Министерство образования и науки Российской Федерации

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
«Владимирский государственный университет
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых»

Кафедра автомобильного транспорта

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ПРОЦЕССОВ

Методические указания к лабораторным работам

Составитель
М. Ю. БАЖЕНОВ

Владимир 2013

УДК 629.113.004.58(07)
ББК 39.3
М74

Рецензент

Кандидат технических наук, доцент
кафедры управления качеством и технического регулирования
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых
З. В. Мищенко

Печатается по решению редакционно-издательского совета ВлГУ

М74 **Моделирование** производственных процессов : метод. указания к лабораторным работам / Владим. гос. ун-т имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых ; сост. М. Ю. Баженов. – Владимир : Изд-во ВлГУ, 2013. – 100 с.

Содержат описание лабораторных работ по вопросам моделирования производственных процессов автомобильного транспорта. Приведены краткие описания и порядок выполнения работ, алгоритмы, задания и примеры выполнения работ.

Предназначены для студентов всех форм обучения специальности 190600 «Эксплуатация транспортно-технологических машин и комплексов».

Рекомендовано для формирования профессиональных компетенций в соответсвии с ФГОС 3-го поколения.

Ил. 27. Табл. 13. Библиогр.: 5 назв.

УДК 629.113.004.58(07)
ББК 39.3

Лабораторная работа № 1

Основы вычислений в Microsoft Excel

Цель работы: изучить основы вычислений с использованием формул в Microsoft Excel.

Теоретические сведения

Структура формулы

Формулы представляют собой выражения, по которым выполняются вычисления. При работе в Microsoft Excel формула всегда начинается со знака равно (=). Формула может включать функции, ссылки на ячейки или имена, операторы и константы.

Например, в формуле

=СУММ(B2:B8)*30

СУММ( ) – функция;
B2 и B8 – ссылки на ячейки;
: (двоеточие) и * (звездочка) – операторы;
30 – константа.

<u>Функции</u> – заранее определенные формулы, которые выполняют вычисления по заданным величинам, называемым аргументами, и в указанном порядке. Структура функции: имя функции, открывающая скобка, список аргументов, разделенных точками с запятой, закрывающая скобка. Аргументом функции могут быть число, текст, логическое значение, массив, значение ошибки, ссылка на ячейку. В качестве аргументов используются также константы, формулы или функции. В каждом конкретном случае необходимо использовать соответствующий тип аргумента.

<u>Ссылка</u> указывает на ячейку или диапазон ячеек листа, которые требуется использовать в формуле. Можно задавать ссылки на ячейки других листов текущей книги и на другие книги. Ссылки на ячейки других книг называются связями.

Оператором называют знак или символ, задающий тип вычисления в формуле. Существуют математические, логические операторы, операторы сравнения и ссылок.

Константой называют постоянное (не вычисляемое) значение. Формула и результат вычисления формулы константами не являются.

Операторы

Арифметические операторы

Арифметические операторы служат для выполнения арифметических операций, таких как сложение, вычитание, умножение, деление. Операции выполняются над числами. Используют следующие арифметические операторы.

Оператор	Значение	Пример
+ (знак плюс)	Сложение	A1+A2
– (знак минус)	Вычитание Отрицание	A1-A2 -A1
* (звездочка)	Умножение	A1*A2
/ (косая черта)	Деление	A1/A2
% (знак процента)	Процент	50%
^ (крышка)	Возведение в степень	A1^2

Операторы сравнения

Операторы сравнения используются для сравнения двух значений. Результатом сравнения является логическое значение: либо ИСТИНА, либо ЛОЖЬ.

Оператор	Значение	Пример
= (знак равенства)	Равно	(A1=B1)
> (знак больше)	Больше	(A1>B1)
< (знак меньше)	Меньше	(A1<B1)
>= (знак больше и равно)	Больше или равно	(A1>=B1)
<= (знак меньше и равно)	Меньше или равно	(A1<=B1)
<> (знак меньше и больше)	Не равно	(A1<>B1)

Текстовый оператор конкатенации

Текстовый оператор амперсанд (&) используется для объединения нескольких текстовых значений.

Оператор	Значение	Пример
& (амперсанд)	Объединение последовательностей знаков в одну последовательность	"Фамилия"&"Имя"&"Отчество"

Операторы ссылок

Операторы ссылок используют для описания ссылок на диапазоны ячеек.

Оператор	Значение	Пример
: (двоеточие)	Ставится между ссылками на первую и последнюю ячейки диапазона	B5:B15
; (точка с запятой)	Оператор объединения	B5:B15;D5:D15
(пробел)	Оператор пересечения множеств, служит для ссылки на общие ячейки двух диапазонов	B7:D7 C6:C8

Создание и редактирование формул

Ввод формул с клавиатуры

Формулы можно вводить с использованием клавиатуры и мыши при работе в любой вкладке Excel. С использованием клавиатуры вводят операторы (знаки действий), константы, скобки и иногда функции. С использованием мыши выделяют ячейки и диапазоны ячеек, включаемые в формулу.

1. Выделите ячейку, в которую требуется ввести формулу.
2. Введите = (знак равенства).
3. Выделите мышью ячейку, являющуюся аргументом формулы.
4. Введите знак оператора.
5. Выделите мышью ячейку, являющуюся вторым аргументом формулы.
6. При необходимости продолжайте ввод знаков операторов и выделение ячеек.
7. Подтвердите ввод формулы в ячейку: нажмите клавишу Enter или Tab или кнопку Ввод (галочка) в строке формул.

Например, необходимо создать формулу для расчета стоимости нескольких книг в ячейке D2 таблицы на рис. 1:

1. Выделите ячейку D2,
2. Введите знак =,
3. Щелкните мышью по ячейке B2,
4. Введите знак *,
5. Щелкните мышью по ячейке C2,
6. Нажмите клавишу Enter.

При вводе с клавиатуры формула отображается как в строке формул, так и непосредственно в ячейке (см. рис. 1). Ячейки, использованные в формуле, выделены в программе Excel цветной рамкой, а ссылки на эти ячейки в формуле шрифтом того же цвета.

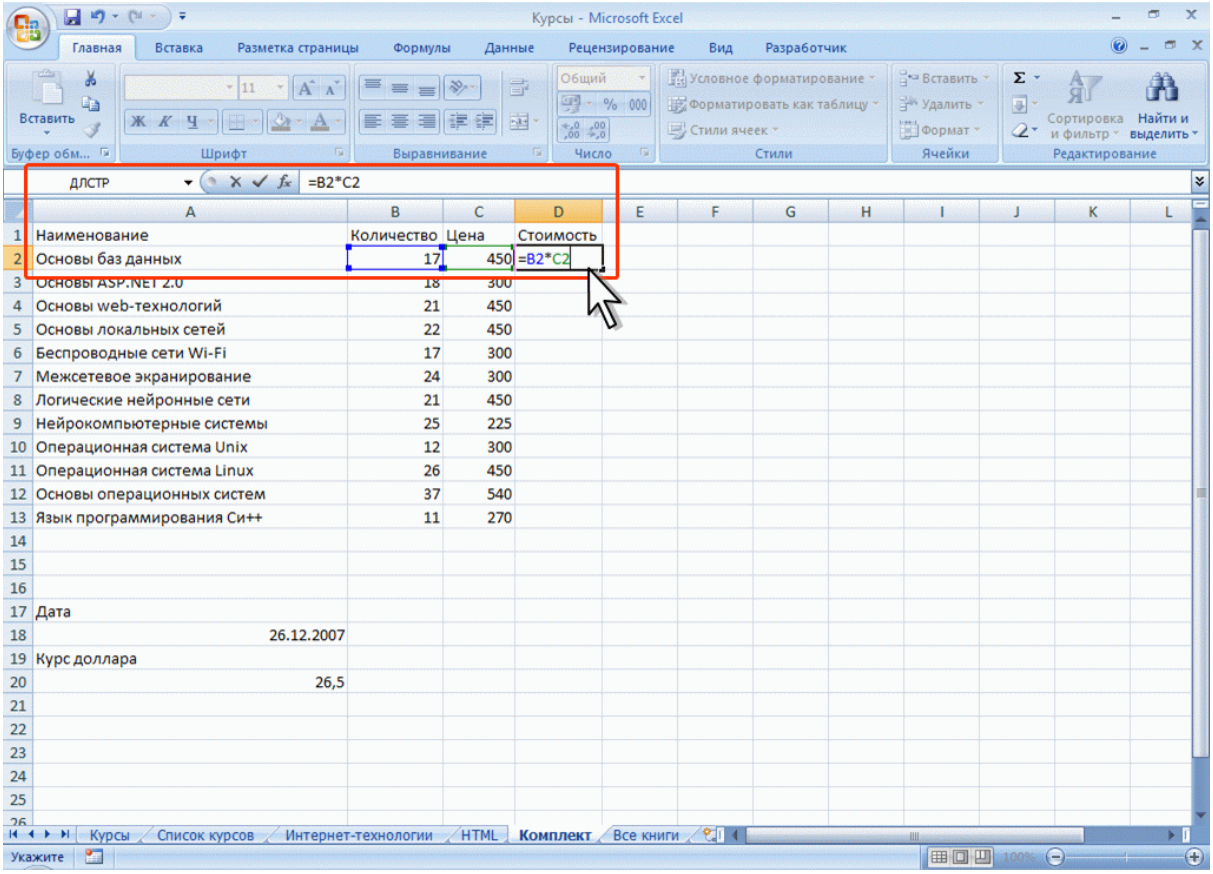


Рис. 1. Ввод формулы с клавиатуры

Создание формул с использованием мастера функций

Функция – стандартная формула, которая обеспечивает выполнение определенных действий над значениями, выступающими в качестве аргументов. Функции позволяют упростить формулы, особенно если они длинные или сложные. Функции используют не только для непосредственных вычислений, но также и для преобразования чисел, например, для округления, поиска значений, сравнения и т.д.

Для создания формул с функциями обычно используют группу *Библиотека функций* вкладки *Формулы* (рис. 2).

1. Выделите ячейку, в которую требуется ввести формулу.

2. Щелкните по кнопке нужной категории функций в группе *Библиотека функций* и выберите нужную функцию.

3. В окне *Аргументы функции* в соответствующем поле (полях) введите аргументы функции. Ссылки на ячейки можно вводить с клавиатуры, но удобнее пользоваться выделением ячеек мышью. Для этого поставьте курсор в соответствующее поле и на листе выделите необходимую ячейку или диапазон ячеек. Для удобства выделения ячеек окно *Аргументы функции* можно сдвинуть или свернуть. Текст, числа и логические выражения в качестве аргументов обычно вводят с клавиатуры. В качестве подсказки в окне отображается назначение функции, а в нижней части окна – описание аргумента, в поле которого в данный момент находится курсор. Следует иметь в виду, что некоторые функции не имеют аргументов.

4. В окне *Аргументы функции* нажмите кнопку *ОК*.

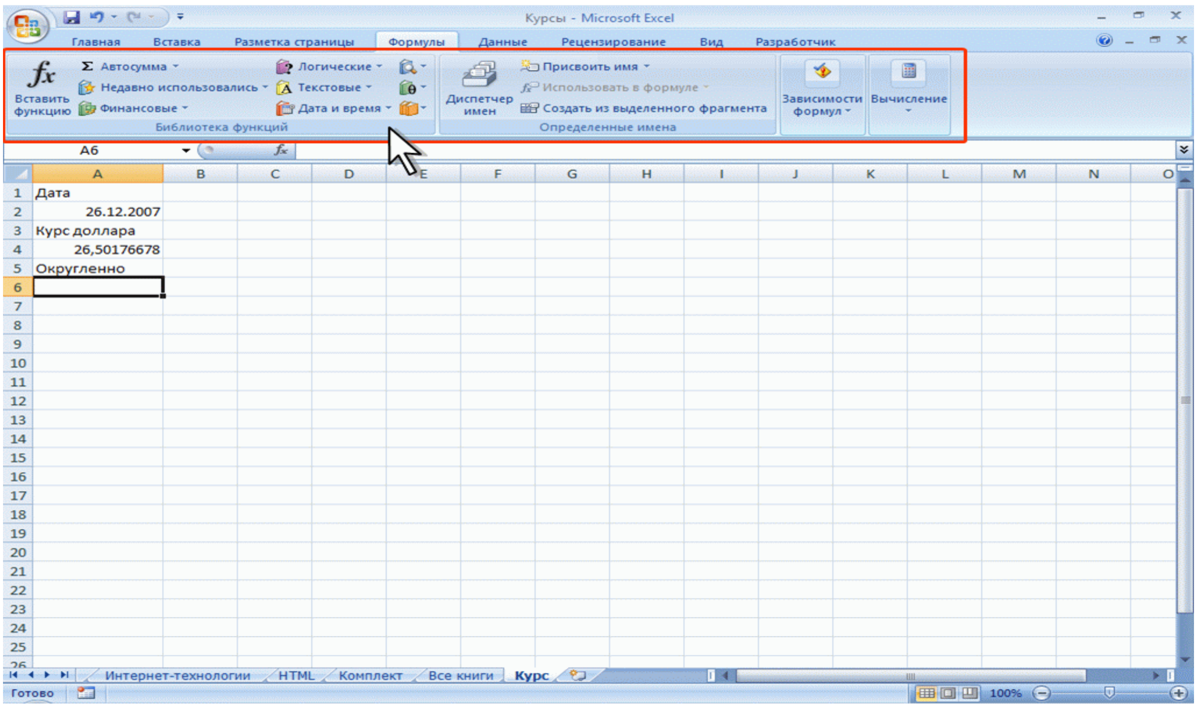


Рис. 2. Вкладка Формулы

Для вставки функции не обязательно использовать кнопки категорий функций в группе *Библиотека функций*. Для выбора нужной функции можно применить мастер функций. Причем это можно сделать при работе в любой вкладке.

1. Нажмите кнопку *Вставить функцию* в строке формул.

2. В окне *Мастер функций* в раскрывающемся списке *Категория* выберите категорию функции, затем в списке *Выберите функцию* укажите функцию (рис. 3).

3. Нажмите кнопку *ОК* или дважды щелкните мышью по названию выбранной функции.

4. В появившемся окне *Аргументы функции* введите аргументы функции. Нажмите кнопку *ОК*.

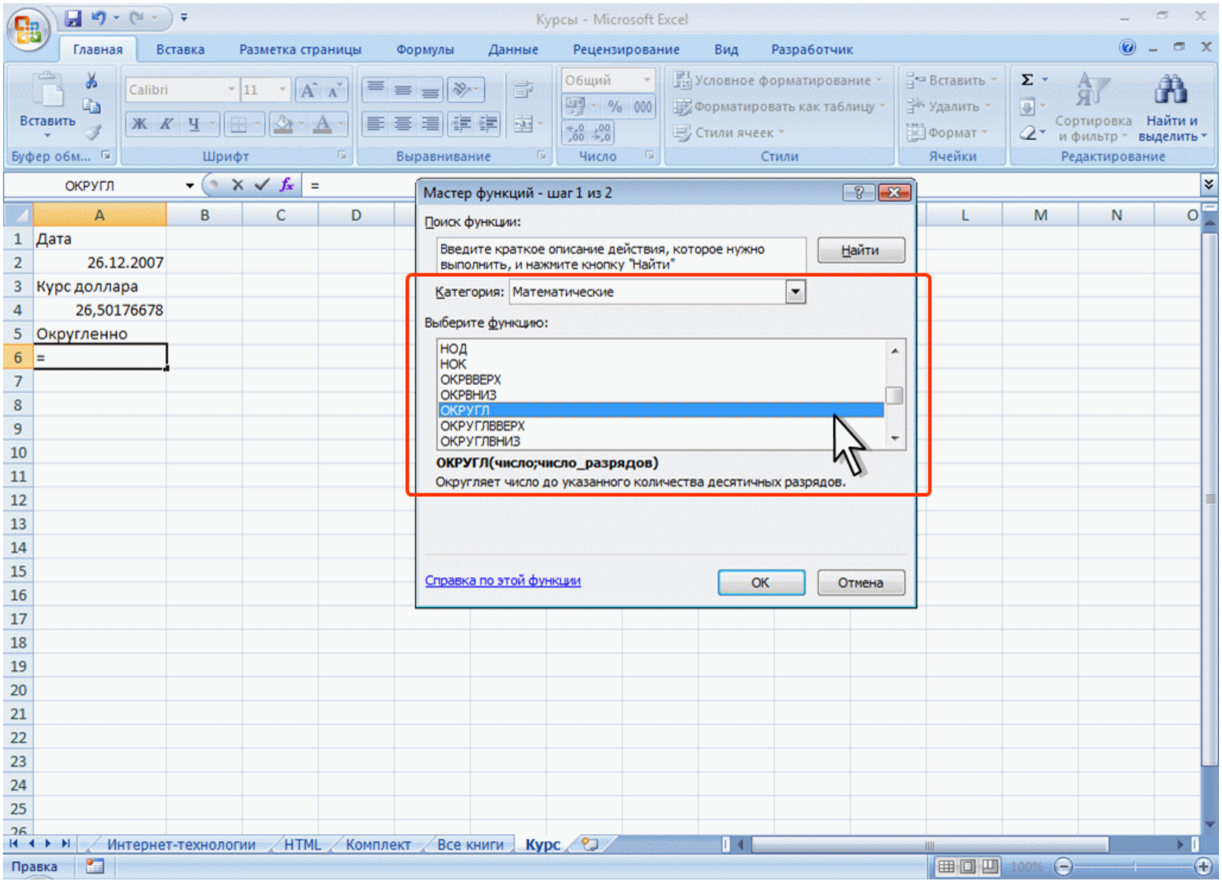


Рис. 3. Выбор функции в Мастере функций

Если название нужной функции неизвестно, можно попробовать найти ее. Для этого в поле *Поиск функции* диалогового окна *Мастер функций: шаг 1 из 2* введите назначение искомой функции и нажмите кнопку *Найти*. Найденные функции будут отображены в списке *Выберите функцию*.

Имена функций при создании формул можно вводить с клавиатуры. Для упрощения процесса создания и снижения количества опечаток используйте автозавершение формул.

1. В ячейку или в строку формул введите знак "=" (знак равенства) и первые буквы используемой функции. По мере ввода список прокрутки возможных элементов отображает наиболее близкие значения. Значки указывают типы вводимых данных, такие как функция или ссылка на таблицу.

2. Выберите нужную функцию, для чего дважды щелкните по ней мышью.

3. С использованием клавиатуры и мыши введите аргументы функции. Подтвердите ввод формулы.

Создание формул с использованием кнопки Сумма

Для быстрого выполнения некоторых действий с применением функций без запуска мастера функций можно использовать кнопку *Сумма*. Эта кнопка, помимо группы *Библиотека функций* вкладки *Формулы* (там она называется *Автосумма*), имеется также в группе *Редактирование* вкладки *Главная*.

Для вычисления суммы чисел в ячейках, расположенных непрерывно в одном столбце или одной строке, достаточно выделить ячейку ниже или правее суммируемого диапазона и нажать кнопку *Сумма*. Например, для вычисления суммы значений в ячейках B2:B13 в таблице на рис. 4 следует выделить ячейку B14 и нажать кнопку *Автосумма*.

Для подтверждения ввода формулы следует нажать клавишу *Enter* или еще раз нажать кнопку *Сумма*.

Для вычисления суммы произвольно расположенных ячеек следует выделить ячейку, в которой должна быть вычислена сумма, нажать на кнопку *Сумма*, а затем на листе выделить суммируемые ячейки и/или диапазоны ячеек. Для подтверждения ввода формулы следует нажать клавишу *Enter* или еще раз нажать кнопку *Сумма*.

Кроме вычисления суммы, кнопку *Сумма* можно использовать при вычислении среднего значения, определения количества числовых значений, нахождения максимального и минимального значений. В этом случае необходимо щелкнуть по стрелке кнопки и выбрать необходимое действие:

Среднее – расчет среднего арифметического;

Число – определение количества численных значений;

Максимум – нахождение максимального значения;

Минимум – нахождение минимального значения.

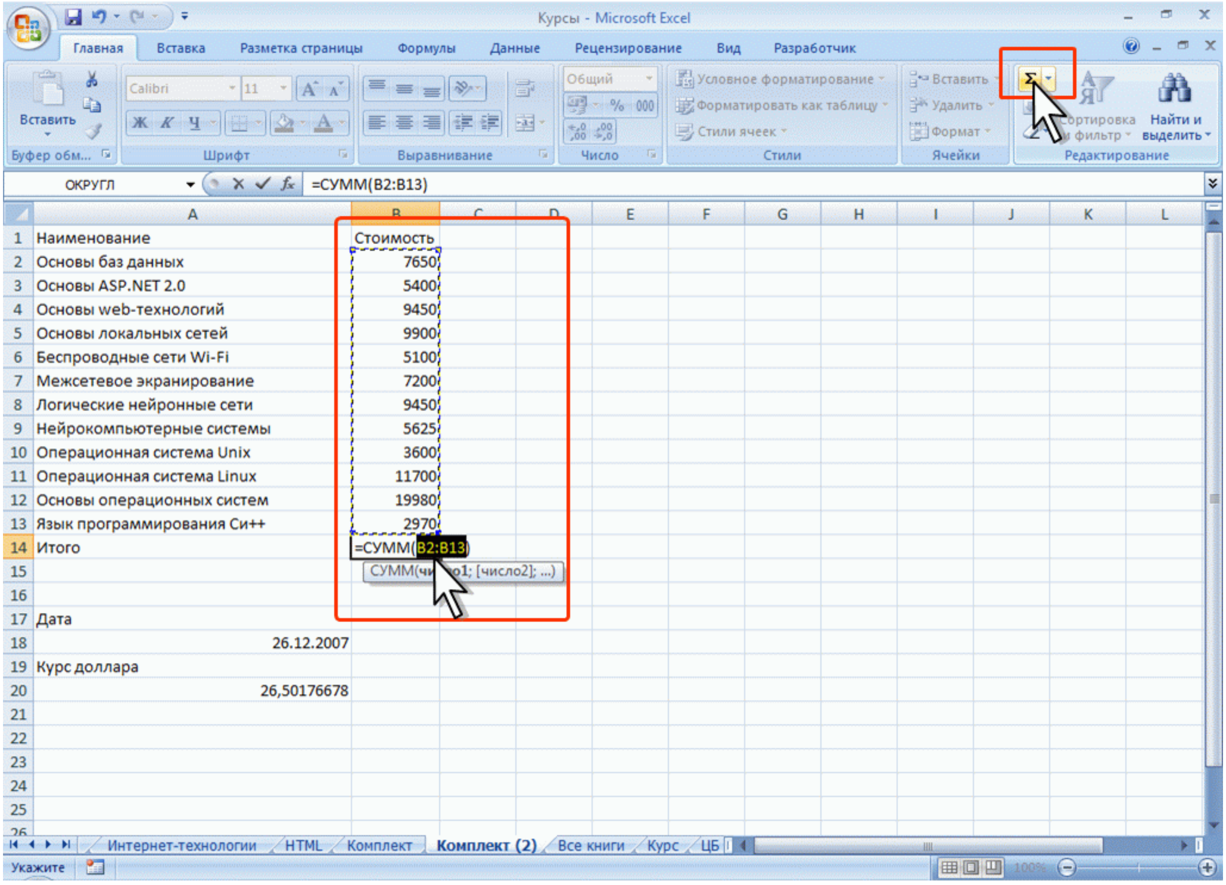


Рис. 4. Суммирование с использованием кнопки Сумма

Редактирование формул

Ячейки с формулой можно редактировать так же, как и ячейки с текстовым или числовым значением: щелкнув мышью два раза по ячейке или в строке формул.

При редактировании ячейки, как и при вводе формулы, ссылки на ячейки и границы вокруг соответствующих ячеек выделяются цветом.

Для изменения ссылки на ячейки и/или диапазон ячеек достаточно перетащить цветную границу к новой ячейке или диапазону. Для того чтобы изменить размер диапазона ячеек, можно перетащить угол границы.

Для того чтобы заменить ссылку следует ее удалить, а затем выделить мышью новую ячейку или диапазон ячеек.

В формулу можно добавлять новые операторы и аргументы. Например, в существующую формулу в ячейку B14 в таблице можно добавить оператор "/" (деление) и аргумент A20 (рис. 5).

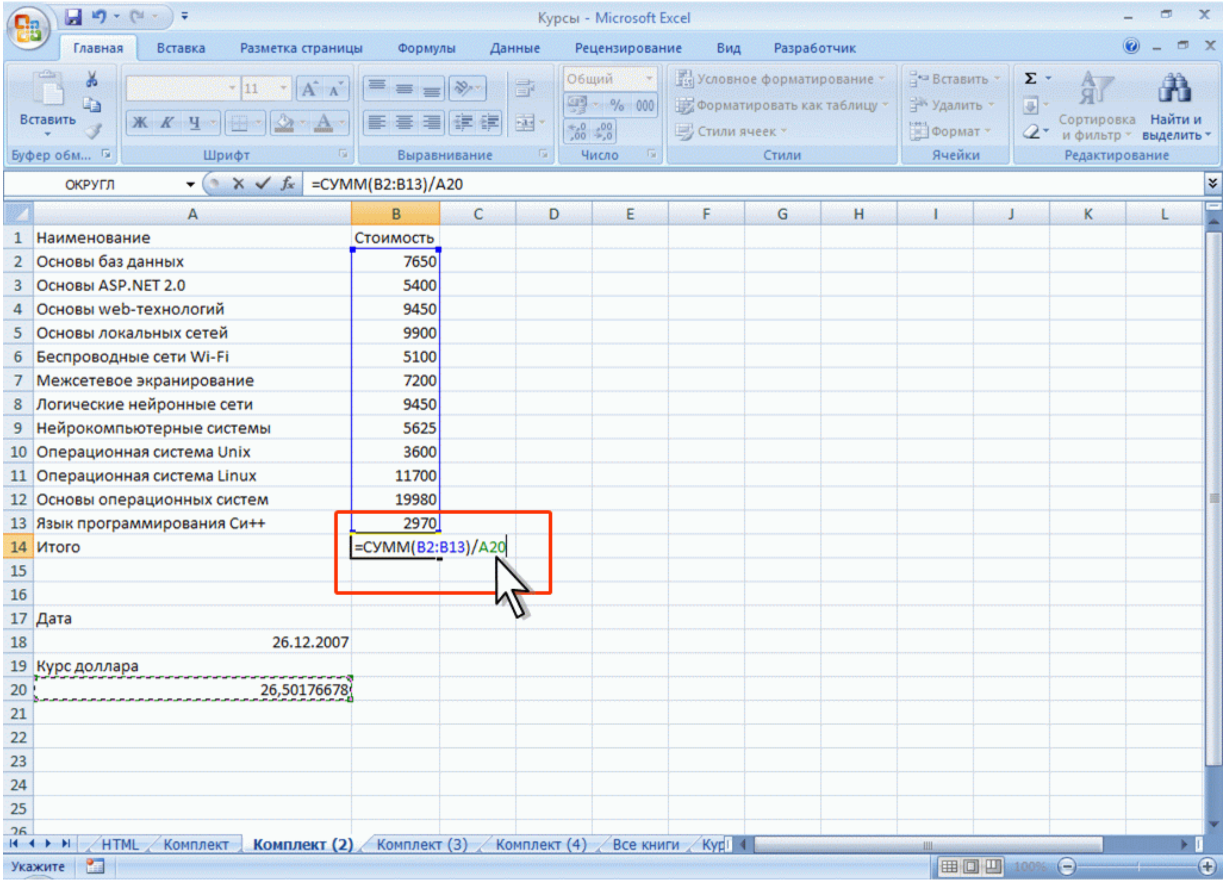


Рис. 5. Редактирование формулы

Перемещение и копирование формул

Перемещать и копировать ячейки с формулами можно точно так же, как и ячейки с текстовыми или числовыми значениями.

Кроме того, при копировании ячеек с формулами можно пользоваться возможностями специальной вставки. Это позволяет копировать только формулу без копирования формата ячейки.

При перемещении ячейки с формулой содержащиеся в формуле ссылки не изменяются. При копировании формулы ссылки на ячейки могут изменяться в зависимости от их типа (относительные или абсолютные).

Выполнение работы

1. Запустите Microsoft Excel.
2. Откройте файл exercise_01.xlsx.
3. Перейдите к листу Лист 1.
4. В ячейке D2 рассчитайте произведение ячеек B2 и C2.
5. В ячейке F2 рассчитайте сумму ячеек D2 и E2.

6. В ячейке G2 с использованием функции ОКРУГЛ рассчитайте округленное до двух знаков после запятой значение ячейки F2.

7. В ячейке B7 с использованием кнопки *Сумма* рассчитайте сумму ячеек B2:B6.

8. В ячейке C7 с использованием кнопки *Сумма* рассчитайте среднее значение ячеек C2:C6.

9. Скопируйте автозаполнением формулу ячейки D2 на ячейки D3:D7.

10. Скопируйте автозаполнением формулу ячейки F2 на ячейки F3:F7.

11. Скопируйте автозаполнением формулу ячейки G2 на ячейки G3:G7.

12. Отредактируйте формулу в ячейке E7: добавьте к суммируемым ячейкам ссылку на ячейку E6.

13. В ячейке H2 рассчитайте частное от деления ячейки G2 на ячейку B10 так, чтобы эту формулу можно было копировать на ячейки H3:H7. Скопируйте автозаполнением формулу ячейки H2 на ячейки H3:H7. Отредактируйте ячейки так, чтобы в них отображались не рубли, а доллары.

14. В ячейке I2 рассчитайте частное от деления ячейки G2 на ячейку B1 листа *Курс* так, чтобы эту формулу можно было копировать на ячейки I3:I7. Скопируйте автозаполнением формулу ячейки I2 на ячейки I3:I7. Отредактируйте ячейки так, чтобы в них отображались не рубли, а евро.

15. В ячейке J2 рассчитайте частное от деления ячейки G2 на ячейку B2 листа *Курс* так, чтобы эту формулу можно было копировать на ячейки J3:J7. Скопируйте автозаполнением формулу ячейки J2 на ячейки J3:J7. Отредактируйте ячейки так, чтобы в них отображались не рубли, а британские фунты.

16. Покажите полученные результаты преподавателю. Зашифруйте документ паролем. Сохраните файл под именем [ваше ФИО] – lab_1.xlsx.

17. Закройте Microsoft Excel.

Лабораторная работа № 2

Использование математических и статистических функций в Microsoft Excel

Цель работы: изучить математические и статистические функции в Microsoft Excel.

Лабораторная работа посвящена вопросам использования функций в вычислениях. Рассмотрены математические и статистические функции, функции для работы с базами данных. Дано представление о математических функциях и описаны их возможности. Показана возможность выборочного суммирования. Рассмотрена функция для вычисления произведения. Представлены функции для округления, указаны особенности использования различных функций. Показаны функции для тригонометрических вычислений. Представлены функции для преобразования чисел, описаны особенности их использования. Рассмотрены функции для расчета числа комбинаций и факториала. Показана функция для задания случайных значений. Представлены статистические функции для расчета средних значений, поиска наибольших и наименьших значений, расчета количества ячеек. Дано представление о функциях для работы с базами данных. Приведен пример использования выборочного суммирования

Теоретические сведения

О математических функциях

Математические функции используют при выполнении арифметических и тригонометрических вычислений, округлении чисел и в некоторых других случаях.

<u>Суммирование</u>

1. Простая сумма

Для простейшего суммирования применяют функцию СУММ.

Синтаксис функции

= СУММ(А),

где А – список от 1 до 30 элементов, которые требуется суммировать. Элемент может быть ячейкой, диапазоном ячеек, числом или формулой. Ссылки на пустые ячейки, текстовые или логические значения игнорируются.

Фактически данная функция заменяет непосредственное суммирование с использованием оператора сложения (+). Формула =СУММ(B2:B7), указанная в ячейке B8 (рис. 6), тождественна формуле =B2+B3+B4+B5+B6+B7. Однако есть и некоторые отличия. При использовании функции СУММ добавление ячеек в диапазон суммирования автоматически изменяет запись диапазона в формуле. Например, если в таблицу вставить строку, то в формуле будет указан новый диапазон суммирования. Аналогично формула будет изменяться и при уменьшении диапазона суммирования.

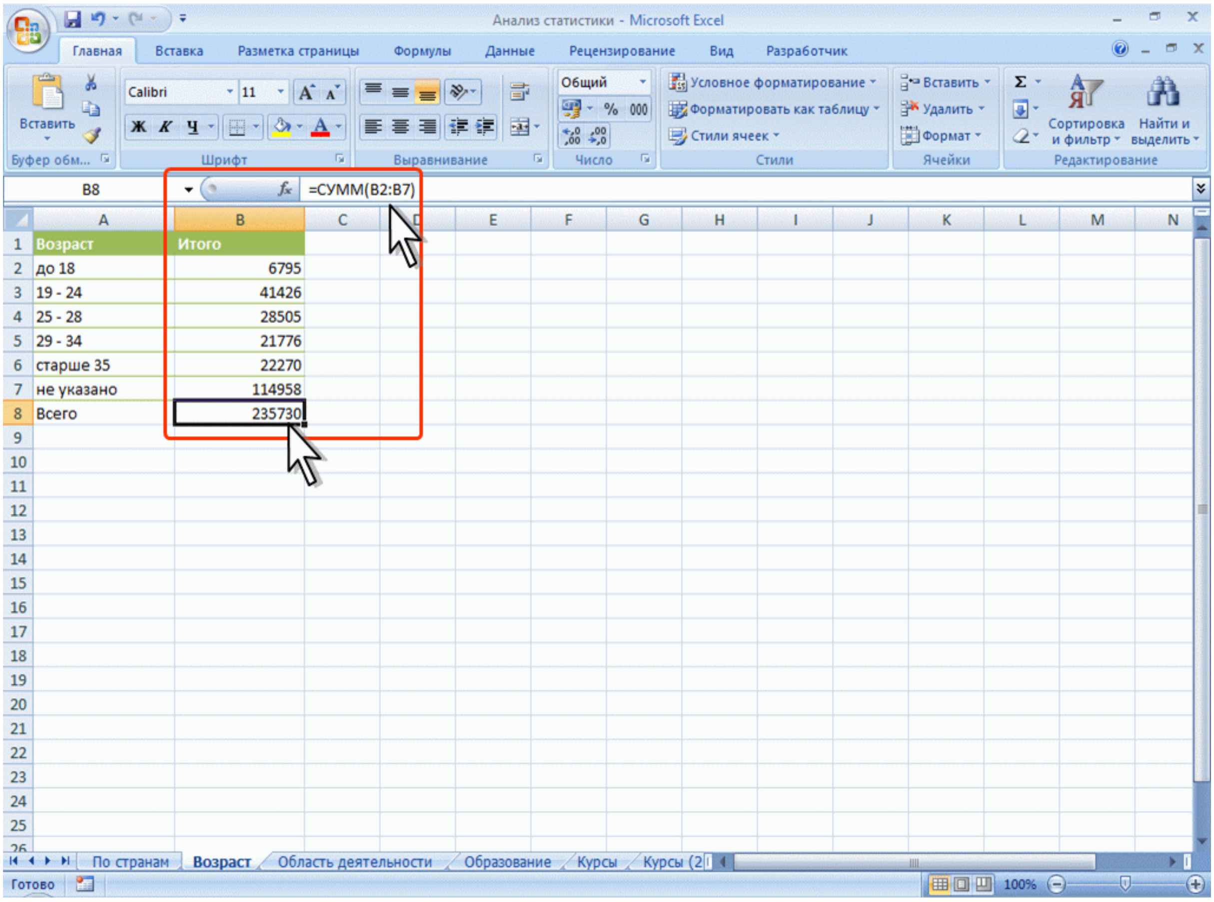


Рис. 6. Простое суммирование

2. Выборочная сумма

Иногда необходимо суммировать не весь диапазон, а только ячейки, отвечающие некоторым условиям (критериям). В этом случае используют функцию СУММЕСЛИ.

Синтаксис функции

=СУММЕСЛИ(A;B;C),

где А – диапазон вычисляемых ячеек; В – критерий в форме числа, выражения или текста, определяющего суммируемые ячейки; С – фактические ячейки для суммирования.

В тех случаях, когда диапазоны вычисляемых и фактических ячеек для суммирования совпадают, аргумент С можно не указывать.

Можно суммировать значения, отвечающие заданному условию. Например, в таблице на рис. 7 суммированы только студенты по странам при условии, что число студентов от страны превышает 200.

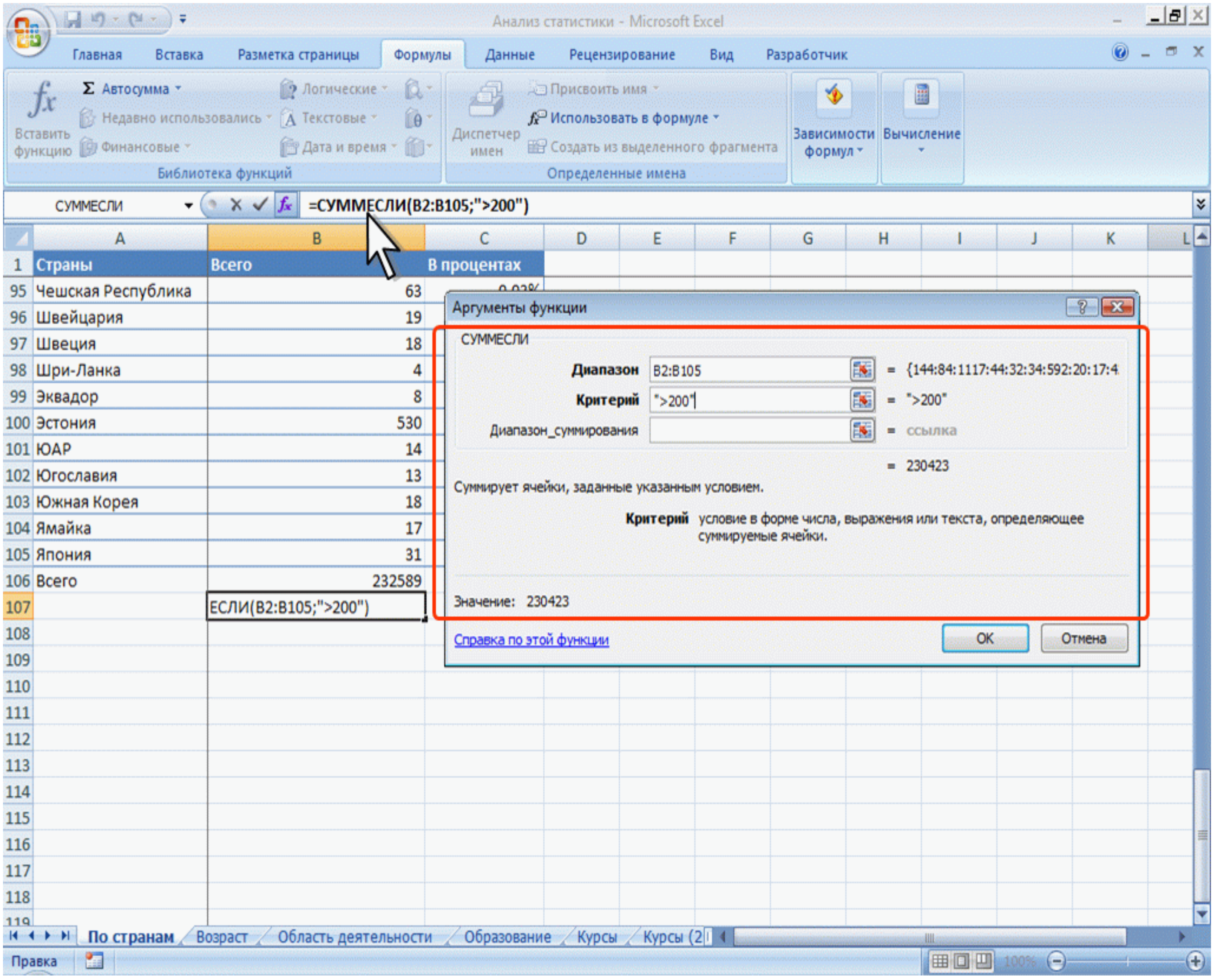


Рис. 7. Выборочное суммирование

Можно суммировать значения, относящиеся к определенным значениям в смежных ячейках. Например, в таблице на рис. 8 суммированы только студенты, изучающие курсы со средней оценкой выше 4. Критерий можно ввести с клавиатуры или выбрать нужную ячейку на листе.

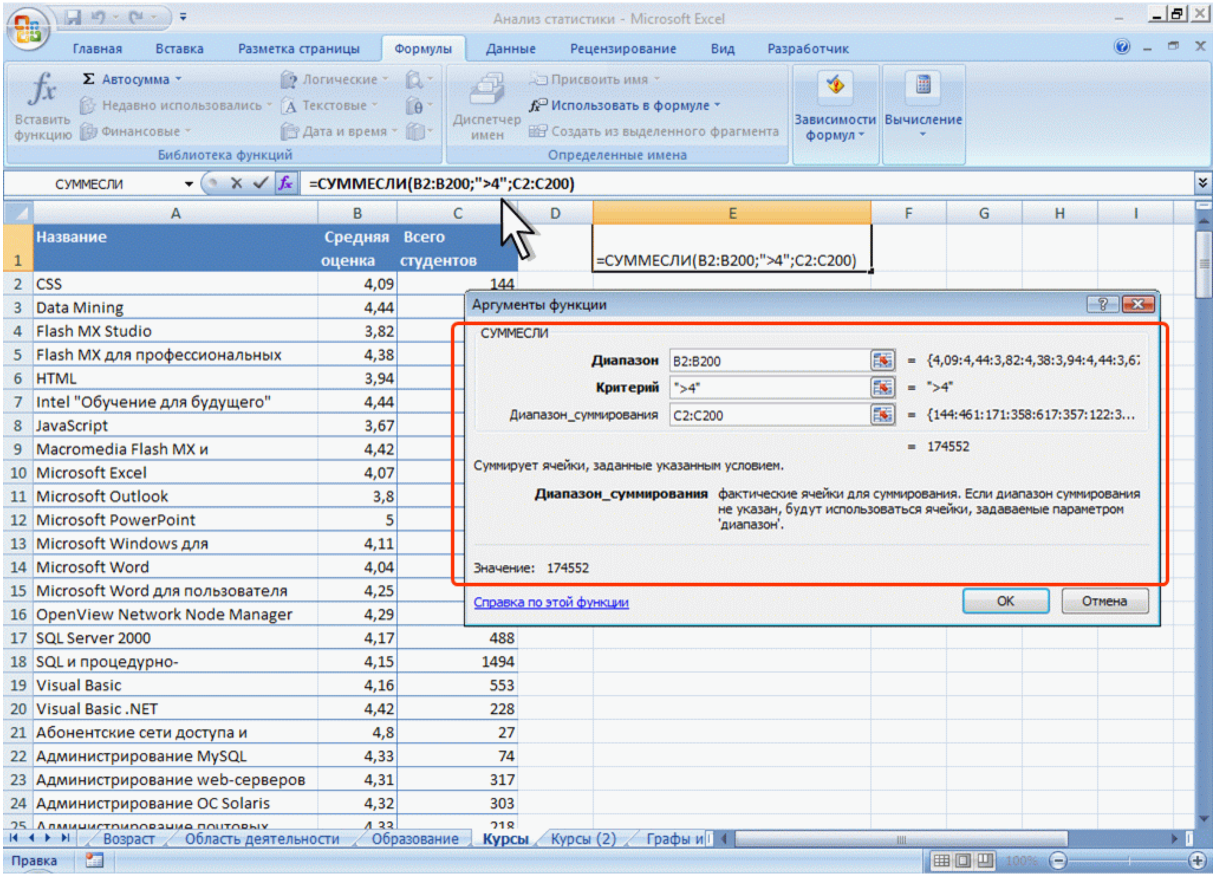


Рис. 8. Выборочное суммирование

<u>Умножение</u>

Для умножения используют функцию ПРОИЗВЕД.

Синтаксис функции

=ПРОИЗВЕД(А),

где А – список от 1 до 30 элементов, которые требуется перемножить. Элемент может быть ячейкой, диапазоном ячеек, числом или формулой. Ссылки на пустые ячейки, текстовые или логические значения игнорируются.

Фактически данная функция заменяет непосредственное умножение с использованием оператора умножения (*). Так же как и при использовании функции СУММ, при использовании функции ПРОИЗВЕД добавление ячеек в диапазон перемножения автоматически изменяет запись диапазона в формуле. Например, если в таблицу вставить строку, то в формуле будет указан новый диапазон перемножения. Аналогично формула будет изменяться и при уменьшении диапазона.

Округление

Округление чисел особенно часто требуется при денежных расчетах. Например, цену товара в рублях, как правило, нельзя устанавливать с точностью более двух знаков после запятой. Если же в результате вычислений получается большее число десятичных разрядов, требуется округление. В противном случае накапливание тысячных и десятитысячных долей рубля приведет в итоге к ошибкам в вычислениях.

Для округления чисел можно использовать целую группу функций. Наиболее часто используют функции ОКРУГЛ, ОКРУГЛВВЕРХ и ОКРУГЛВНИЗ.

Например, синтаксис функции ОКРУГЛ

=ОКРУГЛ(А;В),

где А – округляемое число; В – число знаков после запятой (десятичных разрядов), до которого округляется число.

Синтаксис функций ОКРУГЛВВЕРХ и ОКРУГЛВНИЗ точно такой же, что и у функции ОКРУГЛ.

Функция ОКРУГЛ при округлении отбрасывает цифры меньшие 5, а цифры большие 5 округляет до следующего разряда. Функция ОКРУГЛВВЕРХ при округлении любые цифры округляет до следующего разряда. Функция ОКРУГЛВНИЗ при округлении отбрасывает любые цифры. Пример округления до двух знаков после запятой с применением функций ОКРУГЛ, ОКРУГЛВВЕРХ и ОКРУГЛВНИЗ приведен на рис. 9.

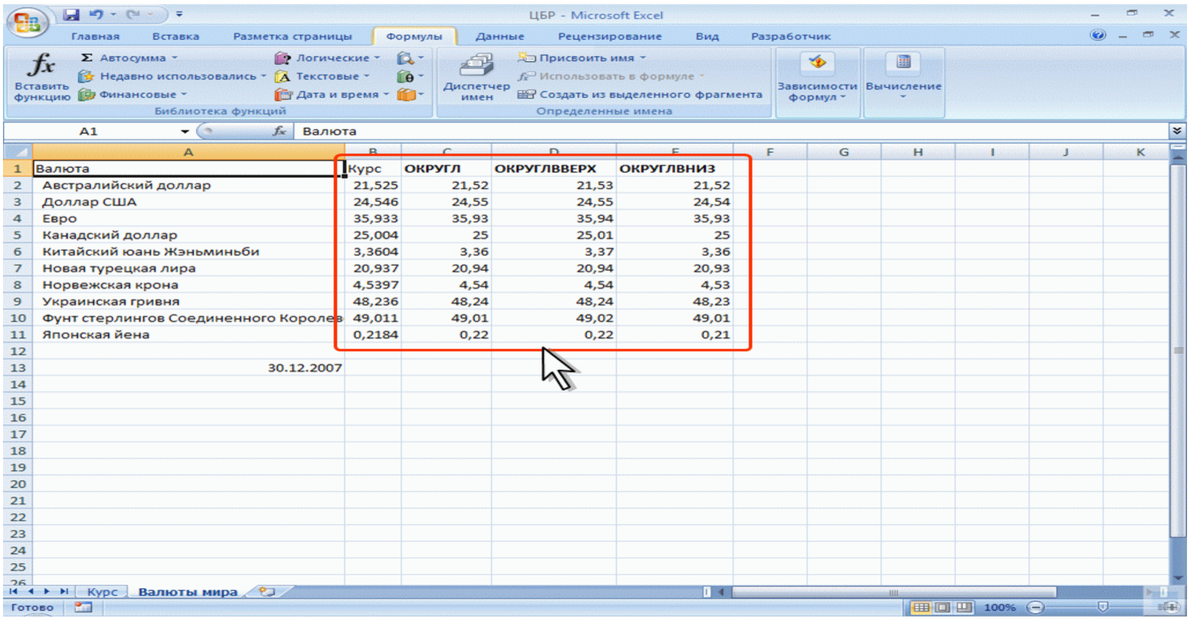


Рис. 9. Округление до заданного количества десятичных разрядов

Функции ОКРУГЛ, ОКРУГЛВВЕРХ и ОКРУГЛВНИЗ можно применять и для округления целых разрядов чисел. Для этого необходимо использовать отрицательные значения аргумента В.

Для округления чисел в меньшую сторону можно использовать также функцию ОТБР.

Синтаксис функции

=ОТБР(A;B),

где А – округляемое число; В – число знаков после запятой (десятичных разрядов), до которого округляется число.

Фактически функция ОТБР отбрасывает лишние знаки, оставляя только количество знаков, указанное в аргументе В. Так же как и функции ОКРУГЛ, ОКРУГЛВВЕРХ и ОКРУГЛВНИЗ, функцию ОТБР можно применять для округления целых разрядов чисел. Для этого необходимо использовать отрицательные значения аргумента В.

Для округления числа до меньшего целого можно использовать функцию ЦЕЛОЕ.

Синтаксис функции

=ЦЕЛОЕ(А),

где А – округляемое число.

Для округления числа с заданной точностью можно использовать функцию ОКРУГЛТ.

Синтаксис функции

=ОКРУГЛТ(А;В),

где А – округляемое число; В – точность, с которой требуется округлить число.

Функция ОКРУГЛТ округляет с избытком. Округление производится в том случае, если остаток от деления числа на точность больше или равен половине точности.

Наконец, для округления до ближайшего четного или нечетного числа можно использовать функции ЧЕТН и НЕЧЕТН, а для ближайшего кратного большего или меньшего числа – функции ОКРВВЕРХ и ОКРВНИЗ.

Синтаксис функции ЧЕТН

=ЧЕТН(А),

где А – округляемое число.

Функция НЕЧЕТН имеет такой же синтаксис.

Обе функции округляют положительные числа до ближайшего большего четного или нечетного числа, а отрицательные – до ближайшего меньшего четного или нечетного.

Синтаксис функции ОКРВВЕРХ

=ОКРВВЕРХ(A;B),

где A – округляемое число; B – кратное, до которого требуется округлить.

Функция ОКРВНИЗ имеет такой же синтаксис.

Следует обратить внимание на различие в округлении и установке отображаемого числа знаков после запятой с использованием средств форматирования. При использовании числовых форматов изменяется только отображаемое число, а в вычислениях используется хранимое значение.

Возведение в степень

Для возведения в степень используют функцию СТЕПЕНЬ. Синтаксис функции

=СТЕПЕНЬ(A;B),

где A – число, возводимое в степень; B – показатель степени, в которую возводится число.

Отрицательные числа можно возводить только в степень, значение которой является целым числом. В остальном ограничений на возведение в степень нет.

Для извлечения квадратного корня можно использовать функцию КОРЕНЬ.

Синтаксис функции

=КОРЕНЬ(A),

где A – число, из которого извлекают квадратный корень.

Нельзя извлекать корень из отрицательных чисел.

Комбинаторика

Для расчета числа возможных комбинаций (групп) из заданного числа элементов используют функцию ЧИСЛКОМБ.

Синтаксис функции

=ЧИСЛКОМБ(A; B),

где А – число элементов; В – число объектов в каждой комбинации.

Во вспомогательных расчетах в комбинаторике может потребоваться расчет факториала числа. Факториал числа – это произведение всех чисел от 1 до числа, для которого определяется факториал. Например, факториал числа 6 (6!) равен 1*2*3*4*5*6. Для расчета факториала используют функцию ФАКТР.

Синтаксис функции

=ФАКТР(А),

где А – число, для которого рассчитывается факториал.

Факториал нельзя рассчитать для отрицательных чисел. Факториал числа 0 (ноль) равен 1. При расчете факториала дробных чисел десятичные дроби отбрасываются.

Генератор случайных чисел

В некоторых случаях на листе необходимо иметь число, которое автоматически и независимо от пользователя может принимать различные случайные значения.

Для создания такого числа используют функцию СЛЧИС ( ). Функция вставляет число, большее или равное 0 и меньшее 1. Новое случайное число вставляется при каждом вычислении в книге. Аргументов функция не имеет, но скобки после названия удалять нельзя.

Статистические вычисления

Статистические функции используют при анализе данных. Использование большинства функций этой категории требует знания математической статистики и теории вероятностей.

Расчет средних значений

В самом простом случае для расчета среднего арифметического значения используют функцию СРЗНАЧ.

Синтаксис функции

=СРЗНАЧ(А),

где А – список от 1 до 30 элементов, среднее значение которых требуется найти. Элемент может быть ячейкой, диапазоном ячеек, числом или формулой. Ссылки на пустые ячейки, текстовые или логические значения игнорируются.

Если в диапазон, для которого рассчитывают среднее значение, попадают данные, существенно отличающиеся от остальных, расчет простого среднего арифметического может привести к неправильным выводам. В этом случае следует использовать функцию УРЕЗСРЕДНЕЕ. Эта функция вычисляет среднее, отбрасывая заданный процент данных с экстремальными значениями.

Синтаксис функции

=УРЕЗСРЕДНЕЕ(A;B),

где A – список от 1 до 30 элементов, среднее значение которых требуется найти. Элемент может быть ячейкой, диапазоном ячеек, числом или формулой. Ссылки на пустые ячейки, текстовые или логические значения игнорируются; B – доля данных, исключаемых из вычислений.

Доля данных, исключаемых из вычислений, указывается в процентах от общего числа данных. Например, доля 10 % означает, что из данных, содержащих 20 значений, отбрасываются два значения: одно наибольшее, другое – наименьшее. В таблице на рис. 10 величина брака по товару "Луна" (34 %) существенно отличается от остальных значений. Среднее арифметическое значение данных составляет 2,23 % (ячейка E3), что дает несколько искаженную картину реальных значений. Расчет среднего значения с использованием функции УРЕЗСРЕДНЕЕ (ячейка E4) дает более правильное представление о средних величинах брака в партиях товаров (0,58 %).

В некоторой степени представление о среднем значении множества данных дает медиана. Медиана – это число, которое является серединой множества чисел, то есть половина чисел имеют значения большие, чем медиана, а половина чисел имеют значения меньшие, чем медиана. Для расчета медианы используют функцию МЕДИАНА.

Синтаксис функции

=МЕДИАНА(A),

где A – список от 1 до 30 элементов, среди которых требуется найти медиану. Элемент может быть ячейкой, диапазоном ячеек, числом или формулой. Ссылки на пустые ячейки, текстовые или логические значения игнорируются.

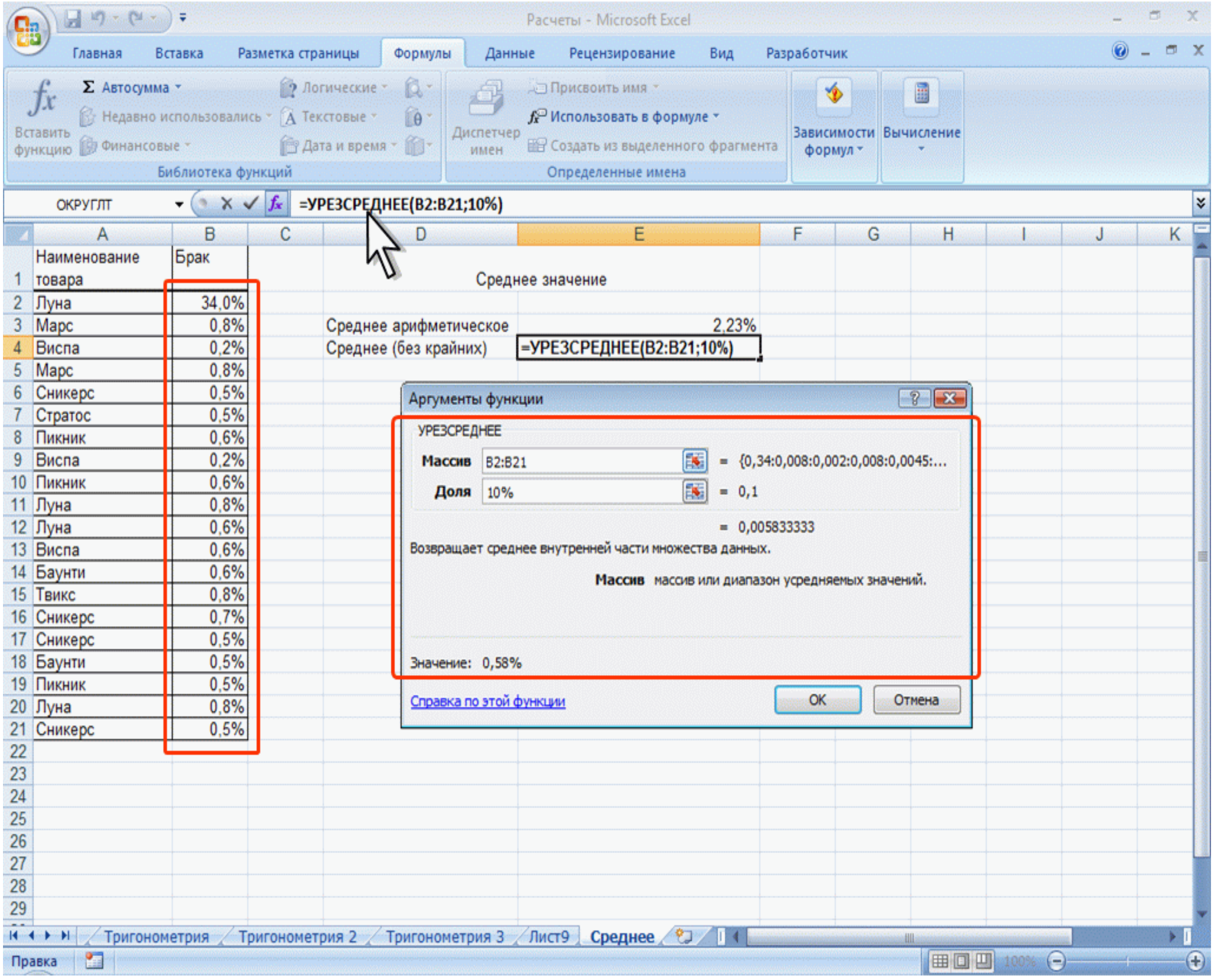


Рис. 10. Расчет среднего значения с отбрасыванием заданного процента данных с экстремальными значениями

Например, для данных таблицы на рис. 11 медиана составит 3,0 % (ячейка E3), в то время как среднее значение 4,0 % (ячейка E2).

Для нахождения значения, которое не является средним, но наиболее часто встречается в множестве данных, используют функцию МОДА.

Синтаксис функции

=МОДА(А),

где А – список от 1 до 30 элементов, среди которых требуется найти наиболее часто встречающееся значение. Элемент может быть ячейкой, диапазоном ячеек, числом или формулой. Ссылки на пустые ячейки, текстовые или логические значения игнорируются.

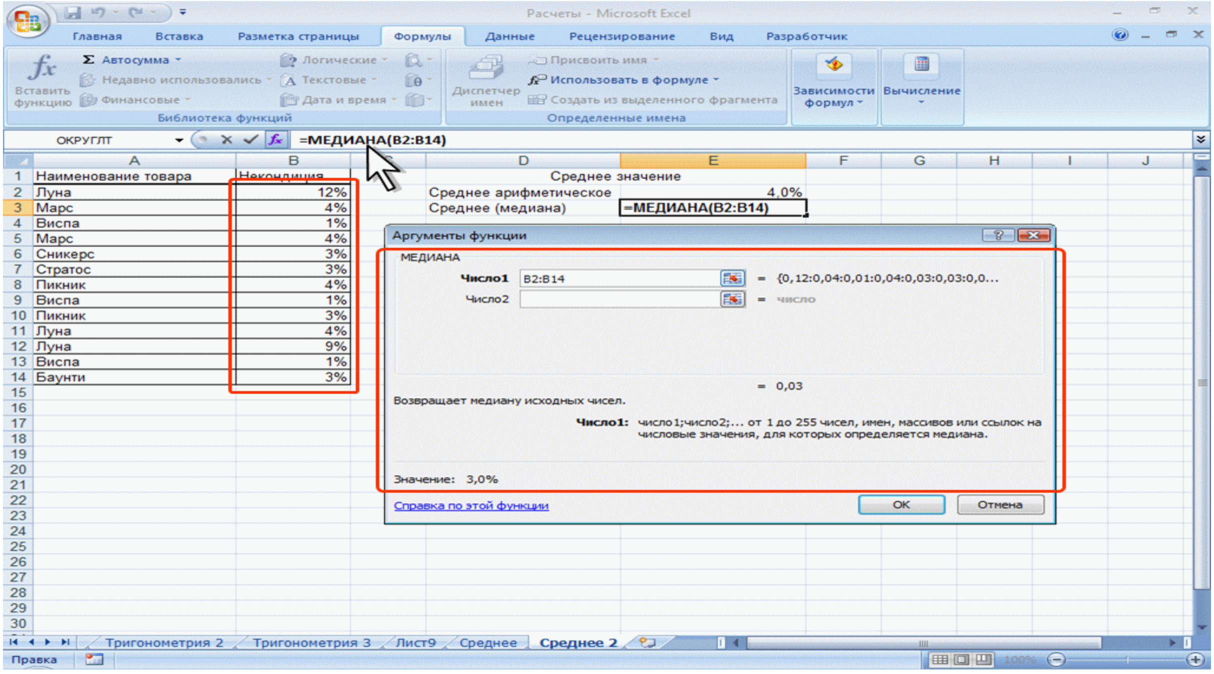


Рис. 11. Расчет середины множества чисел

Например, для данных таблицы на рис. 12 наиболее часто встречающееся значение (мода) составит 4 % (ячейка E3), в то время как среднее значение 2,8 % (ячейка E2).

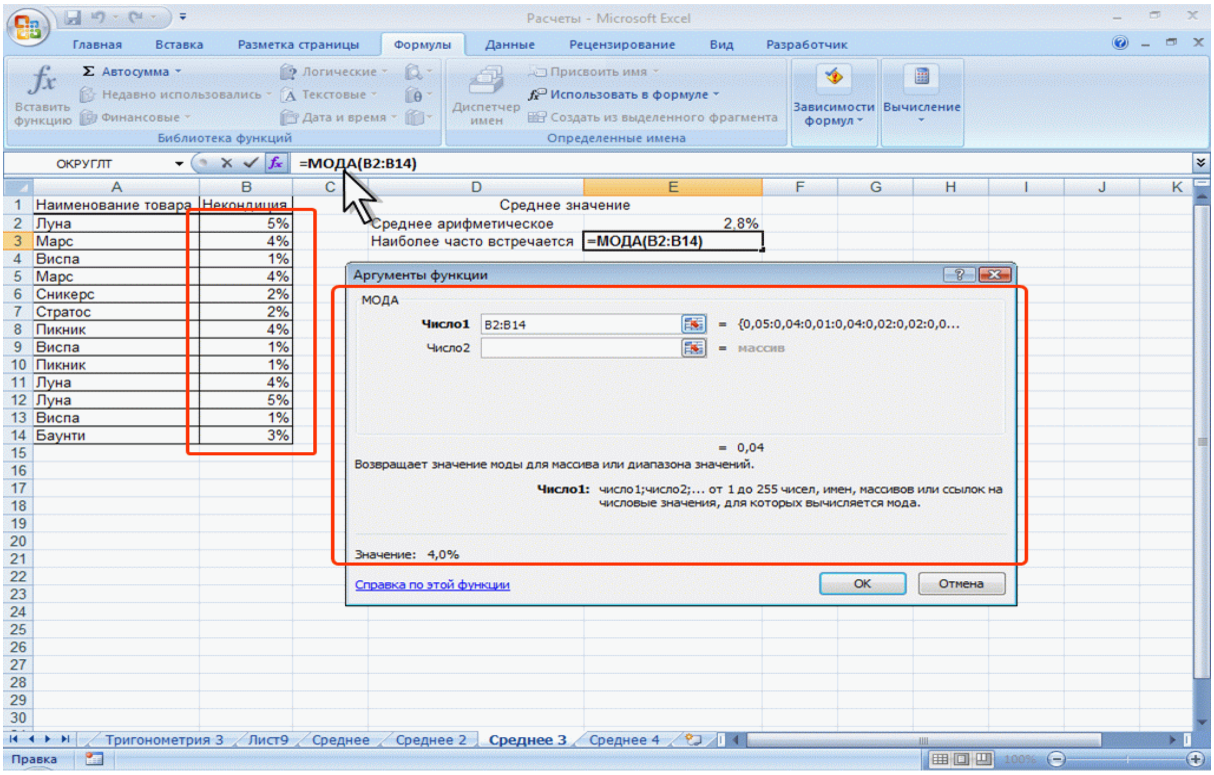


Рис. 12. Нахождение наиболее часто встречающегося или повторяющегося значения

При расчете средних темпов изменения какого-либо параметра более верное представление дает не среднее арифметическое, а среднее геометрическое значение. Особенно удобно пользоваться средним геометрическим значением при расчете средних темпов роста производства, среднего процента по вкладу и т. д. Для расчета среднего геометрического значения используют функцию СРГЕОМ.

Синтаксис функции

=СРГЕОМ(А),

где А – список от 1 до 30 элементов, среднее геометрическое значение которых требуется найти. Элемент может быть ячейкой, диапазоном ячеек, числом или формулой. Ссылки на пустые ячейки, текстовые или логические значения игнорируются.

Нахождение крайних значений

Для нахождения крайних (наибольшего или наименьшего) значений в множестве данных используют функции МАКС и МИН.

Синтаксис функции МАКС

=МАКС(А),

где А – список от 1 до 30 элементов, среди которых требуется найти наибольшее значение. Элемент может быть ячейкой, диапазоном ячеек, числом или формулой. Ссылки на пустые ячейки, текстовые или логические значения игнорируются.

Функция МИН имеет такой же синтаксис, что и функция МАКС.

Функции МАКС и МИН только определяют крайние значения, но не показывают, в какой ячейке эти значения находятся.

В тех случаях, когда требуется найти не самое большое (самое маленькое) значение, а значение, занимающее определенное положение в множестве данных (например, второе или третье по величине), следует использовать функции НАИБОЛЬШИЙ или НАИМЕНЬШИЙ.

Синтаксис функции НАИБОЛЬШИЙ

=НАИБОЛЬШИЙ(А; В),

где А – список от 1 до 30 элементов, среди которых требуется найти значение. Элемент может быть ячейкой, диапазоном ячеек, числом или формулой. Ссылки на пустые ячейки, текстовые или логические значения игнорируются; В – позиция (начиная с наибольшей) в множестве данных. Если требуется найти второе значение по величине, то указывается число 2, если третье, то число 3 и т.д.

Функция НАИМЕНЬШИЙ имеет такой же синтаксис, что и функция НАИБОЛЬШИЙ.

Расчет количества ячеек

Для определения количества ячеек, содержащих числовые значения, можно использовать функцию СЧЕТ.

Синтаксис функции

=СЧЕТ(А) ,

где А – список от 1 до 30 элементов, среди которых требуется определить количество ячеек, содержащих числовые значения. Элемент может быть ячейкой, диапазоном ячеек, числом или формулой. Ссылки на пустые ячейки, текстовые или логические значения игнорируются.

Если требуется определить количество ячеек, содержащих любые значения (числовые, текстовые, логические), то следует использовать функцию СЧЕТЗ.

Синтаксис функции

=СЧЕТЗ(А) ,

где А – список от 1 до 30 элементов, среди которых требуется определить количество ячеек, содержащих любые значения. Элемент может быть ячейкой, диапазоном ячеек, числом или формулой. Ссылки на пустые ячейки игнорируются.

Наоборот, если требуется определить количество пустых ячеек, следует использовать функцию СЧИТАТЬПУСТОТЫ.

Синтаксис функции

=СЧИТАТЬПУСТОТЫ(А),

где А – список от 1 до 30 элементов, среди которых требуется определить количество пустых ячеек. Элемент может быть ячейкой, диапазоном ячеек, числом или формулой. Ссылки на ячейки с нулевыми значениями игнорируются.

Можно также определять количество ячеек, отвечающих заданным условиям. Для этого используют функцию СЧЕТЕСЛИ.

Синтаксис функции

=СЧЕТЕСЛИ(A;B) ,

где А – диапазон проверяемых ячеек; В – критерий в форме числа, выражения или текста, определяющего суммируемые ячейки.

Выполнение работы

1. Запустите Microsoft Excel.

2. Откройте файл exercise_02.xlsx.

3. Перейдите к листу Лист 1. В ячейке B9 рассчитайте сумму ячеек B2:E6.

4. Перейдите к листу Лист 2. В ячейке B19 с помощью функции СУММЕСЛИ рассчитайте сумму ячеек в диапазоне B2:B17, значения в которых превышают 30.

5. Перейдите к листу Лист 3. В ячейке B19 с помощью функции СУММЕСЛИ рассчитайте сумму ячеек в диапазоне B2:B17 для товара „Мечта".

6. Перейдите к листу Лист 4. В ячейке C2 рассчитайте цену товара, указанную в ячейке B2, округленно до двух знаков после запятой. Скопируйте формулу на ячейки C3:C4.

7. Перейдите к листу Лист 5. В ячейке C2 рассчитайте цену товара, указанную в ячейке B2, округленно в большую сторону до двух знаков после запятой. Скопируйте формулу на ячейки C3:C4. В ячейке D2 рассчитайте цену товара, указанную в ячейке B2, округленно в меньшую сторону до двух знаков после запятой. Скопируйте формулу на ячейки D3:D4.

8. Перейдите к листу Лист 6. В ячейке C2 рассчитайте температуру, указанную в ячейке B2, округленно до целого числа. Скопируйте формулу на ячейки C3:C4.

9. Перейдите к листу Лист 7. В ячейке C2 рассчитайте температуру, указанную в ячейке B2, округленно до с точностью 0,2. Скопируйте формулу на ячейки C3:C4.

10. Перейдите к листу Лист 8. В ячейке E1 с использованием функций рассчитайте средний процент брака. В ячейке E2 с использованием функций рассчитайте средний процент брака без учета 20 % самых больших и самых малых значений. В ячейке E3 с использованием функций найдите наиболее часто встречающийся процент брака. В ячейке E4 с использованием функций найдите максимальный про-

цент брака. В ячейке E5 с использованием функций найдите минимальный процент брака. В ячейке E6 с использованием функций найдите второе по величине значение процента брака.

11. Перейдите к листу Лист 9. В ячейке E1 с использованием функций определите общее количество партий товара. В ячейке E2 с использованием функций определите количество отгруженных партий товара (указан объем отгрузки). В ячейке E3 с использованием функций определите количество партий товара, для которых нет данных. В ячейке E4 с использованием функций определите количество партий товаров объемом более 50. В ячейке E5 с использованием функций определите количество партий товара „Мечта".

21. Покажите полученные результаты преподавателю. Зашифруйте файл паролем. Сохраните файл под именем [ваше ФИО] – lab_2.xlsx

17. Закройте Microsoft Excel.

Лабораторная работа № 3

Работа с логическими функциями в Microsoft Excel

Цель работы:

– изучить логические функции в Microsoft Excel;
– получить практические навыки по составлению блок-схемы алгоритма.

Лабораторная работа посвящена вопросам использования логических функций в вычислениях. Дано представление о логических функциях и описаны их возможности. Приведен пример использования логических функций для решения практических задач.

Теоретические сведения

Функция ЕСЛИ

Возвращает одно значение, если заданное условие при вычислении дает значение ИСТИНА, и другое значение, если ЛОЖЬ. Функция ЕСЛИ используется при проверке условий для значений и формул.

Синтаксис функции

=ЕСЛИ(лог_выражение;значение_если_истина; значение_если_ложь), где лог_выражение – любое значение или выражение, принимающее значения ИСТИНА или ЛОЖЬ. Например, A10=100 – логическое выражение; если значение в ячейке A10 равно 100, это выражение принимает значение ИСТИНА, а в противном случае – значение ЛОЖЬ. Этот аргумент может использоваться в любом операторе сравнения;

значение_если_истина – значение, которое возвращается, если аргумент «лог_выражение» имеет значение ИСТИНА. Например, если данный аргумент – строка «В пределах бюджета», а аргумент «лог_выражение» имеет значение ИСТИНА, то функция ЕСЛИ отобразит текст «В пределах бюджета». Если аргумент «лог_выражение» имеет значение ИСТИНА, а аргумент «значение_если_истина» не задан, возвращается значение 0 (ноль). Чтобы отобразить слово ИСТИНА, необходимо использовать логическое значение ИСТИНА для этого аргумента. Аргумент «значение_если_истина» может быть формулой;

значение_если_ложь – значение, которое возвращается, если «лог_выражение» имеет значение ЛОЖЬ. Например, если данный аргумент – строка «Превышение бюджета», а аргумент «лог_выражение» имеет значение ЛОЖЬ, то функция ЕСЛИ отобразит текст «Превышение бюджета». Если аргумент «лог_выражение» имеет значение ЛОЖЬ, а аргумент «значение_если_ложь» опущен (т. е. после аргумента «значение_если_истина» отсутствует точка с запятой), то возвращается логическое значение ЛОЖЬ. Если аргумент «лог_выражение» имеет значение ЛОЖЬ, а аргумент «значение_если_ложь» пуст (т. е. после аргумента «значение_если_истина» стоит точка с запятой, а за ней – закрывающая скобка), то возвращается значение 0 (ноль). Аргумент «значение_если_ложь» может быть формулой.

В качестве значений аргументов «значение_если_истина» и «значение_если_ложь» можно использовать для построения более сложных проверок до 64 вложенных друг в друга функций ЕСЛИ (применение вложенных функций ЕСЛИ показано в примере 3.) Чтобы проверить больше 64 условий, воспользуйтесь функциями ПРОСМОТР, ВПР или ГПР (применение функции ПРОСМОТР показано в примере 4).

После вычисления аргументов «значение_если_истина» и «значение_если_ложь» функция ЕСЛИ возвращает полученное значение.

Если один из аргументов функции ЕСЛИ является массивом, при выполнении функции ЕСЛИ вычисляются все элементы массива.

Microsoft Excel содержит дополнительные функции, которые можно применять для анализа данных с использованием условий. Например, для подсчета числа вхождений текстовой строки или числа в диапазоне ячеек используйте функции СЧЕТЕСЛИ и СЧЕТЕСЛИМН. Для вычисления суммы значений, попадающих в интервал, заданный текстовой строкой или числами, используйте функции СУММАЕСЛИ и СУММЕСЛИМН.

Пример 1

	A
1	**Данные**
2	50

Формула	Описание (результат)
=ЕСЛИ(A2<=100;"Внутри бюджета";"Вне бюджета")	Если приведенное выше число меньше или равно 100, формула отображает строку «В пределах бюджета». В противном случае отображается строка «Превышение бюджета» (В пределах бюджета)
=ЕСЛИ(A2=100;СУММ(B5:B15);"")	Если число равно 100, вычисляется сумма в диапазоне B5:B15. В противном случае возвращается пустая текстовая строка ("") ()

Пример 2

	A	B
1	**Фактические расходы**	**Предполагаемые расходы**
2	1500	900
3	500	900
4	500	925

Формула	Описание (результат)
=ЕСЛИ(A2>B2;"Превышение бюджета";"OK")	Проверяет первую строку на превышение бюджета (Превышение бюджета)
=ЕСЛИ(A3>B3;"Превышение бюджета";"OK")	Проверяет вторую строку на превышение бюджета (OK)

Пример 3

	A
1	**Балл**
2	45
3	90
4	78

Формула	Описание (результат)
=ЕСЛИ(A2>89;"A";ЕСЛИ(A2>79;"B"; ЕСЛИ(A2>69;"C";ЕСЛИ(A2>59;"D";"F"))))	Назначает буквенную категорию первому баллу (F)
=ЕСЛИ(A3>89;"A";ЕСЛИ(A3>79;"B"; ЕСЛИ(A3>69;"C";ЕСЛИ(A3>59;"D";"F"))))	Назначает буквенную категорию второму баллу (A)
=ЕСЛИ(A4>89;"A";ЕСЛИ(A4>79;"B"; ЕСЛИ(A4>69;"C";ЕСЛИ(A4>59;"D";"F"))))	Назначает буквенную категорию третьему баллу (C)

Пример 4

	A
1	Балл
2	45
3	90
4	78

Формула	Описание (результат)
=ПРОСМОТР(A2;{0;60;63;67;70;73;77;80;83;87;90;93;97};{"F";"D-";"D";"D+";"C-";"C";"C+";"B-";"B";"B+";"A-";"A";"A+"})	Назначает буквенную категорию первому баллу (F)
=ПРОСМОТР(A3;{0;60;63;67;70;73;77;80;83;87;90;93;97};{"F";"D-";"D";"D+";"C-";"C";"C+";"B-";"B";"B+";"A-";"A";"A+"})	Назначает буквенную категорию второму баллу (A-)
=ПРОСМОТР(A4;{0;60;63;67;70;73;77;80;83;87;90;93;97};{"F";"D-";"D";"D+";"C-";"C";"C+";"B-";"B";"B+";"A-";"A";"A+"})	Назначает буквенную категорию третьему баллу (C+)

Функция И

Возвращает значение ИСТИНА, если в результате вычисления всех аргументов получается значение ИСТИНА; возвращает значение ЛОЖЬ, если в результате вычисления хотя бы одного из аргументов получается значение ЛОЖЬ.

Обычно функция И используется для расширения возможностей других функций, выполняющих логическую проверку. Например, функция ЕСЛИ выполняет логическую проверку и возвращает одно значение, если при проверке получается значение ИСТИНА, и другое значение, если при проверке получается значение ЛОЖЬ. Использование функции И в качестве аргумента *лог_выражение* функции ЕСЛИ позволяет проверять несколько различных условий вместо одного.

Синтаксис функции

=И(логическое_значение1, [логическое_значение2], ...), где логическое_значение1 – обязательный аргумент. Первое проверяемое условие, вычисление которого дает значение ИСТИНА или ЛОЖЬ;

логическое_значение2, … – необязательный аргумент. Дополнительные проверяемые условия, вычисление которых дает значение ИСТИНА или ЛОЖЬ. Условий может быть не более 255.

Аргументы должны давать в результате логические значения (такие как ИСТИНА или ЛОЖЬ) или должны быть массивами, или ссылками, содержащими логические значения.

Если аргумент, который является ссылкой или массивом, содержит текст или пустые ячейки, то такие значения игнорируются.

Если указанный интервал не содержит логических значений, функция И возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!.

Пример 5

	A	B	C
1	**Формула**	**Описание**	**Результат**
2	=И(ИСТИНА; ИСТИНА)	Все аргументы имеют значение ИСТИНА	ИСТИНА
3	=И(ИСТИНА; ЛОЖЬ)	Один аргумент имеет значение ЛОЖЬ	ЛОЖЬ
4	=И(2+2=4; 2+3=5)	Результатом вычисления всех аргументов является значение ИСТИНА	ИСТИНА

Пример 6

	A	B	C
1	**Данные**		
2	50		
3	104		
4	**Формула**	**Описание**	**Результат**
5	=И(1<A2; A2<100)	Отображает значение ИСТИНА, если число в ячейке A2 находится в интервале от 1 до 100. В противном случае отображается значение ЛОЖЬ.	ИСТИНА
	=ЕСЛИ(И(1<A3; A3<100); A3; "Значение вне интервала.")	Показывает число из ячейки A3 (если оно находится в интервале от 1 до 100) или сообщение ("Значение вне интервала.").	Значение вне интервала.
6	=ЕСЛИ(И(1<A2; A2<100); A2; "Значение вне интервала.")	Показывает число из ячейки A2 (если оно находится в интервале от 1 до 100) или сообщение.	50

Функция ИЛИ

Возвращает значение ИСТИНА, если хотя бы один из аргументов имеет значение ИСТИНА или ЛОЖЬ, если все аргументы имеют значение ЛОЖЬ.

Синтаксис функции

=ИЛИ(логическое_значение1;логическое_значение2;...),
где логическое_значение1, логическое_значение2, ... – от 1 до 255 проверяемых условий, которые могут иметь значение либо ИСТИНА, либо ЛОЖЬ.

Аргументы должны принимать логические значения (ИСТИНА или ЛОЖЬ) или быть массивами либо ссылками, содержащими логические значения.

Если аргумент, который является ссылкой или массивом, содержит текст или пустые ячейки, то такие значения игнорируются.

Если заданный интервал не содержит логических значений, функция ИЛИ возвращает значение ошибки #ЗНАЧ!.

Можно воспользоваться функцией ИЛИ в качестве формулы массива, чтобы проверить, имеется ли в нем то или иное значение. Чтобы ввести формулу массива, нажмите клавиши CTRL+SHIFT+ВВОД.

Пример 7

	A	B
1	**Формула**	**Описание (результат)**
2	=ИЛИ(ИСТИНА)	Один аргумент имеет значение ИСТИНА (ИСТИНА)
3	=ИЛИ(1+1=1;2+2=5)	Все аргументы принимают значение ЛОЖЬ (ЛОЖЬ)
4	=ИЛИ(ИСТИНА;ЛОЖЬ;ИСТИНА)	По крайней мере один аргумент имеет значение ИСТИНА (ИСТИНА)

Функция НЕ

Меняет логическое значение своего аргумента на противоположное. Функция НЕ используется в тех случаях, когда необходимо убедиться, что значение не равно некой конкретной величине.

Синтаксис функции

=НЕ(логическое_значение),
где логическое_значение – величина или выражение, которые могут принимать два значения: ИСТИНА или ЛОЖЬ.

Если аргумент «логическое_значение» имеет значение ЛОЖЬ, функция НЕ возвращает значение ИСТИНА; если он имеет значение ИСТИНА, функция НЕ возвращает значение ЛОЖЬ.

Пример 8

	A	B
1	**Формула**	**Описание (результат)**
2	=НЕ(ЛОЖЬ)	Меняет значение ЛОЖЬ на противоположное (ИСТИНА)
3	=НЕ(1+1=2)	Меняет значение ИСТИНА, которому равно логическое выражение, на противоположное (ЛОЖЬ)

Функция ЕСЛИОШИБКА

Данная функция возвращает определенное значение, если вычисление по формуле вызывает ошибку; в противном случае функция возвращает результат вычисления. Функция ЕСЛИОШИБКА позволяет перехватывать и обрабатывать ошибки в формулах.

Синтаксис функции

=ЕСЛИОШИБКА(значение,значение_при_ошибке),
где значение – аргумент, проверяемый на возникновение ошибок;

значение_при_ошибке – значение, возвращаемое при ошибке при вычислении по формуле. Определяются следующие типы ошибок: #Н/Д, #ЗНАЧ!, #ССЫЛКА!, #ДЕЛ/0!, #ЧИСЛО!, #ИМЯ? и #ПУСТО!.

Если «значение» или «значение_при_ошибке» являются пустыми ячейками, функция ЕСЛИОШИБКА рассматривает их как пустые строковые значения ("").

Если «значение» является формулой массива, функция ЕСЛИОШИБКА возвращает массив результатов для каждой ячейки диапазона, указанного в значении. Пример приведен ниже.

Пример 9

	A	B
1	**Котировка**	**Единиц продано**
2	210	35
3	55	0
4		23

5	Формула	Описание (результат)
6 7	=ЕСЛИОШИБКА(A2/B2;"Ошибка при вычислениях")	Проверяет на предмет ошибки в формуле в первом аргументе (деление 210 на 35), не обнаруживает ошибок и возвращает результат вычисления по формуле (6)
8 9	=ЕСЛИОШИБКА(A3/B3;"Ошибка при вычислениях")	Проверяет на предмет ошибки в формуле в первом аргументе (деление 55 на 0), обнаруживает ошибку «деление на 0» и возвращает «значение_при_ошибке» («Ошибка при вычислениях»)
10	=ЕСЛИОШИБКА(A4/B4;"Ошибка при вычислениях")	Проверяет на предмет ошибки в формуле в первом аргументе (деление "" на 23), не обнаруживает ошибок и возвращает результат вычисления по формуле (0).

Пример 10

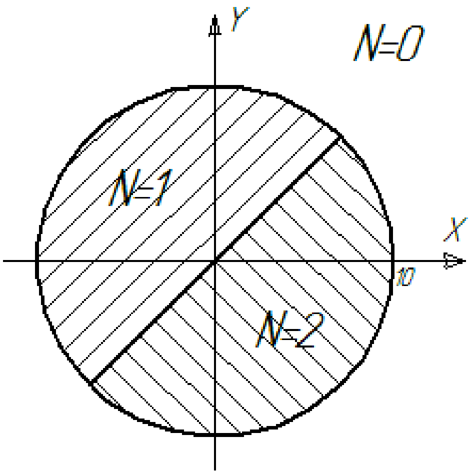


Рис. 13. Исходные данные для задачи

Для задачи, приведенной на рис. 13, записать математическую модель, составить блок-схему алгоритма и рассчитать в Microsoft Excel номер области, в которую попадает точка с введенными координатами *X* и *Y*. Границы областей отнести к областям с большим номером. Составить таблицу с данными для тестирования программы.

В память компьютера вводятся значения переменных *X* и *Y*, представляющих собой координаты точки *M* (*X*, *Y*). Переменная *N* принимает значения:

0 – если точка *M* расположена вне круга *R* = 10;

1 – если точка *M* расположена внутри круга и лежит выше прямой *Y* = *X*;

2 – если точка *M* расположена внутри круга и лежит ниже прямой *Y* = *X*.

Решение:

Запишем математическую модель определения номера *N*:

$$N = \begin{cases} 0, & \text{если } R > 10; \\ 1, & \text{если } R \le 10 \text{ и } y > x; \\ 2, & \text{если } R \le 10 \text{ и } y \le x, \end{cases}$$

где $R = \sqrt{X^2 + Y^2}$ – радиус окружности.

Составим блок-схему (рис. 14).

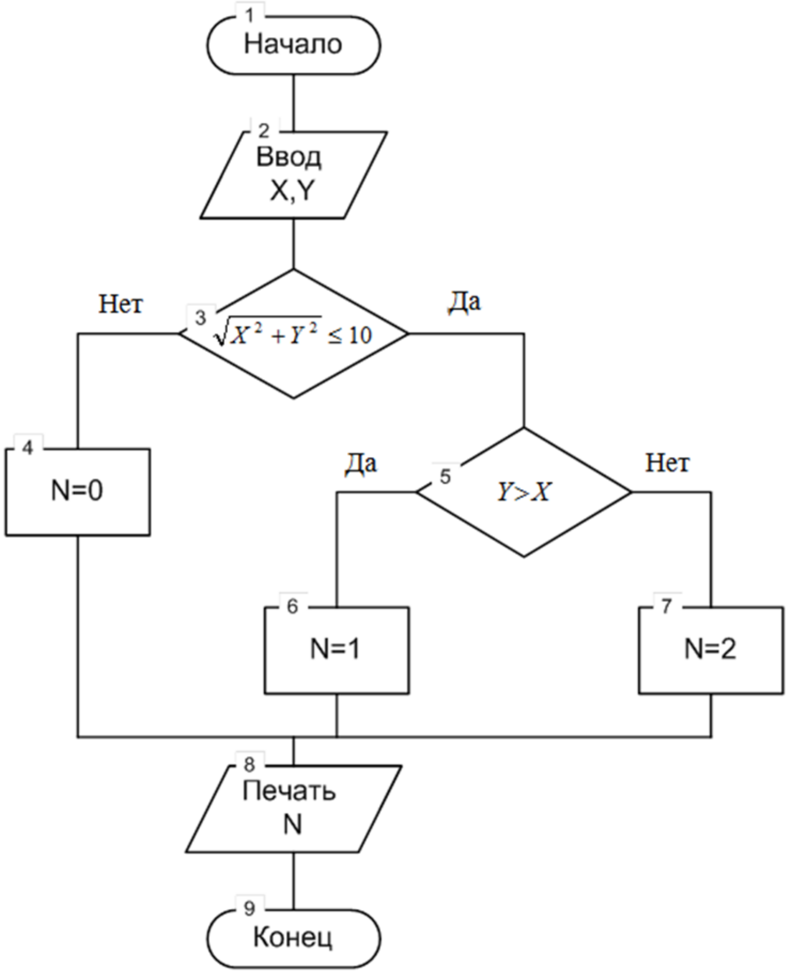


Рис. 14. Блок-схема решения задачи

После ввода двух чисел, координат X и Y соответственно, производится анализ значений X и Y на попадание точки в различные области. Расстояние от точки до центра координат сравнивается с 10. Если это расстояние не больше 10 (выход из блока сравнения по ветви "ДА"), то точка находится внутри круга и необходим дальнейший анализ на попадание точки в области, а если точка находится вне круга (выход "НЕТ" из блока сравнения), то переменной присваивается значение 0.

Анализ на попадание точки в области 1 или 2 осуществляется блоком сравнения № 5. Если введено значение Y, превышающее значение X (выход по ветви "ДА"), то точка попала в область 1 и переменной присваивается значение 1. При невыполнении этого условия N присваивается значение 2.

После логического сравнения ветви вычисления сходятся в общую точку и печатается результат.

Затем с помощью логических функций, рассмотренных выше, производим необходимые вычисления номера области, в которую попадет точка *M* с введенными координатами *X* и *Y*. На рис. 15 показано решение задачи в Microsoft Excel.

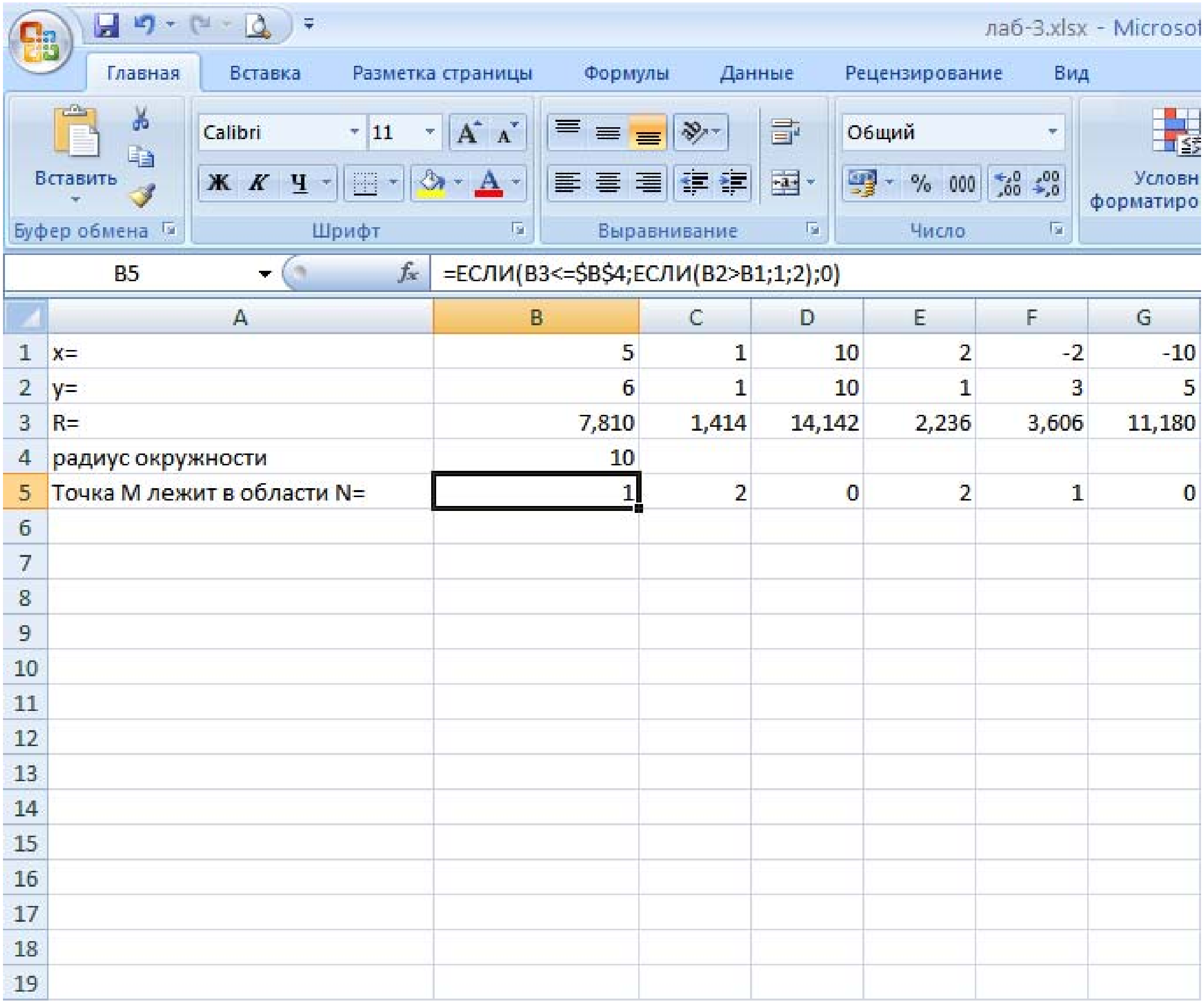


Рис. 15. Решение задачи в Microsoft Excel

Задание к работе

1. Изучить логические функции Microsoft Excel.

2. Для выданного варианта составить математическую модель и блок-схему решения задачи. Показать результаты преподавателю.

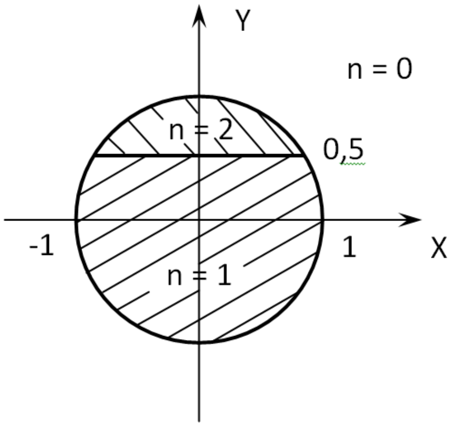
3. Запустить Microsoft Excel. Решите задачу с помощью логических функций и проверьте правильность решения по тестовым данным.

4. Показать полученные результаты преподавателю. Зашифруйте файл паролем. Сохраните файл под именем [ваше ФИО] – lab_3.xlsx.

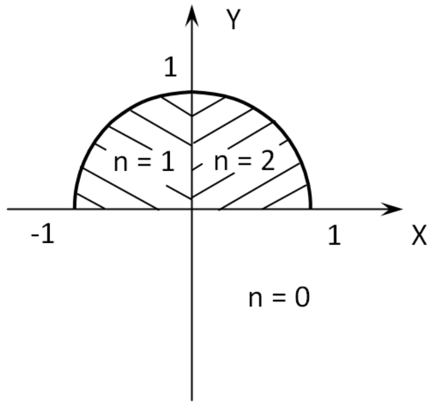
5. Закрыть Microsoft Excel.

Варианты заданий к работе

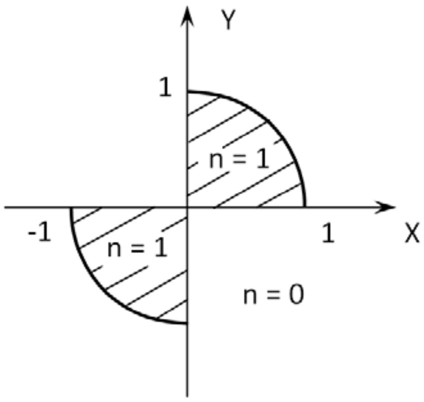
Вариант 1



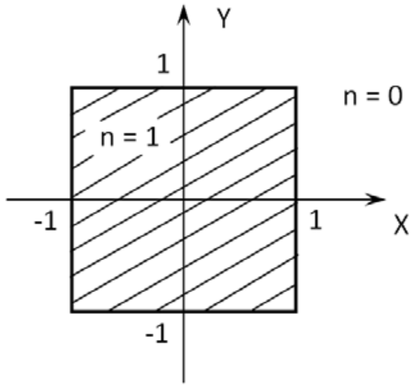
Вариант 2



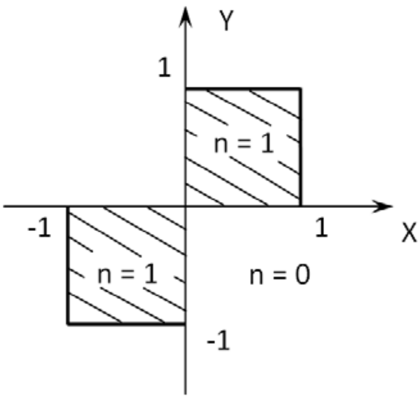
Вариант 3



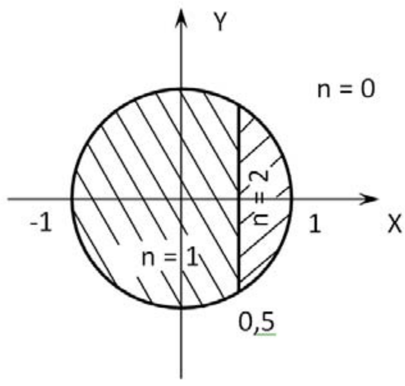
Вариант 4



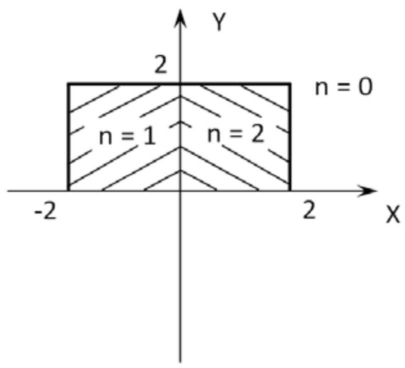
Вариант 5



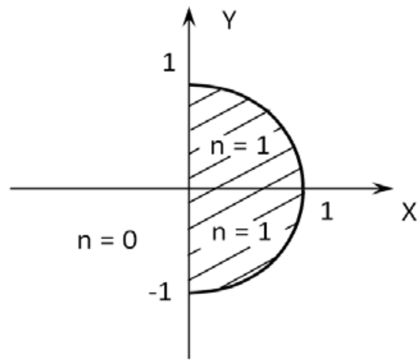
Вариант 6



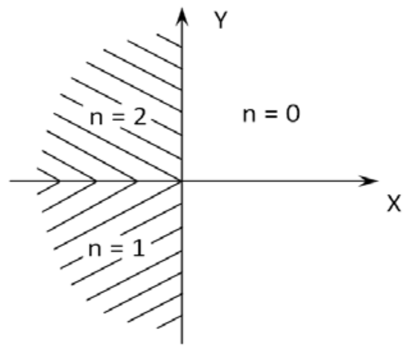
Вариант 7



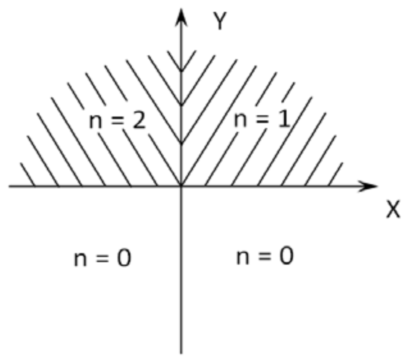
Вариант 8



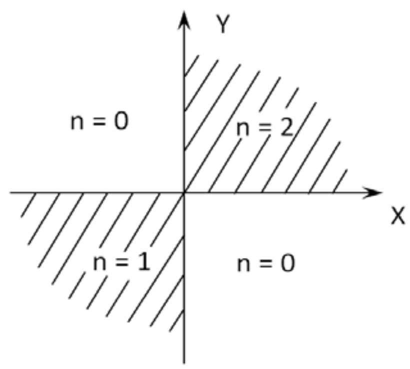
Вариант 9



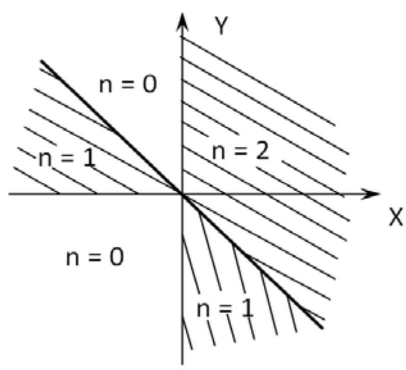
Вариант 10



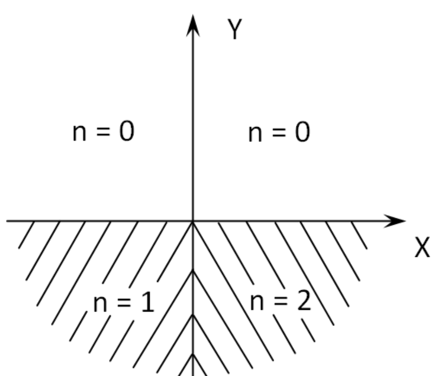
Вариант 11



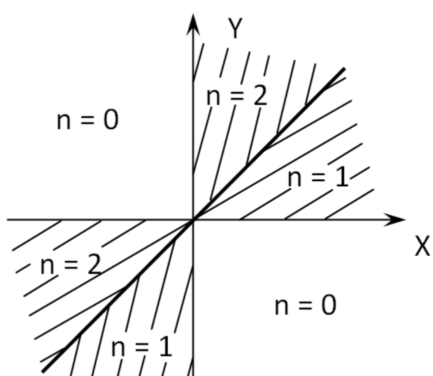
Вариант 12



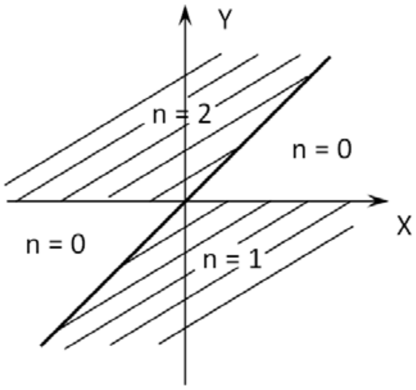
Вариант 13



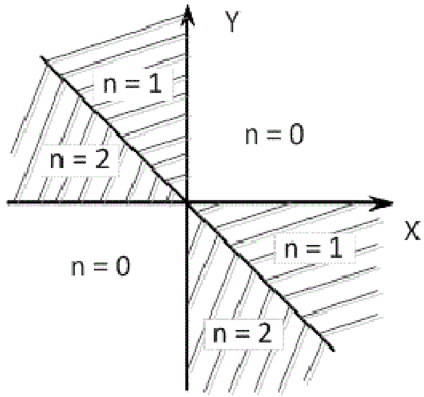
Вариант 14



Вариант 15



Вариант 16



Лабораторная работа № 4

Подбор формул по данным опыта методом наименьших квадратов в Microsoft Excel

Цель работы:

– изучить математический аппарат, используемый при обработке опытных данных;

– получить практические навыки обработки экспериментальных данных в Microsoft Excel.

Общие положения

В практической работе часто зависимость между переменными величинами получается в результате опыта (измерений). Обычно в таком случае эта зависимость оказывается представленной в виде таблицы. Функции, заданные подобным образом, могут входить в дальнейшие операции и расчеты. Для удобства пользования такими зависимостями необходимо сначала подобрать формулу, хорошо описывающую опытные данные. Подбор формулы является существенной частью обработки экспериментальных данных. Одним из методов получения таких формул является способ наименьших квадратов.

Метод наименьших квадратов

Пусть в результате опытов найдены некоторые значения x_i и соответствующие им значения y_i, которые заданы таблицей (табл. 1).

Таблица 1

x	x_1	x_2	…	x_i	…	x_n
y	y_1	y_2	…	y_i	…	y_n

Требуется найти зависимость $y = f(x)$. Такой зависимостью может быть:

$y = ax + b$ – линейная; $y = bx^a$ – степенная; $y = be^{ax}$ – показательная;

$y = b + a\ln x$ – логарифмическая; $y = \frac{a}{x} + b$ – гиперболическая и т.д.

Метод наименьших квадратов позволяет подобрать более точные значения параметров a и b. Предварительно необходимо установить общий вид аналитической функции, который можно выявить по опытным данным, если их нанести на плоскость с координатами $X – Y$ (рис. 16).

Зависимость y от x, изображаемая аналитической функцией $y = f(x)$, не может совпадать с экспериментальными значениями во всех n точках. Это означает, что для всех или некоторых точек имеем разность $\Delta i = y_i - f(x_i)$, отличную от нуля.

Метод наименьших квадратов заключается в том, что подбираются параметры a и b таким образом, чтобы сумма квадратов разностей была наименьшей, т.е.

$$z = \sum_{i=1}^{n} \Delta_i^2 = \sum_{i=1}^{n} \left[y_i - f(x_i)\right]^2 \to \min.$$

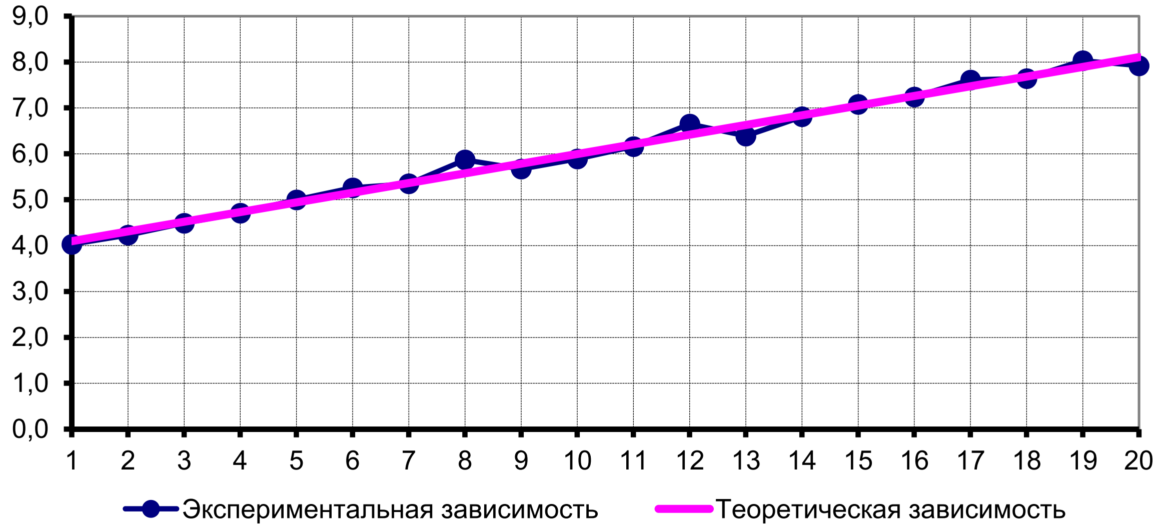


Рис. 16. Теоретическая и экспериментальная зависимости

Если вид функции $y = f(x)$ установлен, то ее можно представить в виде $y = f(x) = \varphi(x, a, b)$,

где a и b – искомые параметры, тогда

$$z = \sum_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b)]^2 \to \min. \qquad (1)$$

Для нахождения минимума выражения (1) вычислим частные производные по аргументам a и b и приравняем эти производные к нулю, получим:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial a} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b)]\varphi'_a(x_i, a, b) = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial b} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} [y_i - \varphi(x_i, a, b)]\varphi'_b(x_i, a, b) = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

Система (2) содержит два уравнения с двумя неизвестными a и b. Решив систему (2), найдем значения параметров a и b. При найденных значениях параметров величина z будет наименьшей, т.е. аналитическая зависимость будет наилучшим образом описывать экспериментальные данные.

Линейная регрессия

Пусть эмпирические данные необходимо описать зависимостью $y = ax + b$, т.е. $y = \varphi(x, a, b) = ax + b$.

Тогда согласно методу наименьших квадратов запишем

$$z = \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)^2 \to \min. \qquad (3)$$

Выбираем числа a и b так, чтобы величина z была наименьшей, для чего вычислим частные производные выражения (3) по a и b, получим

$$\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial a} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)(-x_i) = 0, \\ \dfrac{\partial z}{\partial b} = 2\sum\limits_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)(-1) = 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Эти два условия дают следующую систему уравнений

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} x_i y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 - b\sum_{i=1}^{n} x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} y_i - a\sum_{i=1}^{n} x_i - nb = 0. \end{cases} \qquad (5)$$

Откуда

$$\begin{cases} a = \dfrac{\sum x_i y_i - \dfrac{\sum x_i \sum y_i}{n}}{\sum x_i^2 - \dfrac{\left(\sum x_i\right)^2}{n}}; \\ b = \dfrac{\sum y_i}{n} - \dfrac{a\sum x_i}{n}. \end{cases} \qquad (6)$$

Для определения численной величины параметров a и b составляется расчетная таблица (табл. 2), программа для расчета на ЭВМ или выполняется расчет средствами MS Excel.

Таблица 2

i	x_i	y_i	$x_i y_i$	x_i^2
1	x_1	y_1	$x_1 y_1$	x_1^2
2	x_2	y_2	$x_2 y_2$	x_2^2
…	...	...	...	...
n	x_n	y_n	$x_n y_n$	x_n^2
	$\sum_{i=1}^{n} x_i$	$\sum_{i=1}^{n} y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$	$\sum_{i=1}^{n} x_i^2$

Выполнение работы

Используя опытные данные, рассчитать коэффициенты регрессии, используя программу Microsoft Excel.

Для этого воспользуемся функцей ЛИНЕЙН, которая рассчитывает статистику для ряда с применением метода наименьших квадратов, чтобы вычислить прямую линию, которая наилучшим образом аппроксимирует имеющиеся данные и затем возвращает массив, который описывает полученную прямую. Можно также объединять функцию ЛИНЕЙН с функциями для вычисления других видов моделей, являющихся линейными в неизвестных параметрах (неизвестные параметры которых – линейные), включая полиномиальные, логарифмические, экспоненциальные и степенные ряды. Поскольку возвращается массив значений, функцию следует задавать в виде формулы массива.

Уравнение для прямой линии имеет следующий вид:

$y = ax + b$ или $y = a_1x_1 + a_2x_2 + \ ... \ + b$,

где зависимое значение y – функция независимого значения x, значения a – коэффициенты, соответствующие каждой независимой переменной x, а b – постоянная.

Функция ЛИНЕЙН возвращает массив {*an;an-1;...;a1;b*}. ЛИНЕЙН может также возвращать дополнительную регрессионную статистику.

Синтаксис функции

=ЛИНЕЙН(известные_значения_*y*; известные_значения_*x*; конст; статистика).

Известные_значения_у – множество значений *y*, известных для соотношения *y = ax + b.*

Известные_значения_х – необязательное множество значений *x*, известных для соотношения *y = ax + b*.

Конст – логическое значение, которое указывает, требуется ли, чтобы константа *b* была равна 0.

Статистика – логическое значение, которое указывает, требуется ли вернуть дополнительную статистику по регрессии.

Задание к работе

1. Для статистического ряда найти коэффициенты регрессии a и b.
2. По полученным данным построить график теоретической и экспериментальной зависимостей.
3. Сделать выводы по работе.

Варианты заданий к работе

X_i	Значения $Y_i = Y(X_i)$							
	Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8
1	3,88	4,08	3,90	4,03	3,82	5,998	6,030	5,850
2	3,86	4,18	3,82	4,23	3,44	5,820	6,072	5,619
3	3,84	4,38	3,60	4,49	3,16	5,754	6,297	5,569
4	3,81	4,46	3,47	4,71	2,95	5,828	6,428	5,426
5	3,71	4,44	3,31	5,00	2,73	5,627	6,425	5,237
6	3,49	4,55	3,05	5,26	2,40	5,597	6,473	5,025
7	3,51	4,67	3,14	5,35	2,27	5,693	6,592	4,988
8	3,68	4,89	2,89	5,87	1,85	5,469	6,815	5,037
9	3,74	4,86	2,66	5,67	1,88	5,413	6,786	4,586
10	3,47	5,04	2,53	5,89	1,32	5,526	6,925	4,575
11	3,60	5,22	2,35	6,16	1,18	5,344	7,116	4,445
12	3,51	4,99	2,49	6,65	1,15	5,304	7,053	4,353
13	3,48	5,39	2,19	6,39	0,85	5,352	7,224	3,933
14	3,30	5,56	1,82	6,81	0,48	5,301	7,439	3,899
15	3,23	5,42	1,69	7,08	0,18	5,424	7,302	3,793
16	3,26	5,85	1,54	7,24	-0,01	4,966	7,426	3,473
17	3,14	5,99	1,22	7,61	-0,12	5,080	7,797	3,551
18	3,17	5,85	1,17	7,64	-0,60	5,256	7,871	3,171
19	2,96	6,01	1,04	8,03	-0,68	5,090	7,929	3,330
20	2,81	5,97	1,12	7,92	-0,54	5,053	8,060	3,044
X_i	Вариант 9	Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12	Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15	Вариант 16
1	6,310	5,650	20,5	20,9	2,02	19,9	22,3	1,35
2	6,308	5,431	19,4	20,5	1,98	20,3	22,9	1,87
3	6,546	5,250	19,2	21,9	1,67	22,0	22,7	1,88
4	6,855	5,000	18,7	21,8	1,65	23,9	26,2	2,30
5	7,073	4,790	17,7	21,7	1,57	21,9	27,2	2,82
6	7,770	4,569	18,8	22,7	1,42	26,1	28,2	2,87
7	7,225	4,296	17,1	25,8	1,37	26,5	31,3	3,07
8	7,739	4,065	16,0	27,3	1,07	26,0	34,9	3,74
9	7,995	3,837	15,6	28,2	0,85	25,5	38,2	3,97
10	8,063	3,519	14,0	30,4	0,48	24,9	39,5	4,36
11	8,247	3,281	15,0	30,3	0,35	25,0	42,2	4,40
12	8,472	2,926	12,6	34,5	-0,30	25,2	44,8	4,51
13	8,627	2,801	9,9	36,2	-0,61	24,4	50,6	4,57
14	8,936	2,546	9,7	38,5	-1,20	23,5	55,0	5,00
15	9,082	2,232	9,1	41,9	-1,39	22,6	56,8	5,60
16	9,076	2,016	7,1	44,5	-1,76	21,9	61,9	5,69
17	9,363	1,794	4,3	48,5	-2,28	22,4	64,2	5,70
18	9,679	1,663	5,4	50,6	-2,81	23,4	70,4	5,83
19	9,846	1,375	1,9	56,3	-3,57	19,6	75,7	6,16
20	10,013	1,217	0,1	59,1	-4,06	21,9	81,0	7,82

X_i	Вариант 17	Вариант 18	Вариант 19	Вариант 20
1	5,95	1,3	7,5	0,12
2	6,37	1,6	10,6	0,13
3	6,70	1,7	11,0	0,15
4	6,88	1,8	11,4	0,18
5	7,06	1,8	15,2	0,18
6	7,50	1,9	16,2	0,19
7	7,66	2,1	17,3	0,20
8	8,10	2,1	17,4	0,22
9	8,15	2,2	18,0	0,24
10	8,47	2,4	18,2	0,24
11	8,59	2,5	21,2	0,24
12	8,59	2,5	21,5	0,24
13	8,69	2,7	22,1	0,25
14	8,76	2,7	23,0	0,26
15	9,95	2,7	25,0	0,27
16	11,16	2,8	25,9	0,27
17	11,50	2,9	28,4	0,28
18	11,84	2,9	29,0	0,29
19	13,97	3,0	29,1	0,30
20	15,12	3,2	29,7	0,31

Лабораторная работа № 5

Законы распределения дискретной случайной величины

Цель работы:

– изучить основные характеристики биномиального закона и закона Пуассона;

– освоить методику построения многоугольника распределения и графика функции распределения дискретной случайной величины;

– получить практические навыки расчета вероятностных задач на ЭВМ.

Общие положения

Случайной величиной называется такая величина, которая в результате опыта может принять то или иное значение, которое с точностью нельзя предсказать до опыта.

Между частными значениями случайной величины и вероятностями их появления существует определенная зависимость. Указанная зависимость называется законом распределения дискретной случайной величины. Закон распределения случайной величины можно задать в виде таблицы, графика или формулы.

Все случайные величины делятся на дискретные и непрерывные. Дискретная случайная величина принимает фиксированные значения на отрезке [*а, в*]. Непрерывная случайная величина принимает на отрезке [*а, в*] любое значение.

Основными вероятностями закона распределения дискретной случайной величины являются биномиальный закон и закон Пуассона.

Биномиальный закон распределения

Биномиальное распределение возникает при выполнении следующих условий:

– в результате одного испытания может появиться одно из двух противоположных событий $\overline{A}$ или $\overline{A} = B$;

– вероятности указанных событий от опыта к опыту не меняются и составляют $P(A) = 0$ и $P(B) = q$;

– проводится n независимых испытаний.

При выполнении указанных условий возникают различные комбинации таких событий, вероятность появления которых определяется по формуле, называемой биномиальным законом распределения

$$P(m,n)=\frac{n!}{m!(n-m)!}q^{n-m}p^m=C_n^m q^{n-m}p^m, \qquad (1)$$

где n – число независимых испытаний; $P_{(m,\ n)}$ – вероятность того, что при n испытаниях событие A появится ровно m раз; p и q – вероятности появления соответственно событий A и B, где $q = 1 - p$; $C_n^{\ m}$ – число сочетаний из n элементов по m.

Для биномиального распределения числовых характеристик: математическое ожидание $M(m)$ и дисперсия $Д(m)$ выражаются с помощью формул:

$$M[m] = np \quad \text{и} \quad Д[m] = npq.$$

Распределение Пуассона

Распределение Пуассона представляет собой предельный случай биномиального распределения для условий, когда $p\to 0$; $n\to\infty$ и $np = $
$=a$.

Преобразуя выражение биномиального закона при приведенных выше условиях, получим формулу распределения Пуассона

$$P(m,n) = \frac{a^m}{m!} e^{-a}, \tag{2}$$

где n – число испытаний; m – число появления события A (m = 0, 1, 2…); $P(m, n)$ – вероятность того, что при n испытаниях событие A появится ровно m раз; a – параметр закона ($a = np$); p – вероятность появления события A в одном испытании.

В связи с тем что вероятность появления отдельных событий в распределении Пуассона характеризуется малой вероятностью ($P \to 0$), закон Пуассона называют законом редких явлений.

Математическое ожидание $M(m)$ и дисперсия Д(m) для распределения Пуассона равны и определяются по выражению

$$M[m] = Д[m] = np = a.$$

Закон Пуассона описывает:

– поток требований в зону ремонта и ТО;

– поток заявок на запасные части, узлы, агрегаты;

– случайное число отказов в течение фиксированной наработки.

Дискретная случайная величина

Дискретная случайная величина, кроме формул 1 и 2, также может быть задана:

а) рядом распределения вероятности (табл. 3);

Таблица 3

Частные значения события A	m_A	0	1	2	…	m
Вероятности, отвечающие частным значениям появления случайной величины	$P(m,n)$	$P(0,n)$	$P(1,n)$	$P(2,n)$	…	$P(m,n)$

б) многоугольником распределения вероятности появления события A (рис. 17);

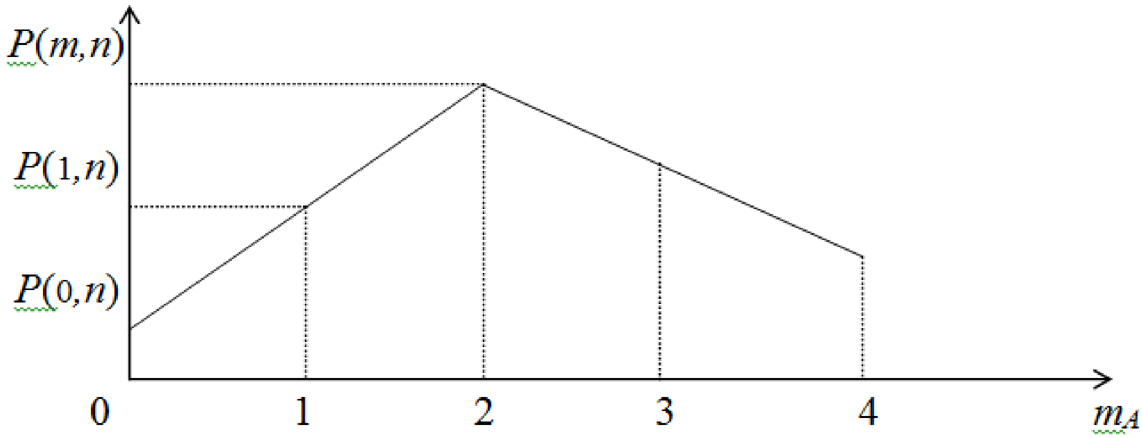


Рис. 17. Многоугольник распределения вероятности дискретной случайной величины

в) графиком функции распределения вероятности. На основании ряда или многоугольника распределения может быть построен график функции распределения (рис. 18).

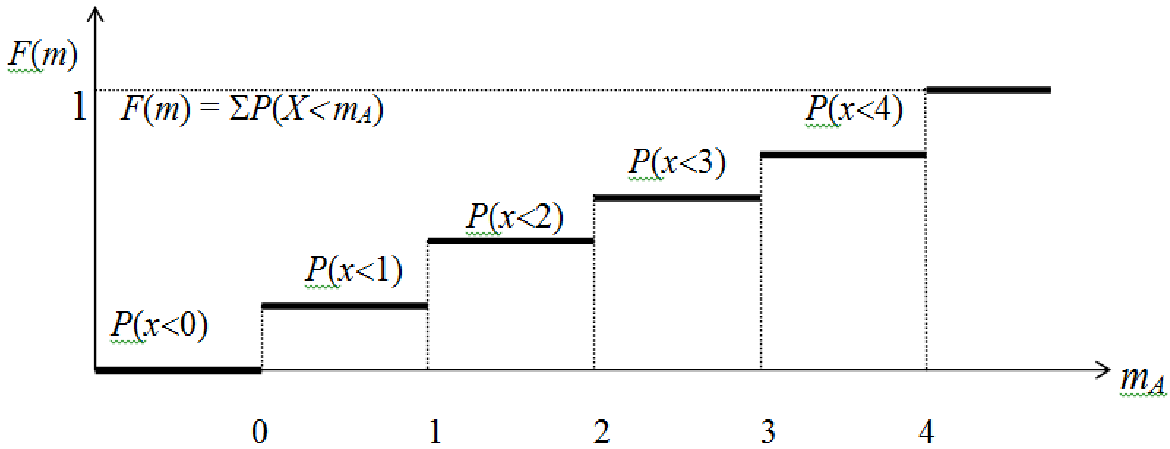


Рис. 18. График распределения вероятности дискретной случайной величины

Расчет биномиального распределения и распределения Пуассона в Microsoft Excel

Функция БИНОМРАСП

Синтаксис функции

=БИНОМРАСП (число успехов; число испытаний; вероятность успеха; интегральная).

Результат:

Рассчитывает биномиальное распределение.

Аргументы:

• *число успехов:* количество успешных испытаний;

• *число испытаний:* число независимых испытаний;

• *вероятность успеха:* вероятность успеха каждого испытания;

• *интегральная:* логическое значение, определяющее форму функции. Если аргумент *интегральная* = 1, то функция БИНОМРАСП рассчитывает интегральную функцию распределения, т.е. вероятность того, что число успешных испытаний не больше значения аргумента *число успехов.* Если аргумент *интегральная* = 0, то рассчитывается дифференциальная функция распределения, т.е. вероятность того, что число успешных испытаний в точности равно значению аргумента *число успехов.*

Функция ПУАССОН

Синтаксис функции

=ПУАССОН (*x*; среднее; интегральная).

Результат:

Рассчитывает распределение Пуассона.

Аргументы:

• *x:* количество событий;

• *среднее:* интенсивность появления событий;

• *интегральная:* логическое значение, определяющее форму функции. Если аргумент *интегральная* = 1, то функция ПУАССОН рассчитывает интегральную функцию распределения; если аргумент *интегральная* = 0 – дифференциальную функцию распределения.

Варианты заданий к работе

Для выданного преподавателем варианта построить таблицу распределения вероятности, многоугольник распределения вероятности и график функции распределения вероятности.

Вариант 1. Вероятность того, что при текущем ремонте автомобиля требуется замена ведомого диска сцепления, равна 0,4. Определить вероятность того, что при трех текущих ремонтах потребуется 0, 1, 2, 3 диска.

Вариант 2. Для нормальной работы автобазы на линии должно быть не менее восьми автомобилей (в наличии имеется десять). Вероятность невыхода каждого автомобиля на линию равна 0,1. Найти вероятность нормальной работы автобазы на ближайший день.

Вариант 3. Дискретная случайная величина X – число выходов из строя конденсатора системы зажигания в течение одного года эксплуатации – распределена по биномиальному закону. Вероятность выхода из строя конденсатора составляет 0,3. Рассматриваются четыре автомобиля. Определить вероятность выхода из строя конденсатора у этих автомобилей.

Вариант 4. Автомобиль проходит ТО. Число неисправностей, обнаруженных во время ТО, распределяется по закону Пуассона с параметром $a = 2$. Если неисправностей не обнаружено, ТО автомобиля продолжается в среднем два часа. Если обнаружены одна или две неисправности, то на устранение каждой из них требуется еще в среднем полчаса. Если обнаружено более двух неисправностей, то автомобиль становится на профилактический ремонт, где находится в среднем четыре часа. Определить закон распределения среднего времени T обслуживания и ремонта.

Вариант 5. Авторемонтная мастерская обслуживает 100 автомобилей. Вероятность того, что в течение дня поступит одна заявка на ремонт, равна 0,01. Найти вероятность того, что в течение дня поступит: а) три заявки; б) менее трех заявок; в) более трех заявок; г) хотя бы одна заявка.

Вариант 6. Устройство состоит из трёх независимо работающих элементов. Вероятность отказа каждого элемента в одном испытании равна 0,1. Составить закон распределения числа отказавших элементов в одном испытании.

Вариант 7. В партии 10 % нестандартных деталей. Наудачу отобраны четыре. Написать биномиальный закон распределения дискретной случайной величины X – числа нестандартных деталей среди четырёх отобранных.

Вариант 8. Автомобиль выпущен тиражом 100 000 экземпляров. Вероятность того, что он собран с браком, равна 0,0001. Найти вероятность того, что тираж содержит 1, 2, 3, 4, 5 бракованных автомобилей.

Вариант 9. Устройство состоит из 1000 элементов, работающих независимо один от другого. Вероятность отказа любого элемента в течение времени T равна 0,002. Найти вероятность того, что за время T откажут 0, 1, 2, 3 элемента.

Вариант 10. Станок-автомат штампует детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 200 деталей окажется 0, 1, 2, 3, 4 бракованных.

Вариант 11. Завод отправил на базу 500 деталей. Вероятность повреждения детали в пути равна 0,002. Найти вероятности того, что в пути будет повреждено деталей: а) ровно три; б) менее трех; в) более трех; г) хотя бы одна.

Вариант 12. Пусть дискретная случайная величина X – число схода с линии автобусов по технической неисправности в течение одной смены работы – распределена по биномиальному закону. Вероятность схода с линии составляет 0,2. Рассматривается десять автомобилей. Определить вероятность схода с линии автобусов.

Вариант 13. Вероятность того, что при диагностировании автомобиля потребуется дальнейший текущий ремонт, равна 0,3. Определить вероятность того, что при диагностировании трех автомобилей возникнет необходимость в 0, 1, 2, 3 текущих ремонтах.

Вариант 14. В небольшом районном городе есть автобусный парк из 20 автобусов. Для успешного перевозочного процесса необходимо, чтобы на линии ежедневно находилось не менее 16 автобусов. Вероятность невыхода каждого автомобиля на линию равна 0,05. Найти вероятность нормальной работы автобусного парка на ближайший день.

Вариант 15. Слесарь изготавливает детали. Вероятность того, что изготовленная деталь окажется бракованной, равна 0,01. Найти вероятность того, что среди 100 деталей окажется 0, 1, 2, 3 бракованных.

Лабораторная работа № 6

Обработка экспериментальных данных

Цель работы:

– освоить характеристики генеральной и выборочной совокупностей;

– изучить последовательность обработки экспериментальных данных.

Общие положения

Задачи, возникающие при изучении процессов автомобильного транспорта, требуют знаний основных положений теории вероятностей и математической статистики.

Если математическая статистика занимается разработкой методов сбора и обработки результатов наблюдений случайных процессов, то теория вероятностей изучает их закономерности.

При решении задач математической статистики и теории вероятностей приходится сталкиваться с понятием **генеральной и выборочной** совокупностей.

Генеральной совокупностью называют совокупность всех объектов (элементов), подлежащих изучению. Очевидно, что подвергать исследованию всю генеральную совокупность затруднительно или нецелесообразно. В связи с этим из генеральной совокупности извлекают лишь некоторую ее часть, называемую выборочной совокупностью (выборкой).

Используя методы математической статистики, возможно определить числовые характеристики выборной совокупности, и перенеся их по определенным правилам на генеральную совокупность, оценить числовые характеристики последней.

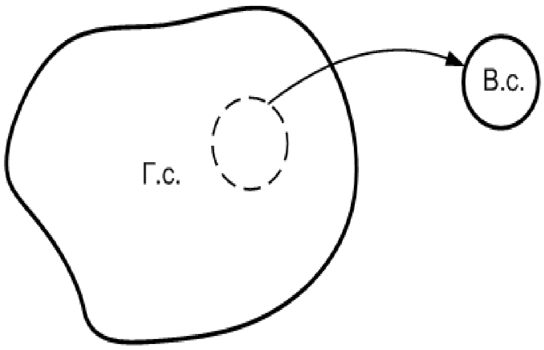


Рис. 19. Схема процесса выборки

Итак, пусть требуется исследовать некоторую генеральную совокупность “Г.с.” (рис. 19), которая характеризуется следующими параметрами: $M(x)$ – математическое ожидание; Д(x) – дисперсия; $\sigma(x)$ – среднее квадратическое отклонение; $f(x)$ – плотность распределения; $F(x)$ – функция распределения.

Непосредственно вычислить их невозможно. Однако их можно оценить (принять) по данным выборочной совокупности. Для чего из генеральной совокупности извлечем выборку “В.с.”, для которой методами математической статистики можем вычислить:

$\bar{X}$ – среднее арифметическое;

Д$^*(x)$ – статистическую дисперсию;

$\sigma^*(x)$ – среднее квадратическое отклонение;

$W(x)$ – относительную частоту;

$F^*(x)$ – статистическую (экспериментальную) функцию распределения.

Найдя интересующие нас числовые характеристики выборочной совокупности, можем их перенести при определенных условиях на всю генеральную совокупность, т.е. принять:

$$M(x) = \bar{x};\ Д(x) = \frac{n}{n-1}Д^{*}(x);\ \sigma(x) = \sqrt{\frac{n}{n-1}Д^{*}(x)}.$$

Построение интервального вариационного ряда и гистограммы

Пусть имеем доброкачественный объем выборки (статистический ряд). Порядок обработки его предлагается следующим:

– зарегистрированные значения рассматриваемого признака X_i расположить в возрастающем порядке;

– найти наибольшее $X_{\max}$ и наименьшее $X_{\min}$ значения параметра;

– определить размах измерения значений параметра

$$R = X_{\max} - X_{\min};$$

– вычислить число интервалов K в зависимости от объема выборки n

$$K = 1 + 3{,}32\lg(n);$$

– определить ширину частичного интервала h

$$h = \frac{R}{K};$$

– определить границы интервалов, для чего установить нулевое (крайнее) значение интервала X_0: $X_0 = X_{\min} - h/2$.Следующие границы интервалов определяются последовательным прибавлением ширины интервала h к предыдущему значению границы: $X_1 = X_0 + h, X_2 = X_1 + h, \dots\ X_k = X_{k-1} + h$ до тех пор, пока X_k не будет больше $X_{\min}$;

– определить число элементов значений признаков, попавших в i-й интервал (эту величину называют опытной частотой m_i^* данного интервала);

– определить относительную величину частоты, называемую частостью i-го интервала W_i:

$$W_i = m_i^*/n;$$

– определить накопленную частость. Накопление частости $W_i^{н}$ получается путем последовательного прибавления частости W_i очередного интервала: $W_1^{н} = W_1,\ W_2^{н} = W_1^{н} + W_2,\ W_3^{н} = W_2^{н} + W_3$ и т.д., для последнего интервала:

$$W_k^{\text{н}} = \sum_{i=1}^{k} W_i = 1.$$

– результаты расчета свести в сводную таблицу обработки выборочных данных (табл. 4).

Таблица 4

Номер интервала	Границы интервала $x_{i-1} \dots x_i$	Середина интервала $\bar{x}_i$	Частота m_i^*	Частость W_i	Накопленная частость $W_i^{\text{н}}$
1	$x_0 \dots x_1$	$\overline{x_1}$	m_1^*	W_1	$W_1^{\text{н}}$
2	$x_1 \cdots x_2$	$\overline{x_2}$	m_2^*	W_2	$W_2^{\text{н}}$
…	…	…	…	…	…
i	$x_{i-1} \dots x_i$	$\bar{x}_i$	m_i^*	W_i	$W_i^{\text{н}}$
…	…	…	…	…	…
k	$x_{k-1} \dots x_k$	$\overline{x_k}$	m_k^*	W_k	$W_k^{\text{н}}$

Основные числовые характеристики вычисляются по следующим формулам:

– среднее арифметическое

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} \bar{X}_i m_i^* = \sum_{i=1}^{k} \bar{X}_i W_i\,;$$

– статистическая дисперсия

$$Д^*(X) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (\bar{X}_i - \bar{X})^2 m_i^* = \sum_{i=1}^{k} (\bar{X}_i - \bar{X})^2\, W_i;$$

– среднее квадратическое отклонение

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} (\bar{X}_i - \bar{X})^2 m_i^*} = \sqrt{Д^*(X)}.$$

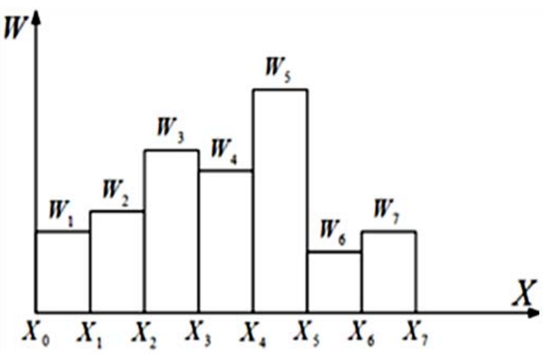


Рис.20. Гистограмма распределения признака

Графическое выражение закона распределения можно изобразить в виде гистограммы и накопленной (кумулятивной) кривой.

Гистограмма представляет собой набор прямоугольников, основанием каждого является длина частичного интервала, а высотой – m_i^* или W_i (рис. 20).

Кумулятивную кривую строят по накопленным частостям $W_i^{н}$, она соответствует опытной функции распределения признака $W_i^{н} = F_{оп}^{*}(x)$ (рис. 21). Соответствие опытной $F_{оп}^{*}(x)$ и теоретической $F(x)$ функций распределения может быть оценено с помощью критерия согласия.

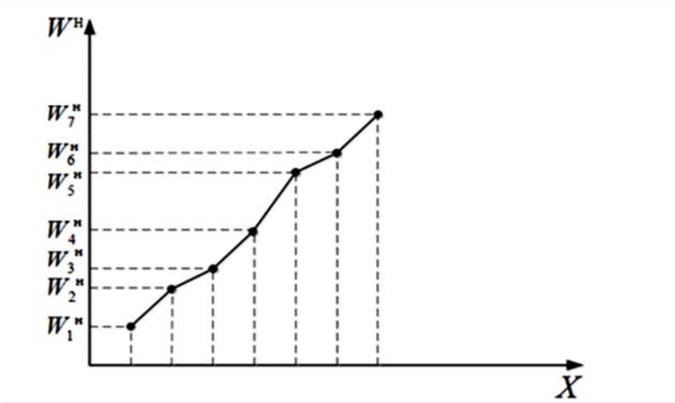


Рис. 21. График опытной функции распределения признака (кумулятивная кривая)

Задание к работе

1. Для заданного статистического ряда найти наибольшее и наименьшее значения.

2. Ранжировать статистический ряд.

3. Для ранжированного статистического ряда построить интервальный вариационный ряд.

4. По данным интервального вариационного ряда:

а) вычислить числовые характеристики ряда;

б) построить гистограмму и кумулятивную кривую.

Варианты заданий к работе

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8
7,0	4,7	0,03	9	4,8	31,8	36,9	0,14
7,8	7,5	0,20	6	5,7	31,7	70,8	0,22
10,0	8,0	0,10	14	5,9	32,1	207,0	0,36
12,0	8,4	0,13	24	6,7	32,6	83,0	0,23
11,4	11,0	0,14	8	6,8	32,7	91,8	0,18
16,4	11,5	0,08	8	12,0	37,3	120,0	0,30
16,7	13,0	0,07	12	12,7	38,4	39,2	0,11
17,8	13,5	0,13	17	12,4	39,7	70,9	0,19
18,0	14,3	0,22	8	16,8	40,4	84,3	0,11
18,8	16,1	0,16	12	16,9	43,1	94,6	0,19
22,0	17,4	0,17	18	18,3	107,0	42,7	0,19
23,5	18,2	0,12	10	18,7	7,8	71,3	0,22
25,0	20,7	0,15	7	18,9	23,5	84,7	0,15
25,9	21,5	0,09	13	36,2	31,8	94,7	0,15

Вариант 1	Вариант 2	Вариант 3	Вариант 4	Вариант 5	Вариант 6	Вариант 7	Вариант 8
26,6	21,7	0,14	8	36,8	29,2	133,9	0,23
28,2	25,1	0,21	9	37,4	47,5	53,3	0,20
28,7	25,9	0,12	9	37,6	59,3	71,3	0,35
28,7	28,4	0,05	14	37,7	12,2	85,1	0,24
30,7	29,2	0,10	9	38,1	25,0	96,3	0,25
31,8	29,3	0,18	7	38,5	32,1	59,5	0,24
32,0	29,4	0,19	9	39,7	50,6	71,8	0,30
32,1	29,7	0,08	14	42,4	30,0	85,4	0,18
35,0	30,0	0,14	7	43,0	50,4	96,6	0,26
35,9	31,9	0,17	10	46,4	66,5	61,7	0,29
36,5	30,2	0,19	10	48,7	16,4	72,0	0,21
37,4	30,7	0,09	16	134,6	25,9	85,5	0,26
43,6	32,0	0,14	14	50,7	35,9	98,4	0,28
45,1	33,0	0,13	11	54,8	55,1	136,5	0,14
48,0	34,0	0,14	16	57,0	35,9	63,7	0,18
50,5	35,9	0,14	12	59,3	52,3	75,0	0,25
Вариант 9	Вариант 10	Вариант 11	Вариант 12	Вариант 13	Вариант 14	Вариант 15	Вариант 16
7,5	132	722	1,6	0,9	299	3,17	1,35
10,6	325	834	0,8	0,6	836	3,18	4,40
15,2	446	848	0,3	1,0	326	1,35	5,69
16,2	490	887	0,5	0,8	327	4,40	2,30
17,3	493	1201	0,4	2,4	331	5,69	3,07
17,4	519	526	0,6	0,7	245	2,30	4,51
18,0	690	536	0,5	0,6	253	3,07	7,82
18,2	1124	570	0,7	0,6	256	4,51	1,87
21,2	545	600	0,6	1,0	257	7,82	4,57
21,5	551	615	0,6	0,9	268	1,87	5,83
22,1	560	650	3,4	1,5	269	4,57	2,82
23,0	570	677	1,5	0,9	270	5,83	3,74
25,0	616	697	1,8	1,5	274	2,82	5,70
25,9	651	705	2,2	0,9	277	3,74	5,00
28,4	670	722	1,7	1,5	297	5,70	3,97
29,0	76	397	1,3	1,4	593	0,50	5,60
11,0	782	410	1,1	0,6	632	3,97	1,88
29,1	105	420	1,2	1,1	674	5,60	2,87
11,4	321	430	2,2	1,8	721	1,88	4,36
29,7	350	440	1,5	1,0	778	2,87	6,16
13,5	359	451	1,8	0,9	184	4,36	3,59
30,0	365	458	1,7	1,1	197	6,16	5,23
14,3	374	475	1,2	0,9	198	3,59	7,20
31,3	436	488	1,0	0,9	241	5,23	1,78
15,8	451	500	0,8	1,4	385	7,20	2,66
31,9	480	514	1,6	0,9	397	1,78	3,65
17,2	505	294	1,8	0,7	424	2,66	5,60
35,9	541	300	1,8	0,9	430	3,65	3,61
18,0	235	319	1,6	1,4	464	5,50	5,51
43,6	250	302	1,9	0,7	487	3,61	1,80

Вариант 17	Вариант 18	Вариант 19	Вариант 20
8,69	7,5	0,18	2,2
11,50	10,6	0,26	2,7
13,97	15,2	0,22	2,8
7,06	16,2	0,24	2,1
8,15	17,3	0,20	2,4
8,76	17,4	0,27	1,3
11,84	18,0	0,24	2,7
15,12	18,2	0,31	1,7
8,47	21,2	0,13	2,7
6,37	21,5	0,30	1,6
7,50	22,1	0,18	2,9
8,59	23,0	0,24	2,9
9,95	25,0	0,28	3,0
6,70	25,9	0,12	1,8
7,66	28,4	0,27	3,2
8,59	29,0	0,15	1,8
11,16	11,0	0,19	1,9
6,88	29,1	0,24	2,1
8,10	11,4	0,29	2,5
5,95	29,7	0,25	2,5
7,18	13,5	0,17	1,8
8,54	30,0	0,21	2,6
9,66	14,3	0,25	3,2
6,17	31,1	0,21	2,5
7,20	15,8	0,25	2,4
8,55	31,9	0,20	2,0
9,84	17,2	0,21	1,7
13,65	35,9	0,29	1,7
4,27	18,0	0,25	2,4
7,13	43,6	0,17	2,2

Лабораторная работа № 7

Обработка экспериментальных данных в Microsoft Excel

Цель работы:

– изучить последовательность обработки экспериментальных данных;

– получить практические навыки обработки экспериментальных данных в Microsoft Excel.

Общие положения

Пусть имеем доброкачественный объем выборки (статистический ряд).

Порядок его обработки следующий:

– зарегистрированные значения рассматриваемого признака X_i расположим в возрастающем порядке. Для этого воспользуемся кнопкой “Сортировка от А до Я” [*Главная → Редактирование → Сортировка и фильтр*];

– найдем наибольшее X_{max} и наименьшее X_{min} значения параметра. Функции **МАКС(число1**;**число2;...)**, **МИН(число1**;**число2;...)** [*Формулы → Вставить функцию → Статистические*];

– определим размах измерения значений параметра $R = X_{max} - X_{min}$;

– вычислим число интервалов K в зависимости от объема выборки n

$$K = 1 + 3{,}32 \lg n.$$

Сначала найдем объём выборки n с помощью функции **СЧЁТ**(**значение1; значение2;...)**; затем найдем десятичный логарифм полученного числа – **LOG10(число)**; и наконец в строке формул напишем: =1+3,32*LOG10(…);

– определим ширину частичного интервала

$$h = \frac{R}{k};$$

– определим границы интервалов, для чего установим нулевое (крайнее) значение интервала X_0; $X_0 = X_{min} - h/2$.

Следующие границы интервалов определяются последовательным прибавлением ширины интервала h к предыдущему значению границы: $X_1 = X_0 + h$, $X_2 = X_1 + h$ и так далее до тех пор, пока $X_к$ не будет больше X_{max};

– определим число элементов значений признаков, попавших в i-й интервал (эту величину называют опытной частотой m_i* данного интервала). Функция **ЧАСТОТА(массив_данных**;**массив_интервалов**). **Массив_данных** – массив или ссылка на множество данных, для которых вычисляются частоты; **массив_интервалов** – массив или ссылка на множество интервалов, в которые группируются значения аргумента «массив_данных». [*Формулы→Вставить функцию→Статистические*];

– определить относительную величину частоты, которую называют частостью i-го интервала W_i: $W_i = m_i/n$.

– определить накопленную частость $W_i^н$.

$$W_i{}^{н} = \sum_{i=0}^{i} W_i.$$

Накопление частости $W^{н}$ получается путём последовательного прибавления частости W_i очередного интервала: $W_1^{н} = W_1$, $W_2^{н} = W_1^{н} + W_2$, $W_3^{н} = W_2^{н} + W_3$ и так далее, для последнего интервала $W_n{}^{н} = 1$;

– определим основные числовые характеристики выборки:

а) среднее арифметическое – **СРЗНАЧ**(**число1**; **число2; ...**);

б) статистическую дисперсию – **ДИСП**(**число1**;**число2; ...**);

в) среднее квадратическое отклонение – **СТАНДОТКЛОН** (**число1**; **число2; ...**);

– построим гистограмму распределения признака (рис. 22) [*Вставка→Гистограмма*]. Гистограмма строится по частостям W_i .

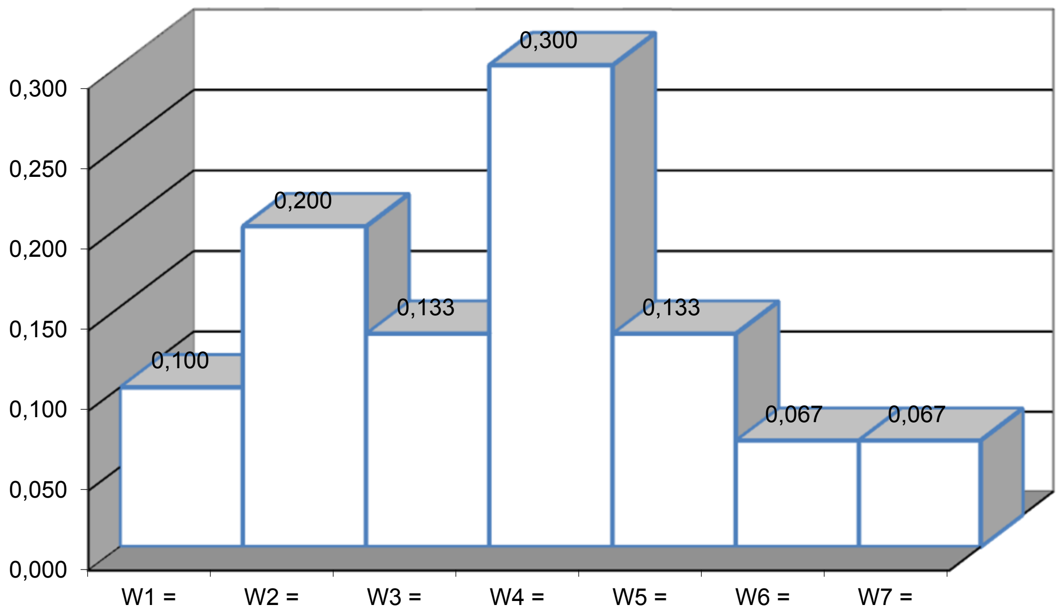


Рис. 22. Гистограмма распределения признака

Кумулятивная кривая строится по накопленным частостям $W_i^{н}$, она ссоответствует опытной функции распределения признака $W_i^{н}$ = $= F_{оп}{}^{*}(x)$ (рис. 23).

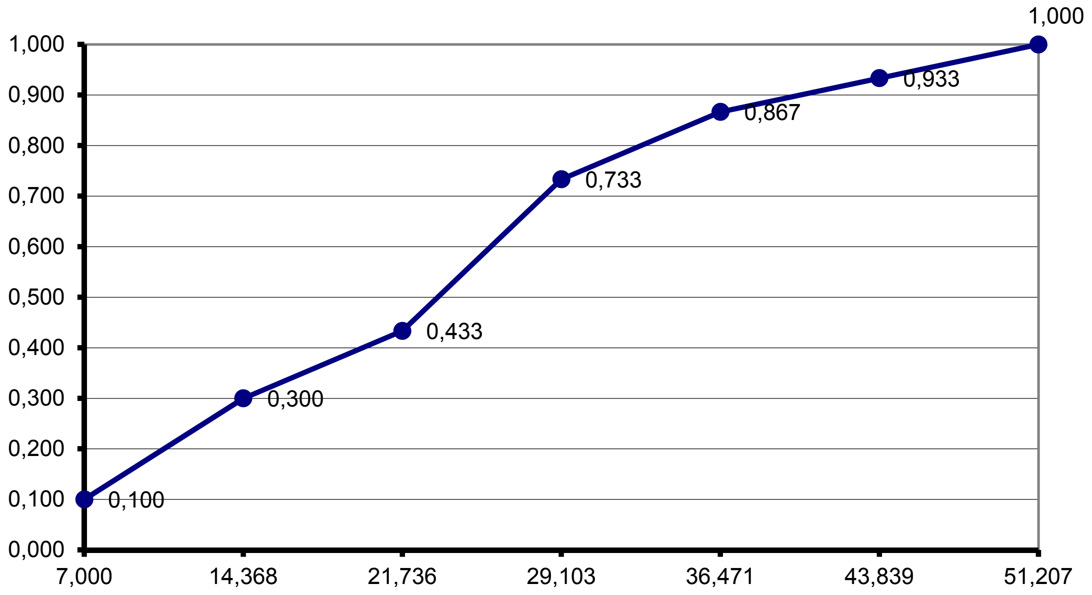


Рис. 23. Кумулятивная кривая

Задание к работе

1. Ранжировать статистический ряд. Варианты взять из лабораторной работы № 6.

2. Для заданного статистического ряда найти наибольшее и наименьшее значения.

3. Для ранжированного статистического ряда построить интервальный вариационный ряд.

4. По данным интервального вариационного ряда:

а) вычислить числовые характеристики ряда;

б) построить гистограмму и кумулятивную кривую.

5. Сделать выводы по работе.

Лабораторная работа № 8

Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона

Цель работы:

– изучить понятие о статистических гипотезах;

– получить практические навыки проверки статистических гипотез на примере критерия Пирсона.

1. Общие положения

Статистической называют гипотезу о виде неизвестного распределения или о параметрах известных распределений.

Нулевой (основной) называют выдвинутую гипотезу H_0.

Конкурирующей (альтернативной) называют гипотезу H_1, которая противоречит нулевой.

Различают гипотезы, которые содержат одно и более одного предположений.

Простой называют гипотезу, содержащую только одно предположение, *сложной* – гипотезу, которая состоит из конечного или бесконечного числа простых гипотез.

В итоге проверки гипотезы могут быть допущены ошибки двух родов.

Ошибка первого рода состоит в том, что будет отвергнута правильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки первого рода называют *уровнем значимости* и обозначают α.

Ошибка второго рода состоит в том, что будет принята неправильная нулевая гипотеза. Вероятность ошибки второго рода обозначают β.

Статистическим критерием (или просто *критерием)* называют случайную величину K, которая служит для проверки гипотезы.

Наблюдаемым (эмпирическим) значением $K_{набл}$ называют то значение критерия, которое вычислено по выборкам.

Критическая область – совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу отвергают.

Область принятия гипотезы (область допустимых значений) называют совокупность значений критерия, при которых нулевую гипотезу принимают.

Основной принцип проверки статистических гипотез: если наблюдаемое значение критерия принадлежит критической области, то нулевую гипотезу отвергают; если наблюдаемое значение критерия принадлежит области принятия гипотезы, гипотезу принимают.

Критическими точками (границами) $k_{кр}$ называют точки, отделяющие критическую область от области принятия гипотезы.

Правосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K > k_{кр}$, где $k_{кр}$ – положительное число.

Левосторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_{кр}$, где $k_{кр}$ – отрицательное число.

Двусторонней называют критическую область, определяемую неравенством $K < k_1$, $K > k_2$, где $k_2 > k_1$. В частности, если критические точки симметричны относительно нуля, то двусторонняя критическая область определяется неравенствами (в предположении, что $k_{кр} > 0$):

$$K < -k_{кр}, \qquad K > k_{кр}$$

или равносильным неравенством

$$|K| > k_{кр}.$$

Для отыскания критической области задают уровень значимости α и ищут критические точки, исходя из следующих соотношений:

а) для правосторонней критической области:

$$P(K > k_{кр}) = \alpha \qquad (k_{кр} > 0);$$

б) для левосторонней критической области:

$$P(K < k_{кр}) = \alpha \qquad (k_{кр} < 0);$$

в) для двусторонней симметричной области:

$$P(K > k_{кр}) = P(K < -k_{кр}) = \alpha/2.$$

Мощность критерия – вероятность попадания критерия в критическую область при условии, что справедлива конкурирующая гипотеза. Другими словами, мощность критерия есть вероятность того, что нулевая гипотеза будет отвергнута, если верна конкурирующая гипотеза.

2. Проверка гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности по критерию Пирсона

2.1. Эмпирическое распределение задано в виде последовательности равноотстоящих вариант и соответствующих им частот.

Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности равноотстоящих вариант и соответствующих им частот:

x_i	x_1	x_2	…	x_n
y_i	y_2	y_2	…	y_n

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность X распределена нормально.

Для того чтобы при заданном уровне значимости α проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, надо:

1. Вычислить непосредственно (при малом числе наблюдений) или упрощенным методом (при большом числе наблюдений), например методом произведений или сумм, выборочную среднюю $\overline{x_в}$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$.

$$\overline{x_в} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} x_i m_i = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \cdots + x_k m_k}{n};$$

$$\sigma_в = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}(x_i - \overline{x_в})^2 m_i} = \sqrt{\frac{((x_1 - \overline{x_в})^2 m_1) + \cdots + ((x_k - \overline{x_в})^2 m_k)}{n}}.$$

2. Вычислить теоретические частоты

$$m_i = \frac{nh}{\sigma_в}\varphi(u_i),$$

где n – объем выборки (сумма всех частот), h – шаг (разность между двумя соседними вариантами),

$$u_i = \frac{x_i - \overline{x_в}}{\sigma_в}, \qquad \varphi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-u_i^2/2},$$

составить расчетную табл. 5.

3. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого:

а) составляют расчетную табл. 6, по которой находят наблюдаемое значение критерия

$$\chi^2_{набл} = \sum \frac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i};$$

б) по таблице критических точек распределения χ^2 (прил. 1) по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 1 - r$ (s – число групп выборки, r – число параметров, оцениваемых по выборке) находят критическую точку $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$ правосторонней критической области.

Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ – нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо (случайно). Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ – гипотезу отвергают. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

Примечание. Нормальное распределение определяется двумя параметрами: математическим ожиданием и средним квадратическим отклонением. Так как оба эти параметра оценивались по выборке (в качестве оценки математического ожидания принимают выборочную среднюю, в качестве оценки среднего квадратического отклонения – выборочное среднее квадратическое отклонение), то $r = 2$, следовательно $k = s - 1 - 2 = s - 3$.

Пример 1. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объемом $n = 200$.

x_i	5	7	9	11	13	15	17	19	21
m_i^*	15	26	25	30	26	21	24	20	13

Решение.

1. Используя метод произведений, найдем выборочную среднюю $\overline{x_в} = 12{,}63$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в = 4{,}695$.

2. Вычислим теоретические частоты, учитывая что $n = 200$, $h = 2$, $\sigma_в = 4{,}695$, по формуле

$$m_i = \frac{nh}{\sigma_в}\varphi(u_i) = \frac{200 \cdot 2}{4{,}695}\,\varphi(u_i) = 85{,}2\varphi(u_i).$$

Составим расчетную табл. 5.

Таблица 5

i	x_i	$u_i = \dfrac{x_i - \overline{x_в}}{\sigma_в}$	$\varphi(u_i)$	$m_i = \dfrac{nh}{\sigma_в}\varphi(u_i)$
1	5	-1,62	0,1074	9,1
2	7	-1,20	0,1942	16,5
3	9	-0,77	0,2966	25,3
4	11	-0,35	0,3752	32,0
5	13	0,08	0,3977	33,9
6	15	0,51	0,3503	29,8
7	17	0,93	0,2589	22,0
8	19	1,36	0,1582	13,5
9	21	1,78	0,0818	7,0

3. Сравним эмпирические (опытные) и теоретические частоты.

а) Составим расчетную табл. 6, из которой найдем наблюдаемое значение критерия χ^2 Пирсона:

$$\chi^2_{\text{набл}} = \sum \frac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i}.$$

Таблица 6

i	m_i^*	m_i	$m_i^* - m_i$	$(m_i^* - m_i)^2$	$(m_i^* - m_i)^2/m_i$
1	15	9,1	5,9	34,81	3,8
2	26	16,5	9,5	90,25	5,5
3	25	25,3	-0,3	0,09	0,0
4	30	32,0	-2,0	4,00	0,1
5	26	33,9	-7,9	62,41	1,8
6	21	29,8	-8,8	77,44	2,6
7	24	22,0	2,0	4,00	0,2
8	20	13,5	6,5	42,25	3,1
9	13	7,0	6,0	36,00	5,1
$\sum$	200	189,1	–	–	$\chi^2_{\text{набл}} = 22{,}2$

Из табл. 6 находим $\chi^2_{\text{набл}} = 22{,}2$.

б) По таблице критических точек распределения χ^2(см. прил. 1) по уровню значимости $\alpha = 0{,}05$ и числу степеней свободы $k = s -$ $- 3 = 9 - 3 = 6$ находим критическую точку правосторонней критической области

$$\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05; 6) = 12{,}6.$$

Так как $\chi^2_{\text{набл}} > \chi^2_{\text{кр}}$ – гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности отвергаем. Другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо.

2.2. Эмпирическое распределение задано в виде последовательности интервалов одинаковой длины и соответствующих им частот.

Пусть эмпирическое распределение задано в виде последовательности интервалов (x_i, x_{i+1}) и соответствующих им частот m_i^* (m_i^* – сумма частот, которые попали в i-й интервал):

$$\begin{array}{cccc} (x_1, x_2) & (x_2, x_3) & \dots & (x_s, x_{s+1}) \\ m_1^* & m_2^* & \dots & m_s^* \end{array}$$

Требуется, используя критерий Пирсона, проверить гипотезу о том, что генеральная совокупность X распределена нормально.

Для того чтобы при уровне значимости α проверить гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности, надо:

1. Вычислить, например методом произведений, выборочную среднюю $\bar{x}_в$ и выборочное среднее квадратическое отклонение $\sigma_в$, причем в качестве вариант принимают среднее арифметическое концов интервала:

$$\bar{x}_i = (x_i + x_{i+1})/2.$$

2. Пронормировать X, т.е. перейти к случайной величине $Z = (X - \bar{x})/\sigma$ и вычислить концы интервалов: $z_i = (x_i - \bar{x})/\sigma$, $z_{i+1} = (x_{i+1} - \bar{x})/\sigma$, причем наименьшее значение Z, т.е. z_1, полагают равным $-\infty$, а наибольшее, т.е. z_{s+1}, – равным ∞.

3. Вычислить теоретические частоты

$$m_i = np_i,$$

где n – объем выборки (сумма всех частот);

$p_i = \Phi(z_{i+1}) - \Phi(z_i) -$ вероятности попадания X в интервалы $(x_i + x_{i+1})$;

$\Phi(Z) -$ функция Лапласа (см. прил. 2).

4. Сравнить эмпирические и теоретические частоты с помощью критерия Пирсона. Для этого:

а) составляют расчетную таблицу (см. табл. 6), по которой находят наблюдаемое значение критерия Пирсона

$$\chi^2_{набл} = \sum \frac{(m_i^* - m_i)^2}{m_i};$$

б) по таблице критических точек распределения χ^2 по заданному уровню значимости α и числу степеней свободы $k = s - 3$ (s – число интервалов выборки) находят критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{кр}(\alpha; k)$. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{кр}$ – нет оснований отвергнуть гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ – гипотезу отвергают.

Пример 2. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объемом $n = 100$, приведенным в табл. 7.

Таблица 7

Номер интервала i	Границы интервала		Частота m_i^*	Номер интервала i	Границы интервала		Частота m_i^*
	x_i	x_{i+1}			x_i	x_{i+1}	
1	3	8	6	5	23	28	16
2	8	13	8	6	28	33	8
3	13	18	15	7	33	38	7
4	18	23	40				$n = 100$

Решение. Вычислим выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение методом произведений. Для этого перейдём от заданного интервального распределения к распределению равноотстоящих вариант, приняв в качестве варианты $\bar{x}_i$ среднее арифметическое концов интервала: $\bar{x}_i = (x_i + x_{i+1})/2$. В итоге получим распределение:

$\bar{x}_i$	5,5	10,5	15,5	20,5	25,5	30,5	35,5
m_i^*	6	8	15	40	16	8	7

Выполнив выкладки по методу произведений, найдём выборочную среднюю и выборочное среднее квадратическое отклонение: $\bar{x} = 20{,}7$, $\sigma = 7{,}28$.

Найдём интервалы $(z_i + z_{i+1})$, учитывая, что $\bar{x} = 20{,}7$, $\sigma = 7{,}28$, $1/\sigma = 0{,}137$. Для этого составим расчетную табл. 8 (левый конец первого интервала примем равным $-\infty$, а правый конец последнего интервала – равным ∞).

Таблица 8

i	Границы интервала		$x_i - \bar{x}$	$x_{i+1} - \bar{x}$	Границы интервала	
	x_i	x_{i+1}			$z_i = \dfrac{x_i - x_{i+1}}{\sigma}$	$z_{i+1} = \dfrac{x_{i+1} - \bar{x}}{\sigma}$
1	3	8	-	-12,7	-∞	-1,74
2	8	13	-12,7	-7,7	-1,74	-1,06
3	13	18	-7,7	-2,7	-1,06	-0,37
4	18	23	-2,7	2,3	-0,37	0,32
5	23	28	2,3	7,3	0,32	1,00
6	28	33	7,3	12,3	1,00	1,69
7	33	38	12,3	-	1,69	∞

Найдём теоретические вероятности p_i и теоретические частоты $m_i = np_i = 100p_i$. Для этого составим расчётную табл. 9.

Таблица 9

i	Границы интервала		$\Phi(z_i)$	$\Phi(z_{i+1})$	$p_i=\Phi(z_{i+1})-\Phi(z_i)$	$m_i=100p_i$
	z_i	z_{i+1}				
1	-	-1,74	-0,5000	-0,4591	0,0409	4,09
2	-1,74	-1,06	-0,4591	-0,3554	0,1037	10,37
3	-1,06	-0,37	-0,3554	-0,1443	0,2111	21,11
4	-0,37	0,32	-0,1443	0,1255	0,2698	26,98
5	0,32	1,00	0,1255	0,3413	0,2158	21,58
6	1,00	1,69	0,3413	0,4545	0,1132	11,32
7	1,69	-	0,4545	0,5000	0,0455	4,55
$\sum$					**1**	**100**

Сравним эмпирические и теоретические частоты, используя критерий Пирсона:

а) вычислим наблюдаемое значение критерия Пирсона. Для этого составим расчетную табл. 10. Столбцы 7 и 8 служат для контроля вычислений по формуле

$$\chi^2_{\text{набл}}=\sum(m_i^{*2}/m_i)\text{-}n\ .$$

Контроль: $\sum(m_i^{*2}/\mathrm{m_i})\text{-}n$ =113,22-100=13,22=$\chi^2_{\text{набл}}$. Вычисления произведены правильно;

Таблица 10

i	m_i^*	m_i	$m_i^*-m_i$	$(m_i^*-m_i)^2$	$\dfrac{(m_i^*-m_i)^2}{m_i}$	m_i^{*2}	$\dfrac{m_i^{*2}}{m_i}$
1	2	3	4	5	6	7	8
1	6	4,09	1,91	3,6481	0,8920	36	8,8019
2	8	10,37	-2,37	5,6169	0,5416	64	6,1716
3	15	21,11	-6,11	37,3321	1,7684	225	10,6584
4	40	26,98	13,02	169,5204	6,2833	1600	59,3052
5	16	21,58	-5,58	31,1364	1,4428	256	11,8628
6	8	11,32	-3,32	11,0224	0,9737	64	5,6537
7	7	4,55	2,45	6,0025	1,3192	49	10,7692
$\sum$	100	100	–	–	$\chi^2_{\text{набл}}=13{,}22$	–	113,22

б) по таблице критических точек распределения χ^2 (см. прил. 1) по уровню значимости $\alpha=0{,}05$ и числу степеней свободы $k=s-3=7-3=4$ (s – число интервалов) находим критическую точку правосторонней критической области $\chi^2_{\text{кр}}(0{,}05;\ 4)$=9,5.

Так как $\chi^2_{набл} > \chi^2_{кр}$ – отвергаем гипотезу о нормальном распределении генеральной совокупности X; другими словами, эмпирические и теоретические частоты различаются значимо. Это означает, что данные наблюдений не согласуются с гипотезой о нормальном распределении генеральной совокупности.

3. Задания к работе

Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объемом $n = 200$:

Вариант 1

x_i	0,3	0,5	0,7	0,9	1,1	1,3	1,5	1,7	1,9	2,1	2,3
m_i^*	6	9	26	25	30	26	21	24	20	8	5

Вариант 2

x_i	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0	2,2	2,4	2,6
m_i^*	8	16	20	22	24	32	26	20	18	10	4

Вариант 3

x_i	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
m_i^*	9	14	22	28	33	32	26	17	12	7

Вариант 4

x_i	5	8	11	14	17	20	23	26	29	32
m_i^*	4	16	20	27	30	35	28	21	14	5

Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объемом $n = 100$:

Вариант 5

x_i	0,1	0,5	0,9	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9	3,3	3,7	4,1
m_i^*	3	4	13	13	15	12	10	12	10	5	3

Вариант 6

x_i	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24
m_i^*	2	6	10	14	16	15	13	10	7	4	3

Вариант 7

x_i	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4	1,6	1,8	2,0
m_i^*	2	6	10	14	15	16	14	11	9	3

Вариант 8

x_i	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
m_i^*	6	7	10	15	20	14	8	7	7	6

Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объемом $n = 100$:

Вариант 9

Границы интервала	0 – 2	2 – 4	4 – 6	6 – 8	8 – 10	10 – 12	12 – 14
Частота m_i^*	5	7	16	35	20	10	7

Вариант 10

Границы интервала	0 – 4	4 – 8	8 – 12	12 – 16	16 – 20	20 – 24	24 – 28
Частота m_i^*	4	8	18	29	25	9	7

Вариант 11

Границы интервала	0 – 3	3 – 6	6 – 9	9 – 12	12 – 15	15 – 18	18 – 21
Частота m_i^*	3	9	17	32	30	6	3

Вариант 12

Границы интервала	2,5 – 3,5	3,5 – 4,5	4,5 – 5,5	5,5 – 6,5	6,5 – 7,5	7,5 – 8,5	8,5 – 9,5
Частота m_i^*	2	10	18	33	27	6	4

Используя критерий Пирсона, при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ проверить, согласуется ли гипотеза о нормальном распределении генеральной совокупности X с эмпирическим распределением выборки объемом $n = 200$:

Вариант 13

Границы интервала	1,5 – 3,5	3,5 – 5,5	5,5 – 7,5	7,5 – 9,5	9,5 – 11,5	11,5 – 13,5	13,5 – 15,5
Частота m_i^*	18	25	35	44	33	25	20

Вариант 14

Границы интервала	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70
Частота m_i^*	15	26	40	45	36	28	10

Вариант 15

Границы интервала	0 – 6	6 – 12	12 – 18	18 – 24	24 – 30	30 – 36	36 – 42
Частота m_i^*	14	27	37	46	35	27	14

Вариант 16

Границы интервала	10 – 12	12 – 14	14 – 16	16 – 18	18 – 20	20 – 22	22 – 24
Частота m_i^*	10	22	38	48	40	25	17

Лабораторная работа № 9

Обработка экспериментальных данных по закону Вейбулла

Цель работы:

– изучить основные характеристики закона Вейбулла;

– получить практические навыки обработки опытных данных по закону Вейбулла.

Общие положения

Основными вероятностными законами распределения непрерывной случайной величины являются:

– нормальный закон распределения;

– показательный закон распределения;

– закон Вейбулла и др.

Законы распределения случайных величин отражают физическую сущность рассматриваемых явлений (процессов). Так, например, в теории надёжности внезапные отказы изделий, вызываемые превышением нагрузки (удар, превышение напряжения), приводящие к поломке изделия, перегоранию ламп и т.д., чаще всего описываются показательным законом, нормальный закон – описывает постепенные отказы какого-либо механизма, вызываемые выходом из строя отдельных его элементов, закон Вейбулла – описывает постепенные отказы изделий, вызываемые старением материала в целом.

Совокупность факторов или условий, приводящих к возникновению того или иного вероятностного закона, называют математической моделью явления.

Распределение Вейбулла

Плотность распределения вероятности закона Вейбулла имеет вид

$$F(t) = \begin{cases} n\mu^n t^{n-1} e^{-\mu^n t^n} & \text{при } t \geq 0, \quad n \geq 0, \quad \mu \geq 0 \\ 0 & \text{при } t < 0, \quad n < 0, \quad \mu < 0, \end{cases} \tag{1}$$

где t – случайная величина (время, пробег и т.д.); n – параметр формы (при $n = 1$ закон Вейбулла преобразуется в показательный закон, при $n = 2$ – в закон Релея и при $n = 3{,}25$ – в нормальный закон); μ – параметр масштаба.

Итак, плотность распределения Вейбулла задается двумя параметрами n и μ, что обусловливает широкий диапазон его применения на практике.

В некоторых случаях вместо μ применяют величину, обработанную по параметру масштаба $a = 1/\mu$, тогда плотность вероятности записывается

$$f(t) = \frac{n}{a}\left(\frac{t}{a}\right)^{n-1} e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^n}. \tag{2}$$

График плотности распределения Вейбулла приведен на рис. 24.

Функция распределения закона Вейбулла имеет вид

$$F(t) = \int_0^t n\mu^n t^{n-1} e^{-\mu^n t^n} dt = 1 - e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^n}.$$

В теории надежности кривая функции распределения $F(t)$ характеризует вероятность отказа изделия, а функция

$$\bar{F}(t) = 1 - F(t) = e^{-\left(\frac{t}{a}\right)^n} = R(t)$$

характеризует вероятность исправного состояния изделия и называется кривой ресурса.

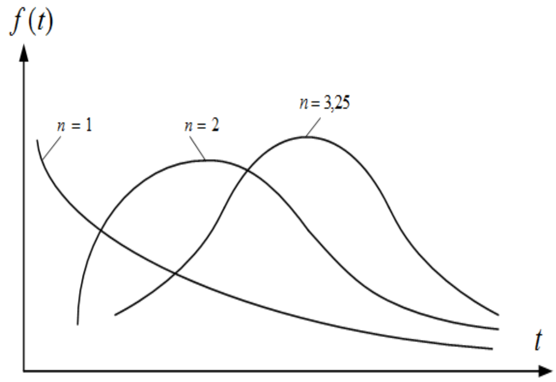


Рис. 24. Графики плотности распределения

При решении задач надежности приходится вычислять интенсивность отказов изделий, которая в общем случае равна отношению плотности распределения к вероятности безотказной работы изделия

$$\lambda(t) = f(t)/R(t).$$

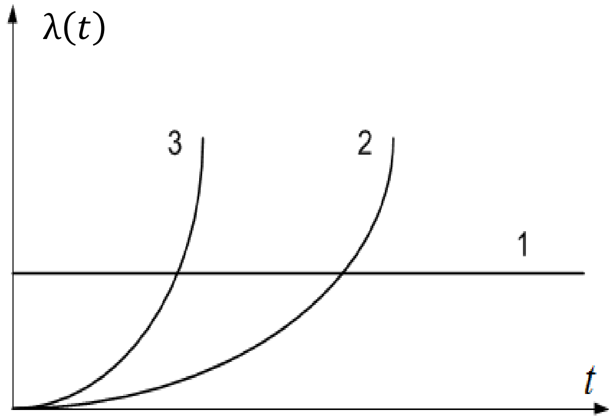


Рис. 25. Кривые интенсивности отказов:1 – показательного закона; 2 – закона Вейбулла; 3 – нормального закона

Очевидно, что если по мере течения времени вероятность исправной работы изделия уменьшается, то и значение интенсивности отказа изделия изменяется (возрастает) (рис. 25).

Формулы математического ожидания и дисперсии закона Вейбулла имеют вид:

$$M(t) = \int_0^\infty tn\mu^n t^{n-1} e^{-\mu^n t^n} dt = \int_0^\infty t e^{-\mu^n t^n} d(\mu^n t^n), \quad (3)$$

$$D(t) = \int_0^\infty t^2 e^{-\mu^n t^n} d(\mu^n t^n) - [M(t)]^2. \quad (4)$$

Указанные интегралы легко вычисляются с помощью гамма-функции Эйлера

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^x dx.$$

Значения гамма-функции Эйлера в зависимости от параметра α приведены в прил. 3.

Преобразуя выражения (3) и (4) к виду, удобному для применения гамма-функции Эйлера, получим

$$M(t) = \frac{1}{\mu\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)}, \qquad (5)$$

$$D(t) = \frac{1}{\mu^2\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right)} - \left[\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)/\mu\right]^2. \qquad (6)$$

Формула для вычисления коэффициента вариации в этом случае принимает вид

$$V = \frac{\sigma(t)}{M(t)} = \frac{\sqrt{\Gamma\left(1+\frac{2}{n}\right) - \Gamma^2\left(1+\frac{1}{n}\right)}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{n}\right)} = \varphi(n).$$

Как видим, коэффициент вариации является функцией параметра формы (n). В свою очередь, параметр формы закона n является функцией коэффициента вариации V:

$$n = \psi(V) = \psi[\sigma(t)/M(t)].$$

Следовательно, если известны $M(t)$ и $\sigma(t)$ закона Вейбулла, то можем определить значения параметра формы n, и на основании этого определить параметр масштаба μ.

Для удобства вычисления параметра формы заранее составлены таблицы (см. прил. 4).

Рассмотрим порядок проверки принадлежности опытных данных к закону Вейбулла.

Статистическая проверка гипотезы о принадлежности опытных данных к закону Вейбулла

Порядок проверки гипотезы о принадлежности опытных данных к закону Вейбулла рассмотрим на примере.

Пример. Исследуется закон распределения ресурса рабочей тормозной системы автомобилей КамАЗ до ее отказа. Статистическими наблюдениями было зафиксировано 29 наблюдений, результаты которых представлены интегральным вариационным рядом (табл. 11).

Требуется:

1. Установить закон, которому следует рассматриваемое явление, и проверить правдоподобность принятой гипотезы при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$.

2. Построить кривую вероятности выхода изделия из строя и кривую вероятности исправной работы (кривую ресурса).

Таблица 11

Номер интервала i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
Границы интервала $\alpha_i - \beta_i$, тыс. км	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100	100 – 110	110 – 120
Число отказов m_i^* в интервале	9	14	18	7	9	9	4	4	2	1	1	1

Решение

1. Вычисляем опытные относительные частоты выхода изделия из строя по интервалам наработки $W_i = \frac{m_i}{k}$, где k – объем выборки

$$W_1 = 9/79 = 0{,}114; \quad W_2 = 14/79 = 0{,}177 \text{ и т.д.}$$

Результаты заносим в статистическую таблицу ресурса рабочей тормозной системы автомобиля КамАЗ (табл. 12) строка 4 и строим гистограмму распределения признака (рис. 26).

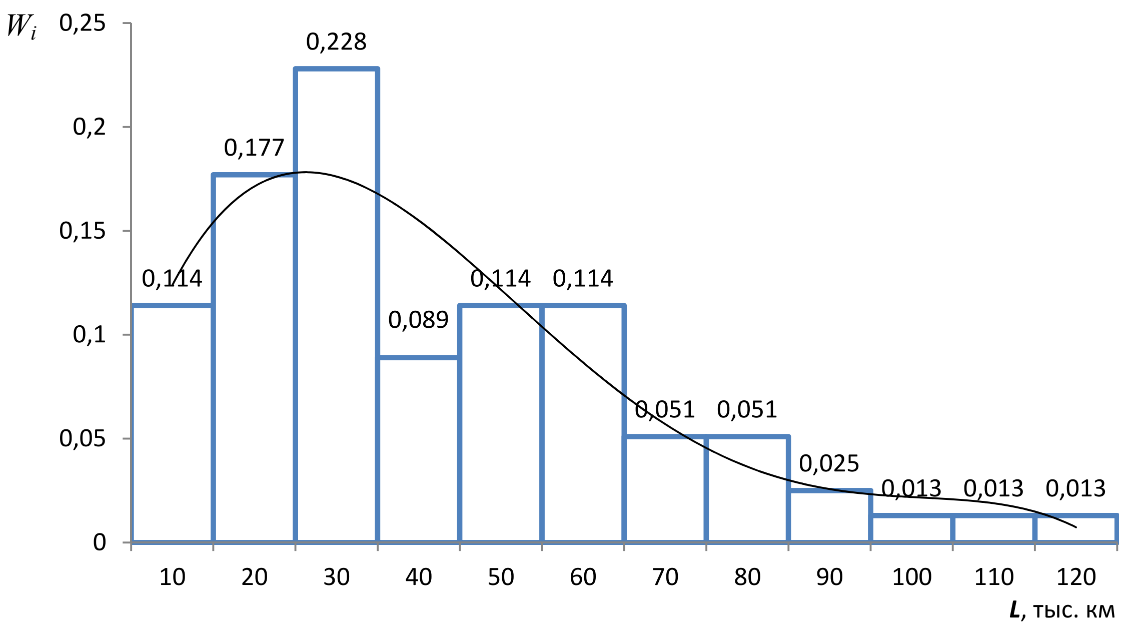


Рис. 26. Гистограмма распределения ресурса рабочей тормозной системы автомобилей КамАЗ до её выхода из строя и сглаживающая кривая закона Вейбулла

Рассматриваем гистограмму и делаем предположение, т.е. выдвигаем гипотезу, что изучаемое явление – ресурс рабочей тормозной системы автомобилей КамАЗ до её отказа – распределено по закону Вейбулла

$$f(L) = n\mu^n L^{n-1} e^{-\mu^n L^n},$$

где n и μ – соответственно параметры формы и масштаба.

2. Вычисляем статистическое математическое ожидание пробега изделия

$$M[L] = \sum_{i=1}^{k} \frac{L_i m_i^*}{k} = \frac{5\cdot 9 + 15\cdot 14 + \ldots + 115\cdot 1}{79} = 36{,}65 \text{ тыс.км.}$$

3. Вычисляем статистическую дисперсию

$$D^*[L] = \sum_{i=1}^{k} \frac{L_i{}^2 m_i{}^*}{k} - (M[L])^2 = \frac{5^2\cdot 9 + 15^2\cdot 14 + \ldots + 115^2\cdot 1}{79} - (36{,}65)^2 = 628{,}9.$$

4. Находим среднее квадратическое отклонение

$$\sigma[L] = \sqrt{\frac{k}{k-1} D^*[L]} = \sqrt{\frac{79}{78} 628{,}9} \cong 25{,}2.$$

5. Находим коэффициент вариации

$$V = \frac{\sigma[L]}{M[L]} = \frac{25{,}2}{36{,}65} = 0{,}689.$$

6. В прил. 4 для найденного коэффициента V = 0,689 находим значение первого параметра закона (параметр формы, равный $n \cong 1{,}5$).

7. Находим второй параметр закона (параметр масштаба) по формуле

$$\mu = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{M[L]} = \frac{\Gamma\left(1 + \frac{1}{1{,}5}\right)}{36{,}65} \cong 0{,}025.$$

Для вычисления значения гамма-функции Эйлера были использованы данные прил. 3.

Значение обратного параметра масштаба составляет

$$a = \frac{1}{\mu} = \frac{1}{0{,}025} = 40.$$

8. Вычисляем теоретические вероятности попадания случайной величины в интервалы по формуле

$$P(\alpha_i < L_i < \beta_i) = \int_{\alpha_i}^{\beta_i} e^{-\left(\frac{L}{a}\right)^n} d\left[\left(\frac{L}{a}\right)^n\right] = e^{-\left(\frac{\alpha_i}{a}\right)^n} - e^{-\left(\frac{\beta_i}{a}\right)^n},$$

где α_i и β_i – соответственно ближний и дальний пределы интегрирования.

$P(L_1) = 0{,}115$; $P(L_2) = 0{,}177$ и т.д. (см. строку 5 табл. 12).

На основе данных строки 5 наносим на гистограмму сглаживающую теоретическую кривую закона Вейбулла (см. рис. 26).

9. Вычисляем теоретические частоты:

$m_1 = P(L_1)k = 0{,}115 \cdot 79 = 9{,}096$; $m_2 = P(L_2)k = 0{,}177 \cdot 79 = 14{,}009$ и т.д. (см. строку 6 табл. 12).

10. Вычисляем слагаемые критерии Пирсона

$$\frac{(m_1{}^* - m_1)^2}{m_1} = \frac{(9 - 9{,}096)^2}{9{,}096} = 0{,}001; \quad \frac{(m_2{}^* - m_2)^2}{m^2} = \frac{(14 - 14{,}009)^2}{14{,}009} = 0 \text{ и т.д.}$$

Суммируя слагаемые критерия Пирсона, получаем

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{(m_i{}^* - m_i)^2}{m_i} = 0{,}001 + 0 + \ldots + 0{,}792 = 5{,}150\,.$$

11. Проверяем правдоподобность принятой гипотезы о принадлежности опытных данных к закону Вейбулла.

По критерию Пирсона

$$P_{\text{оп}}(\chi^2, r_k) = P_{\text{оп}}(5{,}15;9) = 0{,}8;\ \ 0{,}8 > 0{,}05.$$

Следовательно, по критерию Пирсона при уровне значимости $\alpha = 0{,}05$ гипотеза о принадлежности опытных данных к закону Вейбулла не отвергается.

По критерию Романовского

$$K_p = \frac{(\chi^2 - K)}{\sqrt{2K}} = \frac{5{,}15 - 12}{\sqrt{2 \cdot 12}} = -1{,}398; \quad -1{,}398 < 3.$$

Как видим, по критерию Романовского гипотеза о принадлежности опытных данных к закону Вейбулла не отвергается.

Таблица 12

№ п/п	Номер интервала i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	Границы интервала $\alpha_i - \beta_i$, тыс. км	0 – 10	10 – 20	20 – 30	30 – 40	40 – 50	50 – 60	60 – 70	70 – 80	80 – 90	90 – 100	100 – 110	110 – 120
2	Середины интервалов L_i	5	15	25	35	45	55	65	75	85	95	105	115
3	Опытные частоты m_i^*	9	14	18	7	9	9	4	4	2	1	1	1
4	Опытные частости W_i	0,114	0,177	0,228	0,089	0,114	0,114	0,051	0,051	0,025	0,013	0,013	0,013
5	Теоретические вероятности $P(L_i)$	0,115	0,177	0,178	0,154	0,121	0,089	0,062	0,041	0,026	0,016	0,009	0,005
6	Теоретические частоты m_i	9,096	14,009	14,055	12,148	9,569	7,035	4,889	3,238	2,055	1,255	0,740	0,422
7	Слагаемые критерия Пирсона χ^2	0,001	0,000	1,107	2,181	0,034	0,549	0,162	0,179	0,001	0,052	0,091	0,792
8	Теоретическая функция распределения $F(L_i)$	0,115	0,292	0,470	0,624	0,745	0,834	0,896	0,937	0,963	0,979	0,988	0,994
9	Вероятность исправной работы $R(L_i)$	0,885	0,708	0,530	0,376	0,255	0,166	0,104	0,063	0,037	0,021	0,012	0,006

12. Для построения кривой вероятностей отказа изделия $F(L)$ и противоположной ей кривой (кривой ресурса $R(L)$) воспользуемся формулами:

$$F(L_i) = \sum_{1}^{i} P(L_i),$$

$F(L_i) = 0{,}115$; $F(L_2) = 0{,}115+0{,}177 = 0{,}292$ и т.д. (см. строку 8 в табл. 12).

$$R(L_i) = 1 - F(L_i);$$

$R(L_i) = 1 – 0{,}115 = 0{,}885$; $R(L_2) = 1 – 0{,}292 = 0{,}708$ и т.д. (см. строку 9 в табл. 12).

По данным строк 8 и 9 табл. 12 строим графики $F(L)$ и $R(L)$ (рис. 27).

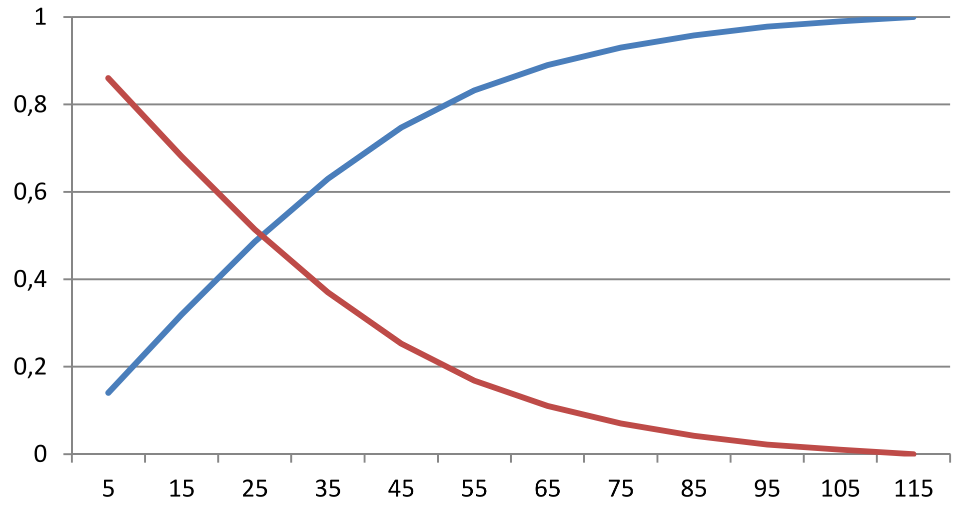


Рис. 27. График вероятностей отказа изделия F(L)
и кривой ресурса R(L)

Задание к работе

Используя вышеизложенную методику обработки опытных данных, проверить правдоподобность гипотезы распределения опытных данных по закону Вейбулла для следующих вариантов.

Вариант 1. Интервальный вариационный ряд распределения времени устранения отказов автобусов марки ЛиАЗ (в часах) имеет вид:

Номер интервала	N	1	2	3	4	5	6	7	8
Границы интервала, ч	$\alpha_i - \beta_i$	0 – 1,5	1,5 – 3,0	3,0 – 4,5	4,5 – 6,0	6,0 – 7,5	7,5 – 9,0	9,0 – 10,5	10,5 – 12,0
Опытные частоты	m_i^*	12	24	20	7	6	2	4	1

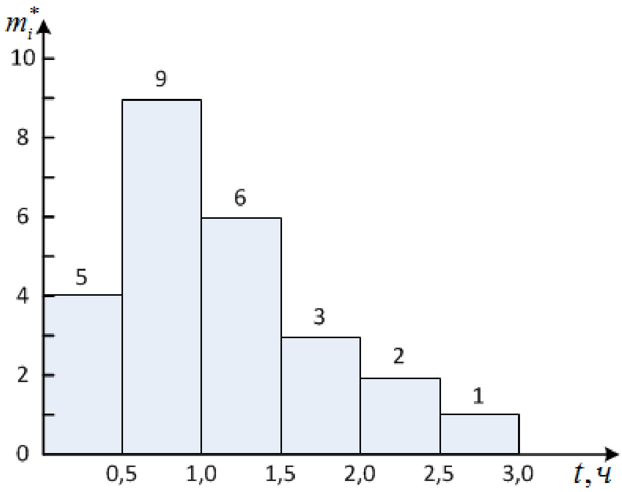
Требуется:

1. Построить гистограмму распределения признака.

2. Вычислить числовые характеристики $\bar{X}, \sigma, V$ и параметры n и μ.

3. Проверить правдоподобность гипотезы о принадлежности опытных данных к закону Вейбулла по критерию Пирсона и Романовского.

Вариант 2. Гистограмма распределения времени доставки автобусов, получивших отказ на линии, в парк (в часах) имеет вид:



Требуется:

1. Выдвинуть гипотезу о распределении опытных данных по закону Вейбулла.

2. Вычислить числовые характеристики $\bar{X}, \sigma, V$ и параметры n и μ.

3. Проверить правдоподобность гипотезы о принадлежности опытных данных к закону Вейбулла по критерию Колмогорова.

Вариант 3. Интервальный вариационный ряд распределения числа отказов автомобилей на маршруте имеет вид:

Номер интервала	N	1	2	3	4	5	6	7
Границы интервала	$\alpha_i - \beta_i$	4,5 – 7,5	7,5 – 10,5	10,5 – 13,5	13,5 – 16,5	16,5 – 19,5	19,5 – 22,5	22,5 – 25,5
Опытные частоты	m_i*	4	12	6	4	2	1	1

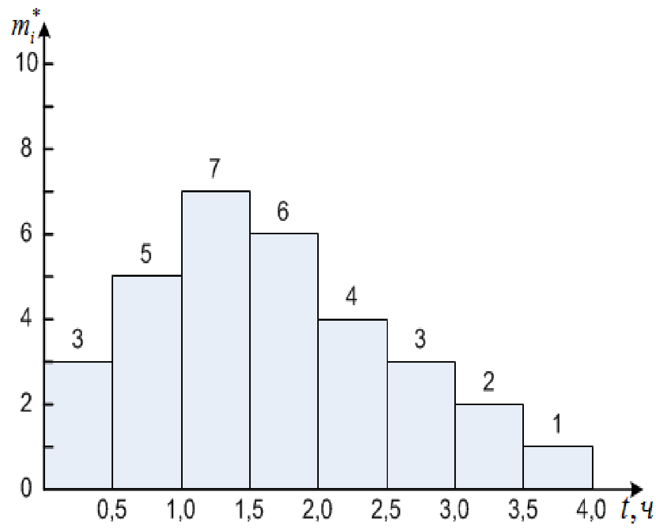
Требуется:

1. Построить гистограмму распределения признака.

2. Вычислить числовые характеристики $\bar{X}, \sigma, V$ и параметры n и μ.

3. Проверить правдоподобность гипотезы о принадлежности опытных данных к закону Вейбулла по критерию Пирсона и Романовского.

Вариант 4. Гистограмма распределения времени эвакуации автомобилей, получивших отказ на линии, в парк (в часах) имеет вид:



Требуется:

1. Выдвинуть гипотезу о распределении опытных данных по закону Вейбулла.

2. Вычислить числовые характеристики $\bar{X}, \sigma, V$ и параметры n и μ.

3. Проверить правдоподобность гипотезы о принадлежности опытных данных к закону Вейбулла по критерию Колмогорова.

Вариант 5. Интервальный вариационный ряд распределения постепенных отказов узлов и агрегатов автобусов марки ПАЗ имеет вид:

Номер интервала	N	1	2	3	4	5	6	7
Границы интервала	$\alpha_i - \beta_i$	13 – 15	15 – 17	17 – 19	19 – 21	21 – 23	23 – 25	25– 27
Опытные частоты	m_i^*	6	15	27	18	16	12	6

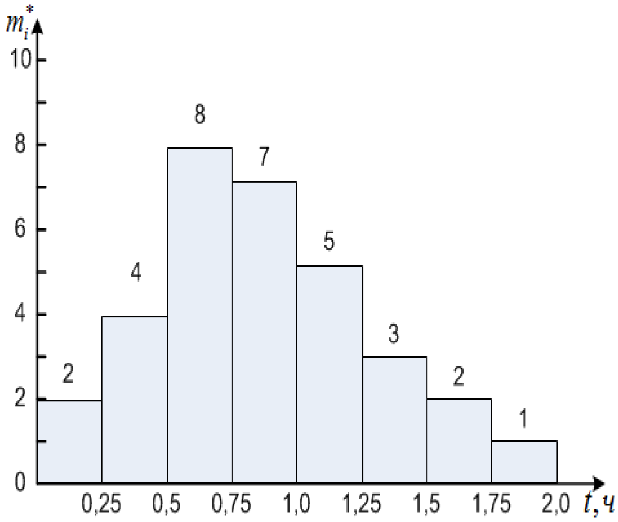
Требуется:

1. Построить гистограмму распределения признака.

2. Вычислить числовые характеристики $\bar{X}, \sigma, V$ и параметры n и μ.

3. Проверить правдоподобность гипотезы о принадлежности опытных данных к закону Вейбулла по критерию Пирсона и Романовского.

Вариант 6. Гистограмма распределения времени эвакуации автомобилей-такси, получивших отказ на линии, в таксопарк (в часах) имеет вид:



Требуется:

1. Выдвинуть гипотезу о распределении опытных данных по закону Вейбулла.

2. Вычислить числовые характеристики $\bar{X}, \sigma, V$ и параметры n и μ.

3. Проверить правдоподобность гипотезы о принадлежности опытных данных к закону Вейбулла по критерию Колмогорова.

Лабораторная работа № 10

Моделирование случайных величин методом Монте – Карло

Цель работы:

– освоить методику моделирования случайных величин методом Монте – Карло;

– получить практические навыки моделирования случайных величин на ЭВМ.

1. Общие положения

1.1. Моделирование (разыгрывание) дискретной случайной величины

Сущность метода Монте – Карло состоит в следующем: требуется найти значение a некоторой изучаемой величины. С этой целью выбирают такую случайную величину X, математическое ожидание которой равно a: $M(X) = a$.

Практически же поступают так: вычисляют (разыгрывают) n возможных значений x_i случайной величины X, находят их среднее арифметическое

$$\bar{x} = (\sum x_i)/n,$$

и принимают $\bar{x}$ в качестве оценки (приближенного значения) a^* искомого числа a:

$$a \cong a^* = \bar{x}.$$

Таким образом, для применения метода Монте – Карло необходимо уметь разыгрывать случайную величину.

Нам требуется разыграть дискретную случайную величину *X*, т. е. вычислить последовательность ее возможных значений x_i (i=1, 2, ...), зная закон распределения *X*.

Введем обозначения: *R* – непрерывная случайная величина, распределенная равномерно в интервале (0, 1); $r_j(j = 1, 2, \dots)$ – случайные числа (возможные значения *R*).

Правило. *Для того чтобы разыграть дискретную случайную величину X, заданную законом распределения*

X	x_1	x_2	...	x_n
p	p_1	p_2	...	p_n,

надо:

1. *Разбить интервал* (0, 1) *на n частичных интервалов:*

$$\Delta_1 - (0; p_1),\ \Delta_2 - (p_1; p_1 + p_2),\ \Delta_n - (p_1 + p_2 + \dots + p_{n-1}; 1).$$

2. *Выбрать (например из таблицы случайных чисел) случайное число* r_j*. Если* r_j *попало в частичный интервал* Δ_i*, то разыгрываемая величина приняла возможное значение* x_i*.*

Пример. Разыграть шесть возможных значений дискретной случайной величины *X*, закон распределения которой задан в виде таблицы:

X	2	10	18
p	0,22	0,17	0,61

Решение.

1. Разобьем интервал (0, 1) точками с координатами 0,22; 0,22 + + 0,17 = 0,39 на три частичных интервала: Δ_1–(0;0,22), Δ_2–(0,22;0,39), Δ_3–(0,39;1).

2. Выпишем из прил. 5 шесть случайных чисел, например: 0,32; 0,17; 0,90; 0,05; 0,97; 0,87. Случайное число $r_i = 0{,}32$ принадлежит частичному интервалу Δ_2, поэтому разыгрываемая дискретная случайная величина приняла возможное значение $x_2 = 10$; случайное число $r_2 = 0{,}17$ принадлежит частичному интервалу Δ_1, поэтому разыгрываемая величина приняла возможное значение $x_1 = 2$.

Аналогично получим остальные возможные значения.

Итак, разыгранные возможные значения таковы: 10; 2; 18; 2; 18; 18.

1.2. Разыгрывание полной группы событий

Требуется разыграть испытания, в каждом из которых наступает одно из событий полной группы, вероятности которых известны. Разыгрывание полной группы событий сводится к разыгрыванию дискретной случайной величины.

Правило. *Для того чтобы разыграть испытания, в каждом из которых наступает одно из событий* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *полной группы, вероятности которых* $p_1, p_2, \ldots, p_n$ *известны, достаточно разыграть (по правилу п. 1.1) дискретную случайную величину X со следующим законом распределения:*

X	1	2	...	n
p	p_1	p_2	...	p_n

Если в испытании величина X приняла возможное значение $x_i = i$, то наступило событие A_i.

Пример. Заданы вероятности трех событий: A_1, A_2, A_3, образующих полную группу: $p_1 = P(A_1) = 0{,}22$, $p_2 = P(A_2) = 0{,}31$, $p_3 = P(A_3) = 0{,}47$. Разыграть пять испытаний, в каждом из которых появляется одно из трех рассматриваемых событий.

Решение. В соответствии с правилом настоящего пункта надо разыграть дискретную случайную величину X с законом распределения:

X	1	2	3
p	0,22	0,31	0,47

По правилу п. 1.1 разобьем интервал (0, 1) на три частичных интервала: $\Delta_1 - (0; 0{,}22), \Delta_2 - (0{,}22; 0{,}43), \Delta_3 - (0{,}43; 1)$.

Выберем из прил. 5 пять случайных чисел, например: 0,61; 0,19; 0,69; 0,04; 0,46.

Случайное число $r_1 = 0{,}61$ принадлежит интервалу Δ_3, поэтому $X = 3$ и, следовательно, наступило событие A_3. Аналогично найдем остальные события. В итоге получим искомую последовательность группы событий: A_3, A_1, A_3, A_1, A_3.

1.3. Разыгрывание непрерывной случайной величины

Известна функция распределения $F(x)$ непрерывной случайной величины X. Требуется разыграть X, т.е. вычислить последовательность возможных значений x_i ($i = 1, 2, \ldots$).

Метод обратных функций

Правило 1. *Для того чтобы разыграть возможное значение* x_i *непрерывной случайной величины X, зная ее функцию распределения F(x), надо выбрать случайное число* r_i *, приравнять его к функции распределения и решить относительно* x_i *полученное уравнение* $F(x_i) = r_i$.

Если известна плотность вероятности *f*(*x*), то используют правило 2.

Правило 2. *Для того чтобы разыграть возможное значение* x_i *непрерывной случайной величины X, зная ее плотность вероятности f(x), надо выбрать случайное число* r_i *и решить относительно* x_i *уравнение*

$$\int_{-\infty}^{x_i} f_k(x)dx = r_i \text{ или уравнение } \int_{a}^{x_i} f_k(x)dx = r_i.$$

где a – наименьшее конечное возможное значение X.

Метод суперпозиции

Правило 3. *Для того чтобы разыграть возможное значение случайной величины X, функция распределения которой*

$$F(x) = C_1F_1(x) + C_2F_2(x) + \cdots + C_nF_n(x),$$

где $F_k(x)$ *– функции распределения (k = 1, 2, … , n),* $C_k > 0, C_1 + C_2 + + \cdots + C_n = 1$, *надо выбрать два независимых случайных числа* r_1 *и* r_2 *и по случайному числу* r_1 *разыграть возможное значение вспомогательной дискретной случайной величины Z (по правилу 1):*

Z	1	2	...	n
p	C_1	C_2	...	C_n

Если окажется, что $Z = k$, то решают относительно *x* уравнение $F_k(x) = r_2$.

Замечание. Если задана плотность вероятности непрерывной случайной величины *X* в виде

$$f(x) = C_1f_1(x) + C_2f_2(x) + \cdots + C_nf_n(x),$$

где $f_k(x)$ – плотности вероятностей, коэффициенты C_k положительны, их сумма равна единице и если окажется, что $Z = k$, то решают (по правилу 2) относительно x_i уравнение

$$\int_{-\infty}^{x_i} f_k(x)dx = r_2 \text{ или уравнение } \int_{a}^{x_i} f_k(x)dx = r_2.$$

2. Расчет систем массового обслуживания с отказами методом Монте – Карло

Пример. В трехканальную систему массового обслуживания с отказами поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону $f(\tau) = 5e^{-5\tau}$. Длительность обслуживания каждой заявки равна 0,5 мин. Найти методом Монте – Карло математическое ожидание a числа обслуженных заявок за время $T = 4$ мин.

Решение. Пусть $T_1 = 0$ – момент поступления первой заявки. Заявка поступит в первый канал и будет им обслужена. Момент окончания обслуживания первой заявки $T_1 + 0{,}5 = 0 + 0{,}5 = 0{,}5$. В счетчик обслуженных заявок записываем единицу.

Моменты поступления последующих заявок найдем по формуле

$$T_i = T_{i-1} + \tau_i\,,$$

где τ_i – длительность времени между двумя последовательными заявками с номерами $i - 1$ и i.

Возможные значения τ_i разыгрываем по формуле

$$\tau_i = -(1/\lambda)\ln r_i = (1/\lambda)(-\ln r_i).$$

Учитывая, что по условию $\lambda = 5$, получим $\tau_i = 0{,}2(-\ln r_i)$.

Случайные числа r_i берем из прил. 5, начиная с первой строки сверху. Для нахождения времени между поступлениями первой и второй заявок возьмем случайное число $r = 0{,}10$. Тогда $\tau_2 = 0{,}2(-\ln 0{,}10) = 0{,}2 \cdot 2{,}30 = 0{,}460$. Первая заявка поступила в момент $T_1 = 0$. Следовательно, вторая заявка поступит в момент $T_2 = T_1 + 0{,}460 = 0 + 0{,}460 = 0{,}460$. В этот момент первый канал еще занят обслуживанием первой заявки, поэтому вторая заявка поступит во второй канал и будет им обслужена. Момент окончания обслуживания второй заявки $T_2 + 0{,}5 = 0{,}460 + 0{,}5 = 0{,}960$. В счетчик обслуженных заявок добавляем единицу.

По очередному случайному числу $r = 0{,}09$ разыграем время τ_3 между поступлениями второй и третьей заявок:

$$\tau_3 = 0{,}2(-\ln 0{,}09) = 0{,}2 \cdot 2{,}41 = 0{,}482.$$

Вторая заявка поступила в момент $T_2 = 0{,}460$. Поэтому третья заявка поступит в момент $T_3 = T_2 + 0{,}482 = 0{,}460 + 0{,}482 = 0{,}942$. В этот момент первый канал уже свободен и третья заявка поступит в первый канал. Момент окончания обслуживания третьей заявки $T_3 + 0{,}5 = 0{,}942 + 0{,}5 = 1{,}442$. В счетчик обслуженных заявок добавляем единицу.

Дальнейший расчет производят аналогично (табл. 13), причем если в момент поступления заявки все каналы заняты (момент поступления заявки меньше каждого из моментов окончания обслуживания), то в счетчик отказов добавляют единицу.

Заметим, что обслуживание 20-й заявки закончится в момент 4,148 > 4, поэтому эта заявка получает отказ.

Испытание прекращают (в таблице записывают «стоп»), если момент поступления заявки $T > 4$.

Из табл. 13 находим, что за 4 мин всего поступило 20 заявок; обслужено $x_1 = 12$ заявок.

Выполнив аналогично еще пять испытаний, получим: $x_2 = 15$, $x_3 = 14$, $x_4 = 12$, $x_5 = 13$, $x_6 = 15$.

В качестве оценки искомого математического ожидания a числа обслуженных заявок примем выборочную среднюю

$$a^* = \bar{x} = (2 \cdot 12 + 13 + 14 + 2 \cdot 15)/6 = 13{,}5.$$

Таблица 13

Номер заявки i	Случайное число r_i	$-\ln r_i$	Время между двумя последовательными заявками $\tau_i = 0{,}2(\ln r_i)$	Момент поступления заявки $T_i = T_{i-1} + \tau_i$	Момент $T_i + 0{,}5$ окончания обслуживания заявки каналом			Счетчик	
					1	2	3	обслуженных заявок	отказов
1				0	0,500			1	
2	0,10	2,30	0,460	0,460		0,960		1	
3	0,09	2,41	0,482	0,942	1,442			1	
4	0,73	0,32	0,064	1,006		1,506		1	
5	0,25	1,39	0,278	1,284			1,784	1	
6	0,33	1,11	0,222	1,506	2,006			1	
7	0,76	0,27	0,054	1,560		2,060		1	
8	0,52	0,65	0,130	1,690					1
9	0,01	4,60	0,920	2,610	3,110			1	
10	0,35	1,05	0,210	2,820		3,320		1	
11	0,86	0,15	0,030	2,850			3,350	1	
12	0,34	1,08	0,216	3,066					1
13	0,67	0,40	0,080	3,146	3,646			1	
14	0,35	1,05	0,210	3,356		3,856		1	
15	0,48	0,73	0,146	3,502			4,002		1
16	0,76	0,27	0,054	3,556					1
17	0,80	0,22	0,044	3,600					1
18	0,95	0,05	0,010	3,610					1
19	0,90	0,10	0,020	3,630					1
20	0,91	0,09	0,018	3,648	4,148				1
21	0,17	1,77	0,354	4,002 (стоп)					
							Итого	$x_1 = 12$	8

3. Задания к работе

Вариант 1

Задание 1. Разыграть восемь опытов по схеме Бернулли: опыт состоит из трех независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна 0,1.

Указание: составить сначала закон распределения дискретной случайной величины X – числа появления события A в трех испытаниях. Для определенности принять случайные числа: 0,33; 0,18; 0,51; 0,62; 0,32; 0,41; 0,94; 0,15.

Задание 2. Заданы вероятности четырех событий, образующих полную группу: $p_1 = P(A_1) = 0{,}15$; $p_2 = P(A_2) = 0{,}64$; $p_3 = P(A_3) = 0{,}05$; $p_4 = P(A_4) = 0{,}16$. Разыграть 10 испытаний, в каждом из которых появляется одно из рассматриваемых событий.

Указание: принять для определенности случайные числа: 0,37; 0,54; 0,20; 0,48; 0,05; 0,64; 0,89; 0,47; 0,42; 0,96.

Задание 3. В трехканальную систему массового обслуживания с отказами поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону $f(\tau) = 4e^{-4\tau}$. Длительность обслуживания каждой заявки равна 1 мин. Найти методом Монте – Карло математическое ожидание *a* числа обслуженных заявок за время *T* = 5 мин.

Указание: провести шесть испытаний. Для определенности брать случайные числа из прил. 5 с двумя знаками после запятой, начиная с первой строки сверху.

Вариант 2

Задание 1. Разыграть пять опытов по схеме Бернулли: опыт состоит из трех независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна 0,4.

Указание: составить сначала закон распределения дискретной случайной величины X – числа появления события A в трех испытаниях. Принять для определенности случайные числа: 0,945; 0,572; 0,857; 0,367; 0,897.

Задание 2. Заданы вероятности четырех событий, образующих полную группу: $p_1 = P(A_1) = 0{,}28$; $p_2 = P(A_2) = 0{,}42$; $p_3 = P(A_3) =$ $= 0{,}12$; $p_4 = P(A_4) = 0{,}18$. Разыграть четыре испытания, в каждом из которых появляется одно из рассматриваемых событий.

Указание: принять для определенности случайные числа: 0,32; 0,17; 0,90; 0,05.

Задание 3. В одноканальную систему массового обслуживания с отказами поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону $f(\tau) = 0{,}8e^{-0{,}8\tau}$. Длительность обслуживания каждой заявки равна 3 мин. Найти методом Монте – Карло математическое ожидание *a* числа обслуженных заявок за время *T* = 30 мин.
Указание: провести шесть испытаний. Для определенности брать случайные числа из прил. 5 с двумя знаками после запятой, начиная с первой строки снизу.

Вариант 3

Задание 1. Разыграть шесть опытов по схеме Бернулли: опыт состоит из четырех испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна 0,5.
Указание: составить сначала закон распределения дискретной случайной величины X – числа появления события A в четырех испытаниях. Принять для определенности случайные числа: 0,1009; 0,7325; 0,3376; 0,5201; 0,3586; 0,3467.

Задание 2. Заданы вероятности четырех событий, образующих полную группу: $p_1 = P(A_1) = 0{,}25$; $p_2 = P(A_2) = 0{,}36$; $p_3 = P(A_3) = 0{,}19$; $p_4 = P(A_4) = 0{,}20$. Разыграть пять испытаний, в каждом из которых появляется одно из рассматриваемых событий.
Указание: Принять для определенности случайные числа: 0,69; 0,07; 0,49; 0,41; 0,38.

Задание 3. В одноканальную систему массового обслуживания с отказами поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону $f(\tau) = 0{,}5e^{-0{,}5\tau}$. Длительность обслуживания каждой заявки равна 2 мин. Найти методом Монте – Карло математическое ожидание *a* числа обслуженных заявок за время *T* = 20 мин.
Указание: провести шесть испытаний. Для определенности брать случайные числа из прил. 5 с двумя знаками после запятой, начиная с второй строки сверху.

Вариант 4

Задание 1. Разыграть семь опытов по схеме Бернулли: опыт состоит из четырех испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна 0,3.

Указание: составить сначала закон распределения дискретной случайной величины X – числа появления события A в четырех испытаниях. Принять для определенности случайные числа: 0,37; 0,54; 0,20; 0,48; 0,05; 0,64; 0,89.

Задание 2. Заданы вероятности восьми событий, образующих полную группу: $p_1 = P(A_1) = 0{,}048$; $p_2 = P(A_2) = 0{,}072$; $p_3 = P(A_3) = 0{,}192$; $p_4 = P(A_4) = 0{,}032$; $p_5 = P(A_5) = 0{,}288$; $p_6 = P(A_6) = 0{,}048$; $p_7 = P(A_7) = 0{,}128$; $p_8 = P(A_8) = 0{,}192$. Разыграть пять испытаний, в каждом из которых появляется одно из рассматриваемых событий.

Указание: Принять для определенности случайные числа: 0,541; 0,784; 0,561; 0,180; 0,993.

Задание 3. В двухканальную систему массового обслуживания с отказами поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону $f(\tau) = 0{,}6e^{-0{,}6\tau}$. Длительность обслуживания каждой заявки равна 1,5 мин. Найти методом Монте – Карло математическое ожидание *a* числа обслуженных заявок за время *T* = 15 мин.

Указание: Провести шесть испытаний. Для определенности брать случайные числа из прил. 5 с двумя знаками после запятой, начиная с второй строки снизу.

Вариант 5

Задание 1. Разыграть шесть опытов по схеме Бернулли: опыт состоит из трех испытаний, в каждом из которых вероятность появления события *A* равна 0,25.

Указание: составить сначала закон распределения дискретной случайной величины X – числа появления события A в трех испытаниях. Принять для определенности случайные числа: 0,98; 0,08; 0,62; 0,48; 0,26; 0,45.

Задание 2. Заданы вероятности четырех событий, образующих полную группу: $p_1 = P(A_1) = 0{,}37$; $p_2 = P(A_2) = 0{,}13$; $p_3 = P(A_3) = 0{,}19$; $p_4 = P(A_4) = 0{,}31$. Разыграть пять испытаний, в каждом из которых появляется одно из рассматриваемых событий.

Указание: принять для определенности случайные числа: 0,66; 0,06; 0,57; 0,47; 0,17.

Задание 3. В двухканальную систему массового обслуживания с отказами поступает пуассоновский поток заявок. Время между поступлениями двух последовательных заявок распределено по показательному закону $f(\tau) = 3e^{-3\tau}$. Длительность обслуживания каждой заявки равна 5 мин. Найти методом Монте – Карло математическое ожидание a числа обслуженных заявок за время $T = 25$ мин.

Указание: провести шесть испытаний. Для определенности брать случайные числа из прил. 5 с двумя знаками после запятой, начиная с третьей строки сверху.

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Критические точки распределения χ^2

Число степеней свободы k	Уровень значимости α					
	0,01	0,025	0,05	0,95	0,975	0,98
1	6,6	5,0	3,8	0,0039	0,00098	0,00016
2	9,2	7,4	6,0	0,103	0,051	0,020
3	11,3	9,4	7,8	0,352	0,216	0,115
4	13,3	11,1	9,5	0,711	0,484	0,297
5	15,1	12,8	11,1	1,15	0,831	0,554
6	16,8	14,4	12,6	1,64	1,24	0,872
7	18,5	16,0	14,1	2,17	1,69	1,24
8	20,1	17,5	15,5	2,73	2,18	1,65
9	21,7	19,0	16,9	3,33	2,70	2,09
10	23,2	20,5	18,3	3,94	3,25	2,56
11	24,7	21,9	19,7	4,57	3,82	3,05
12	26,2	23,3	21,0	5,23	4,40	3,57
13	27,7	24,7	22,4	5,89	5,01	4,11
14	29,1	26,1	23,7	6,57	5,63	4,66
15	30,6	27,5	25,0	7,26	6,26	5,23
16	32,0	28,8	26,3	7,96	6,91	5,81
17	33,4	30,2	27,6	8,67	7,56	6,41
18	34,8	31,5	28,9	9,39	8,23	7,01
19	36,2	32,9	30,1	10,1	8,91	7,63
20	37,6	34,2	31,4	10,9	9,59	8,26
21	38,9	35,5	32,7	11,6	10,3	8,90
22	40,3	36,8	33,9	12,3	11,0	9,54
23	41,6	38,1	35,2	13,1	11,7	10,2
24	43,0	39,4	36,4	13,8	12,4	10,9
25	44,3	40,6	37,7	14,6	13,1	11,5
26	45,6	41,9	38,9	15,4	13,8	12,2
27	47,0	43,2	40,1	16,2	14,6	12,9
28	48,3	44,5	41,3	16,9	15,3	13,6
29	49,6	45,7	42,6	17,7	16,0	14,3
30	50,9	47,0	43,8	18,5	16,8	15,0

Приложение 2

Таблица значений функции Лапласа $\Phi(z)$

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
0,00	0,0000	0,40	0,1554	0,80	0,2881	1,20	0,3849
0,01	0,0040	0,41	0,1591	0,81	0,2910	1,21	0,3869
0,02	0,0080	0,42	0,1628	0,82	0,2939	1,22	0,3883
0,03	0,0120	0,43	0,1664	0,83	0,2967	1,23	0,3907
0,04	0,0160	0,44	0,1700	0,84	0,2995	1,24	0,3925
0,05	0,0199	0,45	0,1736	0,85	0,3023	1,25	0,3944
0,06	0,0239	0,46	0,1772	0,86	0,3051	1,26	0,3962
0,07	0,0279	0,47	0,1808	0,87	0,3078	1,27	0,3980
0,08	0,0319	0,48	0,1844	0,88	0,3106	1,28	0,3997
0,09	0,0359	0,49	0,1879	0,89	0,3133	1,29	0,4015
0,10	0,0398	0,50	0,1915	0,90	0,3159	1,30	0,4032
0,11	0,0438	0,51	0,1950	0,91	0,3186	1,31	0,4049
0,12	0,0478	0,52	0,1985	0,92	0,3212	1,32	0,4066
0,13	0,0517	0,53	0,2019	0,93	0,3238	1,33	0,4082
0,14	0,0557	0,54	0,2054	0,94	0,3264	1,34	0,4099
0,15	0,0596	0,55	0,2088	0,95	0,3289	1,35	0,4115
0,16	0,0636	0,56	0,2123	0,96	0,3315	1,36	0,4131
0,17	0,0675	0,57	0,2157	0,97	0,3340	1,37	0,4147
0,18	0,0714	0,58	0,2190	0,98	0,3365	1,38	0,4162
0,19	0,0753	0,59	0,2224	0,99	0,3389	1,39	0,4177
0,20	0,0793	0,60	0,2257	1,00	0,3413	1,40	0,4192
0,21	0,0832	0,61	0,2291	1,01	0,3438	1,41	0,4207
0,22	0,0871	0,62	0,2324	1,02	0,3461	1,42	0,4222
0,23	0,0910	0,63	0,2357	1,03	0,3485	1,43	0,4236
0,24	0,0948	0,64	0,2389	1,04	0,3508	1,44	0,4251
0,25	0,0987	0,65	0,2422	1,05	0,3531	1,45	0,4265
0,26	0,1026	0,66	0,2454	1,06	0,3554	1,46	0,4279
0,27	0,1064	0,67	0,2486	1,07	0,3577	1,47	0,4292
0,28	0,1103	0,68	0,2517	1,08	0,3599	1,48	0,4306
0,29	0,1141	0,69	0,2549	1,09	0,3621	1,49	0,4319
0,30	0,1179	0,70	0,2580	1,10	0,3643	1,50	0,4332
0,31	0,1217	0,71	0,2611	1,11	0,3665	1,51	0,4345
0,32	0,1255	0,72	0,2642	1,12	0,3686	1,52	0,4357
0,33	0,1293	0,73	0,2673	1,13	0,3708	1,53	0,4370
0,34	0,1331	0,74	0,2703	1,14	0,3729	1,54	0,4382
0,35	0,1368	0,75	0,2734	1,15	0,3749	1,55	0,4394
0,36	0,1406	0,76	0,2764	1,16	0,3770	1,56	0,4406
0,37	0,1443	0,77	0,2794	1,17	0,3790	1,57	0,4418
0,38	0,1480	0,78	0,2823	1,18	0,3810	1,58	0,4429
0,39	0,1517	0,79	0,2852	1,19	0,3830	1,59	0,4441

Окончание прил. 2

z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$	z	$\Phi(z)$
1,60	0,4452	2,00	0,4772	2,80	0,4974
1,61	0,4463	2,02	0,4783	2,82	0,4976
1,62	0,4474	2,04	0,4793	2,84	0,4977
1,63	0,4484	2,06	0,4803	2,86	0,4979
1,64	0,4495	2,08	0,4812	2,88	0,4980
1,65	0,4505	2,10	0,4821	2,90	0,4981
1,66	0,4515	2,12	0,4830	2,92	0,4982
1,67	0,4525	2,14	0,4838	2,94	0,4984
1,68	0,4535	2,16	0,4846	2,96	0,4985
1,69	0,4545	2,18	0,4854	2,98	0,4986
1,70	0,4554	2,20	0,4861	3,00	0,49865
1,71	0,4564	2,22	0,4868	3,20	0,49931
1,72	0,4573	2,24	0,4875	3,40	0,49966
1,73	0,4582	2,26	0,4881	3,60	0,499841
1,74	0,4591	2,28	0,4887	3,80	0,499928
1,75	0,4599	2,30	0,4893	4,00	0,499968
1,76	0,4608	2,32	0,4898	4,50	0,499997
1,77	0,4616	2,34	0,4904	5,00	0,499999
1,78	0,4625	2,36	0,4909		
1,79	0,4633	2,38	0,4913		
1,80	0,4641	2,40	0,4918		
1,81	0,4649	2,42	0,4922		
1,82	0,4656	2,44	0,4927		
1,83	0,4664	2,46	0,4931		
1,84	0,4671	2,48	0,4934		
1,85	0,4678	2,50	0,4938		
1,86	0,4686	2,52	0,4941		
1,87	0,4693	2,54	0,4945		
1,88	0,4699	2,56	0,4948		
1,89	0,4706	2,58	0,4951		
1,90	0,4713	2,60	0,4953		
1,91	0,4719	2,62	0,4956		
1,92	0,4726	2,64	0,4959		
1,93	0,4732	2,66	0,4961		
1,94	0,4738	2,68	0,4963		
1,95	0,4744	2,70	0,4965		
1,96	0,4750	2,72	0,4967		
1,97	0,4756	2,74	0,4969		
1,98	0,4761	2,76	0,4971		
1,99	0,4767	2,78	0,4973		

Приложение 3

Значения гамма-функции Эйлера в зависимости от параметра α

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^{\infty} X^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

α	Γ(α)	α	Γ(α)	α	Γ(α)	α	Γ(α)
1,00	1,000	1,26	0,904	1,52	0,887	1,78	0,926
1,01	0,994	1,27	0,902	1,53	0,887	1,79	0,928
1,02	0,988	1,28	0,900	1,54	0,888	1,80	0,931
1,03	0,983	1,29	0,899	1,55	0,888	1,81	0,934
1,04	0,978	1,30	0,897	1,56	0,889	1,82	0,936
1,05	0,973	1,31	0,896	1,57	0,890	1,83	0,939
1,06	0,968	1,32	0,894	1,58	0,891	1,84	0,942
1,07	0,964	1,33	0,893	1,59	0,892	1,85	0,945
1,08	0,959	1,34	0,892	1,60	0,893	1,86	0,948
1,09	0,955	1,35	0,891	1,61	0,894	1,87	0,951
1,10	0,951	1,36	0,890	1,62	0,895	1,88	0,955
1,11	0,947	1,37	0,889	1,63	0,897	1,89	0,958
1,12	0,943	1,38	0,888	1,64	0,898	1,90	0,961
1,13	0,939	1,39	0,887	1,65	0,900	1,91	0,965
1,14	0,936	1,40	0,887	1,66	0,901	1,92	0,968
1,15	0,933	1,41	0,886	1,67	0,903	1,93	0,972
1,16	0,929	1,42	0,886	1,68	0,905	1,94	0,976
1,17	0,926	1,43	0,886	1,69	0,906	1,95	0,979
1,18	0,923	1,44	0,885	1,70	0,908	1,96	0,983
1,19	0,920	1,45	0,885	1,71	0,910	1,97	0,987
1,20	0,918	1,46	0,885	1,72	0,912	1,98	0,991
1,21	0,915	1,47	0,885	1,73	0,914	1,99	0,995
1,22	0,913	1,48	0,885	1,74	0,916	2,00	1,00
1,23	0,910	1,49	0,885	1,75	0,919		
1,24	0,908	1,50	0,886	1,76	0,921		
1,25	0,906	1,51	0,886	1,77	0,923		

Приложение 4

Зависимость между коэффициентом вариации
и параметром формы закона Вейбулла
$$n = \psi(\nu) = \psi[\sigma(t)/M(t)]$$

$V = \sigma(t)/M(t)$	n	$V = \sigma(t)/M(t)$	n
15,83	0,2	0,640	1,6
5,29	0,3	0,605	1,7
3,14	0,4	0,575	1,8
2,24	0,5	0,547	1,9
1,84	0,6	0,523	2,0
1,46	0,7	0,498	2,1
1,26	0,8	0,480	2,2
1,11	0,9	0,461	2,3
1,00	1,0	0,444	2,4
0,910	1,1	0,428	2,5
0,837	1,2	0,365	3,0
0,775	1,3	0,315	3,5
0,723	1,4	0,281	4,0
0,678	1,5		

Приложение 5

Равномерно распределенные случайные числа

10 09 73 25 33	76 52 01 35 86	34 67 35 48 76	80 95 90 91 17
37 54 20 48 05	64 89 47 42 96	24 80 52 40 37	20 63 61 04 02
08 42 26 89 53	19 64 50 93 03	23 20 90 25 60	15 95 33 47 64
99 01 90 25 29	09 37 67 07 15	38 31 13 11 65	88 67 67 43 97
12 80 79 99 70	80 15 73 61 47	64 03 23 66 53	98 95 11 68 77
66 06 57 47 17	34 07 27 68 50	36 69 73 61 70	65 81 33 98 85
31 06 01 08 05	45 57 18 24 06	35 30 34 26 06	86 79 90 74 39
85 26 97 76 02	02 05 16 56 92	68 66 57 48 18	73 05 38 52 47
63 57 33 21 35	05 32 54 70 48	90 55 35 75 48	28 46 83 87 09
73 79 64 57 53	03 52 96 47 78	35 80 83 42 82	60 93 52 03 44
98 52 01 77 67	14 90 56 86 07	22 10 94 05 58	60 97 09 34 33
11 80 50 54 31	39 80 82 77 32	50 72 56 82 48	29 40 52 42 01
83 45 29 96 34	06 28 89 80 83	13 74 67 06 78	18 47 54 06 10
88 68 54 02 08	86 50 75 84 01	36 76 66 79 51	90 36 47 64 93
99 59 46 73 48	87 51 76 49 69	91 82 60 89 28	93 78 56 13 68

65 48 11 76 74	17 46 85 09 50	58 04 77 69 74	73 03 95 71 86
80 12 43 56 35	17 72 70 80 15	45 31 82 23 74	21 11 57 82 53
74 35 09 98 17	77 40 27 72 14	43 23 60 02 10	43 52 16 42 37
69 91 62 68 03	66 25 22 91 48	36 93 68 72 03	76 62 11 39 90
09 89 32 05 05	14 22 56 85 14	46 42 75 67 88	96 29 77 88 22
91 49 91 45 23	68 47 92 76 86	46 16 28 35 54	94 75 08 99 23
80 33 69 45 98	26 94 03 68 58	70 29 73 41 35	53 14 03 33 40
44 10 48 19 49	85 15 74 79 54	32 97 72 65 75	57 60 04 08 81
12 55 07 37 42	11 10 03 20 40	12 86 07 46 97	96 64 48 94 39
63 60 64 93 29	16 50 53 44 84	40 21 95 25 63	43 65 17 70 82
61 19 69 04 46	26 45 74 77 74	51 92 43 37 29	65 39 45 95 93
15 47 44 52 66	95 27 07 99 53	59 36 78 38 48	82 39 61 01 18
94 55 72 85 73	67 89 75 43 87	54 62 24 44 31	91 19 04 25 92
42 48 11 62 13	97 34 40 87 21	16 86 84 87 67	03 07 11 20 59
23 52 37 83 17	73 20 88 98 37	68 93 59 14 16	26 25 22 96 63
04 49 35 24 94	75 24 63 38 24	45 86 25 10 25	61 96 27 93 36
08 54 99 76 54	64 05 18 81 59	96 11 96 38 96	54 69 28 23 91
35 96 31 53 07	26 89 80 93 54	33 35 13 54 62	77 97 45 02 24
59 80 80 83 91	45 42 72 68 42	83 60 94 97 03	13 02 12 48 92
46 05 88 52 36	01 39 09 22 26	77 28 14 40 77	93 91 08 36 47
32 17 90 05 97	87 37 92 52 41	05 56 70 70 07	86 74 31 71 57
69 23 46 14 06	20 11 74 52 04	15 95 66 08 30	18 74 39 24 23
19 56 54 14 30	01 75 87 53 79	40 41 92 15 85	66 67 43 68 06
45 15 51 49 38	19 47 60 72 46	43 66 79 45 43	59 04 79 09 33
94 86 43 19 94	36 16 81 08 51	34 38 88 15 53	01 54 03 54 56
98 08 62 48 26	45 24 02 84 04	44 99 90 88 96	39 09 47 34 07
33 18 51 62 32	41 94 15 09 49	89 43 54 85 81	88 69 54 19 94
80 95 10 04 06	96 38 27 07 74	20 15 12 33 87	25 01 62 52 98
79 75 24 91 40	71 96 12 82 96	69 86 10 25 91	74 85 22 05 39
18 63 33 25 37	98 14 50 65 71	31 01 02 46 74	05 45 56 14 27
74 02 94 39 02	77 55 73 22 70	97 79 01 71 19	52 52 75 80 21
54 17 84 56 11	80 99 33 71 43	05 33 51 29 69	56 12 71 92 55
11 66 44 98 83	52 07 98 48 27	59 38 17 15 39	09 97 33 34 40
43 32 47 79 28	31 24 96 47 10	02 29 53 68 70	32 30 75 75 46
69 07 49 41 38	87 63 79 19 76	35 58 40 44 01	10 51 82 16 15
09 18 82 05 97	32 82 53 95 27	04 22 08 63 04	83 38 98 73 74
90 04 58 54 97	51 98 15 06 54	94 93 88 19 97	91 87 07 61 50
73 18 95 02 07	47 67 72 62 69	62 29 06 44 64	27 12 46 70 18
75 76 87 64 90	20 97 18 17 49	90 42 91 22 72	95 37 50 58 71
54 01 64 40 56	66 28 13 10 03	20 68 22 73 98	20 71 45 32 95

РЕКОМЕНДАТЕЛЬНЫЙ БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

1. Коновалов, С. И. Моделирование производственных процессов автомобильного транспорта : учеб. пособие / С. И. Коновалов, С. А. Максимов, В. В. Савин ; Владим. гос. ун-т. – Владимир, 2006. – 244 с. – ISBN 5-89368-668-3.

2. Гмурман, В. Е. Теория вероятностей и математическая статистика : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 12-е изд., стер. – М. : Высш. образование, 2008. – 479 с. – ISBN 978-5-9692-0192-7.

3. Гмурман, В. Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике : учеб. пособие / В. Е. Гмурман. – 11-е изд., стер. – М. : Высш. образование, 2008. – 404 с. – ISBN 978-5-9692-0194-1.

4. Вентцель, Е. С. Теория случайных процессов и ее инженерные приложения : учеб. пособие для втузов / Е. С. Вентцель, Л. А. Овчаров. – 3-е изд., перераб. и доп. – М. : Академия, 2003. – 428 с. – ISBN 5-7695-1053-6.

5. Зарубин, В. С. Математическое моделирование в технике : учеб. для втузов / В. С. Зарубин ; под ред. В. С. Зарубина, А. П. Крищенко ; Моск. гос. техн. ун-т им. Н. Э. Баумана. – М., 2003. – 495 с. – ISBN 5-7038-1270-4.

ОГЛАВЛЕНИЕ

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ
ПРОЦЕССОВ

Методические указания к лабораторным работам

Составитель
БАЖЕНОВ Михаил Юрьевич

Ответственный за выпуск – зав. кафедрой доцент А. Г. Кириллов

Подписано в печать 15.02.12.
Формат 60x84/16. Усл. печ. л. 5,81. Тираж 100 экз.
Заказ
Издательство
Владимирского государственного университета
имени Александра Григорьевича и Николая Григорьевича Столетовых.
600000, Владимир, ул. Горького, 87.