Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича
и Николая Григорьевича Столетовых»
(ВлГУ)

Э.Ф. Касаткина

ПЛАНИРОВАНИЕ И ОРГАНИЗАЦИЯ ЭКСПЕРИМЕНТА
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ К ПРАКТИЧЕСКИМ ЗАНЯТИЯМ

(электронный ресурс)

ВлГУ – 2018 г.

Касаткина Э.Ф.
Планирование и организация эксперимента. Методические указания к практическим занятиям, Владимир: ВлГУ, - 2018. - 26 с.

Методические указания к практическим занятиям служит для изучения дисциплины «Планирование и организация эксперимента» и выполнения расчетно-графической и контрольной работы по этой дисциплине.

Методические указания предназначены для студентов, обучающихся по направлению 27.03.01 «Стандартизация и метрология», 27.03.02 "Управление качеством".

ОГЛАВЛЕНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Планирование эксперимента получило широкое распространение в некоторых областях науки и техники. Производственный процесс, особенно сложный, можно охарактеризовать очень большим числом факторов. Оценки сделанные специалистами для различных производств дают величину порядка 400. Это только те переменные, воздействие на которые предусмотрено технологией. Каких либо принципиальных математических трудностей для решения задач такой размерности нет, но инженерный уровень промышленности не обеспечивает организацию экспериментов такого масштаба. Поэтому возникает вопрос о том, как из исходной сложной задачи получить задачу с 6-10 факторами? Если отклики выражают отношение к результату опыта, то факторы соответствуют возможностям воздействия на эти результаты. Фактически это форма представления той системы действий, которая задает технологический процесс. Используя различную априорную информацию и, если это необходимо, эксперимент, исследователь должен получить список факторов, имеющий разумную длину. Состав факторов в процессе работы должен систематически пересматриваться, все время использовать те факторы, которые наиболее важные в данный момент. Ни один из используемых в настоящее время статистических методов не дает гарантии, на то, что отклик и факторы выбраны правильно. Шаг за шагом, накапливая опыт, экспериментатор может постоянно улучшать, оптимизировать технологический процесс используя современные методы планирования промышленных экспериментов для задач статической оптимизации.

1. ПОЛНЫЙ ФАКТОРНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Планирование эксперимента – это процедура выбора числа и условий проведения опытов, необходимых и достаточных для решения поставленной задачи с требуемой точностью. При исследовании различных процессов экономики и техники экспериментатор, как правило, сталкивается со случайными событиями и случайными величинами. Это объясняется тем обстоятельством, что всегда имеет место разброс параметров в пределах заданных допусков. Кроме того, измерения производятся с ошибками. Поэтому обработка полученных результатов может быть произведена только с помощью статистических методов. Однако статистические методы позволяют лишь в среднем оценить полученные результаты и определить разброс оцениваемых процессов относительно их средних значений. Математическая теория планирования эксперимента позволяет экспериментатору спланировать опыт так, чтобы при минимальной затрате времени и средств получить максимальную информацию. При этом основной задачей математической теории планирования эксперимента является разработка методов получения математических моделей адекватно описывающих изучаемые процессы или изучаемые явления. Эта задача называется задачей идентификации.

Если модель достаточно точно описывает объект, то эксперимент на объекте можно заменить экспериментом на модели. В настоящее время большое распространение наряду с физическими моделями получили абстрактные математические модели.

Моделирование - метод анализа экспериментальной информации. Математическая модель - математическое отображение наиболее существенных сторон процесса. Математическая модель - записанная в математических символах абстракция реального явления, так сконструированная, чтобы анализ ее давал возможность проникнуть в сущность явления. Математическая модель устанавливает соотношение между совокупностью переменных, которые являются параметрами управления явления.

Математические модели могут иметь различные аналитические выражения. Они могут быть выражены с помощью полиномов 0-го, 1-го, 2-го и более высоких порядков, а также с помощью показательных, логарифмических и других функций. Определение конкретного вида модели адекватно описывающей на основе опытных данных изучаемый процесс, зависит от наличия у экспериментатора априорной информации о виде модели. Чем выше степень информирования, тем лучше решается поставленная задача.

Линейная модель: $Y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_n x_n = \sum_{i=0}^{n} B_i X_i$;

Квадратичная модель: $Y = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i + \sum_{i<j} b_{ij} x_i x_j + \sum_{i=1}^{n} b_{ii} x_i^2$;

где b_i – коэффициенты модели, показывающие степень влияния каждого i-го фактора на функцию отклика;

x_0 – фиктивная переменная, равная 1, используемая для нахождения свободного члена уравнения регрессии b_0;

b_0 – остаточный член, характеризующий среднее значение функции отклика при $X_i = 0$.

Аналогично составляются модели третьего и более высоких порядков. Данные модели еще носят название факторные.

Фактором называется измеряемая переменная величина, принимающая в некоторый момент времени определенное значение. Факторы соответствуют способам воздействия на объект исследования. Каждый фактор имеет область определения. Фактор считается заданным, если вместе с его названием указан область его определения, то есть все значения, которые может принимать данный фактор. Факторы могут быть количественными, то есть их можно измерить, взвесить или качественными – это разные вещества, аппараты и т.д.

При активном планировании эксперимента уровни факторов выбираются симметрично относительно центра плана. Совокупность уровней факторов и образует собой факторное пространство. Факторное пространство иногда называется решеткой планирования.

Число точек плана при ортогональном планировании определяется по формуле:

$$N = K^n$$

где K - число уровней для каждого из факторов,

n - число факторов.

Так для двухфакторного эксперимента на двух уровнях число точек плана $N = 2^2 = 4$; для трех факторного на двух уровнях $N = 2^3 = 8$; для восьми факторного $N = 2^8 = 256$. по мере увеличения числа точек план быстро увеличивается.

Каждой точке факторного пространства отвечает истинное и опытное значение функции отклика.

Совокупность всех истинных значений функции отклика, отвечающих точкам факторного пространства, называется поверхностью функции отклика.

Основные обозначения:

X_i – i-й фактор в натуральном виде;

x_i – i-й фактор в кодированном виде, величина безразмерная;

+1 – верхняя граница (верхний уровень) изменения i- го фактора x_i;

-1 – нижняя граница (нижний уровень) изменения i- го фактора x_i;

X_i^0 – середина выбранного диапазона измерений i- го фактора (основной уровень);

λ_i – шаг изменения (варьирования) i- го фактора в процессе экспериментирования;

Y – функция отклика;

N – количество опытов в плане; n – количество варьируемых факторов (переменных);

γ – количество параллельных замеров в каждом опыте;

f – число степеней свободы той или иной величины; α – уровень значимость (вероятность ошибки принятия той или иной гипотезы), $\alpha = 0{,}05$ для $P = 0{,}95$.

Основной (нулевой) уровень является исходной точкой для построения плана эксперимента, обычно это оптимальное (наилучшее значение параметра). Если это значение неизвестно, то выбирается одно из области значений, возможно среднее значение.

Шаг варьирования факторов – некоторое число (свое для каждого фактора), прибавление которого к основному уровню дает верхний, а вычитание – нижний уровни факторов. В качестве верхнего уровня может быть выбрано максимальное значение фактора, в качестве нижнего минимальное, а в качестве основного – среднее значение.

Совокупность уровней факторов с отвечающими им опытными значениями функции отклика, записанные в таблицу, называют матрицей планирования. Для ее составления необходимо задать границы уровни и шаг варьирования независимых переменных в натуральном и кодированном виде табл. 1.

Таблица 1

Уровни факторов с отвечающими им опытными значениями функции отклик

Факторы / Уровни	X_1		…	X_n	
	физ. значение	**код**		**физ. значение**	**код**
Верхний	$X_1^{в}$	+1	…	$X_n^{в}$	+1
Нижний	$X_1^{н}$	− 1	…	$X_n^{н}$	− 1
Основной X_i^0	$\dfrac{X_1^{в}+X_1^{н}}{2}$	0	…	$\dfrac{X_n^{в}+X_n^{н}}{2}$	0
Шаг варьирования λ	$\dfrac{X_1^{в}-X_1^{н}}{2}$	−	…	$\dfrac{X_n^{в}-X_n^{н}}{2}$	−

Например, для двухфакторного эксперимента на двух уровнях матрица планирования представляется в виде таблицы, где $X_1^{н}$ и $X_1^{в}$ нижний и верхний уровни первого фактора, $X_2^{н}$ и $X_2^{в}$ нижний и верхний уровни второго фактора табл. 2.

Таблица 2

Уровни факторов с отвечающими им опытными значениями функции отклик для двухфакторного эксперимента

№ опыта	Уровни факторов		Функция отклика		№ опыта	Уровни факторов		Кодовое обозначение	Функция отклика
	X_1	X_2				X_1	X_2		
1	$X_1^{н}$	$X_2^{н}$	Y_1		1	− 1	− 1	1	Y_1
2	$X_1^{в}$	$X_2^{н}$	Y_2		2	+ 1	− 1	A	Y_2
3	$X_1^{н}$	$X_2^{в}$	Y_3		3	− 1	+ 1	B	Y_3
4	$X_1^{в}$	$X_2^{в}$	Y_4		4	+ 1	+ 1	AB	Y_4

Матрицы планирования независимо от числа факторов обладают общими свойствами. Эти свойства определяют качества модели, так как эксперимент планируется для того, чтобы получить модель, обладающую некоторыми оптимальными свойствами. На практике это означает, что оценки коэффициентов модели должны быть наилучшими.

Два свойства следуют непосредственно из построения матрицы и являются свойствами отдельных столбцов матрицы планирования. Первое из них – симметричность относительно центра эксперимента формулируется следующим образом: алгебраическая сумма элементов вектор-столбца каждого фактора равна нулю, или:

$$\sum_{i,j,k=1}^{N} x_{ijk} = 0$$

где I, j, k – номер фактора, а N – число факторов.

Второе свойство – так называемое условие нормировки – формулируется следующим образом: сумма квадратов элементов каждого столбца равна числу опытов:

$$\sum_{i,j,k=1}^{N} x_{ijk}^2 = 0.$$

Это следует из того, что значения факторов в матрице = +,- 1.

Два следующих свойства относятся к совокупности столбцов.

Третье свойство: сумма почленных произведений двух вектор столбцов матрицы равна нулю, это свойство называется ортогональностью матрицы планирования:

$$\sum_{i=1}^{N} x_{ij} x_{uk} = 0.$$

Последние, четвертое свойство называется ротатабельностью, т.е. точки в матрице планирования подбираются так, что точность предсказаний значений параметров оптимизации одинакова на равных расстояниях от центра эксперимента и не зависит от направления.

Для упрощения записи "1" может быть опущена. Все возможные комбинации из 2-х факторов, варьируемых на 2-х уровнях, будут исчерпаны, если мы поставим 4 опыта табл. 3:

Таблица 3

Пример построения матрицы планирования

№ опыта	**Матрица планирования X**				**Вектор выхода $Y_n = (\bar{y}_n)$**
	x_0	x_1	x_2	x_1x_2	
1	+	–	–	+	Y_1
2	+	+	–	–	Y_2
3	+	–	+	–	Y_3
4	+	+	+	+	Y_4

Такое планирование позволяет представить изучаемую зависимость неполным квадратным уравнением: $Y = b_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_{12}x_1x_2$

Переход от натуральных значений переменных к кодированным и наоборот осуществляется по формуле: $x_i = \dfrac{X_i - X_i^0}{\lambda_i}$

При увеличении числа факторов X_i например, до 3-х, чтобы исчерпать все возможные комбинации факторов, варьируемых на 2-х уровнях, необходимо поставить 8 опытов Таблица 4:

Таблица 4

Матрица планирования для плана 2^3

№ опыта	Матрица планирования X								Вектор выхода
	x_0	x_1	x_2	x_3	x_1x_2	x_1x_3	x_2x_3	$x_1x_2x_3$	
1	+	–	–	–	+	+	+	–	Y_1
2	+	+	–	–	–	–	+	+	Y_2
3	+	–	+	–	–	+	–	+	Y_3
4	+	+	+	–	+	–	–	–	Y_4
5	+	–	–	+	+	–	–	+	Y_5
6	+	+	–	+	–	+	–	–	Y_6
7	+	–	+	+	–	–	+	–	Y_7
8	+	+	+	+	+	+	+	+	Y_8

Как видно из таблицы план проведения экспериментов для трех переменных получили из плана двух переменных, повторив его дважды: один раз при значениях x_3, находящихся на нижнем, а второй раз – на верхнем уровнях. Если можно включить в рассмотрение четвертый фактор x_4, то аналогичным образом повторяют планирование и т.д. для сколько угодно числа независимых переменных. После составления матрицы планирования проводится сам эксперимент и его анализ.

1. Дисперсионный анализ результатов эксперимента.

а) проверка измерений на равноточность. Равноточность измерений или однородность полученного ряда оценок дисперсии $S_{y1}^2;\ S_{y2}^2 \dots\ S_{yN}^2$, определяется по критерию Кохрена.

$$S_{yn}^2 = \frac{\sum(\bar{y}_{ni} - y_{ni})^2}{\gamma - 1};\ \bar{y}_{ni} = \frac{\sum y_{ni}}{\gamma};\ G^Э = \frac{\max\{S_{yn}^2\}}{\sum S_{yn}^2}$$

$G^Э$ сравнивается с табличным значением $G_{f_1 f_2}^T$, если при выбранном уровне значимости α имеет место неравенство $G^Э \le G_{f_1 f_2}^T$, то измерения во всех γ опытах равноточны, если же $G^{Э} > G^{T}_{f_1 f_2}$, то измерения при выбранном уровне значимости не равноточны и дальнейшие расчеты продолжать не имеет смысла. Тогда необходимо опыт, оценка дисперсии которого наибольшая, повторить более точно и скорректировать исходные данные, либо увеличить число параллельных измерений γ в каждом опыте.

Число степеней свободы критерия Кохрена определяется по формулам: f_1 – число степеней свободы числителя $f_1 = \gamma - 1$, f_2 – число степеней свободы знаменателя $f_2 = N$.

б) определение ошибки эксперимента. Ошибка вычисляется по формуле:

$$S_{\bar{y}} = \sqrt{\frac{\sum S_{yn}^2}{N \cdot \gamma}}$$

в) определение коэффициентов уравнения регрессии. Коэффициенты уравнения регрессии определяются по следующим формулам: $b_i = \dfrac{\sum a_i \bar{y}_n}{N}$; $b_{ij} = \dfrac{\sum a_{ij} \bar{y}_n}{N}$; $b_{ijk} = \dfrac{\sum a_{ijk} \bar{y}_n}{N}$ где a_i и $a_{ij} = \pm 1$ берутся из матриц планирования эксперимента рис. 1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1	1. Условия планирования эксперимента											
2				Факторы								
3		условия		X1		X2		X3				
4				физич.	код	физич.	код	физич.	код			
5	верхний уровень Xiв			270	1	400	1	3,5	1			
6	нижний уровень Xiн			110	-1	350	-1	2,4	-1			
7	основной уровеньXi0			190	0	375	0	2,95	0			
8	шаг варьирования			80	-	25	-	0,55	-			
9	2. Матрица планирования и результаты эксперимента.											
10	№		Планирование				Выход			оценка		
11	опыта	X0	X1	X2	X3	Yn1	Yn2	Yn3	Y=Yср.	дисп.		
12	1	1	-1	-1	-1	2	1	1	1,333	0,33333	Максимальна	
13	2	1	1	-1	-1	5,6	6	5,5	5,7	0,07	дисперсия:	
14	3	1	-1	1	-1	3	3,2	3	3,067	0,01333		
15	4	1	1	1	-1	9,3	9,7	9,2	9,4	0,07		
16	5	1	-1	-1	1	5	3,9	4,5	4,467	0,30333		
17	6	1	1	-1	1	9	8,9	8,7	8,867	0,02333		
18	7	1	-1	1	1	6,3	5,3	5,2	5,6	0,37		
19	8	1	1	1	1	13,4	14	13,5	13,63	0,10333		
20	Сумма									**1,28667**		
21	Поиск критерия Кохрена:Max{Дисп.}/оценку дисперсии:								**0,288**			
22	Оценка по критерию Кохрена G =					0,288	Gт = 0,51, следовательно эксп. равноточен.					
23	3. Определим ошибку эксперимента:					Sy =	**0,232**	S^2y =	**0,054**			

Рис. 1. Пример расчета равноточности результатов измерений

Вычислять коэффициенты регрессии можно по методу, предложенному Йетсом. Процедура состоит в попарном сложении и вычитании компонент вектора-выхода. Число циклов равно числу факторов, участвующих в эксперименте.

В общем виде схему вычисления можно представить следующим образом рис. 2.

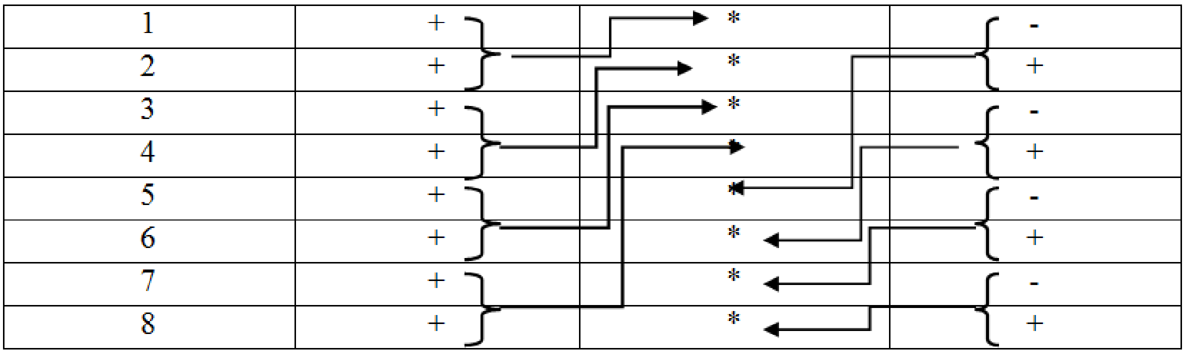

Рис. 2. Схема расчета коэффициентов по методу Йетса

Рассмотрим правила вычисления для полного факторного эксперимента ПФЭ типа 2^2 и 2^3, табл. 5, табл. 6.

Таблица 5

Вычисление коэффициентов математической модели по схеме Йетса для плана 2^2

№ опыта	Вектор выхода	Цикл 1	Цикл 2	Коэффициенты b
1	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \bar{y}_1'$	$\bar{y}_1' + y_2' = y_1''$	$b_0 = \frac{1}{2^2} y_1''$
2	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3 + \bar{y}_4 = \bar{y}_2'$	$\bar{y}_3' + y_4' = y_2''$	$b_1 = \frac{1}{2^2} y_2''$
3	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_2 - \bar{y}_1 = \bar{y}_3'$	$\bar{y}_2' - y_1' = y_3''$	$b_2 = \frac{1}{2^2} y_3''$
4	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_4 - \bar{y}_3 = \bar{y}_4'$	$\bar{y}_4' - y_3' = y_4''$	$b_{12} = \frac{1}{2^2} y_4''$

Таблица 6

Схема вычисления коэффициентов регрессии для ПФЭ типа 2^3 методом Йетса.

№ опыта	Вектор выхода	Цикл 1	Цикл 2	Цикл 3	Коэффициенты b
1	$\bar{y}_1$	$\bar{y}_1 + \bar{y}_2 = \bar{y}_1'$	$\bar{y}_1' + y_2' = y$	$\bar{y}_1'' + y_2'' = y_1''$	$b_0 = \frac{1}{2^3} y_1'''$
2	$\bar{y}_2$	$\bar{y}_3 + \bar{y}_4 = \bar{y}_2'$	$\bar{y}_3' + y_4' = y$	$\bar{y}_3'' + y_4'' = y_2''$	$b_1 = \frac{1}{2^3} y_2'''$
3	$\bar{y}_3$	$\bar{y}_5 + \bar{y}_6 = \bar{y}_3'$	$\bar{y}_5' + y_6' = y$	$\bar{y}_5'' + y_6'' = y_3'''$	$b_2 = \frac{1}{2^3} y_3'''$
4	$\bar{y}_4$	$\bar{y}_7 + \bar{y}_8 = \bar{y}_4'$	$\bar{y}_7' + y_8' = y$	$\bar{y}_7'' + y_8'' = y_4'''$	$b_{12} = \frac{1}{2^3} y_4'''$
5	$\bar{y}_5$	$\bar{y}_2 - \bar{y}_1 = \bar{y}_5'$	$\bar{y}_2' - y_1' = y$	$\bar{y}_2'' - y_1'' = y_5''$	$b_3 = \frac{1}{2^3} y_5'''$
6	$\bar{y}_6$	$\bar{y}_4 - \bar{y}_3 = \bar{y}_6'$	$\bar{y}_4' - y_3' = y$	$\bar{y}_4'' - y_3'' = y_6''$	$b_{13} = \frac{1}{2^3} y_6'''$
7	$\bar{y}_7$	$\bar{y}_6 - \bar{y}_5 = \bar{y}_7'$	$\bar{y}_6' - \bar{y}_5' = \bar{y}_7''$	$\bar{y}_6'' - \bar{y}_5'' = \bar{y}_7''$	$b_{23} = \frac{1}{2^3} y_7'''$
8	$\bar{y}_8$	$\bar{y}_8 - \bar{y}_7 = \bar{y}_8'$	$\bar{y}_8' - \bar{y}_7' = \bar{y}_8''$	$\bar{y}_8'' - \bar{y}_7'' = \bar{y}_8'''$	$b_{123} = \frac{1}{2^3} y_8'''$

Значения коэффициентов, рассчитанных на основе матрицы планирования и на основе схемы Йетса должны совпадать, рис. 3.

2. Дисперсионный анализ уравнения регрессии:

а) определение ошибки при вычислении коэффициентов уравнения регрессии.

Ошибки при вычислении коэффициентов для ПФЭ типа 2^n одинаковы и определяются по формуле: $S^2 = \{b_n\} = S_{\bar{y}}^2 \frac{1}{N}; или\ S = \{b_n\} = S_{\bar{y}} \frac{1}{\sqrt{N}};$

б) проверка значимости коэффициентов уравнения регрессии. Проверку значимости коэффициентов уравнения регрессии проводят по t – критерию Стьюдента. Для каждого коэффициента определяют $t^Э$ критерий по формуле: $t_n^Э = \frac{|b_n|\sqrt{N}}{S_{\bar{y}}}$ и сравнивают с табличным значением $t_{\alpha,f}^T$ выбранного для заданного уровня значимости и числа степеней свободы, которое равно: $f = N(\gamma - 1)$.

Если для данного коэффициента выполняется неравенство $t^{Э} \geq t^{T}_{\alpha,f}$,то при выбранном уровне значимости соответствующий коэффициент уравнения регрессии значим, если неравенство не выполняется, то коэффициент не значим и членом уравнения регрессии с этим коэффициентом можно пренебречь.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
24	4. Вычисление коэффициентов уравнения регрессии:									
25	b0 =	6,50833		b12 =	0,7					
26	b1 =	2,89167		b13 =	0,217					
27	b2 =	1,41667		b23 =	0,058					
28	b3 =	1,63333		b123 =	0,208					
29										
30	Итак, искомое уравнение имеет вид:									
31	**Y =**	**6,50833**	**+**	**2,8917**	**X1 +**	**1,417**	**X2 +**	**1,633**	**X3 +**	
32	**+**	**0,7**	**X1X2 +**	**0,2167**	**X1X3 +**	**0,058**	**X2X3 +**	**0,208**	**X1X2X3**	
33	5. Вычисление коэффициентов уравнения по методу Йетса									
34	№	Вектор	цикл 1	цикл 2	цикл 3	Коэффициенты				
35	опыта	выхода								
36	1	1,33333	7,033	19,5	52,07	b0 =	6,508			
37	2	5,7	12,47	32,567	23,13	b1 =	2,892			
38	3	3,06667	13,33	10,7	11,33	b2 =	1,417			
39	4	9,4	19,23	12,433	5,6	b12 =	0,7			
40	5	4,46667	4,367	5,4333	13,07	b3 =	1,633			
41	6	8,86667	6,333	5,9	1,733	b13 =	0,217			
42	7	5,6	4,4	1,9667	0,467	b23 =	0,058			
43	8	13,6333	8,033	3,6333	1,667	b123 =	0,208			
44	6. Анализ уравнения регрессии.									
45	Определение ошибки при вычислении коэффициентов регрессии.								Sb =	0,08186

Рис. 3. Пример расчета коэффициентов на основе матрицы планирования и по схеме Йетса

в) проверка гипотезы об адекватности полученного уравнения действительному процессу можно рассчитать двумя способами используя F критерий Фишера:

– по формуле вычисляют экспериментальное значение статистики:

$$F^{Э} = \frac{S^2_{yag}}{S^2_{\bar{y}}}; S^2_{yag} = \frac{\sum \bar{y}^2_n - N \sum b_n}{N - (k+1)}; F^{T}_{f_1, f_2}$$

где k число значимых коэффициентов регрессии, не считая свободного члена, и сравнивают с табличным значением, где f_1 – число степеней свободы числителя отношения, $f_1 = N - (k+1)$; f_2 – число степеней свободы знаменателя отношения, $f_2 = N(\gamma - 1)$, γ - число параллельных измерений.

Если при выбранном уровне значимости выполняется неравенство $F^{Э} \le F^{T}_{f_1, f_2}$ то полученное уравнение регрессии адекватно действительному уравнению, если неравенство не выполняется, то полученное уравнение регрессии неадекватно описывает полученный процесс;

– опытное значение критерия Фишера может быть взятым равным отношению дисперсии неадекватности к общей дисперсии или дисперсии воспроизводимости:

$$F_{опыт} = \frac{S^2 Y_{н.а.}}{S^2 Y_{воспр.}}; \quad S^2 Y_{н.а.} = \frac{\gamma \cdot S^2_{ОСТ}}{N-k} = \frac{\gamma \cdot \sum_{i=1}^{N} (Y_{iрас} - \overline{Y}_{iопыт.})^2}{N-k};$$

$$S^2 Y_{воспр.} = \frac{\sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{k} (Y_{ijрас.} - Y_{iопыт.})^2}{N(k-1)}$$

г) определение границ доверительных интервалов для коэффициентов регрессии. Границы доверительных интервалов, в которых с заданной вероятностью P = 1 – α находятся коэффициенты уравнения регрессии {β} определяются по формуле: $b_n - t^{T}_{\alpha,f} S\{b_n\} \le \beta_n \ge b_n + t^{T}_{\alpha,f} S\{b_n\}$ где $t^{T}_{\alpha,f}$ табличное значение t - критерия Стьюдента при заданном уровне значимости и числе степеней свободы $f = N(\gamma - 1)$ рис. 4.

Пример оценки адекватности математической модели приведён на рис.5.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
46	Определим значимость коэффициентов уравнения регрессии:										
47	Число степеней свободы: f = N(y-1) = 8(3-1) = 16, tт = 2,12								2,12		
48	tэ1 =	35,3237	**значим**		35,32	1					
49	tэ2 =	17,3055	**значим**		17,31	1					
50	tэ3 =	19,9523	**значим**		19,95	1					
51	tэ12 =	8,55097	**значим**		8,551	1					
52	tэ13 =	2,64673	**значим**		2,647	1					
53	tэ23 =	0,71258	**незначим**		0	0					
54	tэ123 =	2,54493	**значим**		2,545	1					
55	Итак, искомое уравнение имеет вид:					6					
56	**Y =**	**6,50833**	+	**2,8917**	**X1** +	**1,417**	**X2** +	**1,633**	**X3** +		
57	+	**0,7**	**X1X2** +	**0,2167**	**X1X3** +	**0,058**	**X2X3**				
58											
59	Проверка искомого уравнения на адекватность м.б. осуществлена 2 способами:										
60	1.	$Y^2=Y^2_{ср.}$ =		**447,83**		B^2_n =	55,98		$N*B^2_n$ =	**447,802**	
61	$S^2_{уад}$=	**0,02722**									
62	FЭ =	**0,50777**		f1 = 8 - (6+1) = 1		f2 = 8*(3-1) = 1		FT = 4,49			
63	Так как полученное значение 0,22 меньше табличного, то уравнение адекватно.										
64	Доверительный интервал:				$t^т_f$*S{b}=		0,174				
65		6,33479	<= B0 <	6,6819							
66		2,71812	<= B1 <	3,0652							
67		1,24312	<= B2 <	1,5902							
68		1,45979	<= B3 <	1,8069							
69		0,52645	<= B12	0,5265							
70		0,04312	<= B13	0,0431							
71		-0,1152	<= B23	-0,1152							
72		0,03479	<= B12	0,0348							

Рис. 4. Пример оценки значимости коэффициентов математической модели по критерию Стьюдента

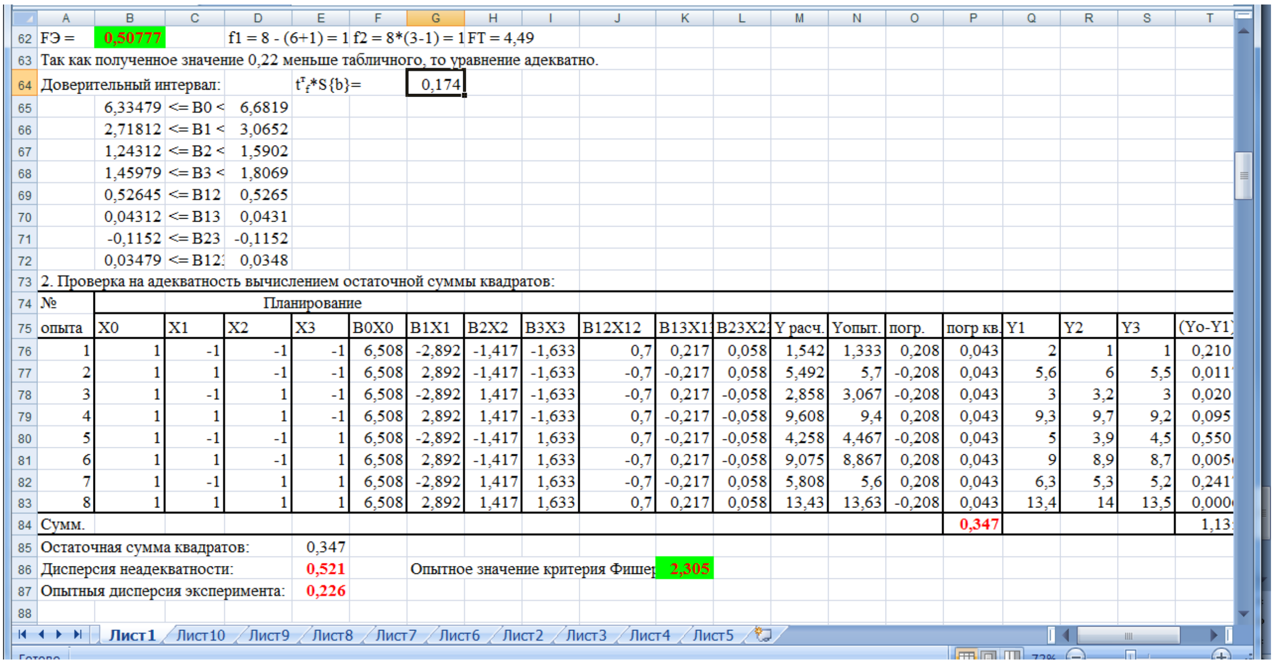

Рис. 5. Пример оценки адекватности математической модели по критерию Фишера

2. ДРОБНО-ФАКТОРНОЕ ПЛАНИРОВАНИЕ

С ростом числа факторов значительно увеличивается число проводимых экспериментов. На это требуется значительные материальные, временные и трудовые затраты. Полный факторный эксперимент обладает избыточностью опытов. В результате поисков оптимальных решений и проведенных исследованиях английским математиком Финни в 1945 г. было предложено так называемое дробно-факторное планирование, которое позволяет существенно сократить число проводимых опытов. В соответствии с дробно-факторным планированием число точек плана может быть уменьшено. Если число точек плана уменьшается в 2 раза, то говорят, что имеет место полуреплика. Если число точек плана уменьшается в 4 раза, то говоря т, что имеет место четверть реплика. Зависимость дробности реплик от числа факторов можно представить в виде таблицы 7.

Таблица 7

Дробность реплик	Число факторов, *n*						
	2	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
ПФЭ 2^n	4	8	16	32	64	128	256
Полуреплика 2^{n-1}		4	8	16	32	64	128
Четверть реплика 2^{n-2}				8	16	32	64
1/8 реплики 2^{n-3}					8	16	32
1/16 реплики 2^{n-4}						8	16

Отбор точек плана для ДПФ нельзя делать механически. Точки должны быть отобраны так, чтобы при этом сохранялось условие ортогональности исходной матрицы планирования.

Для трехфакторного планирования полуреплики обозначаются так: 2^{3-1}, они отвечают следующим зависимостям: $X_3 = X_1X_2$; $X_3 = - X_1X_2$;или $X_3 = \pm X_1X_2$, то есть существует всего два варианта для X_3. Есть только две полуреплики. Матрица планирования будет выглядеть следующим образом табл. 8:

Таблица 8

Полуреплики для плана типа 2^{3-1}

№ опыта	I. $X_3 = X_1X_2$				№ опыта	II. $X_3 = -X_1X_2$			
	X_1	X_2	X_3	$X_3X_1X_2$		X_1	X_2	X_3	$X_3X_1X_2$
1	+1	+1	+1	+1	1	+1	+1	-1	-1
2	-1	-1	+1	+1	2	-1	-1	-1	-1
3	+1	-1	-1	+1	3	+1	-1	+1	-1
4	1	+1	-1	+1	4	-1	+1	+1	-1

Для произведения трех столбцов матрицы 1 выполняется соотношения: $+1 = X_3X_1X_2$,а для матрицы 2:1 = $X_3X_1X_2$. Все знаки столбцов произведений одинаковы и в первом случае = +1, а во втором – 1. Символическое обозначение произведения столбцов, равного +1 или – 1, называется определяющим контрастом. Контраст определяет смешанные эффекты. Для того, чтобы определить, какой эффект смешан с данным, нужно помножить обе части определяющего контраста на столбец, соответствующий данному эффекту. Так, если $1 = X_3X_1X_2$, то для X_1 имеем:

$X_1 = X^2_1X_2X_3 = X_2X_3$, так как всегда $X_i^2 = 1$. Для X_2 находим: $X_2 = X_1X^2_2X_3 = X_1X_3$; для X_3: $X_3 = X_1X_2X^2_3 = X_1X_2$, тал. 9.

Таблица 9

Матрица планирования для плана типа 2^{3-1}

№ опыта	X_1	X_2	$X_3 = X_1X_2$	X_1	X_2	$X_3 = - X_1X_2$
1	+1	+1	+1	+1	+1	-1
2	-1	-1	+1	-1	-1	-1
3	+1	-1	-1	+1	-1	+1
4	1	+1	-1	-1	+1	+1

Соотношение, показывающее, с каким из эффектов смешан данный эффект, называют генерирующим соотношением.

Полуреплики, в которых основные эффекты смешаны с двухфакторными взаимодействиями, носят название планов с разрешающей способностью III (по наибольшему числу факторов в определяющем контрасте. Такие планы принято обозначать: 2^{3-1}_{III}

При выборе полуреплики 2^{4-1} возможно восемь решений:

1. $X_4 = X_1X_2$; 5. $X_4 = X_1X_3$;
2. $X_4 = -X_1X_2$; 6. $X_4 = -X_1X_3$;
3. $X_4 = X_2X_3$; 7. $X_4 = X_1X_2X_3$;
4. $X_4 = -X_2X_3$; 8. $X_4 = -X_1X_2X_3$.

Разрешающая способность этих реплик различна. Так, реплики 1-6 имеют три фактора в определяющем контрасте, а 7 и 8 имеют максимальную разрешающую способность, то есть для четырехфакторного планирования имеются две главные полуреплики: $X_4 = \pm X_1X_2 X_3$; и шесть дополнительных $X_4 = \pm X_1X_2$; $X_4 = \pm X_1X_3$; $X_4 = \pm X_3X_2$. Разрешающая способность задается системой смешивания данной реплики. Она является максимальной, если линейные эффекты смешаны с эффектами взаимодействия наибольшего возможного порядка. При отсутствие априорной информации об эффектах взаимодействия экспериментатор стремиться выбрать реплику с наибольшей разрешающей способностью, так как тройные взаимодействия обычно менее важны чем парные. Если существует информация об эффектах взаимодействия, то она должна использоваться при выборе реплики.

Пусть выбраны полуреплики, заданные генерирующим соотношением $X_1 = X_2X_3X_4$ и $X_1 = - X_2X_3X_4$, а также определяющими контрастами: $1 = X_1X_2X_3X_4$, $1 = - X_1X_2X_3X_4$. Совместные оценки здесь определяются соотношениями:

$1 = X_1X_2X_3X_4$	**$1 = - X_1X_2X_3X_4$**
$X_1 = X_2X_3X_4$	$X_1 = - X_2X_3X_4$
$X_2= X_1 X_3 X_4$	$X_2= - X_1 X_3 X_4$
$X_3 = X_1X_2X_4$	$X_3 = - X_1X_2X_4$
$X_4 = X_1X_2 X_3$	$X_4 = - X_1X_2 X_3$
$X_1X_2 = X_3X_4$	$X_1X_2 = - X_3X_4$
$X_1X_3= X_4X_2$	$X_1X_3= - X_4X_2$
$X_1X_4 = X_3X_2$	$X_1X_4 = - X_3X_2$

Такой тип смешивания даст возможность оценивать линейные эффекты совместно с эффектами взаимодействий второго порядка, а взаимодействия первого порядка совместно друг с другом.

Если полуреплики заданы генерирующими соотношениями $X_4 = X_1X_2$ и $X_4 = -X_1X_2$, то в этом случае определяющими контрастами являются $1 = X_1X_2 X_4$ и $1 = - X_1X_2 X_4$, следовательно, мы получаем планы с разрешающей способностью III и некоторые основные эффекты смешиваются с парными взаимодействиями:

1 = $X_1X_2X_4$	**1 = - $X_1X_2X_4$**
$X_1 = X_2X_4$	$X_1 = - X_2X_4$
$X_2= X_1X_4$	$X_2= - X_1X_4$
$X_3 = X_1X_2X_4$	$X_3 = - X_1X_2X_4$
$X_4 = X_1X_2$	$X_4 = - X_1X_2$
$X_1X_3= X_4X_2X_3$	$X_1X_3= - X_4X_2X_3$
$X_2 X_3= X_1 X_3X_4$	$X_2 X_3= - X_1 X_3X_4$
$X_3X_4 = X_2 X_1 X_3$	$X_3X_4 = - X_2 X_1 X_3$

3. ПЛАНИРОВАНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТА С КАЧЕСТВЕННЫМИ ФАКТОРАМИ

При решении различных задач экономики и техники, в зависимости от особенностей изучаемого явления, задач стоящих перед экспериментатором и наличия априорной информации, могут применяться не только планы количественными факторами, но и с качественными. В этом случае уровням факторов не соответствует числовая ось и порядок уровней не играет существенной роли. Примерами экспериментов с качественными факторами являются: 1. определение уровня квалификации специалистов; 2. определение влияния вида сырья на качество выпускаемой продукции; 3. определение влияния способа обработки на качество выпускаемой продукции.

Для первого примера стаж может составлять 1, 3, 5, 10, 15 лет. Таки образом число уровней данного фактора равно 5. На каждом из уровней   может быть произведено по несколько замеров. Аналогично для второго и третьего примеров. Результирующий признак в этом случае может зависеть не только от одного, но и от многих факторов. (Например, опыт работы медсестры в БСП и профилактории).

Задачей экспериментатора с качественными факторами является проверка гипотезы о равенстве средних арифметических для различных уровней фактора (или факторов).

Планирование и проведение эксперимента с качественными факторами называют сравнительными экспериментами.

Этапы планирования эксперимента с качественными факторами:

1. вычисляется среднее арифметическое по каждому из уровней факторов и общее среднее арифметическое всего эксперимента;

2. вычисляют общую дисперсию всего эксперимента и разлагают ее на две составляющие: факторную и остаточную;

3. вычисляют опытное значение критерия Фишера, равное отношению факторной дисперсии к остаточной и сравнивают его с теоретическим значением;

4. Если опытное значение критерия Фишера меньше теоретического, то гипотеза о равенстве средних арифметических не отвергается. Если же опытное значение критерия Фишера окажется больше теоретического, то гипотеза о равенстве средних отвергается. Замеры функции отклика при проведении эксперимента проводятся в случайном порядке, т.е. имеет место рандомизация.

Рассмотри пример продолжительности проведения измерений операторов с различным стажем. При уровне значимости α=0,01 табл. 10.

Таблица 10

Пример обработки результатов эксперимента с качественными факторами

Параметр		Уровни фактора *X* – стаж оператора.		
		Первый 6 лет	**Второй 12 лет**	**Третий 18 лет**
Номер опыта	1	8	4	3
	2	11	5	4
	3	14	9	6
	4	15	10	7
Число замеров на каждом из уровней		$m_1 = 4$	$m_2 = 4$	$m_3 = 4$
Среднее арифметическое функции отклика на каждом из уровней *Y*		12	7	5
		$Y_{общ} = \dfrac{\sum Y_i}{n} = 8$		
Дисперсия на каждом из уровней факторов		10	8,66	3,33

Однородность дисперсии по критерию Кохрена:

$$G_{KOX} = \frac{S^2\{Y_i\}_{\max}}{\sum S^2\{Y_i\}} = \frac{10}{10 + 8{,}66 + 3{,}33} = 0{,}45$$

Табличное значение критерия Кохрена $G_{\text{КОХ.табл}} = 0{,}78$, следовательно результаты равноточны.

Находим общую сумму квадратов отклонений результативного признака функции отклика от общего среднего значения:

$$S_{\text{общ.}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\left(Y_{ij} - Y_{\text{общ.}}\right)^2 = (4-8)^2 + (4-8)^2 + (7-8)^2 + \ldots + (15-8)^2 = 170$$

Находим факторную сумму квадратов отклонений:

$$S_{\text{факт.}} = m\sum_{i=1}^{3}\left(\overline{Y}_i - Y_{\text{общ.}}\right)^2 = 4\cdot\left[(12-8)^2 + (7-8)^2 + (5-8)^2\right] = 104$$

Находим остаточную сумму квадратов:

$$S_{\text{ос.}} = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{4}\left(Y_{ij} - \overline{Y}_{.}\right)^2 = \left[(8-12)^2 + (11-12)^2 + (14-12)^2\right] + [\ldots] = 66$$

Проведем проверку правильности расчетов:

$S_{\text{общ.}} = S_{\text{факт.}} + S_{\text{ос.}} = 104 + 66 = 170$, следовательно расчет выполнен правильно.

Находим общую несмещенную дисперсию:

$$D^{\text{нс}}_{\text{факт.}} = \frac{S_{\text{факт.}}}{\gamma - 1} = \frac{104}{3-1} = 52$$

Находим несмещенную остаточную дисперсию:

$$D^{\text{нс}}_{\text{ост.}} = \frac{S_{\text{ос.}}}{(\gamma\cdot m - 1) - (\gamma - 1)} = \frac{66}{11-2} = 7{,}3$$

Находим опытное значение критерия Фишера:

$$F^{Э} = \frac{D^{\text{нс}}_{\text{факт.}}}{D^{\text{нс}}_{\text{ост.}}} = \frac{52}{7{,}3} = 7{,}12.$$

Табличное значение критерия Фишера зависит от уровня значимости $\alpha = 0{,}01$и двух степеней свободы: $f_1 = \gamma - 1 = 2$, $f_2 = (\gamma\cdot m - 1) - (\gamma - 1) = 9$ $F^{\text{табл}} = 8$. Таким образом, с помощью критерия Фишера установлено, что среднее арифметическое продолжительности проведения измерений операторов с различным стажем работы отличается незначительно. Если условия были бы более жесткими, например: $\alpha = 0{,}05$, $f_1 = \gamma - 1 = 2$, $f_2 = (\gamma\cdot m - 1) - (\gamma - 1) = 9$, $F^{\text{табл}} = 4{,}3$ то есть гипотеза о равенстве проведения измерений отвергается.

БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. ГОСТ Р 8.736-2011 Государственная система обеспечения единства измерений. Измерения прямые многократные. Методы обработки результатов измерений. Основные положения. - М.: Изд-во Стандартинформ, 2013- 20 с.

2.ГОСТ 24026-80 Исследовательские испытания. Планирование эксперимента. Термины и определения М.: Изд-во стандартов, 1980- 20 с.

3. Математическое моделирование динамической прочности конструкционных материалов: Учебное пособие. - М.: Изд-во АСВ, 2013- 562 с. - ISBN 978-5-93093-981-1.

4. Метрология, стандартизация, подтверждение соответствия: учебное пособие / Н.Б. Камардин, И.Ю. Суркова. - Казань : Изд-во КНИТУ, 2013. - 240 с. - ISBN 978-5-7882-1401-6

5. Метрология, стандартизация и сертификация: Учеб. для вузов / Я.М. Радкевич, А.Г. Схиртладзе, Б.И. Лактионов. - М. : Абрис, 2012. - - 791 с.: ил. ISBN 978-5-4372-0064-3.

6. Основы научных исследований. Организация и планирование эксперимента: учебное пособие / Р.Г. Сафин, А.И. Иванов, Н.Ф. Тимербаев. - Казань : Издательство КНИТУ, Изд-во КНИТУ, 2013. - 156 с. - ISBN 978-5-7882-1412-2.

7. Романов В. Н. Ромодановская М. П. Прикладная метрология: учебное пособие для вузов . Владим. гос.ун-т им Изд-о ВлГУ, 2014. – 188 с SBN 978-5-9984-0488-7

Приложение 1

Критические значения коэффициента Кохрена (G-критерия) для доверительной вероятности p = 95% и числе степеней свободы ν

Число измерений, k	Число степеней свободы, ν										
	1	2	3	4	5	6	8	10	16	36	∞
2	9985	9750	9392	9057	8772	8534	8159	7880	7341	6602	5000
3	9669	8709	0797	7454	7071	6771	6333	6025	5466	4748	3333
4	9065	7679	6841	6287	5895	5598	5175	4884	4366	3720	2500
5	8412	6838	5981	5441	5065	4783	4387	4118	3645	3066	2000
6	7808	6161	5321	4803	4447	4184	3817	3568	3135	2612	1667
7	7271	5612	4800	4307	3974	3726	3384	3154	2756	2278	1429
8	6798	5157	4377	3910	3595	3362	3043	2829	2462	2022	1250
9	6385	4775	4027	3584	7276	3067	2768	2568	2226	1820	1111
10	6020	4450	3733	3311	3029	2823	2541	2353	2032	1655	1000
12	5410	3924	3264	2880	2624	2439	2187	2020	1737	1403	0833
15	4709	3346	2758	2419	2195	2034	1815	1671	1429	1144	0667
20	3894	2705	2205	1921	1735	1602	1422	1303	1108	0879	0500
24	3434	2354	1907	1656	1493	1374	1216	1113	0942	0743	0417
30	2929	1980	1593	1377	1237	1137	1001	0921	0771	0604	0333
40	2370	1576	1259	1082	0968	0887	5950	0713	0595	0462	0250
60	1737	1131	0895	0765	0682	0623	0552	0497	0411	0316	0167
120	0998	0632	0495	0419	0371	0337	0292	0266	0218	0165	0083
∞	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000	0000

Все значения G-критерия меньше единицы, поэтому в таблице приведены лишь десятичные знаки, следующие после запятой, перед которой при пользовании таблицей нужно ставить ноль целых. Например, при $k = 6$, $\nu = 3$ имеем $G_{0,95} = 0,5321$.

Приложение 2

Значения распределения Стьюдента

n	Доверительная вероятность *P*				
	0,90	0,95	0,98	0,99	0,999
2	6,31	12,71	31,82	63,68	636,62
3	2,92	4,30	6,97	9,93	31,60
4	2,35	3,18	4,54	5,84	12,92
5	2,13	2,78	3,75	4,60	8,61
6	2,02	2,57	3,37	4,06	6,87
7	1,94	2,45	3,14	3,71	5,96
8	1,90	2,37	3,00	3,50	5,41
9	1,86	2,31	2,90	3,36	5,04
10	1,83	2,26	2,82	3,25	4,78
11	1,81	2,23	2,76	3,17	4,59
12	1,80	2,20	2,72	3,11	4,44
13	1,78	2,18	2,68	3,06	4,32
14	1,77	2,16	2,65	3,01	4,22
15	1,76	2,15	2,62	2,98	4,14
16	1,75	2,13	2,60	2,95	4,07
17	1,75	2,12	2,58	2,92	4,02
18	1,74	2,11	2,57	2,90	3,97
19	1,73	2,10	2,55	2,88	3,92
20	1,73	2,09	2,54	2,88	3,88
∞	1,65	1,98	2,33	2,58	3,29

Приложение 3

Значения критерия Фишера (F-критерия) для уровня значимости q = 5%

ν_1 – число степеней свободы большей дисперсии; ν_2 – число степеней свободы меньшей дисперсии

ν_2	ν_1											
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	245,9	248,0
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,43	19,45
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,70	8,66
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,86	5,80
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,62	4,56
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	3,94	3,87
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,51	3,44
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,22	3,15
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,01	2,94
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,85	2,77
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,72	2,65
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,62	2,54
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,53	2,46
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,46	2,39
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,40	2,33
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,35	2,28
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,31	2,23
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,27	2,19
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,23	2,16
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,20	2,12
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,18	2,10
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,15	2,07
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,13	2,05
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,11	2,03
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,09	2,01
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,07	1,99
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,06	1,97
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,04	1,96
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,03	1,94
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,01	1,93