести первого и второго звеньев, реакции в осях  $Y_{O1}, X_{O1}, Y_{O2}, X_{O2}$ . Добавляем приведённые силы инерции. Первое и второе звенья совершают вращательное движение. Силы инерции приводим к точкам  $O_1$  и  $O_2$ . Для первого звена главный вектор сил инерции состоит из

двух векторов  $R_{un1}^n, R_{un1}^\tau$ , равных по модулю:  $R_{un1}^n = m_1 W_{C1}^n = \frac{P_1}{g} \omega_0^2 \cdot \frac{l_1}{2}$ ;

$R_{un1}^\tau = m_1 W_{C1}^\tau = \frac{P_1}{g} \epsilon_0 \cdot \frac{l_1}{2}$  и направленных в противоположные стороны соответствующим ускорениям.

Главный момент сил инерции относительно оси вращения  $O_1$  равен по модулю:

$$M_{O1}^{un} = J_{O1} \epsilon_0; J_{O1} = \frac{P_1 l_1^2}{3g}; M_{O1}^{un} = \frac{P_1 l_1^2}{3g} \epsilon_0.$$

Для второго звена соответственно имеем векторы  $\bar{R}'_{ин1}$  и  $\bar{R}'_{ин1}$ , равные по модулю

$$R'_{ин2} = m_2 W_{C2}^n = \frac{P_2}{g} \omega_{O2B}^2 \cdot \frac{l_2}{2}; R'_{ин2} = m_2 W_{C2}^\tau = \frac{P_2}{g} \varepsilon_{O2B} \cdot \frac{l_2}{2}$$

и направленные противоположно соответствующим ускорениям  
Главный момент сил инерции находим относительно оси  $O_2$

$$M_{O2}^{ин} = J_{O2} \varepsilon_{O2B}; J_{O2} = \frac{P_2 l_2^2}{3g}; M_{O2}^{ин} = \frac{P_2 l_2^2}{3g} \varepsilon_{O2B}.$$

Главные моменты сил инерции направлены в сторону, противоположную соответствующим угловым ускорениям (рис. 3.8).

В результате получим расчетную схему произвольной плоской системы сил, содержащую четыре неизвестные реакции  $X_{O1}, Y_{O1}, X_{O2}, Y_{O2}$ .

Одной расчётной схемы недостаточно, так как для произвольной плоской системы можно составить лишь три уравнения равновесия. Поэтому, используя методику решения таких задач в статике, мы разъединяем систему на объекты равновесия и строим еще дополнительно две расчетные схемы (рис. 3.9, 3.10).

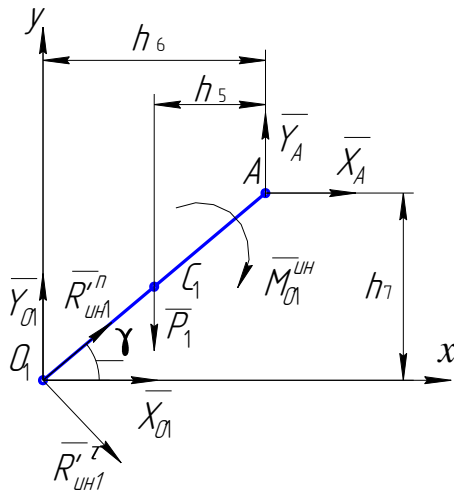


Рис. 3.9

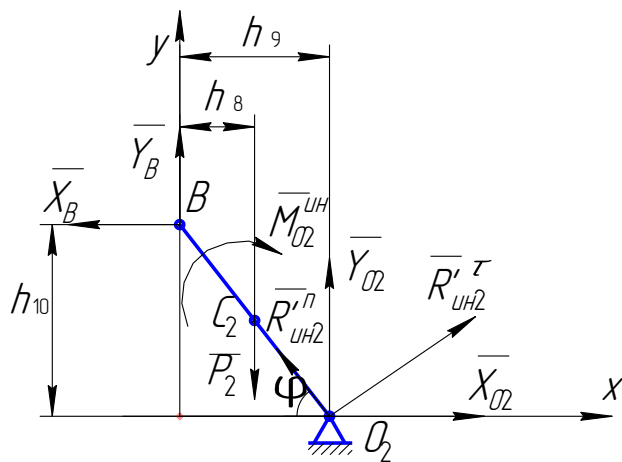


Рис. 3.10

Для определения четырёх неизвестных  $X_{O1}, Y_{O1}, X_{O2}, Y_{O2}$  используем три объекта равновесия и составляем только четыре уравнения равновесия.

Для объекта на рис. 3.8 составим два уравнения равновесия:

$$\sum M_{O1} = 0; -P_1 h_1 - M_1^{ei} - M_2^{ei} - P_2 h_2 + Y_{O2} \cdot h_3 - X_{O2} \cdot h_4 + R'_{ei2} \sin \varphi \cdot h_3 + R'_{ei2} \cos \varphi \cdot h_4 + R'_{ei2} \cos \varphi \cdot h_3 - R'_{ei2} \sin \varphi \cdot h_4 = 0 \quad (3.5)$$

$$\sum Fix = 0; X_{O1} + X_{O2} + R'_{ин1} \cos \varphi + R'_{ин1} \sin \varphi - R'_{ин2} \cos \varphi + R'_{ин2} \sin \varphi = 0 \quad (3.6)$$

Для объекта на рис. 3.9 составляем уравнение моментов всех сил относительно точки  $A$ .

$$\sum M_A = 0; -Y_{O1} \cdot h_6 + P_1 h_5 - M_1^{un} + R_{un1}^{\tau} \cdot l_1 + X_{O1} \cdot h_7 = 0 \quad (3.7)$$

Для объекта на рис. 3.10 составляем уравнение моментов всех сил относительно точки  $B$ .

$$\sum M_B = 0; -P_2 h_8 + Y_{O2} \cdot h_9 + X_{O2} \cdot h_{10} + R_{un2}^{\tau} \cdot l_2 - M_{O2}^{un} = 0 \quad (3.8)$$

Решаем систему четырех уравнений. Из уравнения (4.8) выразим  $Y_{O2}$  и подставим в уравнение (3.5), из которого определим  $X_{O2}$ . Значение  $X_{O2}$  подставим в уравнение (3.6), из которого найдём  $X_{O1}$ . Найденное значение  $X_{O1}$  подставим в уравнение (3.7) и определим  $Y_{O1}$ . Таким образом, задача будет решена.

### Пример 3.

На рис. 3.11 представлен плоский механизм, построенный в масштабе по макету, в котором к шатуну  $AB$  подсоединен ролик, представляющий собой сплошной однородный цилиндр радиуса  $r_2$ . Ролик катится по плоскости без скольжения. Для механизма дано:  $\omega_0$ ;  $\epsilon_0$ ;  $OA = l_1$ ;  $AB = l_3$ ;  $r_2$ ;  $P_1$  – вес звена  $OA$ ;  $P_2$  – вес ролика. Весом шатуна  $AB$  пренебречь. Требуется определить реакции в оси  $O$ , реакцию плоскости и силу сцепления.

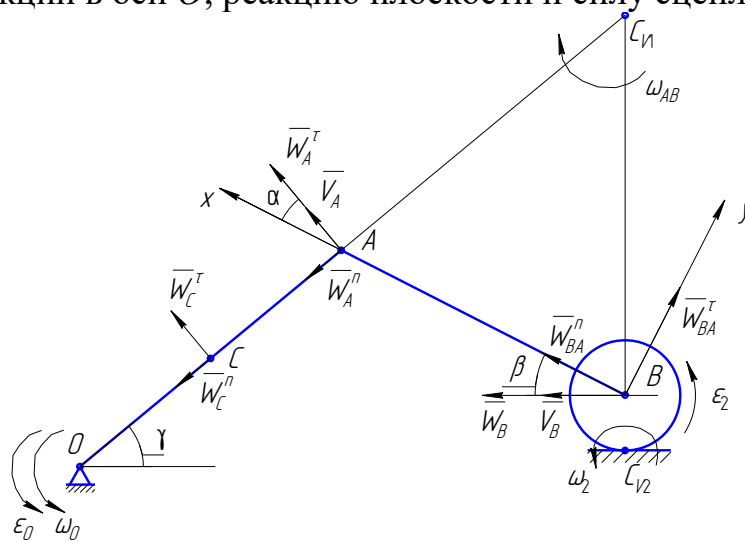


Рис. 3.11

Найдем кинематические характеристики данного механизма.

$$V_A = \omega_0 l_1; W_A^n = \omega_0^2 l_1; W_A^{\tau} = \epsilon_0 l_1; W_C^n = \omega_0^2 \cdot \frac{l_1}{2}; W_C^{\tau} = \epsilon_0 \cdot \frac{l_1}{2}$$

$$\omega_{AB} = \frac{V_A}{AC_{V1}}; V_B = \omega_{AB} \cdot BC_{V1}; \omega_2 = \frac{V_B}{BC_{V2}} = \frac{V_B}{r_2};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{r_2} \cdot \left( \frac{dV_B}{dt} \right); \quad \frac{dV_B}{dt} = W_B;$$

$$\varepsilon_2 = \frac{W_B}{r_2}.$$

Принимая точку A за полюс, найдем

$$\bar{W}_B = \bar{W}_A^n + \bar{W}_A^\tau + \bar{W}_{BA}^n + \bar{W}_{BA}^\tau \quad (3.9)$$

$$W_{BA}^n = \omega_{AB}^2 \cdot AB; \quad W_{BA}^\tau = \varepsilon_{AB} \cdot AB.$$

Проектируя равенство (4.9) на ось x, определим ускорение точки B.

$$W_B \cos\beta = W_A^n \sin\alpha + W_A^\tau \cos\alpha + W_{BA}^n,$$

$$W_B = \frac{W_A^n \sin\alpha + W_A^\tau \cos\alpha + W_{BA}^n}{\cos\beta}.$$

Все размеры берем с чертежа (рис. 3.11).

Далее показываем все силы (рис. 3.12), действующие на механизм: силы тяжести  $\bar{P}_1, \bar{P}_2$ , реакции связей  $\bar{X}_O, \bar{Y}_O, \bar{N}_2$  и силу сцепления  $\bar{F}_{сц}$ . Добавляем приведённые силы инерции  $R_{ин1}^n, R_{ин1}^\tau, M_O^{ин}, R_{инB}, M_B^{ин}$ , которые определяем по модулю и направлению аналогично предыдущим примерам 1 и 2.

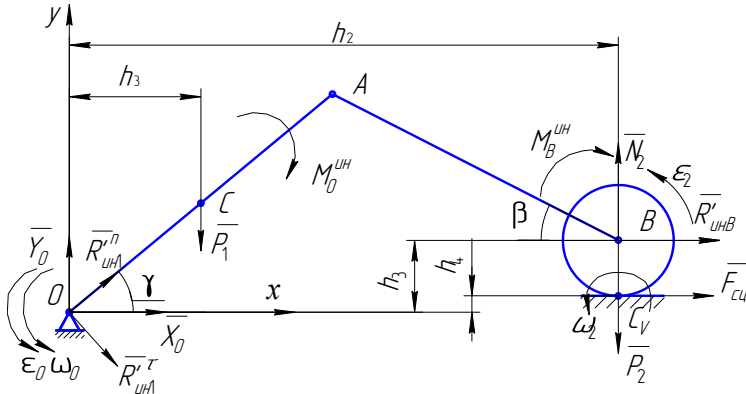


Рис. 3.12.

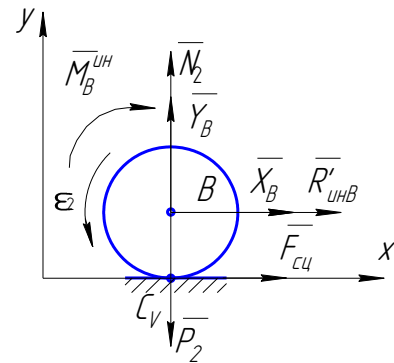


Рис. 3.13.

Рассмотрев два объекта равновесия (рис. 3.12; рис. 3.13), составим необходимые уравнения равновесия.

Для объекта на рис. 3.13 составим одно уравнение равновесия

$$\sum M_B = 0; \quad -M_B^{ин} + F_{сц} \cdot r_2 = 0 \quad (3.10)$$

Для объекта на рис. 3.12 составим три уравнения равновесия

$$\sum Fix = 0; \quad X_O + R_{ин1}^n \cos\gamma + R_{ин1}^\tau \sin\gamma + R_{инB} + F_{сц} = 0 \quad (3.11)$$

$$\sum Fiy = 0; \quad Y_O + R_{ин1}^n \sin\gamma - R_{ин1}^\tau \cos\gamma - P_1 - P_2 + N_2 = 0 \quad (3.12)$$

$$\sum M_O = 0; \quad -P_1 h_1 - M_O^{ин} - M_B^{ин} - P_2 \cdot h_2 + N_2 \cdot h_2 - R_{инB} \cdot h_3 - F_{сц} \cdot h_4 = 0 \quad (3.13)$$



Для ролика отдельно найдем  $M_B^{ин} = J_B \varepsilon_2$ , где  $J_B = \frac{1}{2} M_2 r_2^2 = \frac{1}{2} \frac{P_2}{g} r_2^2$

Решая систему четырех уравнений, находим из уравнения (3.10) силу сцепления  $F_{сц}$ , из уравнения (3.13) –  $N_2$ , из уравнения (3.11) –  $X_O$ , из уравнения (3.12) –  $Y_O$ .

### 3. Последовательность выполнения лабораторной работы.

3.1. Построить механизм в заданном положении по макету механизма. Для этого замеряем длины звеньев  $l_1, l_2, l_3$  и базовые размеры.

3.2. Если ранее не были определены кинематические характеристики механизма, найти их, пользуясь примерами, приведенными в лабораторной работе №3.

3.3. Определить с помощью принципа Даламбера реакции  $\bar{X}_O, \bar{Y}_O$  в оси O и в зависимости от рассматриваемого механизма реакции  $N_2, F_{сц}, Y_{O2}, X_{O2}$ .

Данные согласно варианту, выданному преподавателем, приведены в таблице 3.1

Таблица 3.1

№ варианта	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\omega_0, с$	1	2	3	4	2	3	2	1	2	3
$\varepsilon_0, с$	2	1	2	2	3	1	4	2	2	2
$r_2, м$	0,1	0,2	0,3	0,5	0,2	0,3	0,2	0,2	0,4	0,5

Результаты вычислений занести в таблицу 3.2

Таблица 3.2

$Y_O$	$X_O$	$Y_{O2}$	$X_{O2}$	$N_2$	$F_{сц}$

### 4. Контрольные вопросы

4.1 Что называется моментом инерции твердого тела относительно оси?

4.2 Сформулируйте принцип Даламбера для материальной точки и механической системы.

4.3 Как вычисляется равнодействующая, главный вектор и главный момент сил инерции при различных случаях движения твердого тела?

4.4 Расскажите о направлении равнодействующей, главного вектора и главного момента сил инерции.

### **Рекомендательный библиографический список**

1. Новожилов, А. И. Краткий курс теоретической механики / А. И. Новожилов ; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2006. – 240 с. – ISBN 5-89368-643-8.

2. Шевченко А.П.; Практикум по дисциплине «Теоретическая механика» / А.П. Шевченко, А.В. Крылов, Л.Ф. Метлина и др.; Владим. гос. ун-т. – Владимир : Изд-во Владим. гос. ун-та, 2007. – 156 с.

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие.....	
Лабораторная работа №1. Определение и исследование реакций опор составных конструкций.....	
Лабораторная работа №2. Кинематическое исследование плоского механизма аналитическим и графическим методом.....	
Лабораторная работа №3. Применение принципа Даламбера для определения реакций связей плоского механизма...	