Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
**«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)**

УТВЕРЖДАЮ
Проректор по
учебно-методической работе
_______ А.А.Панфилов
«18» ___ 2015г.

РАБОЧАЯ ПРОГРАММА ДИСЦИПЛИНЫ

«СТАТИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ В АВТОМАТИКЕ»

Направление подготовки *27.03.04 Управление в технических системах*

Профиль подготовки *Управление и информатика в технических системах*

Уровень высшего образования *бакалавриат*

Форма обучения *очная*

Семестр	Трудоем-кость зач, ед,час.	Лек-ций, час.	Практик. занятий, час.	Лаборат. работ, час.	СРС, час.	Форма промежуточного контроля (экз./зачет)
4	2/72	18	18		36	зачет
Итого	2/72	18	18		36	зачет

Владимир, 2015

1. ЦЕЛИ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ

Целью преподавания дисциплины является ознакомление студентов с вероятностным моделированием процессов управления, а также с современными пакетами программ, предназначенных для инженерного и научного моделирования в автоматике. Подготовка специалиста по направлению «Управление в технических системах» требует на всех направлениях будущей работы: научно-исследовательской, проектной, в эксплуатации электрических сетей умения определять те воздействия, которым подвергаются системы автоматики и электрооборудование в условиях эксплуатации: в нормальном эксплуатационном режиме и в аномальных штатных и нештатных ситуациях. Поскольку эти воздействия, как правило, носят статистико-вероятностный характер, то специалисты должны владеть статистическими методами обработки экспериментальных данных. В последнее время все шире внедряется так называемый активный эксперимент, т.е. эксперимент, который производится по заранее намеченному плану. Активный эксперимент чаще всего используется при проектировании электроэнергетических объектов с помощью методов математического моделирования объекта и процессов, которые происходят в эксплуатации. Курс, таким образом, посвящен вопросам как обработки пассивного эксперимента, так и организации активного эксперимента.

Изучение дисциплины «Статистические методы в автоматике» преследует следующие цели: сформировать основы математической и алгоритмической культуры студентов; обеспечить их подготовку для освоения дисциплин специальности. - Основные задачи изучения дисциплины состоят в формировании у студентов: навыков грамотного владения рабочим инструментарием систем компьютерной математики; - представления о методах решения типовых задач из дисциплин специальности; умения грамотно и качественно оформлять выполненные расчеты с использованием средств MATLAB и офисных приложений.

Задачи дисциплины:

Задачи преподавания дисциплины состоят в:

- ознакомлении и изучении методологии и теоретических методов статистического моделирования и оптимизации объектов автоматики;
- умении поставить типовые задачи по расчету и статистической оптимизации процессов управления и математическому моделированию объектов управления;
- умении готовить исходные данные и использовать специальные пакеты прикладных программ при расчете составлении математических моделей и процессов на ПК.

Применение полученных знаний осуществляется в дальнейшем в процессе выполнения студентами выпускных квалификационных работ, магистерских диссертаций, в ходе производственной практики, а также в последующей работе по специальности.

2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП ВО

Дисциплина «Статистические методы в автоматике» относится к факультативным дисциплинам для направления подготовки 27.03.04 «Управление в технических системах». Дисциплина логически и содержательно-методически тесно связана с рядом теоретических дисциплин и практик предшествующего периода обучения. Для успешного усвоения курса необходимы твердые знания по курсам «Математика», "Теория автоматического управления", «Моделирование и исследование электротехнических и электронных устройств».

Полученные знания необходимы студентам для последующего изучения дисциплин специальности, при подготовке, выполнении и защите выпускной квалификационной работы и при решении научно-исследовательских и производственно-технологических задач в будущей профессиональной деятельности.

3. КОМПЕТЕНЦИИ ОБУЧАЮЩЕГОСЯ, ФОРМИРУЕМЫЕ В РЕЗУЛЬТАТЕ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

В результате освоение дисциплины формируется компетенция:

- способность представлять адекватную современному уровню знаний научную картину мира на основе знания основных положений, законов и методов естественных наук и математики (ОПК-1).

В результате освоение дисциплины «Статистические методы в автоматике» обучающийся должен

знать:

- основные законы естественнонаучных дисциплин в профессиональной деятельности, методы математического анализа и моделирования, теоретического и экспериментального исследования;
- основные методы, способы и средства получения, хранения, переработки информации, навыки работы с компьютером как средством управления информацией;

уметь:

- работать с информацией в глобальных компьютерных сетях;

владеть:

- навыками выполнения математических расчетов на базе стандартных пакетов автоматизированного проектирования и исследований.

4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

«Статистические методы в автоматике»

Общая трудоемкость дисциплины составляет _2_ зачетных единиц, _72_ часов.

№ п/п	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоемкость (в часах)							Объем учебной работы, с применением интерактивных методов (в часах / %)	Формы текущего контроля успеваемости *(по неделям семестра)* , форма промежуточной аттестации *(по семестрам)*
				Лекции	Семинары	Практические занятия	Лабораторные работы	Контрольные работы	СРС	КП / КР		
1	Основы регрессионного анализа. Определение параметров линейной регрессии методом наименьших квадратов.	4	1-2	2		2			6		4 / 100%	
2	Основы дисперсионного анализа	4	3-5	4		4			6		6 / 75%	Рейтинг-контроль 1
3	Факторный анализ.	4	6-8	4		4			6		6 / 75%	
4	Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло).	4	9-11	2		2			6		2 / 50%	Рейтинг-контроль 2
5	Планирование и организация многофакторного эксперимента.	4	12-14	4		4			6		6 / 75 %	
6	Определение значений факторов, отвечающих экстремальному значению функции отклика	4	15-18	2		2					4 / 100 %	Рейтинг-контроль 3
Всего				**18**		**18**			**36**		**28 / 78 %**	**3 р-к, зачет**

Теоретический курс

Раздел 1. Основы регрессионного анализа.
Тема 1.1. Определение параметров линейной регрессии методом наименьших квадратов
Тема 1.2. Построение доверительного коридора для линейной регрессии при нормальном законе условных математических ожиданий и при законе распределения Стьюдента.

Раздел 2. Основы дисперсионного анализа.
Тема 2.1. Задача дисперсионного анализа
Тема 2.2. Проверка нулевой гипотезы по критерию Фишера.
Тема 2.3. Оценка влияния отдельных факторов на устойчивость среднего.
Тема 2.4. Использование критерия Стьюдента.
.
Раздел 3. Факторный анализ.
Тема 3.1 Постановка задач при использовании факторного анализа
Тема 3.2 Метод главных компонент в факторном анализе
Тема 3.3. Определение параметров нелинейной регрессии методом наименьших квадратов
Тема 3.4 Построение доверительного коридора для нелинейной регрессии
Тема 3.5 Методика оценки статистической значимости линейной регрессии, полученной на основе экспериментальных данных при одинаковом числе значений x и y (n различных пар значений x и y)
Тема 3.6 Линии регрессии при нормальном законе на плоскости.

Раздел 4. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло).
Тема 4.1. Идея метода. Генерация случайных чисел. Случайные числа распределены по закону равномерной плотности. Случайные числа распределены по законам, отличным от закона равномерной плотности.
Тема 4.2 Вычисление определенных интегралов методом Монте-Карло. Вычисление одномерных интегралов (два способа). Вычисление многомерных интегралов

Раздел 5. Планирование и организация многофакторного эксперимента.
Тема 5.1 Основные понятия. Методы и задачи многофакторного эксперимента
Тема 5.2 . *Планирование регрессионных экспериментов*. Постановка задачи. Планы первого порядка. Полный факторный эксперимент (ПФЭ). Планы второго порядка. Композиционные планы. Ортогональные и ротатабельные планы.
Тема 5.3. Проверка значимости коэффициентов полного квадратичного регрессионного полинома. Проверка адекватности регрессионного полинома истинной функциональной связи.

Раздел 6. Определение значений факторов, отвечающих экстремальному значению функции отклика.
Тема 6.1. Определение значений факторов, отвечающих экстремальному значению функции отклика. Определение закона распределения функции отклика при заданных законах распределения факторов. Законы Пирсона.

Практические занятия

Практические занятия являются формой индивидуально-группового и практико-ориентированного обучения на основе реальных или модельных ситуаций применительно к виду и профилю профессиональной деятельности.

Целью практических занятий является:

- подтверждение теоретического материала, полученного на лекционных занятиях, путем поведения небольших по объему исследований по изучаемой теме;
- приобретение практических навыков и инструментальных компетенций в области моделирования систем и проведения инженерных расчетов по профилю профессиональной деятельности.

Перед проведением практических занятий студенты должны освоить требуемый теоретический материал и процедуры выполнения работ по выданным им предварительно учебным и методическим материалам.

Практическое занятие № 1. Простейшие вычисления в *MATLAB*

Практическое занятие № 2. Дисперсионный анализ

Практическое занятие № 3. Факторный анализ

Практическое занятие № 4. Регрессионный анализ

Практическое занятие № 5. Нелинейный регрессионный анализ

Практическое занятие № 6. Метод Монте-Карло

5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ

В соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению подготовки бакалавров реализация компетентностного подхода предусматривает широкое использование в учебном процессе активных и интерактивных форм проведения занятий.

Пример использования основных активных и интерактивных методов в лекционных, лабораторных и практических занятиях (аудиторные занятия) по разделам

Раздел	Метод (форма)	Общее кол - во часов (по разделам)
Раздел 1. Основы регрессионного анализа Определение параметров линейной регрессии методом наименьших квадратов.	Контекстное обучение Информационно-коммуникационные технологии	4
Раздел 2. Основы дисперсионного анализа	Опережающая самостоятельная работа Информационно-коммуникационные технологии.	8
Раздел 3. Факторный анализ.	Информационно-коммуникационные технологии	8
Раздел 4. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло).	Модульное обучение Опережающая самостоятельная работа	4

Раздел 5. Планирование и организация многофакторного эксперимента.	Модульное обучение Работа в малых группах	8
Раздел 6. Определение значений факторов, отвечающих экстремальному значению функции отклика	Информационно-коммуникационные технологии Проектная технология	4

Основной формой проведения занятий по дисциплине «Статистические методы в автоматике» является система «проблемная лекция – практическое или лабораторное занятие». Согласно требованиям ФГОС и ВО лекционные занятия не могут составлять более 50 % всех аудиторных занятий по дисциплине.

При чтении лекций следует широко использовать разнообразные наглядные учебные пособия (раздаточный материал) и (учебные видеофильмы, слайд-шоу и т.д.). Ряд лекционных и практических занятий предполагает совмещение тех или иных методов, как правило, это проблемная лекция с применением методов ИКТ (IT-методы), однако подобные занятия не должны превышать 50 %. всех аудиторных занятий.

С целью формирования и развития профессиональных навыков обучающихся, в учебном процессе должны широко использоваться активные и интерактивные формы проведения практических занятий в том числе: семинары в диалоговом режиме, дискуссии (в том числе – групповые), деловые и ролевые игры, создание творческих проектов и др.

Самостоятельная работа студентов (36 час.) подразумевает самостоятельное решение задач, работу под руководством преподавателей (подготовку к практическим занятиям) и индивидуальную работу студента с ПК и в сети INTERNET, а также работу в научной библиотеке ВлГУ (электронные ресурсы).

6. ОЦЕНОЧНЫЕ СРЕДСТВА ДЛЯ ТЕКУЩЕГО КОНТРОЛЯ УСПЕВАЕМОСТИ, ПРОМЕЖУТОЧНОЙ АТТЕСТАЦИИ ПО ИТОГАМ ОСВОЕНИЯ ДИСЦИПЛИНЫ И УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ СТУДЕНТОВ

Основным оценочным средством текущего контроля успеваемости является рейтинг-контроль знаний студентов. Всего по дисциплине проводится 3 рейтинг-контроля.

ВОПРОСЫ ДЛЯ РЕЙТИНГ-КОНТРОЛЯ ЗНАНИЙ СТУДЕНТОВ

1 рейтинг-контроль

1. Поясните понятие "Дисперсионный анализ" и приведите класс задач, в которых целесообразно использовать этот анализ
2. Поясните понятие "Факторный анализ" и приведите задачу или задачи, при решении которых целесообразно использовать этот анализ.
3. Поясните понятие "Регрессионный анализ" и приведите класс задач, в которых целесообразно использовать этот анализ.
4. Поясните, как на основе регрессионного полинома при заданных законах распределения факторов определять закон распределения функции.
5. Какой характер носит регрессия при нормальном законе распределения двух случайных величин?

6. Идея метода статистических испытаний.

2 рейтинг-контроль

1. Идея способа вычисления определенных интегралов с помощью метода статистических испытаний.
2. Идея построения линии регрессии на основе корреляционного анализа.
3. Идея генерирования случайных чисел, распределенных по закону, отличному от закона равномерной плотности (основана на датчике чисел, распределенных по закону равномерной плотности).
4. Определение математического ожидания и дисперсии функции отклика на основе полного квадратичного полинома относительно двух факторов, распределенных по закону равномерной плотности.
5. Идея метода наименьших квадратов при построении линий регрессии или при сглаживании экспериментальных зависимостей.

3 рейтинг-контроль

1. Что Вы понимаете под уровнем значимости какой-либо проверяемой Вами гипотезы. Приведите примеры.
2. Как проверяется значимость коэффициентов регрессионного полинома, построенного на основе планирования многофакторного эксперимента?
3. Приведите задачи, при решении которых используются критерии Фишера и Стьюдента. Как формируются эти критерии и как определяется уровень значимости гипотез, проверяемых с их помощью?

Темы, выносимые на самостоятельную проработку

1. Законы распределения дискретных случайных величин
2. Неравенство Чебышёва
3. Метод наименьших квадратов.
4. Преобразования Фурье и Лапласа
5. Быстрое преобразование Фурье
6. Основы регрессионного анализа. Определение параметров линейной регрессии методом наименьших квадратов.
7. Основы дисперсионного анализа.
8. Факторный анализ.
9. Метод статистических испытаний (метод Монте-Карло).
10. Планирование и организация многофакторного эксперимента.
11. Определение значений факторов, отвечающих экстремальному значению функции отклика

Текущая и опережающая СРС, направленная на углубление и закрепление знаний, а также развитие практических умений заключается в следующих видах деятельности студента:

- работе с лекционным материалом,
- проработке литературы и электронных источников информации по заданной проблеме
- выполнении домашних заданий,
- переводе материалов из тематических информационных ресурсов с английского языка,
- изучении тем, вынесенных на самостоятельную проработку,
- изучении теоретического материала при подготовке к лекционным и практическим занятиям, контрольным работам и зачету.

Контроль самостоятельной работы

Оценка результатов самостоятельной работы производится на лекционных и практических занятиях в ходе интерактивной дискуссии.

Вопросы к зачету

1. На основе результатов пассивного эксперимента определить коэффициенты линейной регрессии и дисперсию функции отклика.
2. Задана корреляционная таблица системы СВ X и Y, распределенной по нормальному закону. Построить линейную регрессию.
3. Имеются группы изделий, отличающихся каким-то технологическим параметром. Проверить «нулевую» гипотезу (о статической незначимости влияния технологии на устойчивость среднего значения контролируемого параметра).
4. Функция отклика зависит от двух факторов. На основе ПФЭ получить регрессионный полином относительно кодированных и некодированных факторов.
5. Задан полный квадратичный полином, связывающий функцию отклика с двумя факторами. С помощью метода β-коэффициентов определить значимость членов регрессионного полинома. Случайные факторы распределены в определенных диапазонах по законам равномерной плотности.
6. Задана функциональная связь $Y = \varphi(Z_1, Z_2)$. Представить эту связь в виде линейного полинома (диапазоны изменения Z_1 *и* Z_2 заданы.
7. Определи ть коэффициенты линейного регрессионного полинома, полученного на основе ПФЭ при заданных значениях функции отклика в точках плана.
8. На основе заданного ПФЭ построить линейный регрессионный полином и проверить его адекватность истинной функциональной связи.

Примеры типовых расчетов

Задача 1. В ящике 10 пронумерованных шаров с номерами от 1 до 10. Вынули один шар. Какова вероятность того, что номер вынутого шара не превышает 10?

Р е ш е н и е. Так как номер любого шара, находящегося в ящике, не превышает 10, то число случаев, благоприятствующих событию A, равно числу всех возможных случаев, т.е. $m = n = 10$ и $P(A) = 1$. В этом случае событие A достоверно.

Задача 2. В урне 15 шаров: 5 белых и 10 черных. Какова вероятность вынуть из урны синий шар?

Р е ш е н и е. Синих шаров в урне нет, т.е. $m = 0$, а $n = 15$. Следовательно, $P(A) = 0/15 = 0$. В данном случае событие A – невозможное.

Задача 3. В урне 12 шаров: 3 белых, 4 черных и 5 красных. Какова вероятность вынуть из урны черный шар?

Р е ш е н и е. Здесь $m = 4$, $n = 12$ и $P(A) = 4/12 = 1/3$.

Задача 4. В урне 10 шаров: 6 белых и 4 черных. Вынули 2 шара. Какова вероятность того, что оба шара – белые?

Решение. Здесь число всех случаев $n = C_{10}^2 = \frac{10 \cdot 9}{1 \cdot 2} = 45$. Число же случаев, благоприятствующих событию A, определяется равенством $m = C_6^2 = \frac{6 \cdot 5}{1 \cdot 2} = 15$. Итак,

$P(A)=\frac{15}{45}=\frac{1}{3}.$

Задача 5. В корзине 100 фруктов: 10 груш и 90 яблок. Наугад взяты четыре фрукта. Найти вероятность того, что

а) взято четыре яблока;

б) взято четыре груши.

Р е ш е н и е. Общее число элементарных исходов испытания равно числу сочетаний из 100 элементов по четыре, т.е. C_{100}^4.

а) Число исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию (все взятые наугад четыре фрукта являются яблоками), равно числу сочетаний из 90 элементов по четыре, т.е. C_{90}^4.

Искомая вероятность равна отношению числа исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию, к общему числу
возможных элементарных исходов:

$$P=\frac{C_{90}^4}{C_{100}^4}=\frac{\frac{90!}{4!\cdot 86!}}{\frac{100!}{4!\cdot 96!}}=\frac{87\cdot 88\cdot 89\cdot 90}{97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}\approx 0,65\,.$$

б) Число исходов, благоприятствующих рассматриваемому событию (все взятые наугад четыре фрукта – груши), равно числу способов, которыми можно извлечь четыре груши из десяти имеющихся, т.е. C_{10}^4.

Искомая вероятность

$$P=\frac{C_{10}^4}{C_{100}^4}=\frac{\frac{10!}{4!\cdot 6!}}{\frac{100!}{4!\cdot 96!}}=\frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{97\cdot 98\cdot 99\cdot 100}\approx 0,00005\,.$$

Задача 6. На отрезке *OA* длины *L* числовой оси *Ox* наудачу нанесена точка *B*(*x*). Найти вероятность того, что отрезки *OB* и *BA* имеют длину больше, чем *L*/4.

Р е ш е н и е. Разобьем отрезок *OA* на четыре равные части точками *C, D, E* (рис. 7). Требование задачи будет выполнено, если точка *B* попадет на отрезок *CE*, длина которого равна *L*/2.

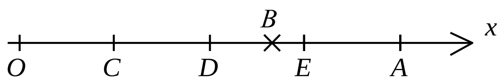

Рис. 7

Следовательно, $p = (L/2) : L = 1/2$.

Задача 7. Внутри эллипса $\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$ расположен круг $x^2+y^2=9$. Найти вероятность попадания точки в кольцо, ограниченное эллипсом и кругом.

Р е ш е н и е. Пусть событие *A* – попадание точки в кольцо. Тогда $P(A) = S_{кол} / S_{эл}$, где $S_{кол} = S_{эл} - S_{кр} = \pi ab - \pi r^2$. Так как $a = 5$, $b = 4$, $r = 3$, то $P(A)=\frac{20\pi-9\pi}{20\pi}=\frac{11}{20}=0,55.$

Примечание. В случае классического определения вероят-ность невозможного события равна нулю. Справедливо и обратное утверждение, т.е. если вероятность события равна нулю, то событие невозможно. При геометрическом же определении вероятности обратное утверждение не имеет места. Вероятность попадания брошенной точки в одну определенную точку области *G* равна нулю, однако это событие может произойти и, следовательно, не является невозможным.

Задача 8 (задача о встрече). Два студента A и B условились встретиться в определенном месте во время перерыва между 13 ч и 13 ч 50 мин. Пришедший первым ждет другого в течение 10 мин, после чего уходит. Чему равна вероятность их встречи, если приход каждого из них в течение указанных 50 мин может произойти наудачу, и моменты прихода независимы?

Р е ш е н и е. Обозначим момент прихода студента A через x, а студента B – через y. Для того чтобы встреча произошла, необходимо и достаточно, чтобы $|x-y|\le 10$. Изобразим x и y как декартовы координаты на плоскости, а в качестве единицы масштаба выберем одну минуту (рис. 8). Всевозможные исходы изобразятся точками квадрата со стороной 50, а исходы, благоприятствующие встрече, – точками заштрихованной области. Искомая вероятность равна отношению площади заштрихованной фигуры к площади всего квадрата: $p=\dfrac{50^2-40^2}{50^2}=0,36.$

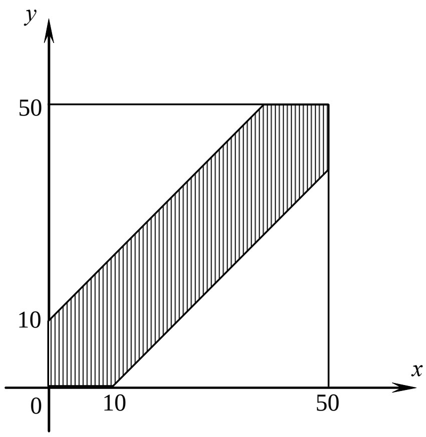

Рис. 8

Задача 9. Из 10 ответов к задачам, помещенным на данной странице, 2 имеют опечатки. Студент решает 5 задач. Какова вероятность того, что в одной из них ответ дан с опечаткой?

Р е ш е н и е. $P(A)=\dfrac{m}{n}.$

$$n=C_{10}^5=\frac{10!}{5!\cdot 5!}=\frac{6\cdot 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}=252.$$

$$m=C_8^4C_2^1=\frac{8!}{4!\cdot 4!}\cdot\frac{2!}{1!\cdot 1!}=\frac{2\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}=140.$$

$$P(A)=\frac{140}{252}=\frac{5}{9}.$$

Такие задачи описываются общей схемой. Имеется совокупность из N_1 элементов первого вида и N_2 элементов второго вида. Какова вероятность того, что при выборе совокупности из k элементов она состоит из k_1 элементов первого вида и k_2 элементов второго вида, где $k = k_1 + k_2$, $k_1 \le N_1$, $k_2 \le N_2$?

$$P(A)=\frac{C_{N_1}^{k_1}C_{N_2}^{k_2}}{C_{N_1+N_2}^{k_1+k_2}}.$$

Задача 10. В урне 10 белых, 15 черных, 20 синих и 25 красных шаров. Вынули один шар. Найти вероятность того что вынутый шар: белый; черный; синий; красный; белый или черный; синий или красный; белый, черный или синий.

Р е ш е н и е. Имеем

$$n=10+15+20+25=70,\ P(\text{Б})=10/70=1/7,$$
$$P(\text{Ч})=15/70=3/14,\ P(\text{С})=20/70=2/7,\ P(\text{К})=25/70=5/14.$$

Применив теорему сложения вероятностей, получим

$$P(\text{Б+Ч}) = P(\text{Б}) + P(\text{Ч}) = 1/7 + 3/14 = 5/14,$$

$$P(\text{С+К}) = P(\text{С}) + P(\text{К}) = 2/7 + 5/14 = 9/14,$$

$$P(\text{Б+Ч+С}) = 1 - P(\text{К}) = 1 - 5/14 = 9/14.$$

Задача 11. В первом ящике 2 белых и 10 черных шаров; во втором ящике 8 белых и 4 черных шара. Из каждого ящика вынули по шару. Какова вероятность, что оба шара белые?

Р е ш е н и е. В данном случае речь идет о совмещении событий A и B, где событие A – появление белого шара из первого ящика, событие B – появление белого шара из второго ящика. При этом A и B – независимые события. Имеем $P(A)$ = 2/12 = 1/6, $P(B)$ = 8/12 = 2/3. Применив теорему умножения вероятностей, находим

$$P(AB) = P(A)\,P(B) = (1/6)\ (2/3) = 1/9.$$

Задача 12. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что один из вынутых шаров белый, а другой – черный.

Р е ш е н и е. Пусть: событие A – появление белого шара из первого ящика; событие B – появление белого шара из второго ящика; событие C – появление черного шара из первого ящика ($C = \bar{A}$); событие D – появление белого шара из второго ящика ($D = \bar{B}$). Тогда $P(A)$ = 1/6, $P(B)$ = 2/3, $P(C) = P(\bar{A}) = 1 - 1/6 = 5/6$, $P(D) = P(\bar{C}) = 1 - 2/3 = 1/3$.

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, белый, а из второго ящика – черный:

$$P(AD) = P(A)\,P(D) = (1/6)\ (1/3) = 1/18.$$

Определим вероятность того, что шар, вынутый из первого ящика, черный, а из второго ящика – белый:

$$P(BC) = P(B)\,P(C) = (2/3)\ (5/6) = 5/9.$$

Определим теперь вероятность того, что шар, вынутый из одного ящика (безразлично из первого или второго), окажется белым, а шар, вынутый из другого ящика, – черным. Применяем теорему сложения вероятностей:

$$P = P(AD) + P(BC) = 1/18 + 5/9 = 11/18.$$

Задача 13. В ящике 6 белых и 8 черных шаров. Из ящика вынули два шара (не возвращая вынутый шар в ящик). Найти вероятность того, что оба шара белые.

Р е ш е н и е. Пусть событие A – появление белого шара при первом вынимании; событие B – появление белого шара при втором вынимании. По теореме умножения вероятностей для случая зависимых событий имеем $P(AB) = P(A)P(B/A)$. Но $P(A) = 6/(6+8) = \ = 6/14 = 3/7$ (вероятность появления первого белого шара); $P(B/A) = (6-1)/(8+6-1) = 5/13$ (вероятность появления второго белого шара в предположении, что первый белый шар уже вынут).

Задача 14. Три стрелка независимо друг от друга стреляют по цели. Вероятность попадания в цель для первого стрелка равна 0,75, для второго – 0,8, для третьего – 0,9. Определить вероятность того, что все три стрелка одновременно попадут в цель.

Р е ш е н и е. $P(A) = 0{,}75$, $P(B) = 0{,}8$, $P(C) = 0{,}9$;

$$P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0{,}75 \cdot 0{,}8 \cdot 0{,}9 = 0{,}54.$$

Задача 15. В условиях предыдущей задачи определить вероятность того, что в цель попадет хотя бы один стрелок.

Р е ш е н и е. Здесь $P(\bar{A}) = 1 - 0{,}75 = 0{,}25$ (вероятность промаха первого стрелка);

$P(\bar{B}) = 1 - 0,8 = 0,2$ (вероятность промаха второго стрелка); $P(\bar{C}) = 1 - 0,9 = 0,1$ (вероятность промаха третьего стрелка); тогда $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C})$ – вероятность одновременного промаха всех трех стрелков – определится следующим образом:

$$P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}) = P(\bar{A})P(\bar{B})P(\bar{C}) = 0,25 \cdot 0,2 \cdot 0,1 = 0,005.$$

Но событие, противоположное событию $P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}),$ заключается в поражении цели хотя бы одним стрелком. Следовательно, искомая вероятность $P = 1 - P(\bar{A}\bar{B}\bar{C}),$ т.е. P = 1 – 0,005 = 0,995.

Задача 16. Два стрелка стреляют по мишени. Вероятность попадания в цель первым стрелком равна 0,6, вторым – 0,8. Найти вероятность того, что при одном залпе:
а) попадут в цель оба стрелка;
б) попадет хотя бы один.

Р е ш е н и е. Обозначим события: A – попадет в цель первый стрелок, B – попадет в цель второй стрелок.

а) Интересующее нас событие (попадут в цель оба стрелка) является произведением событий A и B. Так как A и B – независимые события (стрелок попадает или не попадает в цель независимо от меткости другого), то $P(AB) = P(A) \cdot P(B)$.

Следовательно, $P(AB) = 0,6 \cdot 0,8 = 0,48$.

б) 1-й способ: Интересующее нас событие является суммой событий A и B, поэтому по теореме сложения

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB),$$
$$P(A+B) = 0,6 + 0,8 - 0,48 = 0,92.$$

2-й способ: Событие C (попадет хотя бы один стрелок) и $\bar{C}$ (ни один из стрелков не попадет) – противоположные, поэтому $P(C) + P(\bar{C}) = 1$. Следовательно, $P(C) = 1 - P(\bar{C})$.

Событие $\bar{C}$ является произведением событий $\bar{A}$ и $\bar{B}$.

Таким образом,

$$P(C) = 1 - P(\bar{A}) \cdot P(\bar{B}) = 1 - 0,4 \cdot 0,2 = 0,92.$$

Задача 17. Из колоды в 52 листа наугад вытягиваются три карты. Какова вероятность, что все три карты – тузы?

Р е ш е н и е. Интересующее нас событие (все три карты – тузы) является произведением трех событий: A – первая карта туз, B – вторая карта туз, C – третья карта туз. По теореме умножения

$$P(ABC) = P(A)\, P(B|A)\, P(C|AB).$$

$P(A) = \frac{4}{52}$ (число благоприятных исходов – число тузов в колоде, общее число элементарных исходов равно числу карт).

$P(B|A) = \frac{3}{51}$ (число благоприятных исходов – число тузов, оставшихся после совершения события A, т.е. после того, как один туз был вынут из колоды; общее число исходов равно числу карт, оставшихся в колоде после того, как одну карту уже вынули).

Аналогично, $P(C|AB) = \frac{2}{50}$.

Следовательно, $P(ABC) = \frac{4}{52}\frac{3}{51}\frac{2}{50} = \frac{1}{5525} \approx 0,00018$.

Задача 18. Студент знает только 10 из 25 экзаменационных билетов. В каком случае вероятность сдать экзамен больше: когда студент подходит тянуть билет первым или вторым по счету?

Р е ш е н и е. Обозначим события: A – вытягивает выученный билет, подходя первым; B – вытягивает выученный билет, подходя вторым.

$P(A) = \dfrac{10}{25} = 0{,}4$ (число благоприятных исходов равно числу выученных билетов; число всех элементарных исходов равно числу билетов).

Событие B может наступить при появлении одного из двух несовместных событий C_1 (первый взятый билет был известен нашему студенту) и C_2 (первый взятый билет был невыученный билет). По формуле полной вероятности

$$P(B) = P(C_1)\, P(B|C_1) + P(C_2)\, P(B|C_2).$$

$$P(B) = \frac{10}{25}\,\frac{9}{24} + \frac{15}{25}\,\frac{10}{24} = \frac{240}{600} = 0{,}4.$$

Так как $P(A) = P(B) = 0{,}4$, то вероятность одинакова.

Задача 19. Вероятность выхода станка из строя в течение одного рабочего дня равна α (α – малое положительное число, второй степенью которого можно пренебречь). Какова вероятность того, что за 5 дней станок ни разу не выйдет из строя? Решить задачу при $\alpha = 0{,}01$.

Р е ш е н и е. Так как $1 - \alpha$ – вероятность того, что станок не выйдет из строя в течение дня, то по теореме умножения вероятностей $(1 - \alpha)^5$ – вероятность того, что станок не выйдет из строя в течение 5 дней.

Воспользовавшись биномиальным разложением и пренебрегая членами, содержащими α^2, α^3, α^4 и α^5, получим приближенное равенство $(1 - \alpha)^5 \approx 1 - 5\alpha$, т.е. $P \approx 1 - 5\alpha$. Приняв $\alpha = 0{,}01$, получаем $P \approx 0{,}95$.

Задача 20. В урне 20 белых и 10 черных шаров. Вынули подряд 4 шара, причем каждый вынутый шар возвращают в урну перед извлечением следующего и шары в урне перемешивают. Какова вероятность того, что из четырех вынутых шаров окажется два белых?

Р е ш е н и е. Вероятность извлечения белого шара $p = 20/30 =$ $= 2/3$ можно считать одной и той же во всех четырех испытаниях; $q = 1 - p = 1/3$. Используя формулу Бернулли, получаем

$$P_4(2) = C_4^2 p^2 q^2 = \frac{4\cdot 3}{1\cdot 2}\left(\frac{2}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{8}{27}.$$

Задача 21. Вероятность появления события A равна 0,4. Какова вероятность того, что при 10 испытаниях событие A появится не более трех раз?

Р е ш е н и е. Здесь $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$. Имеем:

вероятность появления события A 0 раз: $P_{10}(0) = q^{10}$;
вероятность появления события A 1 раз: $P_{10}(1) = 10pq^9$;
вероятность появления события A 2 раза: $P_{10}(2) = 45p^2q^8$;
вероятность появления события A 3 раза: $P_{10}(3) = 120p^3q^7$.

Вероятность того, что событие A появится не больше трех раз, составляет $P = P_{10}(0) + P_{10}(1) + P_{10}(2) + P_{10}(3)$, т.е.

$$P = q^{10} + 10pq^9 + 45p^2q^8 + 120p^3q^7 =$$
$$= q^7(q^3 + 10pq^2 + 45p^2q + 120p^3).$$

Полагая $p = 0{,}4$, $q = 0{,}6$, получим

$$P = 0{,}6^7(0{,}216 + 1{,}44 + 4{,}32 + 7{,}68) \approx 0{,}38.$$

Задача 22. В семье пять детей. Найти вероятность того, что среди этих детей два мальчика. Вероятность рождения мальчика принять равной 0,51.

Р е ш е н и е. Вероятность рождения мальчика равна p = 0,51. Следовательно, вероятность рождения девочки равна $q = 1 - p =$ $= 1 - 0{,}51 = 0{,}49$.

Искомая вероятность по формуле Бернулли равна

$$P_5(2) = C_5^2 p^2 q^{5-2} = \frac{5!}{2!\cdot 3!}(0{,}51)^2(0{,}49)^3 \approx 0{,}306.$$

Задача 23. В урне 10 белых и 40 черных шаров. Вынимают подряд 14 шаров, причем цвет вынутого шара регистрируют, а затем шар возвращают в урну. Определить наивероятнейшее число появлений белого шара.

Р е ш е н и е. Здесь $n = 14$, $p = 10/50 = 1/5$, $q = 1 - p = 4$. Используя двойное неравенство $np - q \le m_0 \le np + p$ при указанных значениях n, p и q, получим $14/5 - 4/5 \le m_0 \le 14/5 + 1/5$, т.е. $2 \le m_0 \le 3$.

Таким образом, задача имеет два решения: $m_0 = 2$, $m_0 = 3$.

Задача 24. Вероятность попадания стрелком в цель равна 0,7. Сделано 25 выстрелов. Определить наивероятнейшее число попаданий в цель.

Р е ш е н и е. Здесь $n = 25$, $p = 0{,}7$, $q = 0{,}3$. Следовательно, $25\cdot 0{,}7 - 0{,}3 \le m_0 \le 25\cdot 0{,}7 + 0{,}7$, т.е. $17{,}2 \le m_0 \le 18{,}2$.

Так как m – целое число, то $m_0 = 18$.

Задача 25. В результате многолетних наблюдений установлено, что вероятность выпадения дождя 1 октября в данном городе равна 1/7. Определить наивероятнейшее число дождливых дней 1 октября в данном городе за 40 лет.

Р е ш е н и е. Имеем $n = 40$, $p = 1/7$, $q = 6/7$. Таким образом,

$$40\,\frac{1}{7} - \frac{6}{7} \le m_0 \le 40\,\frac{1}{7} + \frac{1}{7}, \text{ т.е. } 4\frac{6}{7} \le m_0 \le 5\frac{6}{7}, \text{ т.е. } m_0 = 5.$$

Задача 26. В урне 100 белых и 80 черных шаров. Из урны извлекают n шаров (с возвратом каждого вынутого шара). Наивероятнейшее число появлений белого шара равно 11. Найти n.

Р е ш е н и е. Из двойного неравенства $np - q \le m_0 \le np + p$ следует, что $(m_0 - p)/p \le n \le (m_0 + q)/p$.

Здесь $m_0 = 11$, $p = 100/180 = 5/9$, $q = 4/9$; следовательно,

$$\frac{11 - 5/9}{5/9} \le n \le \frac{11 + 4/9}{5/9}, \text{ т.е. } 18{,}8 \le n \le 20{,}6.$$

Итак, задача имеет два решения: $n = 19$, $n = 20$.

Задача 27. Имеются четыре урны. В первой урне 1 белый и 1 черный шар, во второй – 2 белых и 3 черных шара, в третьей – 3 белых и 5 черных шаров, в четвертой – 4 белых и 7 черных шаров. Событие H_i – выбор i-й урны (i = 1, 2, 3, 4). Известно, что вероятность выбора i-й урны равна i / 10, т.е. $P(H_1) = 1/10$, $P(H_2) = 1/5$, $P(H_3) = 3/10$, $P(H_4) = 2/5$. Выбирают наугад одну из урн и вынимают из нее шар. Найти вероятность того, что этот шар белый.

Р е ш е н и е. Из условия следует, что $P(A / H_1) = 1 / 2$ (условная вероятность извлечения белого шара из первой урны); аналогично $P(A / H_2) = 2 / 5$, $P(A / H_3) = 3 / 8$, $P(A / H_1) = 4 / 11$. Вероятность извлечения белого шара находим по формуле полной вероятности:

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)+P(H_3)P(A/H_3)+$$

$$+P(H_4)P(A/H_4)=\frac{1}{10}\,\frac{1}{2}+\frac{1}{5}\,\frac{2}{5}+\frac{3}{10}\,\frac{3}{8}+\frac{2}{5}\,\frac{4}{11}=\frac{1707}{4400}.$$

Задача 28. В первой урне 5 белых и 10 черных шаров, во второй – 3 белых и 7 черных шаров. Из второй урны в первую переложили один шар, а затем из первой урны вынули наугад один шар. Определить вероятность того, что вынутый шар – белый.

Р е ш е н и е. После того как из второй урны переложили в первую один шар, в первой урне оказалось две совокупности шаров: 1) 5 белых и 10 черных шаров, первоначально находившихся в этой урне; 2) один шар, переложенный из второй урны. Вероятность появления белого шара из первой совокупности составляет $P(A/H_1)=5/15=1/3,$ а из второй совокупности $P(A/H_3)=3/10.$ Вероятность того, что произвольно вынутый шар принадлежит первой совокупности, есть $P(H_1)=15/16,$ а второй совокупнос-ти – $P(H_2)=1/16.$

Используя формулу полной вероятности, получим

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=$$

$$=\frac{15}{16}\,\frac{1}{3}+\frac{1}{16}\,\frac{3}{10}=\frac{53}{160}.$$

Задача 29. В первой урне 4 белых и 6 черных шаров, во второй – 5 белых и 4 черных. Из первой урны во вторую перекладывают не глядя один шар, после чего из второй урны извлекают один шар. Найти вероятность, что этот шар белый. Какова вероятность, что из первой во вторую урну был переложен черный шар, если извлеченный из второй урны шар оказался белым?

Р е ш е н и е. Пусть A – событие, состоящее в том, что извлеченный шар из второй урны оказался белым, H_1 – из первой урны во вторую переложили белый шар, H_2 – черный, H_1 и H_2 – гипотезы.

$$P(H_1)=\frac{4}{10}=\frac{2}{5},\ P(H_2)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}.$$

Найдем $P(A/H_1)$ и $P(A/H_2)$.

Если переложили белый шар, то во второй урне стало 10 шаров, из них 6 белых $P(A/H_1)=\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$, если черный, то шаров также 10, но белых 5, тогда $P(A/H_2)=\frac{5}{10}=\frac{1}{2}$.

По формуле полной вероятности

$$P(A)=P(H_1)P(A/H_1)+P(H_2)P(A/H_2)=\frac{2}{5}\,\frac{3}{5}+\frac{3}{5}\,\frac{1}{2}=\frac{27}{50}.$$

По формуле Байеса:

$$P(B_2/A)=\frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)}=\frac{\frac{3}{5}\,\frac{1}{2}}{\frac{27}{50}}=\frac{5}{9}.$$

Задача 30. Вероятность рождения мальчика равна 0,51. Найти вероятность того, что среди 100 новорожденных окажется 50 мальчиков.

Решение. По условию задачи n=100; k=50; p=0,51; $q=1-p=0{,}49$.

Так как n = 100 – достаточно большое число, воспользуемся локальной теоремой Лапласа:

$$P_n(k)\approx\frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x),\ \text{где}\ x=\frac{k-np}{\sqrt{npq}}.$$

Найдем значение x:

$$x = \frac{k - np}{\sqrt{npq}} = \frac{50 - 100 \cdot 0,51}{\sqrt{100 \cdot 0,51 \cdot 0,49}} \approx -0,2 .$$

По справочным таблицам найдем $\varphi(-0,2) = \varphi(0,2) \approx 0,3910$ (так как функция $\varphi(x)$ – четная).

Искомая вероятность

$$P_{100}(50) \approx \frac{0,3910}{5} \approx 0,0782 .$$

7. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Основная литература

1. Теория вероятностей и математическая статистика[Электронный ресурс] / Балдин К. В. - М. : Дашков и К, 2014. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785394021084.html

2. Автоматическое регулирование в электроэнергетических системах [Электронный ресурс]: учебник для вузов / Коротков В.Ф. - М. : Издательский дом МЭИ, 2013. - http://www.studentlibrary.ru/book/MPEI198.html

Дополнительная литература

1. Теория вероятностей и математическая статистика [Электронный ресурс] / Балдин К. В. - М. : Дашков и К, 2014. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785394021084.html

2. Общая теория статистики [Электронный ресурс] / Балдин К. В. - М. : Дашков и К, 2012. - http://www.studentlibrary.ru/book/ISBN9785394018725.html

Периодические издания

1. Автоматика и телемеханика
2. Известия РАН. Теория и системы управления.
3. Теория вероятностей и ее применения
4. Известия высших учебных заведений. Математика.
5. Математическое моделирование

Интернет-ресурсы

1. http://users.kaluga.ru/math/ - сайт "Компьютерная математика", обзор основных математических пакетов.
2. http://www.mathworks.com/products/simulink - раздел Simulink на сервере www.mathworks.com (англ.)
3. http://www.engin.umich.edu/group/ctm/ - учебные материалы по моделированию и исследованию динамических объектов с помощью MatLab (англ.)
4. http://www.eagle.ca/~cherry/pst.htm материалы по Power System Toolbox

8. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ)

Лекционные аудитории должны быть оборудованы мультимедийными системами, компьютерами (доступ к сети Интернет), экраном. В качестве материально-технического обеспечения дисциплины использованы: электронные мультимедийные средства обучения, Наборы слайдов по темам, Электронные каталоги и справочники.

Рабочая программа дисциплины составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО по направлению «**Управление в технических системах**»

Рабочую программу составил С.И.Малафеев
д.т.н., профессор

Рецензент
Зам.начальника отдела
ЗАО «Автоматика Плюс», к.т.н. В.М.Дерябин

Программа рассмотрена и одобрена на заседании кафедры УИТЭС
Протокол № 10/1 от 18.11.15 года
Заведующий кафедрой А.Б.Градусов

Рабочая программа рассмотрена и одобрена на заседании учебно-методической комиссии направления «**Управление в технических системах**»
Протокол № 8 от 18.11.15 года
Председатель комиссии А.Б.Градусов